FİKRƏT GÜLƏLİ OĞLU FEYZİYEV

DİSKRET RİYAZİYYATIN BƏZİ FƏSİLLƏRİ

(Dərs vəsaiti)

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi tərəfindən (27 iyun 2008-ci il tarixli 833 №-li əmr) dərs vəsaiti kimi təsdiq edilmişdir.

BAKI - 2008

UDK 519.7

Elmi redaktor: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. K.B.Mənsimov

Rəy verənlər:

1. AMEA-nın Kibernetika İnstitutunun «Diskret optimallaşdırma modelləri və üsulları» laboratoriyasının müdiri, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru K.Ş.Məmmədov.

2. BDU-nun «Riyazi kibernetika» kafedrasının dosenti, fizika-riyaziyyat elmləri namizədi H.V.Şimiyev.

F.G.Feyziyev. Diskret riyaziyyatın bəzi fəsilləri. Dərs vəsaiti. Bakı, "Təhsil" NPM, 2008, 242 s.

Dərs vəsaiti müasir riyaziyyatın bir istiqaməti olan diskret riyaziyyatın bəzi bölmələrini əhatə edir. Bu bölmələr riyazi kibernetikanın, nəzəri informatikanın əsasını təşkil edən bölmələrdəndir.

Dərs vəsaiti universitetlərin riyaziyyat, tətbiqi riyaziyyat, informatika, iqtisadi kibernetika ixtisasları üzrə bakalavr pilləsi üçün nəzərdə tutulmuşdur. Ondan texniki universitetlərin hesablama texnikası və informatika, avtomatika və idarəetmə, avtomatlaşdırılmış idarəetmə və layhələndirmə sistemləri və s. ixtisasları üzrə bakalavr və magistratura pilləsində təhsil alanlar, mühəndislər, tətbiqi riyaziyyat və kibernetika sahəsində çalışan aspirantlar, elmi işçilər və s. istifadə edə bilərlər.

$\frac{F-0033187}{700122}-2008$, qrifli nəşr

MÜNDƏRİCAT

GİRİŞ

Diskret riyaziyyat qədim dövrlərdə Babilistanda, Misirdə, Çində, Hindistanda, Yunanıstanda, ərəb xilafəti dövründə orta və yaxın şərq dövlətlərində, intibat dövründən sonra Avropa dövlətlərində və i.a. inkişaf etdirilərək indiki müasir səviyyəyə çatmış riyaziyyat elminin bir istiqamətidir. Diskret riyaziyyat diskret xarakterə malik riyazi obyektlərin kəmiyyət xarakteristikalarını öyrənən elmdir. Diskretlik anlayışı kəsilməzlik anlayışı ilə ziddiyyət təşkil edən bir anlayışdır. Ümumiyyətlə diskret sözü latın sözü olan «diskretus» sözündən götürülmüşdür və mənası kəsilən, fasiləli, nəzərə çarpacaq dərəcədə ayrılmaqlıq mənasını verir. Məsələn, diskret obyekt dedikdə bir-birindən ayrılan hissələrdən ibarət olan bir obyekt başa düşülür. Tam ədədlər sistemi həqiqi ədədlər sisteminə nəzərən diskretdir. Diskret sistem dedikdə elə sistem başa düşülür ki, bu sistemdə bütün proseslər, yəni həm daxili, həm giriş və həm də çıxış prosesləri ya sonlu sayda, ya da ki, natural ədədlər çoxluğu ilə eyni gücə malik çoxluqdan (hesabi çoxluq) qiymətlər alır. Diskret funksiya dedikdə həm təyin oblastı və həm də qiymətlər oblastı sonlu çoxluqlar ya da ki, hesabi çoxluqlar olan funksiya başa düşülür. Diskret fəza dedikdə isə bütün nöqtələri izoləedilmiş fəza başa düşülür və i.a.

Diskret riyaziyyata müasir riyaziyyatın ədədlər nəzəriyyəsinin, cəbrin bir sıra bölmələri, riyazi məntiq və XX əsrin ortalarından sonra yaranan bəzi nəzəriyyələr (məsələn, funksional sistemlər nəzəriyyəsi, qraflar və şəbəkələr nəzəriyyəsi, kodlaşdırma nəzəriyyəsi, kriptologiya nəzəriyyəsi, kombinator analiz, tam qiymətli proqramlaşdırma və s.) aiddir [8].

Diskret riyaziyyatın ən əhəmiyyətli bölmələrindən biri riyazi məntiqdir. Bu elmin əsasını XVII əsrdə alman riyaziyyatçısı və filosofu Q.Leybnis qoymuşdur. O, bu gələcək elmi əqli nəticələr hesabi və ya riyazi məntiq adlandırmışdır. İrland riyaziyyatçısı və məntiqçisi Con Bul XIX əsrdə bu elmi məntiqin riyazi analizi adlandırmışdır. Bulun işlərinin davamçıları və sistemləşdiriciləri olan riyaziyyatçısı E.Şreder və rus riyaziyyatçısı P.S.Poretski «riyazi məntiqin» əsas başlanğıcları haqqında tədqiqat aparmışlar. XIX əsrin 70-ci illərində olduqca tez-tez «məntiq cəbri» termini, bəzən də bu terminə C.Bulun soyadının əlavə edilməsi nəticəində alınan termin rast gəlinirdi – «Bul məntiq cəbri» (Pirs, 1870), «Bulun məntiq cəbri» (Liard, 1877), «Məntiq cəbri» (Makferleyn, 1880). 1880-cı ildə ingilis məntiqçisi «Simvolik məntiq», 1891-ci ildə isə italyan riyaziyyatçısı Peano «Riyaziyyatın məntiqi» terminlərini istifadə etmişlər. Leybnis tərəfindən işlədilən «riyazi məntiq» terminini 1904-cü ildə keçirilən beynəlxalq fəlsəfə konqresində bir sıra filosoflar «loqistika» kimi adlandırılmasını təklif etmişdilər. İngilis filosofu və məntiqçisi B.Rassel 1906-cı ildə «propozisiya hesabi» terminini daxil etmişdir. Məşhur alman riyaziyyatçısı D.Hilbert və V.Akkerman bu elm sahəsinə aid kitablarını (1928-ci il) «Nəzəri məntiqin əsasları» adlandırmışlar. Sonralar həm «riyazi məntiq», həm «simvolik məntiq» və həm də «loqistika» terminləri paralel olaraq istifadə olunmuşdur və i.a. Riyazi məntiq mülahizələrin analizi üsulları ilə məşğul olan elmdir. Mülahizə dedikdə bu və ya digər əşya, hadisə və s. haqqında fikir (cümlə) nəzərdə tutulur. Mülahizə kimi hər hansı bir münasibət də istifadə oluna bilər. Riyazi məntiqdə ilk növbədə mülahizələrin məzmununa deyil onların formasına baxılır, yəni onların doğruluğunun bu və ya digər qiymətləndirilməsinə (doğru olmasına, yalan olmasına, mümkünlüyünə, zəruriliyinə, ehtimallığına və s.) baxılır. Mülahizələrə nümunə olaraq aşağıdakıları göstərmək olar: «Anar və Azər qardaşdır», «2 ədədinin kvadratı 4 ədədinə bərabərdir», «Bir azdan yağış yağacaq», «$ax+b=2$» və s.

Riyazi məntiq üzrə görkəmli alim S.K.Klininin fikrincə riyazi məntiq məntiqin riyazi üsullar vasitəsilə inkişaf etdirilməsi elmidir. P.S.Poretskinin fikrincə riyazi məntiq öz predmetinə görə məntiq, üsullarına görə isə riyaziyyatdır.

Mülahizələrin formallaşdırılmasına ilk dəfə antik yunan filosofu və riyaziyyatçısı Aristotel tərəfindən başlanmışdır və, beləliklə, formal məntiq adlandırılan elm yaranmışdır. Məntiqi əməliyyatların riyaziləşdirilməsi ideyasını ispan filosofu Raymund

Lulliy irəli sürmüşdür (XIII-XIV əsr). Bu ideya sonralar bir sıra Avropa alimlərini cəlb etmişdir.

Aristotel məntiqi müasir səviyyəyə ingilis riyaziyyatçısı Con Bulun yazdığı «Fikirlərin qanunu» əsərində çatmışdır. Mülahizələr məntiqinin təşəkkül tapmasında XIX əsrdə yaşamış Kazan Universitetinin professoru P.S.Poretski, qərbi Avropa alimləri de-Morqan, Freqe, Pirs, Şreder və başqalarının böyük xidmətləri olmuşdur.

1910-cu ildə rus fiziki R.Erenfest telefon əlaqələrində keçid zəncirlərinin təsviri üçün mülahizələr məntiqinin tətbiqinin mümkünlüyünü göstərmişdir. 1938-1940-ci illərdə demək olar ki, eyni vaxtda sovet alimi V.İ.Şestakovun, amerikan alimi K.Şennonun, yapon alimləri Nakaşimi və Xanzavanın riyazi məntiqin rəqəm texnikasında tətbiqi haqqında əsərləri çap olunmuşdur. Ümumiyyətlə, XX əsrin 50-ci illərində riyazi məntiqin intensiv inkişafı başlamışdır. Riyazi məntiqin rəqəm texnikasında tətbiqi haqqında ilk monoqrafiya 1950-ci ildə sovet alimi M.A.Qavrilov tərəfindən çap etdirilmişdir. Riyazi məntiqin inkişafında sovet alimləri İ.İ.Jeqalkinin R.S.Novikovun, A.N.Kalmoqorovun, S.V.Yablonskinin, V.A.Qorbatovun, D.A.Pospelovun, Y.İ.Yanovun, A.A.Muçnikin, Avropa və amerika alimlərindən D.Hilbertin, Çerçin, Klininin və başqalarının böyük xidmətləri olmuşdur.

XX əsrin əvvəllərində riyazi məntiqdən riyaziyyatın əsaslandırılmasında istifadə etməyə başlamışlar. Bu sahədə D.Hilbertin işləri daha çox nəzərə çarpır.

Riyazi məntiqin bir sıra bölmələri mövcuddur. Bu bölmələrə bul cəbri (ikiqiymətli məntiq), çoxqiymətli məntiq, hesabiqiymətli məntiq, kontiniumqiymətli məntiq, riyazi isbatlar nəzəriyyəsi, ehtimallı məntiq, zamanlı məntiq, deonitik məntiq, intuçionis məntiq, kombinator məntiq, konstruktiv məntiq, induktiv məntiq, modal məntiq, predikatlar hesabı və s. aiddir.

Riyazi məntiqin bir bölməsi çoxqiymətli məntiqdir. Bir sıra riyaziyyatçıların (məsələn, E.L.Postun)fikrincə çoxqiymətli məntiq məntiq hesabları (mülahizələr və predikatlar hesabı) yığımıdır, hansı ki, mülahizələrə ikidən «çox» doğruluq qiymətləri verilir. Belə qiymətlərin sayı sonlu və ya hesabi ola bilər. Bul cəbri çoxqiymətli məntiqin bir xüsusi halıdır.

İlk çoxqiymətli məntiq üçqiymətli məntiqdir və Polşa riyaziyyatçısı Y.Lukaşeviç tərəfindən 1920-ci ildə yaradılmışdır. Bu məntiqdə mülahizələrin üçüncü doğruluq qiyməti kimi «mümkündür» və ya «neytraldır» sözləri ilə ifadə olunan qiymətlər nəzərdə tutulmuşdur. Çoxqiymətli məntiqi Lukaşeviçdən asılı olmadan amerikan riyaziyyatçısı E.L.Post da qurmuşdur.

Diskret riyaziyyatın mühüm nəzəriyyələrinə məhdud determinik (avtomat) funksiyalar nəzəriyyəsi də aiddir. Bu nəzəriyyə avtomatika, hesablama texnikası və s. sahələrdə geniş tətbiq olunur.

Diskret riyaziyyatın ən mühüm nəzəriyyələrdən biri də avtomatlar nəzəriyyəsidir. Bu nəzəriyyə funksional sistemlər nəzəriyyəsinin tərkib hissələrindən biridir və müasir hesablama və rəqəm texnikasının riyazi və məntiqi əsasını təşkil edir. Avtomatlar nəzəriyyəsinin köməkliyi ilə informasiya texnikası və texnologiyaları çox böyük nailiyyətlər əldə edərək müasir səviyyəyə çatmışdır.

Diskret riyaziyyatın ən əhəmiyyətli bölmələrindən biri də qraflar və şəbəkələr nəzəriyyələridir. Bu nəzəriyyələr müasir dövrdə modelləşdirmə, layihələndirmə və s. sahələrdə geniş tətbiq olunurlar.

Kodlaşdırma nəzəriyyəsi diskret riyaziyyatın ən geniş tətbiq olunan nəzəriyyələrindən biridir. Kodlaşdırma nəzəriyyəsinin köməkliyi ilə məlumatötürmə sistemlərində informasiyaların təhlükəsiz ötürülməsi, yəni baş verən təhriflərin yaxud səhvlərin tapılıb düzəldilməsi təmin olunur. Bu nəzəriyyənin öyrəndiyi kodlar vasitəsi ilə məlumatları informasiya daşıyıcılarında, kompüter yaddaşında təhlükəsiz saxlamaq və s. mümkündür.

Diskret riyaziyyatın müasir dövrdə böyük əhəmiyyətə malik bölmələrindən biri də kriptologiya nəzəriyyəsidir. Bu nəzəriyyənin adı iki yunan sözündən əmələ gəlmişdir: «cryptos» - gizli və «logos» - söz. Müasir mənada kriptologiyanın predmeti ziyankarlardan qorunmaq üçün məlumatların xüsusi qaydalarla çevrilməsindən ibarətdir. Kriptologiya iki hissədən – kriptoqrafiya və kriptoanaliz hissələrindən ibarətdir.

Dərs vəsaiti diskret riyaziyyatın yuxarıda ada çəkilən bəzi nəzəriyyələrinə həsr edilmişdir və altı fəsildən ibarətdir.

Birinci fəsildə məntiq cəbrinə baxılır. Bu fəsildə məntiq cəbri funksiyası anlayışı, məntiq cəbri funksiyalarının cədvəllərlə verilməsi, n dəyişəndən asılı məntiq cəbri funksiyaların sayı haqqında teorem, məntiq cəbrinin elementar funksiyaları, düsturları, elementar funksiyaların xassələri, ikili funksiya anlayışı, ikilik prinsipi, məntiq cəbri funksiyalarının mükəmməl dizyunktiv və konyunktiv normal formaları və Jeqalkin çoxhədliləri vasitəsilə təsvirləri, funksional tamlıq və qapalılıq anlayışları, tam sistemlərə nümunələr, əsas qapalı siniflər və onlrın xassələri, funksional tamlıq haqqında zəruri və kafi şərtlər (Post teoremi) şərh olunur. Məntiq cəbri funksiyalarının Jeqalkin çoxhədlisi vasitəsilə təsvirində naməlum əmsalların tapılması üçün rekurrent düsturlar verilir. Bu fəsildə həmçinin məntiq cəbri funksiyalarının diferensialı və törəməsi anlayışları verilir və onların xassələrinə baxılır. Makloren və Teylor düsturlarının analoqları şərh olunur.

İkinci fəsil k-qiymətli məntiqə həsr olunur. Bu fəsildə k-qiymətli məntiq funksiyalarının cədvəllərlə verilməsinə, n dəyişəndən asılı k-qiymətli məntiq funksiyalarının sayı haqqında teoremə, k- qiymətli məntiqin elementar funksiyalarına və onların xassələrinə, mükəmməl dizyunktiv və konyunktiv normal formaların analoqlarına, tam sistemlərə nümunələrə, tamlığın tanınması alqoritminin mövcudluğuna, funksional tamlıq haqqında Kuzneçov, Yablonski, Slupetski, Salomaa teoremlərinə və s. baxılır. Bu fəsildə həmçinin həm məntiq cəbrində və həm də k-qiymətli məntiqdə qapalı siniflərin bazisləri və qapalı siniflər çoxluğunun gücü haqqında Post, Yanov, Muçnik teoremləri, k-qiymətli məntiqin ikilik məntiqə gətirilməsi, k-qiymətli məntiqdə mod k əməlləri üzrə polinomlar sisteminin tamlığı haqqında teorem və s. şərh olunur.

Üçüncü fəsil qraflar və şəbəkələrə həsr olunur. Burada əvvəlcə qraflar nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarına, qrafların üçölçülü Evklid fəzasında həndəsi təsvir oluna bilməsi haqqında teoremə, qrafların müstəvi üzərində təsvir oluna bilməsi haqqında Pontryaqin-Kuratovski teoreminə, qraflar sayının qiymətləndirilməsinə baxılır.

Sonra isə şəbəkələr nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarına, onların həndəsi təsvirlərinə, şəbəkələrin bir növü olan ağacların induktiv təyininə, şəbəkələr sayının qiymətləndirilməsinə baxılır.

Determinik (avtomat) funksiyalar, onların ağaclar vasitəsilə verilməsi, məhdud determinik funksiyalar, onların Mur diaqramları və kanonik tənliklərlə verilməsi, onlar üzərində superpozisiya və əks əlaqə əməllərinin təyini və bu əməllərə görə məhdud determinik funksiyalar sinfinin qapalılığı dördüncü fəsildə şərh olunur.

Beşinci fəsil avtomatlar nəzəriyyəsinə həsr olunur. Burada sonlu avtomatlar diskret modellər kimi şərh olunur, onların xarakterik xüsusiyyətlərinə və onlara müxtəlif yanaşmalara baxılır. Bu fəsildə həmçinin sonlu avtomatların verilmə üsulları, onların müxtəlif növləri və onlarla bağlı məsələlər haqqında qısa məlumatlar şərh olunur.

Sonuncu fəsil kodlaşdırma nəzəriyyəsinə həsr olunur. Burada kodlaşdırma nəzəriyyəsinin əsas problemləri, əlifba və müntəzəm kodlaşdırma üsulları, birqiymətli dekodlaşdırma meyarı, birqiymətli dekodlaşdırmanın tanınması alqoritmi, minimal izafilikli kodlaşdırma üsullarından Xafman, Fano və Şennon üsulları şərh olunur. Bu fəsildə həmçinin təhriflərə davamlı kodların yaradılması zərurətinə, və onların qısa inkişaf tarixinə, sadə kodlaşdırma üsullarına baxılır, xətti blok kodları, dövri kodlar və onların bir sinfi olan Bouz-Çoudxuri-Xokvinqem (BÇX) kodları qısaca şərh olunur. Bundan başqa ağacvari kodlar haqqında qısa məlumatlar verilir.

Dərs vəsaiti müəllifin Sumqayıt Dövlət Universitetinin «Riyaziyyat» fakültəsində bakalavr pilləsinin riyaziyyat ixtisası üzrə «Diskret riyaziyyat» fənnindən və Bakı Dövlət Universitetinin «Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika» fakültəsində bakalavr pilləsinin informatika ixtisası üzrə «Kodlaşdırma nəzəriyyəsi və sonlu avtomatlar» fənnindən oxuduğu mühazirələr əsasında yazılmışdır. Lakin bu vəsaitdən digər universitetlərin riyaziyyat, tətbiqi riyaziyyat, informatika, iqtisadi kibernetika ixtisası üzrə bakalavr pilləsində təhsil alanlar və başqaları istifadə edə bilərlər.

Dərs vəsaitində hər bir şərh olunan məlumatlar, üsullar xüsusi nümunələrlə müşayiət olunur. Hesab edirəm ki, bu da dərs vəsaitində baxılan məsələlərin daha yaxşı başa düşülməsinə və mənimsənilməsinə kömək edəcək.

Sonda dərs vəsaitinin elmi redaktoru, prof. K.B.Mənsimova, rəyçiləri f-r.e.d. K.Ş.Məmmədova və dosent H.V.Şimiyeva, vəsaitin yazılması və elektron variantının hazırlanmasında böyük köməklik göstərmiş Sumqayıt Dövlət Universitetinin «Diferensial tənliklər və riyazi kibernetika» kafedrasının əməkdaşlarına və «İnformasiya hesablama mərkəzinin» mühəndis-proqramçısı A.B.Adilovaya öz təşəkkürümü bildirirəm.

F.-.r.e.d. F.G.Feyziyev

FƏSİL 1. MƏNTİQ CƏBRİ FUNKSİYALARI

§1. Məntiq cəbri funksiyalarının təyini

Tutaq ki, $\mathsf{U} = \{x, y, z, ...\}$ dəyişənlərin ilkin əlifbasıdır. U əlifbasının simvolları sonlu sayda da ola bilər. E^2 ilə $\{0,1\}$ çoxluğunu işarə edək. $f(x, y, z, ..., t)$ funksiyasına baxaq. Tutaq ki, $x, y, z, ..., t$ arqumentləri E^2 çoxluğundan qiymətlər alır. Əgər $f(x, y, z, ..., t)$ elədirsə ki, $x, y, z, ..., t$ arqumentlərinin E^2-dən olan istənilən qiymətlərində funksiyanın aldığı qiymət də E^2-dən olur, onda $f(x, y, z, ..., t)$ funksiyasına bul funksiyası və ya məntiq cəbrinin funksiyası deyilir. Bul funksiyasının dəyişənlərinə mülahizələr də deyirlər. f funksiyasının arqumentləri üçün $x, y, z, ..., t \in \mathsf{U}$ simvolları ilə yanaşı bu simvollar indeksləri olduğu halda da istifadə oluna bilər. Beləliklə, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ yazısı onu göstərir ki, f funksiyasının arqumentləri $x_1, x_2, ..., x_n$ indeksli dəyişənləridir.

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ bul funksiyasının verilməsi üçün kifayətdir ki, arqumentlərin qiymətlərinin hər bir yığımına funksiyanın uyğun qiyməti göstərilsin. Funksiyanın belə verilməsi üçün cədvəl üsulundan istifadə oluna bilər. Aydındır ki, əgər f funksiyası n sayda arqumentə malikdirsə, onda arqumentlər küllüsünün 2^n sayda müxtəlif qiymətləri ola bilər. Cədvəl üsulu ilə arqumentlərin qiymətləri göstərilən zaman yığımların standart düzümü istifadə oluna bilər. Yığımların standart düzümü $0,1,...,2^n - 1$ ədədlərinin ikilik say sistemində n rəqəmli ikilik ədəd kimi yazılışı başa düşülür. Bul funksiyaları cədvəl üsulu ilə verildikdə iki hissədən ibarət cədvəl istifadə olunur. Solda başda arqumentlər yazılır (bu hissə n sayda sütundan ibarətdir və hər dəyişən bir sütuna uyğundur). Sağda isə başda funksiya arqumentləri göstərilməklə yazılır. Sağ və sol hissəni bir-birindən şaquli düz xətt ayırır. Cədvəlin sol tərəfində birinci, ikinci,…, 2^n-ci sətrlərdə uyğun olaraq $0,1,...,2^n-1$ ədədləri ikilik say sistemində n rəqəmli ədəd kimi yazılır. Bu ikilik ədədin hər bir rəqəmi cədvəlin başlığında uyğun sütunda yazılan dəyişənin qiyməti hesab olunur. Arqumentlərin bu qiymətlərində funksiyanın aldığı qiymətlər cədvəlin sağ hissəsində uyğun sətrlərdə yazılır (cədvəl 1).

Cədvəl 1.

x_1 x_2 ... x_{n-1} x_n	$f(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n)$
0 0 ... 0 0	$f(0,0,...,0,0)$
0 0 ... 0 1	$f(0,0,...,0,1)$
0 0 ... 1 0	$f(0,0,...,1,0)$
....	....
1 1 ... 1 1	$f(1,1,...,1,1)$

Nümunə 1. x_1 və x_2 dəyişənlərindən asılı $f(x_1,x_2)$ funksiyasının cədvəllə verilməsinə nümunə olaraq cədvəl 2-də verilən funksiyanı göstərmək olar.

Nümunə 2. x_1,x_2 və x_3 dəyişənlərindən asılı $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyasının cədvəllə verilməsinə nümunə olaraq cədvəl 3-də verilən funksiyanı göstərmək olar.

Cədvəl 2

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Cədvəl 3

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Aydındır ki, $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyası

$$E^2 \times E^2 \times ... \times E^2 \to E^2$$

inikasını təyin edir, hansı ki, $\times$-simvolu çoxluqların dekart hasili əməliyyatının işarəsidir. Bu inikas zamanı $x_1,x_2,...,x_n$ cədvəl 1-də sol tərəfdə sütunların adı kimi iştirak edir. Sütunları $y_1,y_2,...,y_n$ kimi də adlandırmaq mümkün olduğundan odur ki, həm $f(x_1,x_2,...,x_n)$ və həm də $f(y_1,y_2,...,y_n)$ eyni bir inikası təyin edir.

P_2 ilə 0 və 1 sabitləri də daxil olmaqla bütün bul funksiyaları çoxluğunu işarə edək.

$p_2(n)$ ilə P_2 çoxluğundan olan və n dəyişənindən asılı olan bütün bul funksiyaları çoxluğunun elementlərinin sayını işarə edək.

Teorem 1. n dəyişənindən asılı bul funksiyaları çoxluğunun elementləri $p_2(n) = 2^{2^n}$ saydadır.

İsbatı. İsbatda bul funksiyasının cədvəl üsulu ilə verilməsindən istifadə edək (cədvəl 1). Cədvəldə 2^n sayda sətr mövcuddur və solda $x_1,x_2,...,x_n$ dəyişənlərinin ala biləcəyi bütün yığımlar əks olunur. Beləliklə, funksiyaların sayı cədvəlin sağ hissəsində mümkün olan variantların sayından asılıdır. 2^n sayda mövqelərin ala biləcəyi qiymətlərin sayı 2^{2^n} olduğundan variantların sayı və, beləliklə, funksiyaların sayı 2^{2^n} olur. □

Qeyd edək ki, n-in qiyməti artdıqca $p_2(n)$ eksponensial artır. Məsələn, $p_2(1)=4,\ p_2(2)=16,\ p_2(3)=256,...$ Beləliklə, dəyişənlərin sayı artdıqca bul cəbrinin funksiyalarının verilməsi üçün cədvəl üsulu çox səmərəsiz olur.

n dəyişəndən asılı funksiyaların cədvəl üsulu ilə verilməsi halında səmərəliliyi artırmaq üçün cədvəli çəkməmək olar. Belə ki, cədvəl 2^n sayda sətrdən ibarətdir və sol hissədə bu sətrlərin məzmunu $0,1,2,...,2^n-1$ ədədlərinin ikilik say sistemində n rəqəmli yazılışlarıdır və bütün n dəyişənli funksiyalar üçün eynidir. Odur ki, funksiyanın bu sətrlərə uyğun qiymətlərini göstərmək kifayətdir. Məsələn, funksiyaların qiyməti aşağıdakı kimi verilə bilər:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 ... \alpha_{2^n - 1} \alpha_{2^n}) .$$

Burada α_i ədədi $(i = \overline{1,2^n})$ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyasının verilmə cədvəlində i-ci sətrdə sağ tərəfdə olan qiymətdir. Başqa sözlə desək, tutaq ki, $(i-1)$ ədədinin ikilik say sistemində n rəqəmli təsviri halında rəqəmlər $i_1, i_2, ..., i_n$-dir. Onda $x_1 = i_1, x_2 = i_2, ..., x_n = i_n$ olduqda $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \alpha_i$.

Nümunə 3. $f(x_1, x_2, x_3) = (01001110)$.

Bu o deməkdir ki,

$$f(0,0,0) = 0,\ f(0,0,1) = 1,\ f(0,1,0) = 0,\ f(0,1,1) = 0,$$
$$f(1,0,0) = 1,\ f(1,0,1) = 1,\ f(1,1,0) = 1,\ f(1,1,1) = 0 .$$

n sayda dəyişəndən ibarət funksiyalar çoxluğuna nisbətən az sayda dəyişənlərdən ibarət olan funksiyalar da daxil olur. Belə az sayda dəyişəndən asılı funksiyalar n sayda dəyişəndən asılı funksiyalar üçün olan cədvəldə verildikdə cədvəldə lazım olmayan sətrlər və sütunlar yaranır.

Tərif 1. Əgər P_2-dən olan $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ funksiyasının $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ dəyişənləri üçün uyğun olaraq elə $\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n$ qiymətləri mövcuddursa ki, $f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) \neq f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$ olur, onda x_i dəyişəni $f(x_1, ..., x_n)$ funksiyasının əsaslı dəyişəni adlanır. Əgər x_i dəyişəni əsaslı dəyişən deyildirsə, onda o, fiktiv dəyişən adlanır.

Tutaq ki, $f(x_1, ..., x_n)$ funksiyasında x_i dəyişəni fiktiv dəyişəndir. Bu funksiya üçün olan cədvələ baxaq. Cədvəldə $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$ şəklində olan bütün sətrləri pozaq. Həmçinin x_i arqumentinə uyğun sütunu da pozaq. Alınan cədvəl müəyyən bir $g(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ funksiyasını təyin edir. Belə olduqda deyirlər ki, $g(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)$ funksiyası $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasından x_i fiktiv dəyişənini atmaqla alınır. $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasına isə $g(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)$ funksiyasına fiktiv x_i dəyişəni əlavə etmək yolu ilə alınan funksiya deyilir.

Nümunə 4. Cədvəl 2-də verilən $f(x_1,x_2)$ funksiyasına baxaq. Bu funksiyada x_2 dəyişəni fiktiv dəyişəndir. Doğrudan da istənilən $\alpha \in E^2$ ədədi üçün

$$f(\alpha,0) = f(\alpha,1)$$

olur.

Nümunə 5. Cədvəl 3-də verilən $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyasına baxaq. x_1 dəyişəninin fiktiv dəyişən olub olmadığını yoxlayaq. Cədvəldən göründüyü kimi x_2 və x_3 dəyişənləri üçün elə α_2 və α_3 qiymətləri var ki, $f(0,\alpha_2,\alpha_3) \neq f(1,\alpha_2,\alpha_3)$ olur. Məsələn, $\alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$ olduqda $f(0,\alpha_2,\alpha_3) = 0$, $f(1,\alpha_2,\alpha_3) = 1$ olur. x_2 dəyişəninin fiktiv dəyişən olub olmadığını yoxlayaq. Cədvəldən göründüyü kimi x_1 və x_3 dəyişənləri üçün elə α_1 və α_3 qiymətləri var ki, $f(\alpha_1,0,\alpha_3) \neq f(\alpha_1,1,\alpha_3)$ ödənir. Məsələn, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 1$ olduqda $f(\alpha_1,0,\alpha_3) = 0$, $f(\alpha_1,1,\alpha_3) = 1$ olur. x_3 dəyişəninin fiktiv dəyişən olub olmadığını yoxlayaq. Cədvəldən göründüyü kimi x_1 və x_2 dəyişənləri üçün elə α_1 və α_2 qiymətləri mövcuddur ki, $f(\alpha_1,\alpha_2,0) \neq f(\alpha_1,\alpha_2,1)$. Doğrudan da, $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ olduqda $f(\alpha_1,\alpha_2,0) = 1$, $f(\alpha_1,\alpha_2,1) = 0$ olur.

Nümunə 6. Tutaq ki, $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyası üçün $f(1,1,0) = 0$ -dır, lakin x_1,x_2,x_3-ün qalan qiymətləri yığımında $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyasının qiyməti cədvəl 3 əsasında verilir. Aydındır ki, bu funksiyada x_1 dəyişəni fiktiv dəyişəndir. Doğrudan da x_2 və x_3 dəyişənləri üçün istənilən α_2 və α_3 qiymətlərində $f(0,\alpha_2,\alpha_3) = f(1,\alpha_2,\alpha_3)$ olur.

Tərif 2. Əgər $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ və $f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaları bir-birindən fiktiv dəyişən əlavə etməklə alınırsa, onda bu funksiyalara bərabər funksiyalar deyilir.

Bərabər funksiyaları işarə etmək üçün eyni bir funksional simvoldan istifadə olunur. Məsələn, f_1 və f_2 funksiyaları bərabər olarsa, onlar $f_1 \equiv f_2$ kimi yazılır.

Bul funksiyaları arasında əsaslı dəyişənə malik olmayan iki funksiya mövcuddur. Bunlar eyniliklə 0 və 1 funksiyalarıdır.

§2. Məntiq cəbrinin elementar funksiyaları

Məntiq cəbrinin bir sıra sadə funksiyaları riyazi məntiqdə və kibernetikada (hesablama texnikasında və s.) tez-tez istifadə olunur və onlar elementar funksiyalar adlanırlar. Bu funksiyalara aşağıdakı funksiyalar aiddir.

1) $f_1(x) = 0$ - 0 sabiti;

2) $f_2(x) = 1$ - 1 sabiti;

3) $f_3(x) = x$ - eynilik funksiyası;

4) $f_4(x) = \bar{x}$ - x-ın inkarı funksiyası;

5) $f_5(x_1, x_2) = (x_1 \& x_2)$ - x_1 və x_2-nin konyunksiyası (belə oxunur – «x_1 və x_2»). & işarəsi əvəzinə bəzən · işarəsi (ümumiyyətlə bu işarə çox vaxt yazılmır) və ya ϖ işarəsi istifadə olunur. Bu funksiya çox vaxt məntiqi vurma adlanır;

6) $f_6(x_1, x_2) = (x_1 \omega x_2)$ - x_1 və x_2 - in dizyunksiyası (belə oxunur - «x_1 və ya x_2»). Bu funksiya məntiqi toplama adlanır;

7) $f_7(x_1, x_2) = (x_1 \rightarrow x_2)$ - x_1 və x_2 - in implikasiyası (belə oxunur - «x_1-dən x_2 alınır»). Bu funksiya məntiqi nəticə kimi də adlandırılır;

8) $f_8(x_1, x_2) = (x_1 \oplus x_2)$ - x_1 və x_2 - nin mod2 üzrə toplanması, $\oplus$ işarəsi əvəzinə çox vaxt + işarəsi yazılır;

9) $f_9(x_1, x_2) = (x_1 / x_2)$ - Şeffer funksiyası;

10) $f_{10}(x_1, x_2) = (x_1 \downarrow x_2)$ - Vebb funksiyası. Bəzən bu funksiyaya Pirs oxu da deyirlər.

11) $f_{11}(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)$ - ekvivalentlik funksiyası.

Bu funksiyaların qiymətləri cədvəl 1 və cədvəl 2-də verilir. Qeyd edək ki, $(x_1 \& x_2) = \min(x_1, x_2)$, $(x_1 \omega x_2) = \max(x_1, x_2)$.

Cədvəl 1.

x	0	1	x	$\bar{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Cədvəl 2.

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \to x_2$	$x_1 \oplus x_2$	x_1 / x_2	$x_1 \downarrow x_2$	$x_1 \sim x_2$
0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	1

§3. Düsturlar. Elementar bul funksiyalarının xassələri və tətbiqləri

1.Düsturların təyini. Düsturlar elementar funksiyalar vasitəsilə qurulurlar. Ümumi halda düsturların təyini üçün induktiv təyindən istifadə olunur.

Tərif 1. Tutaq ki, R çoxluğu P_2-dən olan funksiyaların alt çoxluğudur və bu çoxluq sonlu çoxluq olmaya da bilər.

a) *İnduksiya bazisi.* R-dən olan hər bir $f(x_1, \ldots, x_m)$ funksiyası R üzərində düstur adlanır.

b) *İnduksiya keçidi.* Tutaq ki, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ R çoxluğundan olan funksiyadır, $A_1, A_2, \ldots, A_m$-lər isə R üzərində olan düstur və ya dəyişənlər simvolundan ibarət olan ifadələrdir. Onda $f(A_1, A_2,..., A_m)$ R üzərində düstur adlanır.

Nümunə 1. Tutaq ki, R çoxluğu elementar funksiyalar çoxluğudur. Bu halda aşağıdakı ifadələr R üzərində düsturlardır:

1) $\{[(x_1 x_2) + x_1] \to x_2\}$;

2) $[\bar{x}_1(\bar{x}_2 + x_3) \downarrow 1]$;

3) $\overline{\{x_1 \vee [(x_2 \to x_3)(x_3 \to \bar{x}_2)]\}} + \bar{x}_1 x_2$;

4) $[x_1 \downarrow (x_2 + x_3)] + x_1 \& \bar{x}_2$.

5) $(x \to y) \oplus ((y \to z) \oplus \overline{(z \to x)})$;

6) $\overline{(\bar{x} \vee y) \vee (x \& \bar{z})} \downarrow (x \sim y)$;

7. $(((x / y) \downarrow z) / y) \downarrow z$.

Tutaq ki, $\Sigma = \{\&\&, \vee, \oplus, \sim, \to, /, \downarrow\}$ və Ω dəyişənlər əlifbasıdır. Σ çoxluğunun elementləri birləşdiricilər yaxud əlaqələndiricilər adlanır. Σ üzərində düstura aşağıdakı kimi də tərif verilir.

Tərif 2. Σ üzərində düstur dedikdə aşağıdakı şəkildə istənilən ifadə başa düşülür.

1) Ω əlifbasından istənilən dəyişən;

2) (&U), (U & B), (U $\vee$ B), (U $\oplus$ B), (U $\sim$ B), (U $\to$ B), (U/B), (U $\downarrow$ B), hansı ki, U və B-lər Σ üzərində düsturlardır.

Qeyd 1. Çox vaxt (&U) düsturu $\overline{\text{U}}$ kimi də yazılır.

Qeyd 2. Düsturlarda xarici mötərizələr atıla da bilər.

Düsturların hansı funksiyalardan qurulduğunu göstərmək üçün düsturun adından sonra kvadrat mötərizə daxilində həmin funksiyalar yazılır:

$$\text{U}[f_1, f_2,..., f_s]$$

və bu onu göstərir ki, U düsturu $f_1, f_2,..., f_s$ funksiyaları vasitəsilə qurulur. Düsturların qurulmasında istifadə olunan dəyişənləri göstərmək üçün $\text{U}(x_1, x_2,..., x_n)$ yazısından istifadə olunur.

Tutaq ki, U R üzərində ixtiyari düsturdur. Onda bu düsturun qurulması üçün istifadə olunan düsturlara U düsturunun alt düsturları deyilir.

Tutaq ki, U R çoxluğu üzərində düsturdur, hansı ki,

$$R=\{f_1(x_1,...,x_n),...,f_s(x_1,...,x_n)\},$$

yəni $U=U[f_1,...,f_s]$ -dır. Aşağıdakı funksiyalar çoxluğuna baxaq:

$$Q=\{g_1(x_1,...,x_n),...,g_s(x_1,...,x_n)\},$$

hansı ki, g_i funksiyası f_i funksiyasının malik olduğu eyni dəyişənlərə malikdir $(i=\overline{1,s})$.

Tərif 3. $V=V[g_1,...,g_s]$ düsturuna baxaq və tutaq ki, bu düstur U düsturunda f_1-i g_1, f_2-ni $g_2,...,f_s$-i g_s ilə əvəz etməklə alınır. Onda deyilir ki, V düsturu U düsturu ilə eyni struktura (quruluşa) malikdir.

Nümunə 2. Aşağıdakı funksiyalar sisteminə və onlar üzərində düsturlara baxaq:

1) $R=\{\bar{x}_1,\ x_1\&x_2\}$, $U=[x_1\&\overline{(x_2\&x_3)}]$;

2) $Q=\{\bar{x}_1,\ (x_1\to x_2)\}$, $V=[x_1\to\overline{(x_2\to x_3)}]$.

Aydındır ki, U və V düsturları eyni struktura malikdirlər.

Beləliklə düsturlar hər hansı bir C quruluşu və nizamlanmış $\{f_1,f_2,...,f_s\}$ yığımı ilə birqiymətli təyin olunurlar. Bu zaman düstur $U=C[f_1,f_2,...,f_s]$ kimi işarə olunur.

2. Düsturlara funksiya qarşı qoyulması. İstənilən hər bir R funksiyalar çoxluğu üzərində olan istənilən $U(x_1,...,x_n)$ düsturuna P_2-dən olan bir funksiya qarşı qoyula bilər. Bu qarşı qoyma aşağıdakı kimi induktiv təyin olunur:

a) *İnduksiya bazisi.* Əgər $U(x_1,...,x_n)=f(x_1,...,x_n)$ isə, harada ki, $f(x_1,...,x_n)\in R$, onda $U(x_1,...,x_n)$ düsturuna $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasını qarşı qoyuruq.

b) *İnduksiya keçidi.* Tutaq ki, $\mathsf{U}(x_1,...,x_n)=f_0(A_1,...,A_m)$ -dir, harada ki, A_i $(i=1,...,m)$ ya R üzərində olan düstur ya da ki, hər hansı bir $x_{j(i)}$ dəyişən simvoludur. Onda induksiya fərziyyəsinə görə A_i-yə P_2-dən olan f_i funksiyası ya da ki, $f_i=x_{j(i)}$ eynilik funksiyası qarşı qoyulur. Beləliklə, $\mathsf{U}(x_1,x_2,...,x_n)$ düsturuna $f(x_1,...,x_n)=f_0(f_1,...,f_m)$ funksiyasını qarşı qoyuruq.

Əgər f funksiyası U düsturuna qarşı qoyulursa, onda deyilir ki, U düsturu f funksiyasını realizə edir.

Tərif 4. U düsturuna uyğun f funksiyasına R-dən olan funksiyaların superpozisiyası deyilir. R-dən olan funksiyalardan f funksiyasının alınmasına superpozisiya əməliyyatı deyilir.

Superpozisiya əməliyyatını aşağıdakı kimi də başa düşmək olar: Tutaq ki,

$$S=\{\varphi_1(x_1,x_2,...,x_{k_1}),\ \varphi_2(x_1,x_2,...,x_{k_2}),...,\varphi_\ell(x_1,x_2,...,x_{k_\ell})\}$$

funksiyalar sistemi verilmişdir.

Tərif 5. S sisteminin superpozisiyası aşağıdakı qaydalarla alınan istənilən f funksiyasına deyilir:

a) İstənilən $\varphi_j\in S$ funksiyasında dəyişənlərin adlarının dəyişdirilməsi;

b) İstənilən $\varphi_j\in S$ funksiyasında bəzi dəyişənlərin $\varphi_\alpha\in S$ funksiyası ilə əvəzlənməsi;

c) «a)» və «b)» bəndlərinin təkrar-təkrar yerinə yetirilməsi.

Aydındır ki, tərif 3 və tərif 4 ekvivalentdir.

3.Düsturların ekvivalentliyi. R üzərində olan düsturlara məntiq cəbrinin funksiyaları uyğun gəlir. Müxtəlif düsturlara eyni bir funksiya uyğun gələ bilər.

Tərif 6. R üzərində U və V düsturlarına uyğun olan f_{U} və f_V funksiyaları bərabər olarsa, yəni $f_{\mathsf{U}}=f_V$ olarsa, onda U və V düsturlarına ekvivalent düsturlar deyilir.

Qeyd edək ki, $U = V$ yazılışı U və V düsturlarının ekvivalent olmasını göstərir.

Nümunə 3.

1) $0 = (x \,\&\, \bar{x})$,

2) $(\bar{x}_1(x_2 + x_3)) = \overline{\{x_1 \vee [(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2)]\}}$,

3) $(x \to y) = (\bar{y} \to \bar{x})$.

Nümunə 4. Tutaq ki, $U = ((x \vee y) \vee z) \to ((x \vee y) \,\&\, (x \vee z))$ və $B = x \sim z$. Bu düsturların ekvivalent olmalarını yoxlamalı.

U və B düsturlarının qiymətlər cədvəlini quraq

Cədvəl

x	y	z	$A = x \vee y$	$C = A \vee z$	$D = x \vee z$	$E = A \,\&\, D$	$U = C \to E$	$B = x \sim z$
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Cədvəlin son iki sütununun hər bir mövqesi U və B düsturlarının x, y və z dəyişənlərinin eyni bir yığımında aldığı qiymətlərdir. Bu sütunlar üst-üstə düşmədiyi üçün U və B düsturları ekvivalent deyildir.

4. Elementar funksiyaların xassələri. Elementar funksiyaların ekvivalentliklə bağlı bir sıra xassələrinə baxaq. Əsasən $\{0,1, x,\ x_1 \& x_2,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 + x_2, \bar{x}, x_1 / x_2, x_1 \downarrow x_2, x_1 \to x_2, x_1 \sim x_2\}$ çoxluğundan olan elementar funksiyalara baxacağıq.

Aşağıdakı xassələri asanlıqla bilavasitə yoxlamaqla sübut etmək olar:

1) $(x_1 \& x_2)$, $(x_1 \vee x_2)$ və $x_1 + x_2$ funksiyaları assosiativlik xassələrinə malikdirlər, yəni

$$((x_1 \& x_2) \& x_3) = (x_1 \& (x_2 \& x_3)),$$

$$((x_1 \vee x_2) \vee x_3) = (x_1 \vee (x_2 \vee x_3)),$$

$$((x_1 + x_2) + x_3) = (x_1 + (x_2 + x_3)).$$

2. $x_1 \& x_2$, $x_1 \vee x_2$ və $x_1 + x_2$ funksiyaları kommutativlik xassələrinə malikdirlər, yəni:

$$x_1 \& x_2 = x_2 \& x_2, \quad x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1, \quad x_1 + x_2 = x_2 + x_1.$$

3. Konyunksiya və dizyunksiya üçün distributivlik qanunu doğrudur, yəni

$$((x_1 \vee x_2) \& x_3) = (x_1 \& x_3) \vee (x_2 \& x_3),$$

$$((x_1 \& x_2) \vee x_3) = (x_1 \vee x_3) \& (x_2 \vee x_3).$$

4. İnkar, konyunksiya və dizyunksiya arasında aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

a) ikiqat inkar qanunu $-\overline{\overline{x}} = x$,

b) de-Morqan qanunları:

$$\overline{(x_1 \& x_2)} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2, \quad \overline{(x_1 \vee x_2)} = \overline{x}_1 \& \overline{x}_2.$$

$$\overline{(x_1 \& \ldots \& x_n)} = \overline{x}_1 \vee \ldots \vee \overline{x}_n, \quad \overline{(x_1 \vee \ldots \vee x_n)} = \overline{x}_1 \& \ldots \& \overline{x}_n.$$

5. Konyunksiya və dizyunksiyanın aşağıdakı xassələri doğrudur:

$(x \& x) = x$, $(x \vee x) = x$ - idempotentlik xassəsi,

$(x \& \overline{x}) = 0$, $(x \vee \overline{x}) = 1$,

$(x \& 0) = 0$, $(x \vee 0) = x$,

$(x \& 1) = x$, $(x \vee 1) = 1$.

6. Konyunksiya, inkar və Şeffer funksiyası arasında aşağıdakı münasibət doğrudur:

$$x_1 / x_2 = \overline{x_1 \& x_2}.$$

7. Dizyunksiya, inkar və Vebb funksiyası arasında aşağıdakı münasibət doğrudur:

$$x_1 \downarrow x_2 = (\overline{x_1 \vee x_2}) .$$

8. Ekvivalentlik, inkar və mod2 üzrə toplama arasında aşağıdakı münasibət doğrudur:

$$(x_1 \sim x_2) = \overline{(x_1 + x_2)} .$$

9. Konyunksiya və mod 2 üzrə toplama əməli üçün distributivlik qanunu:

$$x_1 \& (x_2 \oplus x_3) = x_1 \& x_2 \oplus x_1 \& x_3 .$$

10. Konyunksiya, dizyunksiya və implikasiyanın birgə xassələri:

a) $A \vee B = (A \to B) \to B$;

b) $A \vee B = \overline{A} \to B$;

c) $A \& (A \to B) = A \& B$;

d) $A \to B = \overline{A \& \overline{B}}$;

e) $A \to B = \overline{A} \vee B$;

f) $A \to B = \overline{A} \to \overline{B}$;

g) $A \& B = \overline{A \to \overline{B}}$;

h) $A \to (B \to C) = (A \& B) \to C$.

11. İmplikasiyanın xassələri:

a) $1 \to B = B$;

b) $A \to (B \to C) = (A \to B) \to (A \to C)$.

12. İnkar və ekvivalentliyin xassələri:

$A \sim B = \overline{A} \sim \overline{B}$.

13. Dizyunksiyanın konyunksiya və mod 2 üzrə toplama ilə birgə xassəsi:

$x \vee y = x + y + xy$.

14. mod 2 üzrə toplamanın inkar konyunksiya və dizyunksiya ilə birgə xassəsi:

$$a \oplus b = (a\overline{b}) \vee (\overline{a}b) .$$

Bul funksiyalarının yazılışının sadələşdirilməsi və əməliyyatların yerinə yetirilməsi ardıcıllığının nizamlanması üçün əməliyyatların yerinə yetirilməsinin üstünlük dərəcəsi şərtləşdirilmişdir. Ən yüksək üstünlük dərəcəsinə inkar əməliyyatı malikdir. & əməliyyatı $\vee$ əməliyyatından üstündür. Əməliyyatların üstünlük dərəcəsini dəyişmək üçün mötərizələrdən istifadə olunur.

Yazıların sadələşdirilməsi üçün $\circ$ əməliyyatının (bu əməliyyat &, $\vee$ və mod2 üzrə toplama əməliyyatlarının istənilən biri ola bilər) assosiativlik xassəsinə görə $((x_1 \circ x_2) \circ x_3)$ və $(x_1 \circ (x_2 \circ x_3))$ ifadələri sadəcə olaraq $(x_1 \circ x_2 \circ x_3)$ kimi yazıla bilər.

Sadəlik üçün $(x_1 \circ x_2)$ və $\overline{(x_1 \circ x_2)}$ əvəzinə uyğun olaraq $x_1 \circ x_2$ və $\overline{x_1 \circ x_2}$ yazıla bilər. Burada $\circ$ işarəsi məntiq cəbrinin istənilən binar əməliyyatıdır. Aşağıdakı işarələr də istifadə olunur:

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n} x_i = x_1 \& x_2 \& ... \& x_n, \qquad \mathop{\vee}_{i=1}^{n} x_i = x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n,$$

$$\mathop{\oplus}_{i=1}^{n} x_i = x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_n \text{ və ya } \sum_{i=1}^{n}{}^{\oplus} x_i = x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_n .$$

Bu qısa yazılışlar $n = 1$ olduqda da istifadə oluna bilər.

Elementar bul funksiyalarının yuxarıda göstərilən xassələrindən istifadə etməklə aşağıdakı qaydaları göstərmək olar:

1. Əgər məntiqi hasildə vuruqlardan biri 0 isə, onda hasil 0-a bərabərdir;

2. Əgər ikidən az olmayan vuruğa malik məntiqi hasildə 1-ə bərabər vuruq varsa, o vuruğu silmək olar;

3. Əgər ikidən az olmayan toplanana malik məntiqi cəmdə 0-a bərabər olan toplanan varsa, bu toplananı silmək olar;

4. Əgər məntiqi cəmdə bir toplanan 1-ə bərabər olarsa, onda məntiqi cəm 1-ə bərabərdir.

Aydındır ki, U düsturunun alt düsturu U' isə və U' alt düsturunun U düsturuna hər daxil olmalarında U' əvəzinə ona ekvivalent olan V' düsturunu yazsaq, onda U düsturu ona ekvivalent olan düstura çevrilir.

Nümunə 5.

$$x_1 \vee x_1 x_2 = x_1 \cdot 1 \vee x_1 x_2 = x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_1 x_2 =$$
$$= x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 = x_1 x_2 \vee x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 =$$
$$= x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) = x_1 \cdot 1 = x_1.$$

5. Bul funksiyalarının tətbiqləri. Məntiq cəbri funksiyaları riyaziyyatın başqa sahələri ilə yanaşı həm dəqiq və həm də humanitar elm sahələrində, texnikanın müxtəlif sahələrində tətbiq olunur. Müasir hesablama və rəqəm texnikasını məntiq cəbri funksiyalarsız təsəvvür etmək çətindir.

Bul funksiyaları texnoloji sahədə keçid proseslərinin, müxtəlif elektrik dövrələrinin işinin riyazi təsvirində (modelləşdirilməsində) tətbiq olunur. Bəzi nümunələrə baxaq.

1. Elektrik dövrəsində cərəyanın keçməsinin bul funksiyaları vasitəsilə təsviri. Elektrik dövrəsində cərəyanın keçməsini 1, keçməməsini isə 0-la işarə edək. Dövrədə olan i-ci açarın vəziyyətini x_i ilə işarə edək. Əgər açar qoşulu vəziyyətdədirsə, onda $x_i = 1$, açıq vəziyyətdədirsə, onda $x_i = 0$ hesab edək.

Şəkil 1 «a)»-da ardıcıl sxem verilmişdir. k_1 və k_2 açarlardır, x_1 və x_2 uyğun olaraq bu açarların vəziyyətlərini göstərirlər. Aydındır ki, verilən ardıcıl dövrədə cərəyanın keçməsi

$$f(x_1, x_2) = x_1 \,\&\, x_2$$

funksiyası ilə təsvir olunur. Şəkil 1 «b)»-də paralel sxem verilmişdir. k_1 və k_2 açarlardır. Aydındır ki, verilən bu paralel dövrədə cərəyanın keçməsi

$$f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$$

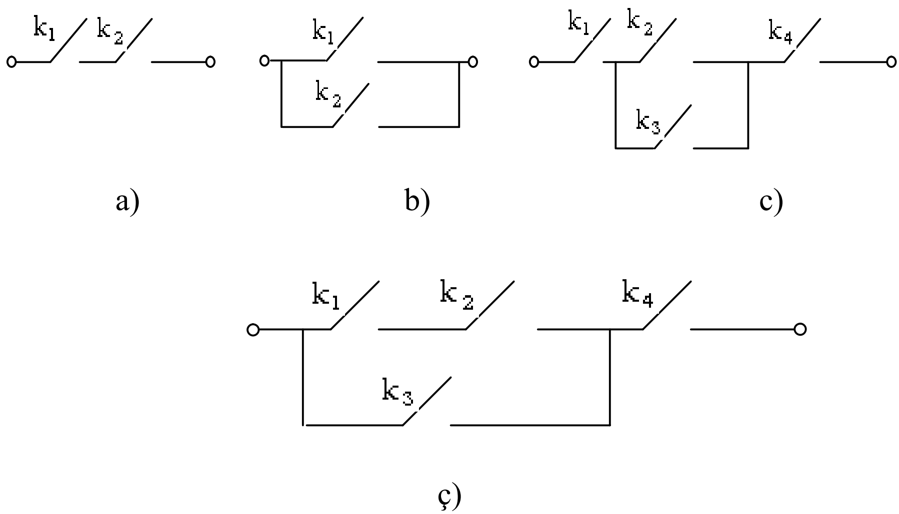
funksiyası ilə təyin olunur. Şəkil 1 «c)»-də verilən dövrəyə baxaq. Bu dövrə ardıcıl, paralel, ardıcıl dövrələr ardıcıllığından ibarətdir. Bilavasitə yoxlamaqla göstərmək olar ki, baxılan dövrədə cərəyanın keçməsini

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \,\&\, (x_2 \vee x_3) \,\&\, x_4$$

funksiyası ilə təsvir etmək olar. Şəkil 1 «ç)»-də verilən dövrədə cərəyanın keçməsini

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1 \mathbin{\&} x_2) \vee x_3) \mathbin{\&} x_4$$

funksiyası ilə təsvir etmək olar.



Şəkil 1.

2. n- rəqəmli iki ikilik ədədin toplanması. Tutaq ki, birinci toplanan a, ikinci toplanan b, onların cəmi isə c-dir və bu ədədlərin ikilik təsvirləri $a = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$, $b = b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1$, $c = c_{n+1} c_n c_{n-1} \dots c_2 c_1$ kimidir. Burada $a_i, b_i, c_i \in E^2$. a və b ədədlərinin toplanması nəticəsində alınan c ədədi aşağıdakı «sütun» alqoritmi vasitəsilə alınır:

$$
\begin{array}{r}
 a_{n+1}\, a_n \;\; a_{n-1} \; \dots \; a_2 a_1 \\
+ \quad b_{n+1}\, b_n \;\; b_{n-1} \; \dots \; b_2 b_1 \\
\hline
c_{n+1} c_n \;\; c_{n-1} \; \dots \; c_2 c_1
\end{array}
$$

Burada $a_{n+1}=0,\ b_{n+1}=0$. Aydındır ki, c-nin i-ci rəqəmi a və b ədədlərinin i-ci rəqəminin cəmi ilə əvvəlki rəqəmin hesablanması zamanı «yaddasaxlanılan» ədədin cəmindən ibarətdir. Bu cəmləmə prosesini bul funksiyalarının köməkliyi ilə təşkil etmək üçün «yaddasaxlanılan» ədəd üçün köməkçi dəyişən daxil edək: $w_i,\ i=0,1,\dots,n+1$. İlkin olaraq $w_0=0$ götürək. Bu dəyişənin köməkliyi ilə c ədədinin i-ci rəqəmini aşağıdakı düsturun köməkliyi ilə hesablamaq olar:

$$c_i=a_i\oplus b_i\oplus w_{i-1},\ i=1,\dots,n+1. \qquad (1)$$

Bu zaman «yaddasaxlanılan» ədədi aşağıdakı kimi hesablamaq olar:

$$w_i=(a_i\ \&\ b_i)\vee(a_i\ \&\ w_{i-1})\vee(b_i\ \&\ w_{i-1}),\ i=1,2,\dots,n+1. \qquad (2)$$

Asanlıqla göstərmək olar ki, (2) düsturunu aşağıdakı kimi də yazmaq olar:

$$w_i=a_i\ \&\ b_i\oplus(a_i\oplus b_i)\ \&\ w_{i-1}\ . \qquad (3)$$

(1)-(3) düsturları göstərir ki, ikilik ədədlərin toplanması üçün bul funksiyaları istifadə oluna bilər.

§4. İkili funksiya və ikilik prinsipi

1.İkili funksiya anlayışı.

Tərif 1. Tutaq ki, $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ bul funksiyası verilmişdir. $\bar f(\bar x_1,\bar x_2,\dots,\bar x_n)$ funksiyasına bərabər olan funksiyaya $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiyasının ikili funksiyası deyilir və $[f(x_1,x_2,\dots,x_n)]^*$ kimi işarə olunur.

Aydındır ki, verilən $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiyasına ikili olan funksiyanın qiymətlər cədvəli $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiyasının cədvəlini invers etməklə, yəni 0-ları 1-lə, 1-ləri 0-la əvəz etməklə alınır (cədvəl 1-ə bax).

$[f(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n})]^* = \bar{f}(\bar{x}_{i_1}, ..., \bar{x}_{i_n})$ olduğundan $[f(x_{i_1}, ..., x_{i_n})]^*$ və $[f(x_1, ..., x_n)]^*$ funksiyaları eyni bir inikası təyin edir. Bu inikası f^* ilə işarə edək. Onda

$$[f(x_1, x_2, ..., x_n)]^* = f^*(x_1, x_2, ..., x_n).$$

İkili funksiyanın tərifindən $f^{**} = (f^*)^* = f$ alınır, yəni f funksiyası f^* funksiyasına ikilidir. Bu xassə qarşılıqlıq xassəsi adlanır.

Asanlıqla görmək olar ki, $0, 1, x, \bar{x}, x_1 \& x_2$, $x_1 \vee x_2$ funksiyaları arasında aşağıdakılar bir-biri ilə ikilidir, yaxud da özü-özünə ikilidir:

Cədvəl 1.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	$[f(x_1, x_2, x_3)]^*$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

1) 0 funksiyası ilə 1 funksiyası ikilidir;
2) x funksiyası özü-özünə ikilidir;
3) $x_1 \& x_2$ funksiyası ilə $x_1 \vee x_2$ funksiyası ikilidir;
4) $\bar{x}$ funksiyası özü-özünə ikilidir.

Nümunə 1. $f = x \oplus y$ funksiyasının $g = x \sim y$ funksiyasına, $f = x \to y$ funksiyasının isə $g = y \to x$ funksiyasına ikili olmasını yoxlamalı.

$x \oplus y$, $(x \oplus y)^*$, $x \sim y$, $x \to y$, $(x \to y)^*$ və $y \to x$ funksiyalarının qiymətlərini eyni bir cədvəldə verək:

x	y	$x \oplus y$	$(x \oplus y)^*$	$x \sim y$	$x \to y$	$(x \to y)^*$	$y \to x$

0	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1

Cədvəldən görünür ki, $(x \oplus y)^*$ və $x \sim y$ funksiyalarının qiymətləri üst-üstə düşür, lakin $(x \to y)^*$ və $y \to x$ funksiyalarının qiymətləri üst-üstə düşmür. Odur ki, $x \oplus y$ funksiyası $x \sim y$ ilə ikili, $x \to y$ isə $y \to x$ ilə ikili deyildir.

2. İkilik prinsipi. Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası $\mathcal{U}$ düsturu ilə ifadə olunur. $f^*(x_1, x_2,...,x_n)$ funksiyasını realizə edən düsturun necə olmasını tapmaq üçün əvvəlcə bir teoremə baxaq. Teoremi şərh etməmişdən əvvəl

$$(x_{11},...,x_{1p_1}),...,(x_{m1},...,x_{mp_m})$$

çoxluqlarında rast gələn bütün müxtəlif dəyişənləri $x_1, x_2,...,x_n$-lə işarə edək.

Teorem 1. Əgər

$$\Phi(x_1,...,x_n) = f(f_1(x_{11},...,x_{1p_1}),...,f_m(x_{m1},...,x_{mp_m})),$$

onda

$$\Phi^*(x_1,...,x_n) = f^*(f_1^*(x_{11},...,x_{1p_1}),...,f_m^*(x_{m1},...,x_{mp_m})).$$

İsbatı. $\Phi^*(x_1,...,x_n) = \bar{f}(f_1(\bar{x}_{11},...,\bar{x}_{1p_1}),...,f_m(\bar{x}_{m1},...,\bar{x}_{mp_m})) =$

$$= \bar{f}(\bar{\bar{f}}_1(\bar{x}_{11},...,\bar{x}_{1p_1}),...,\bar{\bar{f}}_m(\bar{x}_{m1},...,\bar{x}_{mp_m})) =$$

$$= \bar{f}(\bar{f}_1^*(x_{11},...,x_{1p_1}),...,\bar{f}_m^*(x_{m1},...,x_{mp_m})) =$$

$$= f^*(f_1^*(x_{11},...,x_{1p_1}),...,f_m^*(x_{m1},...,x_{mp_m})).$$

□

İsbat olunan teoremdən aşağıdakı kimi ifadə olunan *ikilik prinsipi* alınır: Tutaq ki, $\mathcal{U} = C[f_1,...,f_s]$ düsturu $f(x_1, x_2,...,x_n)$ funksiyasını realizə edir. Onda $C[f_1^*,...,f_s^*]$ düsturu, yəni $\mathcal{U}$

düsturunda olan $f_1,...,f_s$ funksiyalarının onlara ikili olan uyğun $f_1^*,...,f_s^*$ funksiyaları ilə əvəz edilməsi nəticəsində alınan düstur $f^*(x_1,...,x_n)$ funksiyasını realizə edir.

$\cup$ düsturuna ikili olan düsturu $\cup^*$ ilə işarə edək:

$$\cup^* = C[f_1^*,..., f_s^*].$$

$R=\{0,1,\bar{x},x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2\}$ çoxluğu üzərində düstur üçün ikilik prinsipini aşağıdakı kimi ifadə etmək olar: $\cup^*$ düsturunu almaq üçün $\cup$ düsturunda 0-ı 1-lə, 1-i 0-la, &-nı $\vee$- ilə, $\vee$-ni &-a ilə əvəz etmək lazımdır. Beləliklə, $\cup=[0,1,\bar{x}, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2]$ olarsa, onda $\cup^* =[1,0,\bar{x},x_1 \vee x_2,x_1 \& x_2]$ olar.

Nümunə 2.

1) $\cup_1(x_1,x_2)=x_1 \& x_2$, $\cup_1^*(x_1,x_2)=x_1 \vee x_2$;

2) $\cup_2(x_1,x_2)=x_1 \vee x_2$, $\cup_2^*(x_1,x_2)=x_1 \& x_2$;

3) $\cup_3(x_1,x_2)=x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2$, $\cup_3^*(x_1,x_2)=(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)\&(x_1 \vee x_2)$.

İkilik prinsipindən alınır ki, əgər

$$\cup(x_1,...,x_n)=V(x_1,...,x_n),$$

onda

$$\cup^*(x_1,...,x_n)=V^*(x_1,...,x_n).$$

Nümunə 3. $\overline{x_1 \& x_2}=\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ eyniliyindən

$$x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 = x_1 \& \bar{x}_2$$

eyniliyi alınır.

Nümunələrdən göründüyü kimi verilən eyniliyə ikilik prinsipini tətbiq etməklə yeni eynilik almaq olar. Onlara aid aşağıdakı nümunələri göstərmək olar:

1. Udma eyniliyi. Bu aşağıdakı kimidir: $x_1 \vee x_1x_2 = x_1$. Bu eynilikdən ikilik prinsipinə əsasən $x_1 \cdot (x_1 \vee x_2) = x_1$;

2. Yapışdırma eyniliyi. Bu eynilik belədir: $x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 = x_1$. Bu eynilikdən alınır: $(x_1 \vee x_2)\cdot(x_1 \vee \bar{x}_2)=x_1$;

3. Cızma eyniliyi. Bu eynilik belədir: $x_1 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 = x_1 \vee x_2$. Bu eynilikdən alınır: $x_1 \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2) = x_1 \cdot x_2$;

4. $x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_3 = x_1(x_2 \vee x_3)$ eyniliyi. Bu eynilikdən alınır:

$$(x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3) = x_1 \vee (x_2 \,\&\, x_3).$$

§5. Məntiq cəbri funksiyalarının dəyişənlərə ayrılması. Mükəmməl dizyunktiv və konyunktiv normal forma

1. Bul funksiyalarının dəyişənlərə ayrılması. Mükəmməl dizyunktiv normal forma. Bul funksiyalarının cədvəl şəklində verilməsi çox vaxt tələb edən işdir. Bul funksiyalarının cədvəl vasitəsilə verilməsindən başqa analitik üsul da mövcuddur və bu da düstur anlayışı ilə sıx bağlıdır. Bul funksiyalarının belə üsulla verilməsi müəyyən bir funksiyalar ehtiyatına əsaslanır. Belə ki, verilən funksiyalar ehtiyatı yaxud çoxluğu üzərində düsturlar qurula bilər və bu düstur lazım olan funksiyanı realizə edə bilər. Deyilənlərin aydınlığı üçün bəzi anlayışları şərh edək.

Aşağıdakı işarələməni qəbul edək:

$$x^{\sigma} = x\sigma \vee \bar{x}\bar{\sigma},$$

harada ki, σ parametr olub 0 ya da 1-ə bərabər qiymətlər alır. Qeyd edək ki, x^{σ} yazılışı formal yazılışdır və x qüvvətin əsası, σ isə qüvvətin dərəcəsi kimi başa düşülməlidir. Aydındır ki,

$$x^{\sigma} = \begin{cases} \bar{x}, & \text{əgər } \sigma = 0, \\ \mathrm{x}, & \text{əgər } \sigma = 1. \end{cases}$$

Asanlıqla görmək olar ki,

$$x^{\sigma} = \begin{cases} 1, & \text{əgər } x = \sigma, \\ 0, & \text{əgər } x \neq \sigma. \end{cases}$$

Teorem 1 (funksiyanın dəyişənlərə ayrılması haqqında teorem). Məntiq cəbrinin hər bir $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası istənilən m natural ədədi üçün $(1 \leq m \leq n)$ aşağıdakı şəkildə təsvir oluna bilər:

$$f(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n)=\bigvee_{(\sigma_1,\dots,\sigma_m)\in\Omega_m} x_1^{\sigma_1}\&\dots\& x_m^{\sigma_m}\&$$

$$\& f(\sigma_1,\dots,\sigma_m,x_{m+1},\dots,x_n), \qquad (1)$$

harada ki,

$$\Omega_m=\{(\sigma_1,\dots,\sigma_m)\big|\sigma_i\in E^2, i=\overline{1,m}\}.$$

İsbatı. İxtiyari $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ verilənlər yığımına baxaq, hansı ki, $\alpha_i\in E^2$, $i=\overline{1,n}$. $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2,\dots,x_n=\alpha_n$ götürək və $x_1,x_2,\dots,x_n$-lərin bu qiymətlərində (1)-in sağ və sol tərəflərinə baxaq. Aydındır ki, sol tərəfdə $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ alınır. Sağ tərəfdə

$$\bigvee_{(\sigma_1,\dots,\sigma_m)\in\Omega_m}\alpha_1^{\sigma_1}\&\dots\&\alpha_m^{\sigma_m}\& f(\sigma_1,\dots,\sigma_m,\alpha_{m+1},\dots,\alpha_n) \qquad (2)$$

alınır. $\alpha_i^{\sigma_i}$ -nin təyininə görə ancaq və ancaq $\alpha_i=\sigma_i$ olduqda $\alpha_i^{\sigma_i}=1$ olur. Ona görə də (2)-də Ω_m çoxluğunun $(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ yığımına uyğun olan həddindən başqa qalan hədləri sıfra bərabər olur, yəni

$$\bigvee_{(\sigma_1,\dots,\sigma_m)\in\Omega_m}\alpha_1^{\sigma_1}\&\dots\&\alpha_m^{\sigma_m}\& f(\sigma_1,\dots,\sigma_m,\alpha_{m+1},\dots,\alpha_n)=$$

$$=\alpha_1^{\alpha_1}\&\dots\&\alpha_m^{\alpha_m}\& f(\alpha_1,\dots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\dots,\alpha_n)=f(\alpha_1,\dots,\alpha_n). \qquad (3)$$

Beləliklə, ixtiyari $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ yığımı üçün (1)-in hər iki tərəfi eyni qiymət alır. □

(1) düsturuna $f(x_1,\dots,x_n)$ funksiyasının $x_1,\dots,x_m$ dəyişənlərinə görə Şennon ayrılışı deyilir. Teorem 1-dən aşağıdakı nəticələr alınır:

Nəticə 1. Məntiq cəbrinin hər bir $f(x_1,\dots,x_n)$ funksiyası istənilən i ədədi üçün $(1\le i\le n)$ aşağıdakı kimi təsvir oluna bilər:

$$f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)=x_i\& f(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)\vee\bar{x}_i\&$$

$$\& f(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n). \qquad (4)$$

(4) ayrılşında $f(x_1,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n)$ və $f(x_1,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n)$ funksiyaları ayrılma komponentləri adlanır.

Nəticə 2. Məntiq cəbrinin hər bir $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası aşağıdakı kimi təsvir oluna bilər:

$$f(x_1,...,x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,...,\sigma_n)\in\Omega_n} x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n} \& f(\sigma_1,...,\sigma_n). \quad (5)$$

Aydındır ki, $f(x_1,...,x_n) \not\equiv 0$ olduqda (5) düsturu aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$f(x_1,...,x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1,...,\sigma_n)\in\Omega_n \\ f(\sigma_1,...,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} \& ... \& x_n^{\sigma_n}. \quad (6)$$

(6) düsturu mükəmməl dizyunktiv normal forma adlanır. Mükəmməl dizyunktiv normal forma (mükəmməl d.n.f. və ya MDNF) ilə aşağıdakı teorem bağlıdır:

Teorem 2. Məntiq cəbrinin hər bir funksiyası inkar, konyunksiya və dizyunksiya vasitəsilə düstur şəklində təsvir oluna bilər.

İsbatı. İki hala baxaq: $f(x_1,...,x_n) \equiv 0$ və $f(x_1,...,x_n) \not\equiv 0$.

1) Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n) \equiv 0$. Onda, aydındır ki, $f(x_1,...,x_n) = x_1 \& \bar{x}_1$.

2) Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n) \not\equiv 0$. Onda teorem 1-dən alınan nəticəyə əsasən

$$f(x_1,...,x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1,...,\sigma_n)\in\Omega_n \\ f(\sigma_1,...,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} \& ... \& x_n^{\sigma_n}.$$

Deməli, hər iki halda f funksiyası inkar, konyunksiya və dizyunksiya vasitəsilə düstur şəklində təsvir olunur. □

Beləliklə, teorem 1 və teorem 2 əsasında alırıq ki, məntiq cəbrinin istənilən funksiyası R çoxluğu üzərində düsturla verilə bilər və bu zaman R çoxluğu ancaq üç elementar funksiyalardan - inkar, konyunksiya və dizyunksiya funksiyalarından ibarət ola bilər. Aydındır ki, bu teoremlər konstruktiv xarakter daşıyır. Belə ki, funksiyanın arqumentlərin bütün müxtəlif yığımlarına uyğun qiymətləri məlum olduqda bu funksiya mükəmməl d.n.f. kimi analitik şəkildə yazıla bilər. Bu halda funksiyanın verilmə cədvəli də istifadə oluna bilər və cədvəlin hər bir sətri üçün

$$x_1^{\sigma_1} \& ... \& x_n^{\sigma_n}$$

məntiqi hasili qurula bilər və bu hasillər dizyunksiyalar vasitəsilə birləşdirilə bilər.

Nümunə 1. 1) $x_1 \to x_2$ implikasiya funksiyası üçün mükəmməl d.n.f.-i yazmalı.

Aydındır ki, (x_1, x_2) üçün dörd yığım mövcuddur: (0,0), (0,1), (1,0) və (1,1). Bu yığımlardan (0,0) (0,1) və (1,1) yığımlarında $x_1 \to x_2$ funksiyası 1-ə bərabər qiymət alır. Odur ki,

$$x_1 \to x_2 = (x_1^0 \& x_2^0) \vee (x_1^0 \& x_2^1) \vee (x_1^1 \& x_2^1) =$$

$$= (\bar{x}_1 \& \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \& x_2) \vee (x_1 \& x_2).$$

2) Aşağıdakı cədvəldə 1-də verilən $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyası üçün mükəmməl d.n.f.-i tapmalı:

$f(x_1, x_2, x_3)$ üçün mükəmməl d.n.f. aşağıdakı kimidir:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

Cədvəl 1

x_1 x_2 x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

3) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1(x_2 \to x_3)$ funksiyası üçün mükəmməl d.n.f.-i yazmalı.

Aydındır ki, (x_1,x_2,x_3) üçün 8 qiymətlər yığımı mövcuddur və bu yığımlardan (1,0,0), (1,0,1) və (1,1,1) yığımlarında $x_1(x_2 \to x_3)$ funksiyası 1-ə bərabər qiymət alır. Ona görə də

$$x_1(x_2 \to x_2) = x_1^1 x_2^0 x_3^0 \vee x_1^1 x_2^0 x_3^1 \vee x_1^1 x_2^1 x_3^1 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

.

2. Mükəmməl konyunktiv normal forma. Teorem 1 və ondan alınan nəticələrdə $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasının dəyişənlərə görə ayrılışı $\Sigma\Pi$ tipli ifadədir. Bu funksiyanın dəyişənlərə görə ayrılışında $\Pi\Sigma$ tipli ifadə də mümkündür. Bu aşağıdakı teorem əsasında mümkün olur.

Teorem 3. Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n)$ məntiq cəbrinin istənilən bir funksiyasıdır və $f(x_1,...,x_n) \not\equiv 1$. Onda

$$f(x_1,...,x_n) = \mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,...,\sigma_n)\in\Omega_n \\ f(\sigma_1,...,\sigma_n)=0}} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee ... \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}). \qquad (7)$$

İsbatı. $f(x_1,...,x_2)$ funksiyasına ikili olan $f^*(x_1,...,x_n)$ funksiyasına baxaq. Aydındır ki, $f^*(x_1,...,x_n) \not\equiv 0$. Onda teorem 1-dən alınan nəticə 2-yə görə $f^*(x_1,...,x_n)$ funksiyasını bütün dəyişənlərinə görə ayıra bilərik və bu aşağıdakı kimidir:

$$f^*(x_1,...,x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1,...,\sigma_n)\in\Omega_n \\ f^*(\sigma_1,...,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} \& ... \& x_n^{\sigma_n}.$$

İkili düsturlar üçün eynilikdən istifadə etsək onda bu düsturdan alarıq:

$$f^{**}(x_1,...,x_n) = \mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,...,\sigma_n)\in\Omega_n \\ f^*(\sigma_1,...,\sigma_n)=1}} (x_1^{\sigma_1} \vee ... \vee x_n^{\sigma_n}).$$

Sol tərəf $f(x_1,...,x_n)$-dir, sağ tərəf isə aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$\mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,...,\sigma_n)\in\Omega_n \\ f^*(\sigma_1,...,\sigma_n)=1}} (x_1^{\sigma_1} \vee ... \vee x_n^{\sigma_n}) = \mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,...,\sigma_n)\in\Omega_n \\ f(\bar{\sigma}_1,...,\bar{\sigma}_n)=0}} (x_1^{\sigma_1} \vee ... \vee x_n^{\sigma_n}) =$$

$$= \mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in\Omega_n \\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=0}} (x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}).$$

Beləliklə, (7) ayrılışını alırıq. □

(7) ifadəsi mükəmməl konyuktiv normal forma (mükəmməl k.n.f. və ya MKNF) adlanır.

Nümunə 2. 1) $x_1 \to x_2$ funksiyası üçün mükəmməl k.n.f.-ı qurmalı.

$x_1 \to x_2$ funksiyası $x_1 = 1, x_2 = 0$ olduqda 0 qiymətini alır. Odur ki,

$$x_1 \to x_2 = x_1^{\bar{1}} \vee x_2^{\bar{0}} = x_1^0 \vee x_2^1 = \bar{x}_1 \vee x_2 .$$

2) Yuxarıda cədvəldə verilən $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyası üçün mükəmməl k.n.f.-ı qurmalı.

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1^{\bar{0}} \vee x_2^{\bar{0}} \vee x_3^{\bar{1}})\ (x_1^{\bar{0}} \vee x_2^{\bar{1}} \vee x_3^{\bar{1}})\ (x_1^{\bar{1}} \vee x_2^{\bar{0}} \vee x_3^{\bar{1}}) =$$
$$= (x_1^1 \vee x_2^1 \vee x_3^0)\ (x_1^1 \vee x_2^0 \vee x_3^0)\ (x_1^0 \vee x_2^1 \vee x_3^0) =$$
$$= (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)\,(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)\ (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)\ .$$

§6. Tamlıq və qapalılıq. Tam sistemlərə nümunələr

1. Tamlıq anlayışı. Məlum teoremlərə (teorem 5.2 və teorem 5.3) görə məntiq cəbrinin hər bir funksiyası $\bar{x}, x_1 \& x_2$ və $x_1 \vee x_2$ elementar funksiyaları vasitəsilə düstur şəklində təsvir oluna bilər və təsvir mükəmməl d.n.f. və k.n.f. vasitəsilə həyata keçirilir.

Tutaq ki, ixtiyari bir funksiyalar sistemi (çoxluğu) verilmişdir. Bul cəbrinin hər bir funksiyası bu funksiyalar sistemi vasitəsilə təsvir oluna bilərmi? Bu sual böyük praktiki tətbiqlərlə bağlıdır. Yəni müəyyən funksiyalar ehtiyatı əsasında istənilən bir bul funksiyası realizə oluna bilirsə, onda ehtiyat funksiyalara uyğun sxemlər əsasında bütün bul funksiyaları realizə oluna bilər.

Tərif 1. Əgər istənilən bul funksiyası P_2-dən olan $\{f_1, f_2, \ldots, f_s, \ldots\}$ funksiyalar sistemi vasitəsilə düstur şəklində təsvir oluna bilərsə, onda bu funksiyalar sisteminə funksional tam və ya tam sistem deyilir.

Bir sistemin tam olması ilə onunla əlaqədar olan başqa bir sistemin tam olub-olmamasını müəyyən etmək olur. Bu aşağıdakı teorem əsasında həyata keçirilir:

Teorem 1. Tutaq ki, P_2-dən olan aşağıdakı iki sistem verilmişdir:

$$R = \{f_1, f_2, ...\}, \qquad (1)$$

$$Q = \{g_1, g_2, ...\} \qquad (2)$$

və (1) sistemi tamdır və onun istənilən funksiyası (2) sisteminin funksiyaları vasitəsilə düstur şəklində ifadə olunur. Onda (2) sistemi də tamdır.

İsbatı. Tutaq ki, h funksiyası P_2-dən olan ixtiyari bir funksiyadır. (1) sisteminin tamlığına görə h funksiyasını R üzərində düstur şəklində ifadə etmək olar, yəni

$$h = C[f_1, f_2, ..., f_s, ...]. \qquad (3)$$

Qeyd edək ki, kvadrat mötərizə daxilində (1) sisteminin bütün funksiyaları yazılmışdır. Lakin faktiki olaraq h-ın təsvirində onlardan sonlu sayda istifadə oluna bilər. Teoremin şərtinə görə

$$f_i = C_i[g_1, g_2, ...], \; i = 1,2,...,s,... \qquad (4)$$

(3) münasibətində $f_1, f_2, ..., f_s, ...$ funksiyalarının əvəzinə onların (4) düsturlarını yazaq:

$$C[f_1, f_2, ...] = C[C_1[g_1, g_2, ...], C_2[g_1, g_2], ...].$$

Bu son münasibət Q üzərində C' quruluşuna malik yeni bir düstur əmələ gətirir:

$$C[C_1[g_1, g_2, ...], C_2[g_1, g_2, ...], ...] = C'[g_1, g_2, ...].$$

Beləliklə,

$$h = C'[g_1, g_2, ...]$$

və bu da göstərir ki, P_2-dən olan istənilən h funksiyası (2) sisteminin funksiyaları vasitəsilə düstur şəklində təsvir olunur. □

2.Tam sistemlərə nümunələr. Jeqalkin teoremi. Tam sistemlərə aşağıdakı nümunələri göstərmək olar:

1. P_2 – bütün məntiq cəbri funksiyalar sistemi tamdır.

2. $R = \{\bar{x}, x_1 \& x_2,\ x_1 \vee x_2\}$ sistemi tamdır. Bu funksiyalar sisteminin tamlığı teorem 5.2-dən alınır.

3. $R = \{\bar{x}, x_1 \& x_2\}$ sistemi tamdır. Bunu isbat etmək üçün $Q = \{\bar{x}, x_1 \& x_2,\ x_1 \vee x_2\}$ sisteminə baxaq. Aydındır ki,

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \ \& \ \bar{x}_2}$$

eyniliyinə görə $\{\bar{x},\ x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2\}$ sisteminin bütün funksiyaları $\{\bar{x}, x_1 \& x_2\}$ sisteminin funksiyaları vasitəsilə düstur şəklində ifadə olunur. Onda teorem 1-ə görə $R = \{\bar{x}, x_1 \& x_2\}$ sistemi tamdır.

4. $R = \{\bar{x}, x_1 \vee x_2\}$ sistemi tamdır. Bunu isbat etmək üçün $Q = \{\bar{x}, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2\}$ sisteminə baxaq. Aydındır ki,

$$x_1 \& x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$$

eyniliyinə görə $\{\bar{x},\ x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2\}$ sisteminin bütün funksiyaları $\{\bar{x}, x_1 \vee x_2\}$ sisteminin funksiyaları vasitəsilə düstur şəklində ifadə olunur. Onda $\{\bar{x},\ x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2\}$ sistemi tam olduğundan teorem 1-ə görə $R = \{\bar{x}, x_1 \vee x_2\}$ sistemi tam olar.

5. $R = \{x_1 / x_2\}$ sistemi tamdır. İsbat üçün $Q = \{\bar{x}, x_1 \& x_2\}$ sisteminə baxaq. Asanlıqla göstərmək olar ki,

$$\bar{x}_1 = x_1 / x_1, \qquad x_1 \& x_2 = \overline{x_1 / x_2} = (x_1 / x_2)/(x_1 / x_2)\,.$$

Beləliklə, $Q = \{\bar{x}, x_1 \& x_2\}$ sisteminin bütün funksiyaları $R = \{x_1 / x_2\}$ sisteminin funksiyaları vasitəsilə ifadə olunur. $Q = \{\bar{x}, x_1 \& x_2\}$ sistemi tam olduğundan teorem 1-ə görə $R = \{x_1 / x_2\}$ sistemi də tam olar.

6. $R = \{0,1, x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2\}$ sistemi tamdır. İsbat üçün $Q = \{\bar{x}, x_1 \& x_2\}$ sisteminə baxaq. Aydındır ki, $\bar{x} = x + 1$. Beləliklə, $Q = \{\bar{x}, x_1 \& x_2\}$ sisteminin funksiyaları $R = \{0,1, x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2\}$

sisteminin funksiyaları vasitəsilə ifadə olunur. $Q=\{\bar{x}, x_1 \& x_2\}$ sistemi tam olduğundan teorem 1-ə görə $R=\{0,1, x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2\}$ sistemi də tam olar.

7. $R=\{x_1 \downarrow x_2\}$ sistemi tamdır. İsbat üçün $Q=\{\bar{x}, x_1 \vee x_2\}$ sisteminə baxaq. Aydındır ki,

$$\bar{x}=x_1 \downarrow x_1, \qquad x_1 \vee x_2=\overline{x_1 \downarrow x_2}=(x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2).$$

Ona görə də $R=\{x_1 \downarrow x_2\}$ tam sistemdir.

Yuxarıda nümunə «6.»-da isbat olundu ki, $R=\{0,1, x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2\}$ sistemi tamdır. Ona görə də məntiq cəbrinin istənilən $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyasını 0,1 sabitləri və $x_1 x_2$ və x_1+x_2 funksiyaları vasitəsilə düsturla ifadə etmək olar. Alınan düsturda mötərizələri açdıqdan və o qədər də çətin olmayan riyazi çevirmələrdən sonra mod 2 əməli üzrə polinom alarıq. Bu polinom Jeqalkin polinomu adlanır. Məntiq cəbrinin istənilən funksiyasının mod 2 üzrə polinom şəklində təsvir oluna bilməsi haqqında Jeqalkin teoremi aşağıdakı kimidir.

Teorem 2. P_2-dən olan hər bir $f(x_1,\ldots,x_n)$ məntiq cəbri funksiyası mod 2 əməllərinə görə aşağıdakı polinom şəklində göstərilə bilər:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=0}^{n}{}^{\oplus} \sum_{(j_1,\ldots,j_i)\in L_i}{}^{\oplus} k^{(i)}_{j_1,j_2,\ldots,j_i} x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_i}. \qquad (5)$$

Burada

$$L_i=\{(j_1,j_2,\ldots,j_i) \mid 1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_i \le n\}, \qquad (6)$$

$k^{(i)}_{j_1,j_2,\ldots,j_i}$ isə 0 və ya 1 qiymətlərini alan sabitlərdir (əmsallardır).

İsbatı. Aydındır ki, verilən $i \in \{1,\ldots,n\}$ üçün L_i çoxluğunun elementlərinin sayı C_n^i və, beləliklə, $i=0,1,\ldots,n$ olmaqla bütün elementlərin sayı

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$$

qiymətinə bərabərdir, yəni (5) ifadəsində 2^n sayda əmsal mövcuddur. Bu əmsallar 0 və ya 1 qiymətlərini aldığından ümumi halda 2^{2^n} sayda (5) şəklində polinom mövcuddur və bu da $p_2(n)$-ə, yəni n dəyişənli funksiyaların sayına bərabərdir. Beləliklə, hər bir $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasına qarşılıqlı birqiymətli olaraq (5) şəklində bir polinom uyğun gəlir. Qeyd edək ki, verilən $f(x_1,...,x_n)$ məntiq cəbri funksiyası üçün (5) Jeqalkin polinomunu tapmaq üçün $k^{(i)}_{j_1,...,j_i}$, $(j_1,...,j_i) \in L_i$, $i = 0,...,n$, əmsallarına naməlum əmsallar kimi baxmaq olar. Bu naməlum əmsalları tapmaq üçün $(x_1,...,x_n)$ məchulları üçün bütün mümkün ikilik qiymətlər yığımını götürüb onları (5)-in sağ və sol tərəfində nəzərə almaqla naməlum əmsallar üçün xətti tənliklər sistemi almaq olar. Bu tənliklər sistemində bütün əməliyyatlar $\mathrm{mod}\ 2$ üzrə əməliyyatlardır və təbii ki, sistemin yeganə həlli mövcuddur. Bu həlli tapmaqla $f(x_1,...,x_n)$ üçün Jeqalkin polinomunu almış oluruq. □

Qeyd edək ki, (5)-in sağ tərəfində $i = 0$-a uyğun toplanan ancaq $k^{(0)}$ sabiti olur.

Nümunə 1. $x_1 \vee x_2$ funksiyasını Jeqalkin polinomu şəklində göstərməli.

$x_1 \vee x_2$ funksiyasını (5) düsturuna uyğun olaraq aşağıdakı şəkildə axtaraq:

$$x_1 \vee x_2 = ax_1x_2 + bx_1 + cx_2 + d.$$

Bu düsturda: $x_1 = x_2 = 0$ olduqda $0 = d$ alırıq,

$x_1 = 0,\ x_2 = 1$ olduqda $1 = c$ alırıq,

$x_1 = 1,\ x_2 = 0$ olduqda $1 = b$ alırıq,

$x_1 = 1,\ x_2 = 1$ olduqda $1 = a + b + c$, yəni $a = 1$ alırıq.

Beləliklə, $x_1 \vee x_2 = x_1x_2 + x_1 + x_2$.

İki dəyişənli funksiyalar üçün Jeqalkin çoxhədlisinin qurulması sxeminə baxaq. $f(x_1,x_2)$ funksiyası üçün Jeqalkin çoxhədlisi ümumi halda aşağıdakı kimidir.

$$f(x_1,x_2)=a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_{12}x_1x_2,$$

hansı ki, a_0,a_1,a_2 və a_{12} naməlum əmsallardır. Bu əmsalları tapmaq üçün aşağıdakı tənliklər sistemini həll etmək lazımdır.

$$\begin{cases} a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 0+a_{12}\cdot 0=f(0,0), \\ a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 1+a_{12}\cdot 0=f(0,1), \\ a_0+a_1\cdot 1+a_2\cdot 0+a_{12}\cdot 0=f(1,0), \\ a_0+a_1\cdot 1+a_2\cdot 1+a_{12}\cdot 1=f(1,1). \end{cases}$$

Bu tənliklər sistemindən alınır:

$$a_0=f(0,0), \quad a_0+a_2=f(0,1), \quad a_0+a_1=f(1,0),$$
$$a_0+a_1+a_2+a_{12}=f(1,1).$$

Buradan da

$$a_0=f(0,0), \quad a_2=f(0,1)+f(0,0), \quad a_1=f(1,0)+f(0,0),$$
$$a_{12}=f(0,0)+f(0,1)+f(1,0)+f(1,1).$$

İndi isə üçdəyişənli funksiyalar üçün Jeqalkin çoxhədlisinin qurulmasına baxaq. $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyası üçün Jeqalkin çoxhədlisi ümumi halda aşağıdakı kimidir:

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+$$
$$+a_{23}x_2x_3+a_{123}x_1x_2x_3. \tag{7}$$

Burada $a_0,a_1,a_2,a_3,a_{12},a_{13},a_{23},a_{123}$ naməlum əmsallardır.

(7)-nin həm sağ və həm də sol tərəflərində x_1,x_2,x_3 dəyişənlərinə onların ala biləcəyi mümkün qiymətləri yazmaqla alarıq:

$$\begin{cases} a_0 = f(0,0,0), \\ a_0 + a_3 = f(0,0,1), \\ a_0 + a_2 = f(0,1,0), \\ a_0 + a_1 = f(1,0,0), \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_{12} = f(1,1,0), \\ a_0 + a_1 + a_3 + a_{13} = f(1,0,1), \\ a_0 + a_2 + a_3 + a_{23} = f(0,1,1), \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_{12} + a_{13} + a_{23} + a_{123} = f(1,1,1). \end{cases}$$

Buradan da alarıq:

$$a_0 = f(0,0,0),$$

$$a_1 = f(0,0,0) + f(1,0,0),$$

$$a_2 = f(0,0,0) + f(0,1,0),$$

$$a_3 = f(0,0,0) + f(0,0,1),$$

$$a_{12} = f(1,1,0) + a_0 + a_1 + a_2 = f(0,0,0) + f(1,0,0) + f(0,1,0) + f(1,1,0),$$

$$a_{13} = f(1,0,1) + a_0 + a_1 + a_3 = f(0,0,0) + f(1,0,0) + f(0,0,1) + f(1,0,1),$$

$$a_{23} = f(0,1,1) + a_0 + a_2 + a_3 = f(0,0,0) + f(0,1,0) + f(0,0,1) + f(0,1,1),$$

$$a_{123} = f(1,1,1) + a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_{12} + a_{13} + a_{23} = f(0,0,0) +$$

$$+ f(1,0,0) + f(0,1,0) + f(0,0,1) + f(1,1,0) + f(1,0,1) + f(0,1,1) + f(1,1,1).$$

İndi isə n dəyişənli $f(x_1,...,x_n)$ məntiq cəbri funksiyası üçün Jeqalkin çoxhədlisinin əmsallırını tapmaq məsələsinə baxaq. Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasının qiyməti arqumentlərin bütün mümkün qiymətləri halında məlumdur. (5)-də fərz olunur ki, bütün əmsallar naməlumdur. Cəmi 2^n sayda əmsal mövcuddur.

(5)-dən göründüyü kimi $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasının bütün arqumentlərinin qiymətləri sıfıra bərabər olarsa, onda alarıq:

$$k^{(0)} = f(0,0,...,0)\,. \tag{8}$$

Tutaq ki, $x_\ell = 1$, lakin $x_1 = 0,...,x_{\ell-1} = 0,\ x_{\ell+1} = 0,...,x_n = 0$. Arqumentlərin bu qiymətlərində $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyasının qiymətini $f(x_\ell = 1)$ ilə işarə edək. Onda arqumentlərin belə təyin olunan qiymətləri halında (5)-dən alarıq

$$f(x_\ell = 1) = k^{(0)} + k_\ell^{(1)}\,. \tag{9}$$

(8) və (9)-dan isə alınar:

$$k_\ell^{(1)} = f(x_\ell = 1) + f(0,0,...,0),\ \ \ell = \overline{1,n}\,. \tag{10}$$

$f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyasının $x_1 = 0,...,x_{\ell-1} = 0, x_\ell = 1, x_{\ell+1} = 0,...$ $..., x_{\sigma-1} = 0, x_\sigma = 1, x_{\sigma+1} = 0,...,x_n = 0$ halında qiymətini $f(x_\ell = 1,\ x_\sigma = 1)$ ilə işarə edək. Arqumentlərin belə qiymətləri halında (5)-dən sıfıra bərabər olan hədləri atsaq, alarıq

$$f(x_\ell = 1, x_\sigma = 1) = k^{(0)} + k_\ell^{(1)} + k_\sigma^{(1)} + k_{\ell\sigma}^{(2)}\,. \tag{11}$$

Onda (8), (10) və (11) əsasında $k_{\ell\sigma}^{(2)}$ naməlum əmsalı aşağıdakı kimi tapılar

$$k_{\ell\sigma}^{(2)} = f(x_\ell = 1, x_\sigma = 1) + f(0,...,0) + f(x_\ell = 1) + f(x_\sigma = 1),$$

$$\ell = \overline{1,n},\ \ \sigma = \overline{1,n},\ \ell \neq \sigma\,. \tag{12}$$

İndi fərz edək ki, $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyasının r sayda dəyişəni «1» -ə bərabər qiymət alır, qalan $n-r$ saydası isə sıfır qiyməti alır. Tutaq ki, dəyişənlərdən «1» qiymətini alanları $x_{j_1}, x_{j_2},...,x_{j_r}$ dəyişənləridir. $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyasının $x_1 = 0,...,x_{j_1-1} = 0,\ x_{j_1} = 1, x_{j_1+1} = 0,...,x_{j_r-1} = 0, x_{j_r} = 1,\ x_{j_r+1} = 0,...$ $...,x_n = 0$ olduqada qiymətini $f(x_{j_1} = 1, x_{j_2} = 1,..., x_{j_r} = 1)$ ilə işarə edək. Aydındır ki, bu halda (5)-də bilavasitə sıfıra bərabər olan hədləri atsaq, alarıq:

$$f(x_{j_1}=1,x_{j_2}=1,...,x_{j_r}=1)=$$

$$=k^{(0)}+\sum_{i=1}^{r}{}^{\oplus}\sum_{(\sigma_1,...,\sigma_i)\in\Omega_i(r)}{}^{\oplus}k^{(i)}_{j_{\sigma_1}...j_{\sigma_i}}x_{j_{\sigma_1}}...x_{j_{\sigma_i}},\qquad(13)$$

hansı ki,

$$\Omega_i(r)=\{(\sigma_1,...,\sigma_i)\big|1\le\sigma_1<...<\sigma_i\le r\}.\qquad(14)$$

$(\sigma_1,...,\sigma_i)\in\Omega_i(r)$ olduqada $x_{j_{\sigma_\alpha}}=1,\alpha=\overline{1,i}$ olur və ona görə də (13) aşağıdakı kimi yazıla bilər.

$$f(x_{j_1}=1,x_{j_2}=1,...,x_{j_r}=1)=$$

$$=k^{(0)}+\sum_{i=1}^{r}{}^{\oplus}\sum_{(\sigma_1,...,\sigma_i)\in\Omega_i(r)}{}^{\oplus}k^{(i)}_{j_{\sigma_1}...j_{\sigma_i}}.\qquad(15)$$

Aydındır ki, $\Omega_r(r)$ bir yığımdan ibarətdir və bu yığım $(1,2,...,r)$ yığımıdır və odur ki, (15) aşağıdakı kimi yazıla bilər

$$f(x_{j_1}=1,x_{j_2}=1,...,x_{j_r}=1)=$$

$$=k^{(0)}+\sum_{i=1}^{r-1}{}^{\oplus}\sum_{(\sigma_1,...,\sigma_i)\in\Omega_i(r)}{}^{\oplus}k^{(i)}_{j_{\sigma_1}...j_{\sigma_i}}+k^{(r)}_{j_1...j_r}.\qquad(16)$$

(16)-da olan $k^{(r)}_{j_1...j_r}$ üçün alarıq:

$$k^{(r)}_{j_1...j_r}=f(x_{j_1}=1,x_{j_2}=1,...,x_{j_r}=1)+$$

$$+k^{(0)}+\sum_{i=1}^{r-1}{}^{\oplus}\sum_{(\sigma_1,...,\sigma_i)\in\Omega_i(r)}{}^{\oplus}k^{(i)}_{j_{\sigma_1}...j_{\sigma_i}}.\qquad(17)$$

(17) düsturu (8), (10) düsturları ilə birlikdə $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyası üçün olan (5) Jeqalkin çoxhədlisinin naməlum əmsallarını tapmaq üçün istifadə oluna bilər.

3. Qapalılıq anlayışı. Tamlıq anlayışı ilə qapanma və qapalı siniflər anlayışı sıx bağlıdır.

Tərif 2. Tutaq ki, R çoxluğu P_2-dən olan funksiyaların hər hansı bir alt çoxluğudur. R çoxluğundan olan funksiyalar vasitəsilə düstur şəklində ifadə oluna bilən bütün funksiyalar çoxluğuna R çoxluğunun qapanması deyilir.

R çoxluğunun qapanması $[R]$ kimi işarə olunur.

Nümunə 4.

1. $R = P_2$. Aydındır ki, $[R] = P$.

2. $R = \{1, x_1 + x_2\}$. Aydındır ki, bu çoxluğun qapanması bütün xətti funksiyalar çoxluğu olan L sinfidir, yəni:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_0 + c_1 x_1 + ... + c_n x_n \pmod 2$$

şəklində olan funksiyalar sinfidir, hansı ki, $c_i \in \{0,1\}$, $i = 0,1,...,n$.

Qapanma anlayışının bəzi xassələrini qeyd edək:

1) $R \subseteq [R]$;

2) $[[R]] = [R]$;

3) Əgər $R_1 \subseteq R_2$ olarsa, onda $[R_1] \subseteq [R_2]$;

4) $[R_1] \bigcup [R_2] \subseteq [R_1 \bigcup R_2]$.

Tərif 3. Əgər $[R] = R$ olarsa, onda R sinfi (çoxluğu) funksional qapalı sinif adlanır.

Nümunə 5:

1) $R = P_2$ sinfi qapalı sinifdir.

2) $R = \{1, x_1 + x_2\}$ sinfi qapalı deyildir.

3) L xətti funksiyalar sinfi qapalıdır. Belə ki, xətti ifadələri vasitəsilə qurulan ifadələr xəttidir və onlar L -ə daxildir.

Asanlıqla görmək olar ki, hər bir $[R]$ sinfi qapalıdır. Bu fakt qapalı siniflərə çoxlu nümunələr göstərməyə imkan verir.

Qapanma və qapalı siniflər termininə görə tamlığın başqa bir tərifini vermək olar: Əgər $[R] = P_2$ olarsa, onda R sistemi tam sistem adlanır. Aydındır ki, tamlığın bu tərifi ilə tərif 1 ekvivalentdir.

§7. Mühüm qapalı siniflər

1. Sıfırı və vahidi özündə saxlayan siniflər.

Tərif 1. Əgər $f(x_1,...,x_n)$ məntiq cəbri funksiyası $f(0,...,0)=0$ şərtini ödəyirsə, onda ona sıfırı özündə saxlayan funksiya deyilir.

T_0 ilə sıfırı özündə saxlayan bütün məntiq cəbri funksiyaları sinfini (çoxluğunu) işarə edək.

Asanlıqla görmək olar ki, $0, x, x_1 \& x_2$, $x_1 \vee x_2$, $x_1 + x_2$ funksiyaları T_0 sinfinə aiddir, 1 və $\bar{x}$ funksiyası isə T_0 sinfinə aid deyildir.

Teorem 1. Sıfırı özündə saxlayan n dəyişənli məntiq cəbri funksiyalarının sayı $(1/2)2^{2^n}$ ədədinə bərabərdir.

İsbatı. Aydındır ki, T_0-a daxil olan funksiyalar üçün cədvəldə birinci sətrdə həm solda və həm də sağda 0 dayanır. T_0-a daxil olmayan funksiyalar üçün isə solda 0 olmasına baxmayaraq sağda 1 dayanır. Beləliklə, bütün 2^{2^n} sayda cədvəllərin yarısında birinci sətrdə sağda 1, yarısında isə 0 dayanır. Beləliklə, birinci sətrdə həm sağda və həm də solda 0 dayanan cədvəllərin sayı, yəni funksiyaların sayı $(1/2)2^{2^n}$ olar. □

Teorem 2. T_0 sinfi qapalı sinifdir.

İsbatı. T_0 sinfinə x eynilik funksiyası daxildir. Ona görə də T_0 sinfinin qapalı olmasını isbat etmək üçün istənilən $f, f_1,...,f_m \in T_0$ üçün $\Phi = f(f_1,...,f_m)$ funksiyasının da T_0 sinfinə daxil olmasını göstərmək kifayətdir. Aydındır ki,

$$\Phi(0,...,0) = f(f_1(0,...,0),...,f_m(0,...,0)) = f(0,...,0) = 0 .$$

Deməli, $\Phi \in T_0$. □

Tərif 2. $f(x_1,...,x_n)$ məntiq cəbri funksiyası $f(1,...,1)=1$ şərtini ödəyərsə, onda ona vahidi özündə saxlayan funksiya deyilir.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $1, x, x_1 \& x_2$, $x_1 \vee x_2$, funksiyaları vahidi özündə saxlayan funksiyalardır, 0 və $\bar{x}$ funksiyaları isə vahidi özündə saxlamırlar. T_1 ilə vahidi özündə saxlayan məntiq cəbri funksiyaları sinfini işarə edək.

Aydındır ki, T_1 sinfinə daxil olan funksiyalar T_0 sinfinə daxil olan funksiyalarla ikilidir və bu uyğunluq qarşılıqlı birqiymətlidir. Teorem 1-ə analoji olaraq aşağıdakını isbat etmək olar:

Teorem 3. Vahidi özündə saxlayan n dəyişənli məntiq cəbri funksiyalarının sayı $(1/2)2^{2^n}$ ədədinə bərabərdir.

Teorem 4. T_1 sinfi qapalıdır.

İsbatı. T_1 sinfinə x eynilik funksiyası daxildir. Ona görə də T_1 sinfinin qapalı olmasını isbat etmək üçün istənilən $f, f_1,..., f_m \in T_1$ üçün $\Phi = f(f_1,..., f_m)$-in də T_1-ə daxil olmasını göstərmək kifayətdir. Aydındır ki,

$$\Phi(1,...,1) = f(f_1(1,...,1),..., f_m(1,...,1)) = f(1,...,1) = 1.$$

Deməli, $\Phi \in T_1$. □

2. Özü-özünə ikili olan funksiyalar sinfi.

Tərif 3. f məntiq cəbri funksiyası $f^* = f$ şərtini ödəyərsə, onda f funksiyasına özü-özünə ikili olan funksiya deyilir. S ilə məntiq cəbrinin bütün özü-özünə ikili olan funksiyalar çoxluğunu işarə edək. S sinfinə x və $\bar{x}$ funksiyaları daxildir.

Nümunə 1. Göstərək ki, $h(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ funksiyası S sinfinə daxildir. Doğrudan da

$$h^*(x_1, x_2, x_3) = [x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3]^* = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3) =$$
$$= x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 = h(x_1, x_2, x_3).$$

Aydındır ki, özü-özünə ikili olan $f(x_1,..., x_n)$ funksiyası üçün aşağıdakı eynilik doğrudur:

$$f(x_1,..., x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1,..., \bar{x}_n).$$

Bu o deməkdir ki, bir-biri ilə əks olan $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ və $(\bar{\alpha}_1,...,\bar{\alpha}_n)$ ikilik ədədlər yığımlarında öz-özünə ikili olan $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası əks qiymətlər alır.

Teorem 5. Özü-özünə ikili olan n dəyişənli məntiq cəbri funksiyalarının sayı $2^{2^{n-1}}=\sqrt{2^{2^n}}$ ədədinə bərabərdir.

İsbatı. $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ və $(\overline{\alpha}_1,...,\overline{\alpha}_n)$ ikilik ədədlər yığımlarında özü-özünə ikili olan funksiyalar cədvəlin sətrlərinin ilk yarısı ilə təyin olunurlar. Bu sətirlərin sayı 2^{n-1}-dir. Deməli, hər bir 2^{n-1} sayda sətrə malik cədvələ bir özü-özünə ikili olan funksiya uyğun gəlir. 2^{n-1} sayda sətrə malik və sol tərəfdəki sətrləri üst-üstə düşən, lakin sağ tərəfdəki sətrləri fərqli olan cədvəllərin sayı $2^{2^{n-1}}$-dir. Beləliklə, hər cədvələ bir funksiya uyğun olduğundan özü-özünə ikili olan funksiyaların sayı $2^{2^{n-1}}=\sqrt{2^{2^n}}$ olar. □

Teorem 6. S sinfi qapalıdır.

İsbatı. S sinfinə x eynilik funksiyası daxildir. Ona görə də S sinfinin qapalı olmasını isbat etmək üçün istənilən $f,f_1,...,f_m\in S$ üçün $\Phi=f(f_1,...,f_m)$-in də S-ə daxil olmasını göstərmək kifayətdir. Aydındır ki,

$$\Phi^*=f^*(f_1^*,...,f_m^*)=f^*(f_1,...,f_m)=f(f_1,...,f_m)=\Phi.$$

Deməli, $\Phi\in S$. □

Özü-özünə ikili olan funksiyalar haqqında bir lemmanı isbat edək:

Lemma 1. Əgər $f(x_1,...,x_n)\notin S$ olarsa, onda bu funksiyada dəyişənlərin yerinə x və $\overline{x}$-ı qoymaqla özü-özünə ikili olmayan birdəyişənli funksiya, yəni sabitləri almaq olar.

İsbatı. Aydındır ki, $f\notin S$ olduğundan elə $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ ikilik ədədlər yığımı tapmaq olar ki,

$$f(\overline{\alpha}_1,...,\overline{\alpha}_n)=f(\alpha_1,...,\alpha_n)$$

olsun. $\varphi_i(x)=x^{\alpha_i}$ $(i=1,...,n)$ funksiyasına baxaq. Aydındır ki,

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\overline{x}, \text{ əgər } \alpha_i=0,\\ x, \text{ əgər } \alpha_i=1,\end{cases}$$

və

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \overline{\alpha}_i, \text{ əgər } x = 0, \\ \alpha_i, \text{ əgər } x = 1. \end{cases}$$

Aşağıdakı funksiyanı daxil edək:

$$\varphi(x) = f(\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)).$$

Aydındır ki,

$$\varphi(0) = f(\varphi_1(0),...,\varphi_n(0)) = f(\overline{\alpha}_1,...,\overline{\alpha}_n) = f(\alpha_1,...,\alpha_n) =$$
$$= f(\varphi_1(1),...,\varphi_n(1)) = \varphi(1).$$

Son münasibətdə aralıq hesablamada $\overline{\alpha}_1,...,\overline{\alpha}_n$-lər uyğun olaraq $\alpha_1,...,\alpha_n$-lərlə əvəzləndi və nəticədə $\varphi(0) = \varphi(1)$, yəni sabit funksiya alındı. □

3. Monoton funksiyalar sinifi. $\widetilde{\alpha}$ və $\widetilde{\beta}$ ilə uyğun olaraq $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ və $(\beta_1,...,\beta_n)$ yığımlarını işarə edək. Aydındır ki, $\widetilde{\alpha}$ və $\widetilde{\beta}$ yığımların vektorial yazılışıdır və ona görə də $f(\alpha_1,...,\alpha_n)$ əvəzinə $f(\widetilde{\alpha})$ istifadə oluna bilər.

Tərif 4. $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ və $\widetilde{\beta} = (\beta_1,...,\beta_n)$ kimi iki yığıma baxaq. Əgər

$$\alpha_1 \le \beta_1,...,\alpha_n \le \beta_n$$

olarsa, onda deyirlər ki, $\widetilde{\alpha}$ yığımı $\widetilde{\beta}$ yığımını qabaqlayır və $\widetilde{\alpha} \prec \widetilde{\beta}$ kimi işarə olunur. $\prec$ işarəsi qabaqlama münasibətinin işarəsidir. Məsələn, $(0,1,0,1) \prec (1,1,0,1)$.

Aydındır ki, $\prec$ (qabaqlama) münasibəti tranzitivlik xassəsinə malikdir, yəni $\widetilde{\alpha} \prec \widetilde{\beta}$ və $\widetilde{\beta} \prec \widetilde{\gamma}$ isə, onda $\widetilde{\alpha} \prec \widetilde{\gamma}$.

$\prec$ (qabaqlama) münasibətində heç də bütün yığımlar arasında doğru deyildir. Məsələn, (0,1,0,1) və (1,0,1,0) yığımlar arasında $\prec$ münasibəti doğru deyildir.

n uzunluqlu bütün ikilik yığımlar $\prec$ qabaqlama əməliyyatına nəzərən qismən nizamlanmış olur.

Tərif 5. Əgər $\tilde{\alpha}$ və $\tilde{\beta}$ yığımlarından biri digərini qabaqlayırsa (yəni ya $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$, ya da $\tilde{\beta} \prec \tilde{\alpha}$ ödənirsə), onda $\tilde{\alpha}$ və $\tilde{\beta}$ yığımları müqayisə olunan yığımlar adlanırlar.

Tərif 6. Əgər $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ şərtini ödəyən ixtiyari iki $\tilde{\alpha}$ və $\tilde{\beta}$ yığımları üçün $f(\tilde{\alpha}) \le f(\tilde{\beta})$ bərabərsizliyi ödənərsə, onda $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasına monoton funksiya deyilir.

Monoton funksiyalara nümunə olaraq $0, 1, x, x_1 \& x_2$ və $x_1 \vee x_2$ funksiyalarını göstərmək olar.

Nümunə 2. $f(x,y,z) = xy \oplus yz \oplus zx \oplus z$ funksiyasının monoton olmasını yoxlamalı. Əvvəlcə funksiyanın qiymətlər cədvəlini quraq:

x	y	z	$A = xy$	$B = yz$	$C = zx$	$D = A \oplus B \oplus C$	$f = D \oplus z$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0

Məsələn, $(x,y,z) = (0,0,1)$ və $(x,y,z) = (0,1,1)$ yığımlarına baxaq. $(0,0,1) \prec (0,1,1)$ olmasına baxmayaraq

$$f(0,0,1) = 1 > 0 = f(0,1,1).$$

Bu o deməkdir ki, funksiya monoton deyildir.

Aşağıdakı çoxluqları daxil edək:

$$G_0 = \{\tilde{\alpha} \mid \tilde{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_n),\ \alpha_i \in E^2,\ i = \overline{1,n};\ f(\tilde{\alpha}) = 0\},$$

$$G_1 = \{\tilde{\alpha} \mid \tilde{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_n),\ \alpha_i \in E^2,\ i = \overline{1,n};\ f(\tilde{\alpha}) = 1\}.$$

Aydındır ki, $f(x)$ funksiyasının monotonluğunu yoxlamaq üçün hərəsi G_0 və G_1 çoxluqlarının birinə daxil olan və qabaqlama münasibətində olan ixtiyari iki $\widetilde{\alpha}$ və $\widetilde{\beta}$ yığımlarında $f(x)$ funksiyasının aldığı qiymətlər müqayisə olunmaldır. Asanlıqla isbat etmək olar:

Lemma 2. $\widetilde{\alpha} \prec \widetilde{\beta}$ münasibətində olan ixtiyari $\widetilde{\alpha}$ və $\widetilde{\beta}$ üçün $\widetilde{\alpha} \in G_0$ və $\widetilde{\beta} \in G_1$ olarsa, onda $f(x)$ funksiyası monotondur. Əgər $\widetilde{\alpha} \prec \widetilde{\beta}$ münasibətində olan elə $\widetilde{\alpha}$ və $\widetilde{\beta}$ mövcuddursa ki, $\widetilde{\alpha} \in G_1$ və $\widetilde{\beta} \in G_0$, onda $f(x)$ funksiyası monoton olmayan funksiyadır.

Bu lemmadan istifadə etməklə $f(x)$ funksiyasının monoton olmamasını yoxlamaq üçün $\widetilde{\beta} \prec \widetilde{\alpha}$ şərtini ödəyən $\widetilde{\beta} \in G_1$ və $\widetilde{\alpha} \in G_0$ yığımlarını axtarmaq lazımdır. Əgər belə yığımlar mövcud olarsa, onda funksiya monoton deyildir, mövcud olmazsa, onda funksiya monotondur.

Nümunə 3. $f(x_1, x_2, x_3) = (00110111)$ funksiyasının monoton olmasını yoxlamalı.

Bu funksiya üçün G_0 və G_1 çoxluqları aşağıdakı çoxluqlardır:

$$G_0 = \{(0,0,0), (0,0,1), (1,0,0)\},$$

$$G_1 = \{(0,1,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}.$$

G_0 və G_1 çoxluqlarından göründüyü kimi G_1-də elə bir yığım yoxdur ki, G_0-dan olan hansısa bir yığımı qabaqlasın. Odur ki, funksiya monotondur.

Nümunə 4. $f(x_1, x_2, x_3) = (01100111)$ funksiyasının monoton olmasını yoxlamalı.

Bu funksiya üçün G_0 və G_1 çoxluqları aşağıdakı çoxluqlardır:

$$G_0 = \{(0,0,0), (0,1,1), (1,0,0)\},$$

$$G_1 = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}.$$

G_1 çoxluğundan olan $\widetilde{\alpha}=(0,1,0)$ yığımı G_0-dan olan $\widetilde{\beta}=(0,1,1)$ yığımını qabaqlayır. Bundan başqa G_1-dən olan $\widetilde{\alpha}=(0,0,1)$ yığımı da G_0-dan olan $\widetilde{\beta}=(0,1,1)$ yığımını qabaqlayır. Deməli funksiya monoton deyildir.

M ilə məntiq cəbrinin bütün monoton funksiyaları çoxluğunu işarə edək.

Teorem 7. M sinfi qapalı sinifdir.

İsbatı. x eynilik funksiyası M sinfinə daxil olduğundan M sinfinin qapalı olmasını isbat etmək üçün ixtiyari $f, f_1,..., f_m \in M$ üçün $\Phi = f(f_1,..., f_m)$ funksiyasının da monoton olmasını göstərmək kifayətdir. Tutaq ki,

$$\widetilde{x}=(x_1,...,x_n),\ \widetilde{x}^1=(x_{11},...,x_{1p_1}),...,\ \widetilde{x}^m=(x_{m1},...,x_{mp_m})$$

dəyişənlər yığımı $\Phi, f_1,..., f_m$ funksiyalarının dəyişənlər yığımıdır və Φ funksiyasının dəyişənləri ancaq və ancaq $f_1,..., f_m$ funksiyalarında iştirak edən dəyişənlərdən ibarətdir. Tutaq ki, $\widetilde{\alpha}$ və $\widetilde{\beta}$ yığımları $\widetilde{x}$ dəyişənlər yığımının iki n uzunluqlu qiymətlər yığımıdır və $\widetilde{\alpha} \prec \widetilde{\beta}$. Bu qiymətlər yığımı $\widetilde{x}^1,...,\widetilde{x}^m$ dəyişənlər yığımı üçün uyğun olaraq $\widetilde{\alpha}^1, \widetilde{\beta}^1,..., \widetilde{\alpha}^m, \widetilde{\beta}^m$ qiymətlər yığımı əmələ gətirirlər və $\widetilde{\alpha}^1 \prec \widetilde{\beta}^1,..., \widetilde{\alpha}^m \prec \widetilde{\beta}^m$.

$f_1,..., f_m$ funksiyaları monoton olduqları üçün

$$f_1(\widetilde{\alpha}^1) \le f_1(\widetilde{\beta}^1),..., f_m(\widetilde{\alpha}^m) \le f_m(\widetilde{\beta}^m).$$

Ona görə də $(f_1(\widetilde{\alpha}^1),..., f_m(\widetilde{\alpha}^m)) \prec (f_1(\widetilde{\beta}^1),..., f_m(\widetilde{\beta}^m))$ və f funksiyası monoton olduğundan alırıq:

$$f(f_1(\widetilde{\alpha}^1),..., f_m(\widetilde{\alpha}^m)) \le f(f_1(\widetilde{\beta}^1),..., f_m(\widetilde{\beta}^m)).$$

Buradan alırıq ki,

$$\Phi(\widetilde{\alpha}) = f(f_1(\widetilde{\alpha}^1),..., f_m(\widetilde{\alpha}^m)) \le f(f_1(\widetilde{\beta}^1),..., f_m(\widetilde{\beta}^m)) = \Phi(\widetilde{\beta}).$$

Tərif 7. Tutaq ki, iki $\widetilde{\alpha}$ və $\widetilde{\beta}$ yığımları verilib və

$$\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\alpha_i,\alpha_{i+1},...,\alpha_n),\quad \widetilde{\beta}=(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\overline{\alpha}_i,\alpha_{i+1},...,\alpha_n),$$

onda $\widetilde{\alpha}$ və $\widetilde{\beta}$ yığımları i-ci koordinata görə qonşu yığımlar adlanırlar.

Lemma 3. $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasının monoton olmaması üçün zəruri və kafi şərt $\widetilde{\alpha}\prec\widetilde{\beta}$ və $f(\widetilde{\alpha})>f(\widetilde{\beta})$ şərtlərini ödəyən qonşu $\widetilde{\alpha}$ və $\widetilde{\beta}$ yığımlarının olmasıdır.

İsbatı. Zərurilik. Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası monoton deyil. Onda elə iki $\widetilde{\alpha}'$ və $\widetilde{\beta}'$ yığımları tapmaq olar ki, $\widetilde{\alpha}'\prec\widetilde{\beta}'$ və $f(\widetilde{\alpha}')>f(\widetilde{\beta}')$ olsun. $\widetilde{\alpha}'$ və $\widetilde{\beta}'$ yığımları hər hansı bir koordinata görə qonşu olarsa, onda zərurilik isbat olunmuş olur. Tutaq ki, $\widetilde{\alpha}'$ və $\widetilde{\beta}'$ qonşu deyildirlər. Tutaq ki, $\widetilde{\alpha}'$ və $\widetilde{\beta}'$ yığımları $t>1$ sayda koordinatlarda bir-birindən fərqlənirlər və aydındır ki, $\widetilde{\alpha}'$ bu t sayda koordinatda «0», $\widetilde{\beta}'$ isə «1» qiymətlərinə malikdirlər. Ona görə də $\widetilde{\alpha}'$ və $\widetilde{\beta}'$ yığımları arasında $t-1$ sayda $\widetilde{\alpha}^{(2)},\widetilde{\alpha}^{(3)},...,\widetilde{\alpha}^{(t)}$ ilə işarə olunan yığımları mövcuddur və bu yığımlar üçün

$$\widetilde{\alpha}'=\widetilde{\alpha}^{(1)}\prec\widetilde{\alpha}^{(2)}\prec...\prec\widetilde{\alpha}^{(t)}\prec\alpha^{(t+1)}=\widetilde{\beta}'$$

münasibəti ödənir. Bundan başqa bu münasibətdə yanaşı dayanan iki yığım müəyyən bir koordinata görə qonşudurlar. Əgər istənilən $\nu\in\{1,...,t\}$ üçün

$$f(\widetilde{\alpha}^{(\nu)})\le f(\widetilde{\alpha}^{(\nu+1)})$$

olarsa, onda $f(\widetilde{\alpha}')>f(\widetilde{\beta}')$ ödənməz. Odur ki, $\widetilde{\alpha}^{(1)},\widetilde{\alpha}^{(2)},...,\widetilde{\alpha}^{(t+1)}$ yığımları arasında $\widetilde{\alpha}$ və $\widetilde{\beta}$ kimi işarə olunan elə qonşu yığımları tapılar ki,

$$f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$$

ödənsin.

Kafilik. Tutaq ki, $\tilde{\alpha}$ və $\tilde{\beta}$ yığımları $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ şərtini ödəyən qonşu yığımlarıdır və bu zaman $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$ ödənir. Onda tərif 6-ya görə $f(x_1,...,x_n)$ monoton olmaz. □

Lemma 3-dən istifadə etməklə aşağıdakı lemmanı isbat edək.

Lemma 4. Əgər $f(x_1,...,x_n) \notin M$ olarsa, onda dəyişənləri 0, 1 sabitləri və x dəyişəni ilə əvəzləməklə ondan $\bar{x}$ funksiyasını almaq olar.

İsbatı. Yuxarıda isbat olunan lemma 3-yə görə $f(x_1,...,x_n)$ monoton olmadığı üçün $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ şərtini ödəyən elə qonşu $\tilde{\alpha}$ və $\tilde{\beta}$ yığımları mövcuddur ki,

$$f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta}).$$

Tutaq ki, $\tilde{\alpha}$ və $\tilde{\beta}$ yığımları i-ci koordinata görə qonşudurlar, yəni

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},...,\alpha_n), \quad \tilde{\beta} = (\alpha_1,...,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},...,\alpha_n).$$

Aşağıdakı funksiyanı daxil edək:

$$\varphi(x) = f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},x,\alpha_{i+1},...,\alpha_n).$$

Aydındır ki,

$$\varphi(0) = f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},...,\alpha_n) = f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta}) =$$

$$= f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},...,\alpha_n) = \varphi(1).$$

Buradan da alınır ki, $\varphi(0)=1, \varphi(1)=0$. Belə birdəyişənli funksiya ancaq $\varphi(x)=\bar{x}$ funksiyasıdır. □

4. Xətti funksiyalar sinfi. Xətti funksiyalar sinfi L sinfidir. Bu sinfə 0 və 1 sabitləri və x eynilik, $\bar{x}$ inkar, $x_1 + x_2$ (mod2 üzrə toplama) funksiyaları daxildir, lakin $x_1 \& x_2$ və $x_1 \vee x_2$ funksiyaları bu sinfə daxil deyildir.

Yuxarıda §6-da qeyd olunmuşdu ki, bu sinif qapalıdır.

L sinfinə daxil olmayan funksiyalar qeyri-xətti funksiyalar adlanırlar.

Qeyri-xətti funksiyalar üçün aşağıdakı xassəni isbat edək:

Lemma 5. Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n)\notin L$. Onda bu funksiyadan dəyişənləri 0 və 1 sabitləri, x və $\overline{x}$ funksiyaları ilə əvəzetməklə və ola bilsin ki, f funksiyasının qiymətini invers etməklə (inkarını götürməklə) $x_1 \& x_2$ funksiyasını almaq olar.

İsbatı. $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası üçün Jeqalkin polinomunu götürək:

$$f(x_1,...,x_n)=\sum_{i=0}^{n}{}^{\oplus}\sum_{(j_1,...,j_i)\in L_i}{}^{\oplus} K^{(i)}_{j_1,...,j_i}\, x_{j_1}...x_{j_i}\,, \tag{1}$$

harada ki,

$$L_i=\{(j_1,...j_i)\big| 1\le j_1<...<j_i\le n\}.$$

(1) polinomu qeyri-xətti olduğundan ondan iki vuruqdan az olmayan hədlər tapmaq olar. Ümumiliyi pozmadan hesab etmək olar ki, bu vuruqlar arasında x_1 və x_2-lər də mövcuddur. Onda (1) polinomunu aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\sum_{i=0}^{n}{}^{\oplus}\sum_{(j_1,...,j_i)\in L_i}{}^{\oplus} K^{(i)}_{j_1,j_2,...,j_i} x_{j_1}...x_{j_i} = x_1x_2 f_1(x_3,...,x_n)+$$

$$+x_1 f_2(x_3,...,x_n)+x_2 f_3(x_3,...,x_n)+f_4(x_3,...,x_n).$$

(1) polinomuna ayrılış yeganə olduğundan aydındır ki, $f_1(x_3,...,x_n)\not\equiv 0$.

Tutaq ki, $\alpha_3,...,\alpha_n$ sabitləri elədir ki, $f_1(\alpha_3,...,\alpha_n)=1$. Aşağıdakı funksiyanı daxil edək:

$$\varphi(x_1,x_2)=f(x_1,x_2,\alpha_3,...,\alpha_n). \tag{2}$$

Aydındır ki,

$$\varphi(x_1,x_2)=x_1x_2+\alpha x_1+\beta x_2+\gamma,$$

harada ki, α,β və γ kəmiyyətləri 0 və ya 1-dən ibarət olan sabitlərdir: $\alpha=f_2(\alpha_3,...,\alpha_n),\ \beta=f_3(\alpha_3,...,\alpha_n),\ \gamma=f_4(\alpha_3,...,\alpha_n)$.

Aşağıdakı funksiyanı daxil edək

$$\psi(x_1,x_2)=\varphi(x_1+\beta,x_2+\alpha)+\alpha\beta+\gamma\ . \qquad (3)$$

Aydındır ki,

$$\varphi(x_1+\beta,x_2+\alpha)+\alpha\beta+\gamma=(x_1+\beta)(x_2+\alpha)+\alpha(x_1+\beta)+$$

$$+\beta(x_2+\alpha)+\gamma+\alpha\beta+\gamma=x_1x_2.$$

Beləliklə, $\psi(x_1,x_2)=x_1\,\&\,x_2$ funksiyasını alırıq.

İndi isə $\psi(x_1,x_2)=x_1\,\&\,x_2$ funksiyasının $f(x_1,...,x_n)$-dən hansı əməliyyatların nəticəsində alındığını araşdıraq.

İlk əvvəl $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasından $x_3,x_4,...,x_n$-lərin yerinə 0 və 1-dən ibarət olan $\alpha_3,\alpha_4,...,\alpha_n$-lər yazılır, yəni onlar 0 və 1-lərlə əvəz olunur və, beləliklə, $\varphi(x_1,x_2)$ funksiyası qurulur. Sonra isə (3) düsturuna uyğun olaraq $\varphi(x_1,x_2)$ funksiyasında x_1 və x_2 uyğun olaraq $x_1+\beta$ və $x_2+\alpha$ ilə əvəzlənməklə nəticədə alınan $\varphi(x_1+\alpha,\, x_2+\beta)$-ın üzərinə $\alpha\beta+\gamma$-ı gəlməklə $\psi(x_1,x_2)$ funksiyası qurulur.

Qeyd edək ki, $\alpha=1$ və $\beta=1$ olduqda x_1-in və x_2-nin uyğun olaraq $x_1+\alpha$ və $x_2+\beta$ ilə əvəzlənməsi onların $\bar{x}_1$ və $\bar{x}_2$ ilə əvəzlənməsi deməkdir. $\alpha\beta+\gamma=0$ olduqda $\varphi(x_1+\beta,x_2+\alpha)$-ın qiyməti dəyişmədən $\psi(x_1,x_2)$-nin qiyməti kimi götürülür. $\alpha\beta+\gamma=1$ olduqda isə $\psi(x_1,x_2)$ funksiyasının qiyməti $\varphi(x_1+\beta,x_2+\alpha)$-ın qiymətinin inversi kimi (inkarı) götürülür. □

Aşağıda cədvəl 1-də məntiq cəbrinin elementar funksiyalarının T_0, T_1, S, M və L siniflərinə daxil olması göstərilir. Belə ki, xanada «+» işarəsi sətrin əvvəlində göstərilən funksiyanın sütunun yuxarısında göstərilən sinfə daxil olmasını, «-» işarəsi isə daxil olmamasını göstərir.

Cədvəl 1.

Funksiyalar	T_0	T_1	S	M	L
1	2	3	4	5	6

0	+	-	-	+	+
1	-	+	-	+	+
x	+	+	+	+	+
$\bar{x}$	-	-	+	-	+
$x_1 \cdot x_2$	+	+	-	+	-
$x_1 \vee x_2$	+	+	-	+	-
$x_1 + x_2$	+	-	-	-	+
$x_1 \to x_2$	-	+	-	-	-
$x_1 \sim x_2$	-	+	-	-	+
x_1 / x_2	-	-	-	-	-
$x_1 \downarrow x_2$	-	-	-	-	-

Cədvəl 1-dən görünür ki, T_0, T_1, S, M və L sinifləri cüt-cüt müxtəlifdir.

§8. Tamlıq üçün zəruri və kafi şərtlər

Tutaq ki, $R = \{f_1, f_2, ..., f_s, ...\}$ ixtiyari funksiyalar sinfi verilmidir. Bu sistemin tam olub olmamasını müəyyən etmək üçün funksional tamlıq haqqında aşağıdakı teorem istifadə oluna bilər.

Teorem 1 (Post teoremi). R sisteminin tam olması üçün zəruri və kafi şərt bu sistemin T_0, T_1, S, M və L qapalı siniflərindən heç birinə bütövlükdə daxil olmamasıdır.

İsbatı. Zərurilik. Tutaq ki, R - tamdır, yəni $[R] = P_2$. Fərz edək ki, R göstərilən siniflərdən hər hansı birinə daxildir. Bu sinfi B ilə işarə edək. Beləliklə, $R \subseteq B$. Onda qapanmanın xassələrinə və B-in qapalı olmasına görə alarıq:

$$P_2 = [R] \subseteq [B] = B,$$

yəni $B = P_2$. Bu isə belə deyildir. Deməli, R göstərilən siniflərdən heç birinə bütövlükdə daxil deyildir.

Kafilik. Tutaq ki, R göstərilən siniflərdən heç birinə bütövlükdə daxil deyildir. Onda R-dən beşdən çox olmayan sayda funksiyadan ibarət və göstərilən siniflərdən heç birinə bütövlükdə daxil olmayan R' alt sistemini ayırmaq olar. Bu məqsədlə R-dən f_0, f_1, f_S, f_M və f_L funksiyalarını ayıraq, hansı ki, uyğun olaraq T_0, T_1, S, M və L siniflərinə aid deyildirlər. Aşağıdakını qəbul edək:

$$R' = \{f_0, f_1, f_S, f_M, f_L\}.$$

Hesab etmək olar ki, bütün bu funksiyalar eyni bir $x_1, x_2, ..., x_n$ dəyişənlərindən asılıdır. Kafiliyin isbatını üç mərhələdə aparaq:

I) f_0, f_1 və f_S funksiyalarının köməkliyi ilə 0 və 1 sabitlərinin qurulması.

$f_0 \notin T_0$ funksiyasına baxaq. İki variant mümkündür.

1. $f_0(1,...,1) = 1$. Onda $\varphi(x) = f_0(x,...,x)$ funksiyası 1 sabitidir, çünki $\varphi(0) = f_0(0,...,0) = 1$, $\varphi(1) = f_0(1,...,1) = 1$.
İkinci sabit f_1 funksiyasından alınır: $f_1(1,...,1) = 0$.

2. $f_0(1,...,1) = 0$. Onda $\varphi(x) = f_0(x,...,x)$ funksiyası $\bar{x}$ inkar funksiyasıdır, çünki $\varphi(0) = f_0(0,...,0) = 1$, $\varphi(1) = f_0(1,...,1) = 0$.

$f_s \notin S$ funksiyasını götürək. $\bar{x}$ funksiyasına malik olduğumuzdan lemma 7.1-ə görə f_s funksiyasından sabit almaq olar. $\bar{x}$ funksiyasına malik olduğumuzdan ikinci sabiti də almaq olar.

Beləliklə, hər iki halda 0 və 1 sabitlərini əldə edirik.

II) 0, 1 və f_M funksiyası vasitəsilə $\bar{x}$ funksiyasının qurulması. Bu lemma 7.4 əsasında həyata keçirilir.

III) 0 və 1 sabitləri, $\bar{x}$ funksiyası və f_L funksiyası vasitəsilə $x_1 \& x_2$ funksiyasının qurulması. Bu lemma 7.5 vasitəsilə həyata keçirilir.

Beləliklə, biz üç mərhələdə R' (deməli həm də R) üzərində $\bar{x}$ və $x_1 \& x_2$ funksiyalarını realizə etdik. $\{\bar{x}, x_1 \& x_2\}$ funksiyalar sistemi tam olduğundan məlum teoremə görə (teorem 6.1) R' və həm də R funksiyalar sinfi tamdır. Beləliklə kafilik isbat olundu. □

Nəticə 1. P_2-dən olan funksiyaların hər bir Q qapalı sinfi T_0, T_1, S, M və L siniflərindən ən azı birinə daxildir.

Tərif 1. Əgər P_2-dən olan funksiyaların B sinfi tam olmazsa, amma istənilən $f \in P_2$, $f \notin B$ üçün isə $B \bigcup \{f\}$ tam olarsa, onda B sinfi natamam (və ya maksimal) adlanır.

Tərifdən göründüyü kimi natamam sinif qapalıdır.

Nəticə 2. Məntiq cəbrində ancaq beş natamam sinif mövcuddur və onlar da T_0, T_1, S, M və L sinifləridir.

Funksional tamlıq haqqında teoremin tətbiqinə aid nümunələrə baxaq.

Nümunə 1.

$$f_1 = x_1 x_2, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 1, \; f_4 = x_1 + x_2 + x_3 \pmod 2.$$

Göstərək ki, bu sinif tamdır.

Aydındır ki, $f_3 \notin T_0$, $f_2 \notin T_1$, $f_2 \notin S$, $f_4 \notin M$, $f_1 \notin L$. Deməli, bu sinif tamdır. Digər tərəfdən istənilən bir funksiyanı atsaq onda tam olmayan sistem alarıq.

$$\{f_2, f_3, f_4\} \subset L, \quad \{f_1, f_3, f_4\} \subset T_1,$$
$$\{f_1, f_2, f_4\} \subset T_0, \quad \{f_1, f_2, f_3\} \subset M.$$

Teorem 1-in isbatından bilavasitə aşağıdakı teorem alınır:

Teorem 2. P_2-də tam olan istənilən R funksiyalar sistemindən dörddən çox olmayan funksiyadan ibarət olan tam alt sistem ayırmaq olar.

İsbatı. Teorem 1-in isbatında gördük ki, R sistemindən beşdən çox olmayan sayda funksiyadan ibarət olan tam R' alt sistemini ayırmaq olar. Məlumdur ki, $f_0 \notin T_0$ funksiyası ya $f_0(0,...,0) = f_0(1,...,1)$ olduqda özü-özünə ikili olmayan (1-ci hal), ya da ki, $f_0(0,...,0) > f_0(1,...,1)$ olduqda (2-ci hal) monoton olmayan funksiyadır. Ona görə də tam sistem ya $\{f_0, f_1, f_M, f_L\}$, ya da $\{f_0, f_S, f_L\}$ sistemi olar. □

Funksional tamlıq haqqında teorem təkcə tamlıq haqqında kriteriya vermir. O həm də mükəmməl d.n.f. və ya k.n.f.-ə ayırmaqla birlikdə istənilən f bul funksiyası üçün R tam sistemi vasitəsilə düstur verir.

§9. Bul funksiyalarının diferensial hesabı

1. Dəyişənlərin və bul cəbrinin funksiyalarının diferen-sialı. $B_2 = E^2 = \{0,1\}$ çoxluğuna baxaq. $B_2^k = \underbrace{B_2 \times B_2 \times \ldots \times B_2}_{k}$ işarə edək. Tutaq ki, $\widetilde{x}$ və $\widetilde{y}$ B_2^k-dan olan iki vektordur, yəni $\widetilde{x} = (x_1,\ldots,x_k)$, $\widetilde{y} = (y_1,\ldots,y_k)$. $\widetilde{x} \oplus \widetilde{y}$ ilə

$$(x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, \ldots, x_k \oplus y_k)$$

vektorunu işarə edək. Aydındır ki, $G = (B_2^k, \oplus)$ qrup əmələ gətirir, yəni $\widetilde{x} \oplus \widetilde{y} = \widetilde{z} \in B_2^k$.

$\widetilde{y} = \widetilde{z} \oplus \widetilde{x}$ vektoruna $\widetilde{z}$ və $\widetilde{x}$ vektorunun fərqi deyilir. Aydındır ki, bütün $i = 1,2,\ldots,k$ üçün

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{əgər } z_i = x_i, \\ 1, & \text{əgər } z_i \neq x_i. \end{cases}$$

Beləliklə, y_i-nin qiyməti x_i-dən z_i-yə keçdikdə x_i-nin qiymətinin dəyişmə faktını əks etdirir.

$\widetilde{x}$ vektorunun dəyişmə faktını işarələmək üçün dx_i dəyişənini daxil edək:

$$dx_i = \begin{cases} 1, & \text{əgər } x_i \text{ qiymətini dəyişirsə}, \\ 0, & \text{əgər } x_i \text{ qiymətini dəyişmirsə}. \end{cases}$$

$x_i^* = x_i \oplus dx_i$-yə baxaq. Burada x_i^* qiyməti x_i-nin qiyməti dəyişdikdən sonra alınan qiymətdir. Cədvəl 1-də x_i, dx_i və x_i^*-un qiymətləri verilir.

Cədvəl 1

x_i	dx_i	x_i^*
0	0	0
0	1	1

1	0	1
1	1	0

Tərif 1. dx_i dəyişəni x_i dəyişəninin diferensialı adlanır və o x_i-nin dəyişməsini təsvir edir.

x_i və dx_i-in verilən qiymətlərinə görə $x_i^* = x_i \oplus dx_i$ münasibətindən x_i-nin yeni qiyməti alınır. Bu zaman $dx_i = 1$ x_i-nin dəyişmə faktını, $dx_i = 0$ isə x_i-nin sabitliyini göstərir.

$dx = (dx_1, dx_2, ..., dx_k)$ vektoru x vektorunun diferensialı adlanır.

$$\tilde{x}^* = \tilde{x} + d\tilde{x}$$

münasibəti ilə $d\tilde{x}$ diferensialı $\tilde{x}$ dəyişəni ilə bağlı olur. Mümkün $d\tilde{x}$ vektorları dB_2^k dəyişmə fəzasını əmələ gətirir.

Tərif 2. Tutaq ki, $f(x_1, x_2, ..., x_k) = f(\tilde{x})$ k dəyişənli bul funksiyasıdır. Onda

$$df = f(\tilde{x}) \oplus f(\tilde{x} \oplus d\tilde{x})$$

ifadəsi f funksiyasının tam diferensialı adlanır.

Nümunə 1. $f = \bar{x} \vee y\bar{z}$ funksiyasına baxaq. Burada $\tilde{x} = (x, y, z)$ -dir.

$$d_{\tilde{x}} f = d_{(x,y,z)} f = (\bar{x} \vee y\bar{z}) \oplus ((\overline{x \oplus dx}) \vee (y \oplus dy)(\overline{z \oplus dz})) =$$

$$= (1 \oplus y\bar{z})dx \oplus x\bar{z}dy \oplus xydz \oplus \bar{z}dxdy \oplus ydxdz \oplus xdydz \oplus dxdydz\ .$$

Tərif 3. Tutaq ki, $f(x_1, ..., x_k) = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ bul funksiyasıdır, hansı ki, $\tilde{x}_1$ və $\tilde{x}_2$ vektorları $\tilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ vektorunun altvektorlarıdır. Onda f funksiyasının $\tilde{x}_1$-ə görə xüsusi diferensialı aşağıdakı münasibətə deyilir:

$$d_{\tilde{x}_1} f = d_{\tilde{x}} f \Big|_{d\tilde{x}_2 = 0}\ .$$

Beləliklə, f funksiyasının $\tilde{x}_1$ altvektoruna görə xüsusi diferensialı f funksiyasının $\tilde{x}$ vektoruna görə tam diferensialından ancaq $\widetilde{x}_1$ altvektorunun komponentlərinin dəyişməsinə icazə verilməsi, $\widetilde{x}_2$ altvektorunun komponentlərinin dəyişməsinə icazə verilməməsi yolu ilə alınır.

Xüsusi halda $\widetilde{x}_1$ vektoru ancaq bir x_1 komponentindən asılı olarsa, yəni $\widetilde{x}_1 = \{x_1\}$ olarsa, onda yuxarıda təyin olunan xüsusi diferensial sadə xüsusi diferensial adlanır. Əgər $\widetilde{x}_2 = x$, yəni $\widetilde{x}_1 = \varnothing$ olarsa, onda heç bir dəyişikliyə icazə verilmir və bu halda diferensial aşağıdakı kimi işarə olunur:

$$d_{\varnothing} f = f(\widetilde{x}) \oplus f(\widetilde{x} \oplus 0) = f(\widetilde{x}) \oplus f(\widetilde{x}) = 0\,.$$

Aşağıdakı teoremdə bul funksiyalarının diferensiallarının xassələri şərh olunur.

Teorem 1. Tutaq ki, $f(\widetilde{x})$ və $g(\widetilde{x})$ funksiyaları k dəyişənli bul funksiyaları, a- sabit funksiya, $c \in \{0,1\}$ - sabit və $\widetilde{x}_1 \subseteq \widetilde{x}$, yəni x_1 vektoru $\widetilde{x}$-ın altvektorudur. Onda aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

1. $d_{\widetilde{x}_1} a = 0$;
2. $d_{\widetilde{x}_1} [f(\widetilde{x}) \oplus g(\widetilde{x})] = d_{\widetilde{x}_1} f(\widetilde{x}) \oplus d_{\widetilde{x}_1} g(\widetilde{x})$;
3. $d_{\widetilde{x}_1} [cf(\widetilde{x})] = c d_{\widetilde{x}_1} f(\widetilde{x})$;
4. $d_{\widetilde{x}_1} [c \vee f(\widetilde{x})] = \overline{c} d_{\widetilde{x}_1} f(\widetilde{x})$;
5. $d_{\widetilde{x}_1} [c \oplus f(\widetilde{x})] = d_{\widetilde{x}_1} f(\widetilde{x})$;
6. $d_{\widetilde{x}_1} f(\widetilde{x}) = d_{\widetilde{x}_1} \overline{f(\widetilde{x})}$;
7. $d_{\widetilde{x}_1} [f(\widetilde{x}) g(\widetilde{x})] = f(\widetilde{x}) d_{\widetilde{x}_1} g(\widetilde{x}) \oplus g(\widetilde{x}) d_{\widetilde{x}_1} f(\widetilde{x}) \oplus$
$$\oplus\, d_{\widetilde{x}_1} f(\widetilde{x}) d_{\widetilde{x}_1} g(\widetilde{x});$$
8. $d_{\widetilde{x}_1} [f(\widetilde{x}) \vee g(\widetilde{x})] = \overline{f(\widetilde{x})} d_{\widetilde{x}_1} g(\widetilde{x}) \oplus \overline{g(\widetilde{x})} d_{\widetilde{x}_1} f(\widetilde{x}) \oplus$
$$\oplus\, d_{\widetilde{x}_1} f(\widetilde{x}) d_{\widetilde{x}_1} g(\widetilde{x})\,.$$

İsbatı.

1. $a \oplus a = 0$ olduğundan $d_{x_1} a = 0$ alınır.

2. Təyinə görə

$$d_{\tilde{x}_1}[f(\tilde{x})\oplus g(\tilde{x})]=[f(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\oplus g(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)]\oplus[f(\tilde{x}_1\oplus d\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\oplus$$

$$\oplus g(\tilde{x}_1\oplus d\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)]=[f(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\oplus f(\tilde{x}_1+d\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)]\oplus[g(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\oplus$$

$$\oplus g(\tilde{x}_1\oplus d\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)]=d_{\tilde{x}_1}f(\tilde{x})\oplus d_{\tilde{x}_1}g(\tilde{x}).$$

3. Bu xassəni $c=0$ və $c=1$ götürməklə bilavasitə yoxlamaqla isbat etmək olar.

4. Bu xassəni $c=0$ və $c=1$ götürməklə bilavasitə yoxlamaqla isbat etmək olar.

5. Bu xassəni $c=0$ və $c=1$ götürməklə bilavasitə yoxlamaqla isbat etmək olar.

6. Bu xassəni «5.» xassəsində $c=1$ götürməklə yoxlamaq olar.

7. Sağ tərəfdə rast gəlinən bütün diferensialları onlar üçün təyin olunan münasibətlərlə əvəz etsək, onda alarıq:

$$f(\tilde{x})d_{\tilde{x}_1}g(\tilde{x})\oplus g(\tilde{x})d_{\tilde{x}_1}f(\tilde{x})\oplus d_{\tilde{x}_1}f(\tilde{x})d_{\tilde{x}_1}g(\tilde{x})=f(\tilde{x})[g(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\oplus$$

$$\oplus g(\tilde{x}_1\oplus d\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)]\oplus g(\tilde{x})[f(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\oplus f(\tilde{x}_1\oplus d\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)]\oplus$$

$$\oplus[f(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\oplus f(\tilde{x}_1\oplus d\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)]\cdot[g(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\oplus g(\tilde{x}_1+d\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)]=$$

$$=f(\tilde{x})g(\tilde{x})\oplus f(\tilde{x})g(\tilde{x}_1\oplus d\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\oplus g(\tilde{x})f(\tilde{x})\oplus$$

$$\oplus g(\tilde{x})f(\tilde{x}_1\oplus d\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\oplus f(\tilde{x})g(\tilde{x})\oplus f(\tilde{x})g(\tilde{x}_1\oplus d\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\oplus$$

$$\oplus f(\tilde{x}_1\oplus d\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)g(\tilde{x})\oplus f(\tilde{x}_1\oplus d\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)g(\tilde{x}_1\oplus d\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)=$$

$$=f(\tilde{x})g(\tilde{x})\oplus f(\tilde{x}_1\oplus d\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)g(\tilde{x}_1\oplus d\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)=d_{\tilde{x}_1}[f(\tilde{x})g(\tilde{x})].$$

8. Bu xassə 7-dən analoji olaraq alınır, lakin isbat zamanı

$$f\vee g=f\oplus g\oplus fg\ .$$

düsturundan istifadə etmək lazımdır. □

Aydındır ki, $f(x_i)=x_i$ olarsa, onda

$$d_{x_i}f(x_i)=x_i\oplus(x_i\oplus dx_i)=dx_i$$

olar. İstənilən $f(\tilde{x})$ üçün $d_{\tilde{x}_1}(d_{\tilde{x}_1}f(\tilde{x}))$-ı hesablayaq, hansı ki, x_1 vektoru x vektorunun altvektorudur. Təyinə görə

$$d_{\tilde{x}_1} f(\tilde{x}) = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \oplus f(\tilde{x}_1 \oplus d\tilde{x}_1, \tilde{x}_2),$$

ona görə də

$$d_{\tilde{x}_1}(d_{\tilde{x}_1} f(\tilde{x})) = d_{\tilde{x}_1}[f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \oplus f(\tilde{x}_1 \oplus d\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)] =$$

$$= [f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + f(\tilde{x}_1 + d\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)] \oplus [f(\tilde{x}_1 + d\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \oplus$$

$$\oplus f(\tilde{x}_1 + d\tilde{x}_1 + d\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)] =$$

$$= [f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \oplus f(\tilde{x}_1 + d\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)] \oplus [f(\tilde{x}_1 \oplus d\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \oplus f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)] = 0.$$

$\tilde{x}_1$ və $\tilde{x}_2$ vektorları $\tilde{x}$ vektorunun kəsişməyən altvektorları olduğu halda

$$d_{\tilde{x}_1}(d_{\tilde{x}_2} f(x)) = d_{\tilde{x}_2}(d_{\tilde{x}_1} f(\tilde{x})).$$

Nümunə 2. $f(x, y, z) = \bar{x} \vee y\bar{z}$ funksiyasına baxaq.

$$d_x f = \bar{x} \vee y\bar{z} \oplus \overline{(x \oplus dx)} \vee y\bar{z} = \overline{x\,\overline{y\bar{z}}} \oplus \overline{(x \oplus dx)\overline{y\bar{z}}} = 1 + \overline{xy\bar{z}} +$$

$$+ \overline{x\,\overline{y\bar{z}} \oplus \overline{y\bar{z}}dx} = 1 \oplus \overline{xy\bar{z}} \oplus 1 \oplus x\,\overline{y\bar{z}} \oplus \overline{y\bar{z}}dx = \overline{y\bar{z}}dx =$$

$$= (1 \oplus y\bar{z})dx,$$

$$d_y f = \bar{x} \vee y\bar{z} \oplus \bar{x} \vee (y + dy)\bar{z} = \overline{x\,\overline{y\bar{z}}} \oplus \overline{x\,\overline{(y \oplus dy)\bar{z}}} =$$

$$= 1 \oplus x\,\overline{y\bar{z}} \oplus \overline{x[1 \oplus (y \oplus dy)\bar{z}]} = 1 \oplus x\,\overline{y\bar{z}} \oplus 1 \oplus x[1 \oplus (y \oplus dy)\bar{z}] =$$

$$= x\,\overline{y\bar{z}} \oplus x \oplus xy\bar{z} \oplus x\bar{z}dy = x(1 \oplus y\bar{z}) \oplus x \oplus xy\bar{z} \oplus x\bar{z}dy = x\bar{z}dy,$$

$$d_y(d_x f) = (1 + y\bar{z})dx \oplus (1 \oplus (y \oplus dy)\bar{z})dx = \bar{z}dxdy,$$

$$d_x(d_y f) = x\bar{z}dy \oplus (x \oplus dx)\bar{z}dy = \bar{z}dxdy.$$

Tərif 4. Tutaq ki, $f(\tilde{x})$ bul funksiyasıdır və $\tilde{x}_1 \subseteq \tilde{x}$. Onda $d^m_{\tilde{x}_1} f(\tilde{x}) = d_{x_1}(d_{x_2}(\ldots d_{x_m} f(\tilde{x})\ldots))$ ifadəsinə $f(\tilde{x})$ funksiyasının $\tilde{x}_1 = (x_1, \ldots, x_m)$ dəyişəninə görə m - dəfə xüsusi diferensialı deyilir. Qeyd edək ki, $x_j \in \tilde{x} \setminus \tilde{x}_1$ dəyişəni üçün həmişə $dx_j = 0$.

Teorem 2. Əgər $x_i, x_j \in \widetilde{x}$, onda

$$d^2_{(x_i,x_j)} f(\widetilde{x}) = d^2_{(x_j,x_i)} f(\widetilde{x}).$$

İsbatı. $f(x)$ funksiyasını x_i və x_j dəyişənlərinə ayıraq:

$$f(x) = \overline{x}_i \overline{x}_j f_0 \oplus \overline{x}_i x_j f_1 \oplus x_i \overline{x}_j f_2 + x_i x_j f_3 \ . \qquad (1)$$

Burada f_0, f_1, f_2 və f_3 x_i və x_j dəyişənlərindən asılı olmayan ayrılış komponentləridir. (1) bərabərliyinin sağ və sol tərəflərini x_i və x_j dəyişənlərinə görə diferensiallayaq, onda alarıq:

$$d_{x_j} f(x) = [\overline{x}_i f_0 \oplus \overline{x}_i f_1 \oplus x_i f_2 \oplus x_i f_3] dx_j,$$

$$d_{x_i} f(x) = [\overline{x}_j f_0 + \overline{x}_j f_1 \oplus x_j f_2 \oplus x_j f_3] dx_i,$$

$$d^2_{(x_i,x_j)} f(\widetilde{x}) = d^2_{(x_j,x_i)} f(\widetilde{x}) = (f_0 \oplus f_1 \oplus f_2 \oplus f_3) dx_i dx_j.$$

□

Bu teoremdən aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə 1. Tutaq ki, $\pi(\widetilde{x}_1)$ yerdəyişməsi $\widetilde{x}_1 = (x_1, x_2, ..., x_m)$-in istənilən bir yerdəyişməsidir. Onda

$$d^m_{\widetilde{x}_1} f(\widetilde{x}) = d^m_{\pi(\widetilde{x}_1)} f(\widetilde{x}).$$

Bu nəticə göstərir ki, m-dəfə xüsusi diferensial hansı dəyişənlər ardıcıllığına görə diferensiallama ardıcıllığının aparılmasından asılı deyildir.

$d^m_{\widetilde{x}_1} f(x)$-ın hesablanması prosedurası aşağıdakı kimidir: $\widetilde{x}_1$ vektor dəyişəninin komponentləri arasında müəyyən bir ardıcıllıq yaradırıq (məsələn, komponentlərin təbii nömrələnməsini, yəni $x_1, x_2, ..., x_m$ ardıcıllığını götürürük) və ardıcıl olaraq hesablayırıq:

$$d_{x_1} f(\widetilde{x}) = f(x_1, ..., x_m) \oplus f(x_1 + dx_1, x_2, ..., x_m),$$

$$d^2_{(x_1,x_2)} f(\widetilde{x}) = [f(x_1, ..., x_m) \oplus f(x_1 \oplus dx_1, x_2, ..., x_m)] \oplus$$

$$\oplus [f(x_1, x_2 + dx_2, x_3, ..., x_m) \oplus f(x_1 \oplus dx_1, x_2 + dx_2, x_3, ..., x_m)]$$

və i.a.

$d_{(x_1,x_2)} f(\widetilde{x})$ və $d^2_{(x_1,x_2)} f(\widetilde{x})$ münasibətlərini $x = (x_1, x_2)$ vektoru halında bir-biri ilə müqayisə edək.

Aydındır ki,

$$d_{(x_1,x_2)}f(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)\oplus f(x_1\oplus dx_1,x_2\oplus dx_2);$$

$$d^2_{(x_1,x_2)}f(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)\oplus f(x_1\oplus dx_1,x_2)\oplus f(x_1,x_2\oplus dx_2)\oplus$$
$$\oplus f(x_1\oplus dx_1,x_2\oplus dx_2).$$

Beləliklə, yazmaq olar

$$d_{(x_1,x_2)}f(x_1,x_2)=\{f(x_1,x_2)\oplus f(x_1,\bar{x}_2)\}\overline{dx_1}dx_2\oplus\{f(x_1,x_2)\oplus$$
$$\oplus f(\bar{x}_1,x_2)\}dx_1d\bar{x}_2\oplus\{f(x_1,x_2)\oplus f(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\}dx_1dx_2; \tag{2}$$

$$d^2_{(x_1,x_2)}f(x_1,x_2)=\{f(x_1,x_2)\oplus f(\bar{x}_1,x_2)\oplus f(x_1,\bar{x}_2)\oplus$$
$$\oplus f(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\}dx_1dx_2. \tag{3}$$

(2) və (3) düsturlarını induktiv olaraq ümumiləşdirsək, onda $d^m_{(x_1,\ldots,x_m)}f(x_1,\ldots,x_m)$ üçün aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$d^m_{(x_1,\ldots,x_m)}f(\tilde{x})=\{f(x_1,\ldots,x_m)\oplus f(x_1,\ldots,\bar{x}_m)\oplus\ldots$$

$$\ldots\oplus f(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m)\}dx_1,\ldots,dx_m=$$

$$=\left\{\sum_{c\in B^m}^{\oplus} f(x\oplus c)\right\}dx_1\ldots dx_m. \tag{4}$$

Bul funksiyalarının diferensialı ilə m-dəfə diferensialları arasında birbaşa əlaqə mövcuddur. $m=2$ və $m=3$ olduqda bu əlaqə aşağıdakı teoremlə şərh olunur.

Teorem 3. Aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

a) $d_{(x_1,x_2)}f(\tilde{x})=d_{x_1}f\oplus d_{x_2}f\oplus d^2_{(x_1,x_2)}f$;

b) $d^2_{(x_1,x_2)}f(\tilde{x})=d_{x_1}f\oplus d_{x_2}f\oplus d_{(x_1,x_2)}f$;

c) $d_{(x_1,x_2,x_3)}f(x)=d_{x_1}f\oplus d_{x_2}f\oplus d_{x_3}f\oplus d^2_{(x_1,x_2)}f\oplus d^2_{(x_2,x_3)}f\oplus$
$$\oplus d^2_{(x_1,x_3)}f\oplus d^3_{(x_1,x_2,x_3)}f;$$

d) $d^3_{(x_1,x_2,x_3)}f(\tilde{x})=d_{x_1}f\oplus d_{x_2}f\oplus d_{x_3}f\oplus d_{(x_1,x_2)}f\oplus d_{(x_1,x_3)}f\oplus$
$$\oplus d_{(x_2,x_3)}f\oplus d_{(x_1,x_2,x_3)}f.$$

İsbatı. «a)» bərabərliyinin isbatına baxaq. Təyindən birbaşa alırıq:

$$d_{(x_1,x_2)} f(\tilde{x}) = f(x_1,x_2) \oplus f(x_1 \oplus dx_1, x_2 \oplus dx_2),$$

$$d_{x_1} f(\tilde{x}) = f(x_1,x_2) \oplus f(x_1 \oplus dx_1, x_2),$$

$$d_{x_2} f(\tilde{x}) = f(x_1,x_2) \oplus f(x_1, x_2 \oplus dx_2),$$

$$d^2_{(x_1,x_2)} f(\tilde{x}) = f(x_1,x_2) \oplus f(x_1 \oplus dx_1, x_2) \oplus f(x_1, x_2 \oplus dx_2) \oplus$$
$$\oplus f(x_1 \oplus dx_1, x_2 \oplus dx_2).$$

Əgər 2-ci, 3-cü və 4-cü bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplasaq sağ tərəfdə 1-ci tənliyin sağ tərəfinin ifadəsini alarıq. Beləliklə, bu bərabərliklərdən «a)» bərabərliyi alınır. Eyni qayda ilə «c)» bərabərliyi isbat olunur. «b)» və «d)» bərabərlikləri «a)» və «c)» bərabərliklərinin çevirilməsi yolu ilə isbat olunur. □

Teorem 3-ün ümumiləşməsi aşağıdakı teoremdir:

Teorem 4. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası bul funksiyasıdır, X çoxluğu $\tilde{x}_1 = (x_1,...,x_m)$ vektorunun alt vektorları çoxluğudur, $|\tilde{y}|$ isə $\tilde{y} \subseteq \tilde{x}_1$ vektorunun dəyişənlərinin (komponentlərinin) sayıdır. Onda aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

a) $d_{\tilde{x}_1} f(\tilde{x}) = \sum\limits_{\tilde{y} \in X}^{\oplus} d_{\tilde{y}}^{|\tilde{y}|} f(\tilde{x})$;

b) $d_{\tilde{x}_1}^{m} f(\tilde{x}) = \sum\limits_{\tilde{y} \in X}^{\oplus} d_{\tilde{y}} f(\tilde{x})$.

2. Bul funksiyalarının dəyişənlərə görə törəmələri və onların xassələri. Tutaq ki, n dəyişənli $f(x_1,x_2,...,x_n)$ bul funksiyası verilmişdir.

Tərif 5. Aşağıdakı kimi təyin olunan ifadəyə $f(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n)$ funksiyasının x_i dəyişəninə görə xüsusi törəməsi deyilir:

$$f(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n) \oplus f(x_1,...,x_{i-1},\bar{x}_i,x_{i+1},...,x_n). \quad (5)$$

(5) ifadəsi aşağıdakı kimi yazılır (kəsilməz funksiyalara analoji olaraq):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n) \oplus f(x_1,...,x_{i-1},\bar{x}_i,x_{i+1},...,x_n) \qquad (6)$$

$\partial f / \partial x_i$ əvəzinə f_{x_i} də yazılır.

$f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyasının $\partial f / \partial x_i$ törəməsi $f(x_1,x_2,...,x_n)$ -in x_i dəyişəni 1 qiymətindən 0 qiymətinə dəyişdikdə funksiyanın qiymətinin dəyişmə şərtini müəyyən edir.

Nümunə 3. $f(x,y,z) = xz \oplus y\bar{z}$ funksiyasının x dəyişəninə görə xüsusi törəməsini tapmalı.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x,y,z) \oplus f(\bar{x},y,z) = (xz \oplus y\bar{z}) \oplus (\bar{x}z \oplus y\bar{z}) =$$
$$= xz \oplus \bar{x}z = z(x \oplus \bar{x}) = z.$$

Teorem 5. $f(\tilde{x})$ bul funksiyası üçün aşağıdakılar doğrudur:

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = f(x_1,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n) \oplus f(x_1,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n)$.

2. $\partial f / \partial x_i$ törəməsi x_i dəyişənindən asılı deyildir.

3. $\partial f / \partial x_i = 0$ olması $f(x)$ -ın x_i -dən asılı olmaması ilə ekvivalentdir.

İsbatı: 1) $f(\tilde{x})$ funksiyasını x_i dəyişəninə ayıraq:

$$f(\tilde{x}) = \bar{x}_i f(x_i = 0) \oplus x_i f(x_i = 1).$$

Burada $f(x_i = 0)$ və $f(x_i = 1)$ ilə uyğun olaraq $f(x_1,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n)$ və $f(x_1,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n)$ işarə olunmuşdur.

Təyinə görə

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \{\bar{x}_i f(x_i = 0) \oplus x_i f(x_i = 1)\} \oplus \{x_i f(x_i = 0) \oplus \bar{x}_i f(x_i = 1)\} =$$
$$= f(x_i = 0)\{\bar{x}_i \oplus x_i\} \oplus f(x_i = 1)\{\bar{x}_i \oplus x_i\} = f(x_i = 0) \oplus f(x_i = 1).$$

«2.» və «3.» punktlarının doğruluğu və əks bərabərliklər «1.»-punktundan alınır. □

Nümunə 4. $f(x_1,x_2,x_3) = \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$ bul cəbri funksiyasının x_1 dəyişəninə görə xüsusi törəməsini hesablamalı.

Teorem 5-ə görə

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee 1\cdot x_2x_3) \oplus (\bar{x}_2x_3 \vee 0\cdot x_2x_3).$$

$1\cdot x_2x_3 = x_2x_3$ və $0\cdot x_2x_3 = 0$ olduğundan alarıq:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3) \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 = (\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus x_2x_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3x_2x_3) \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 = x_2x_3.$$

Teorem 6. Sabit a bul funksiyası, $f(\tilde{x})$ və $g(\tilde{x})$ bul funksiyaları və $c \in B_2$ üçün aşağıdakılar doğrudur:

1. $\dfrac{\partial \overline{f(\tilde{x})}}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i}$;

2. $\dfrac{\partial a}{\partial x_i} = 0$;

3. a) $\dfrac{\partial (cf(\tilde{x}))}{\partial x_i} = c\dfrac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i}$;

   b) $\dfrac{\partial (c \vee f(\tilde{x}))}{\partial x_i} = \bar{c}\dfrac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i}$;

   c) $\dfrac{\partial (c \oplus f(\tilde{x}))}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i}$;

4. $\dfrac{\partial (f(\tilde{x}) \oplus g(\tilde{x}))}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} \oplus \dfrac{\partial g(\tilde{x})}{\partial x_i}$;

5. $\dfrac{\partial (f(\tilde{x})g(\tilde{x}))}{\partial x_i} = f(\tilde{x})\dfrac{\partial g(\tilde{x})}{\partial x_i} \oplus g(x)\dfrac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} \oplus \dfrac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i}\dfrac{\partial g(\tilde{x})}{\partial x_i}$;

6. $\dfrac{\partial (f(\tilde{x}) \vee g(\tilde{x}))}{\partial x_i} = \overline{f(\tilde{x})}\dfrac{\partial g(\tilde{x})}{\partial x_i} \oplus \overline{g(\tilde{x})}\dfrac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} \oplus \dfrac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i}\dfrac{\partial g(\tilde{x})}{\partial x_i}$;

7. $\dfrac{\partial [f(x)/g(x)]}{\partial x_i} = \dfrac{\partial (f(x)g(x))}{\partial x_i}$;

8. $\dfrac{\partial (f(x) \sim g(x))}{\partial x_i} = \dfrac{\partial (f(x) \oplus g(x))}{\partial x_i}$;

9. $\dfrac{\partial(f(x)\downarrow g(x))}{\partial x_i}=\dfrac{\partial(f(x)\vee g(x))}{\partial x_i}$;

İsbatı.

1. $\dfrac{\partial \overline{f(\tilde{x})}}{\partial x_i}=\overline{f(x_i=0)}\oplus\overline{f(x_i=1)}=1\oplus f(x_i=0)\oplus 1\oplus$

$$\oplus f(x_i=1)==f(x_i=0)\oplus f(x_i=1)=\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i};$$

2. $\dfrac{a}{\partial x_i}=a\oplus a=0$;

3. Bütün eyniliklər $c=0$ və $c=1$ götürməklə ayrı-ayrılıqda bilavasitə yoxlamaqla isbat edilə bilər;

4. $\dfrac{\partial(f(\tilde{x})\oplus g(\tilde{x}))}{\partial x_i}=\{f(x_i=0)\oplus g(x_i=0)\}\oplus\{f(x_i=1)\oplus$

$\oplus g(x_i=1)\}=\{f(x_i=0)\oplus f(x_i=1)\}\oplus\{g(x_i=0)\oplus g(x_i=1)\}=$

$=\dfrac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i}\oplus\dfrac{\partial g(\tilde{x})}{\partial x_i}$;

5. Yazılışın asanlığı üçün $f(x_i=0)$ və $f(x_i=1)$ əvəzinə uyğun olaraq $f(0)$ və $f(1)$ yazacağıq. Tərifə görə

$$f(\tilde{x})\frac{\partial g(\tilde{x})}{\partial x_i}\oplus g(\tilde{x})\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i}\oplus\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i}\frac{\partial g(\tilde{x})}{\partial x_i}=$$

$$=[\bar{x}_i f(0)\oplus x_i f(1)]\cdot[g(0)\oplus g(1)]\oplus[\bar{x}_i g(0)\oplus$$

$$\oplus x_i g(1)]\cdot[f(0)\oplus f(1)]\oplus[f(0)\oplus f(1)]\cdot[g(0)\oplus g(1)]=$$

$=\bar{x}_i f(0)g(0)\oplus\bar{x}_i f(0)g(1)\oplus x_i f(1)g(0)\oplus x_i f(1)g(1)\oplus\bar{x}_i f(0)g(0)\oplus$
$\oplus\bar{x}_i f(1)g(0)\oplus x_i f(0)g(1)\oplus x_i f(1)g(1)\oplus f(0)g(0)\oplus f(0)g(1)\oplus$

$\oplus f(1)g(0)\oplus f(1)g(1)=f(1)g(0)[x_i\oplus\bar{x}_i+1]\oplus f(0)g(1)[x_i\oplus$

$$\oplus \bar{x}_i \oplus 1] + f(0)g(0) \oplus f(1)g(1) = f(0)g(0) \oplus f(1)g(1) =$$

$$= \frac{\partial (f(\tilde{x}) \cdot g(\tilde{x}))}{\partial x_i};$$

6. Bu xassə xassə 5 kimi birbaşa sağ tərəfi hesablamaq yolu ilə isbat oluna bilər.

7. Bu xassəni isbat etmək üçün $f(x)/g(x) = 1 \oplus f(x)g(x)$ düsturundan istifadə etmək lazımdır.

8. Bu xassəni isbat etmək üçün $f(x) \sim g(x) = 1 \oplus (f(x) \oplus g(x))$ düsturundan istifadə etmək lazımdır.

9. Bu xassəni isbat etmək üçün $f(x) \downarrow g(x) = 1 \oplus (f(x) \vee g(x))$ düsturundan istifadə etmək lazımdır. □

Nəticə 1. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ bul funksiyalarıdırsa və $g(x)$ x_i-dən asılı deyildirsə, onda aşağıdakılar doğrudur:

4′. $$\frac{\partial (f(x) \oplus g(x))}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i};$$

5′. $$\frac{\partial (f(x) g(x))}{\partial x_i} = g(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_i};$$

6′. $$\frac{\partial (f(x) \vee g(x))}{\partial x_i} = \overline{g(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}.$$

Nəticə 2. Əgər xüsusi halda $f(x) = x_i$ və $g(x)$ bul funksiyası x_i-dən asılı olmazsa, onda aşağıdakılar doğrudur:

4″. $$\frac{\partial (x_i \oplus g(x))}{\partial x_i} = 1;$$

5″. $$\frac{\partial (x_i \vee g(x))}{\partial x_i} = \overline{g(x)};$$

6″. $$\frac{\partial (x_i \wedge g(x))}{\partial x_i} = g(x).$$

Nümunə 5. $f(x,y,z)=\bar{x}y\vee z$ funksiyasının x,y və z dəyişənlərinə görə xüsusi törəmələrini hesablamalı.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial(\bar{x}y\vee z)}{\partial x}=\bar{z}\frac{\partial(\bar{x}y)}{\partial x}=y\bar{z}\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}=y\bar{z}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\overline{\bar{x}y}\frac{\partial z}{\partial z}=\overline{\bar{x}y}=x\vee\bar{y}\,.$$

$\partial f/\partial y$ -i hesablamazdan qabaq f -i çevirək:

$$f=\bar{x}y\vee z=\bar{x}y\oplus z\oplus\bar{x}yz=\bar{x}y(1\oplus z)\oplus z=\bar{x}y\bar{z}\oplus z\,.$$

Buradan da alırıq:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial(\bar{x}y\bar{z}\oplus z)}{\partial y}=\frac{\partial(\bar{x}y\bar{z})}{\partial y}=\bar{x}\bar{z}\frac{\partial y}{\partial y}=\bar{x}\bar{z}\,.$$

Törəmənin təyinindən göründüyü kimi $f(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)$ funksiyasının x_i dəyişəninə görə birinci tərtib törəməsi olan $\partial f/\partial x_i$ funksiyası x_i dəyişənindən fiktiv asılı olur. Ona görə $\partial f/\partial x_i$ funksiyasının x_i dəyişəninə görə törəməsi sıfıra bərabərdir. Bu xassə bir daha onu göstərir ki, bul funksiyaları istənilən bir dəyişənindən xətti asılı olur.

Bu deyilənlərə baxmayaraq bul funksiyaları üçün yüksək tərtib törəmə anlayışı istifadə olunur. Yüksək tərtib törəmələr iki növə bölünür: funksiyanın qarışıq törəməsi və funksiyanın verilən dəyişənlərə görə k-tərtib törəməsi.

$f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyasının $x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_k}$, hansı ki, $1\le i_1<...<i_k\le n$ dəyişənlərinə görə k dəfə törəməsi rekurrent şəkildə aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\frac{\partial^k f(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_k}}=\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_{k-1}}}\right). \tag{7}$$

(7) törəməsinin hesablanmasında hər dəfə (6) münasibəti nəzərə alınır.

Teorem 7. $f(\widetilde{x})$ funksiyası üçün aşağıdakı münasibət doğrudur:

$$\frac{\partial^2 f(\widetilde{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\widetilde{x})}{\partial x_j \partial x_i}.$$

İsbatı. Təyinə görə

$$\frac{\partial^2 f(\widetilde{x})}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}[f(x_i, x_j = 0) \oplus f(x_i, x_j = 1)] =$$

$$= [f(x_i = 0, x_j = 0) \oplus f(x_i = 0,\ x_j = 1)] \oplus$$

$$\oplus [f(x_i = 1,\ x_j = 0) \oplus f(x_i = 1,\ x_j = 1)].$$

$$\frac{\partial^2 f(\widetilde{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}[f(x_i = 0, x_j) \oplus f(x_i = 1, x_j)] =$$

$$=[f(x_i = 0, x_j = 0) \oplus f(x_i = 1,\ x_j = 0)] \oplus$$

$$\oplus [f(x_i = 0,\ x_j = 1) \oplus f(x_i = 1,\ x_j = 1)].$$

Bu münasibətlərin sağ tərəfləri bərabər olduğundan sol tərəflər də bərabər olar. □

Teorem 7-ni induktiv olaraq ümumiləşdirməklə aşağıdakı nəticələri almaq olar:

Nəticə 1. Əgər $\widetilde{x}_1 = (x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m})$ vektoru $\widetilde{x}$ -ın altvektoru və $\pi(\widetilde{x}_1) = (\pi(x_{i_1}), ..., \pi(x_{i_m}))$ isə $\widetilde{x}_1$ vektorunun dəyişənlərinin yerdəyişməsidirsə, onda

$$\frac{\partial^m f(\widetilde{x})}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_m}} = \frac{\partial^m f(\widetilde{x})}{\partial \pi(x_{i_1}) ... \partial \pi(x_{i_m})}.$$

Nəticə 2. $\dfrac{\partial^m f(\widetilde{x})}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_m}}$ törəməsi $x_{i_1}, ..., x_{i_m}$ dəyişənlərindən asılı deyildir və beləliklə aşağıdakılar doğrudur:

$$\frac{\partial^2 f(\widetilde{x})}{\partial x_i \partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_0}} \frac{\partial^m f(\widetilde{x})}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} = 0,$$

harada ki, $x_{i_0} \in \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}$.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyasının $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ dəyişənlərinə görə k -tərtib qarışıq törəməsi $\frac{\partial^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})}$ ilə işarə olunur və aşağıdakı düsturla hesablanır (belə törəməni $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ dəyişənlər vektoruna görə də törəmə adlandırırlar):

$$\frac{\partial^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})} = f(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, 1, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_k-1}, 1, x_{i_k+1}, \ldots, x_n) \oplus \\ \oplus f(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, 0, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_k-1}, 0, x_{i_k+1}, \ldots, x_n). \tag{8}$$

(8) düsturundan görünür ki, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyasının $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ dəyişənlərinə görə k tərtib qarışıq törəməsi $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ dəyişənlərinin eyni vaxtda qiymətlərinin dəyişməsi halında $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyasının qiymətinin dəyişməsi şərtini müəyyən edir.

(8) düsturu ilə təyin olunan $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyasının $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ dəyişənlərinə görə k tərtib qarışıq törəməsi ilə (7) düsturu ilə təyin olunan k dəfə törəməsi arasında əlaqə mövcuddur. Bu əlaqə aşağıdakı düsturla verilir:

$$\frac{\partial^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})} = \sum_{j=1}^{k}{}^{\oplus} \sum_{(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_j) \in \Omega_j}^{\oplus} \frac{\partial^j f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{i_{\ell_1}} \partial x_{i_{\ell_2}} \ldots \partial x_{i_{\ell_j}}}. \tag{9}$$

Burada Ω_j çoxluğu aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\Omega_j = \{(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_j) \,|\, 1 \le \ell_1 < \ell_2 < \ldots < \ell_j \le k\}.$$

Nümunə 6. Tutaq ki, $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3$ kimi təyin olunur. $\dfrac{\partial^3 f(x_1,x_2,x_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}$-ü hesablamalı. (9) düsturundan göründüyü kimi hesablama aparmaq üçün aşağıdakı düstur istifadə oluna bilər:

$$\frac{\partial^3 f(x_1,x_2,x_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\oplus\frac{\partial f}{\partial x_2}\oplus\frac{\partial f}{\partial x_3}\oplus\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\oplus\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}\oplus \\ \oplus\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}\oplus\frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3}. \qquad (10)$$

Əvvəlcə birinci tərtib törəmələri hesablayaq:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=(1\cdot x_2 \vee 1\cdot\bar{x}_3)\oplus(0\cdot x_2\vee 0\cdot\bar{x}_3)=x_2\vee\bar{x}_3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=(x_1\cdot 1\vee x_1\bar{x}_3)\oplus(x_1\cdot 0\vee x_1\bar{x}_3)=x_1\oplus x_1\bar{x}_3=x_1(1+\bar{x}_3)=x_1x_3, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}=(x_1x_2\vee x_1\cdot\bar{1})\oplus(x_1x_2\vee x_1\cdot\bar{0})=x_1x_2\oplus x_1=x_1\bar{x}_2.$$

(7) düsturlarına əsaslanaraq ikinci tərtib qarışıq törəmələri hesablayaq:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)=1\oplus\bar{x}_3=x_3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)=x_2\oplus 1=\bar{x}_2, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)=x_1.$$

(12) düsturlarına əsaslanaraq üçüncü tərtib törəmələri hesablayaq. Asanlıqla almaq olar ki, $\dfrac{\partial^3 f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3}=1$. Onda

sonuncu münasibəti, (11) və (12) münasibətlərini (10)-da nəzərə almaqla $\frac{\partial^3 f(x_1,x_2,x_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}$ üçün alarıq:

$$\frac{\partial^3 f(x_1,x_2,x_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)} = (x_2 \vee \bar{x}_3) \oplus x_1 x_3 \oplus x_1\bar{x}_2 \oplus x_3 \oplus \bar{x}_2 \oplus x_1 \oplus 1 =$$

$$= (x_2 \vee \bar{x}_3) \oplus (x_1 x_3 \oplus x_3) \oplus (x_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_2) \oplus (x_1 \oplus 1) =$$

$$= x_2 \vee \bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1 x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1 = x_2 \vee \bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2 .$$

Riyazi analiz və riyaziyyatın başqa bölmələrində olduğu kimi məntiq cəbrində də diferensialla törəmə bir-biri ilə sıx bağlıdır. Bu bağlılıq aşağıdakı teoremlə şərh olunur.

Teorem 8. $f(x)$ bul funskiyası üçün aşağıdakı doğrudur:

$$d_{x_i} f(\tilde{x}) = \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} dx_i . \tag{13}$$

İsbatı. $d_{x_i} f(\tilde{x})$ –ın tərifinə görə

$$d_{x_i} f(\tilde{x}) = f(x_i) \oplus f(x_i \oplus dx_i) .$$

Bu ifadədən alırıq:

$$d_{x_i} f(\tilde{x})\Big|_{dx_i = 0} = 0 ,$$

$$d_{x_i} f(\tilde{x})\Big|_{dx_i = 1} = f(x_i) \oplus f(\bar{x}_i) = \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} . \qquad \square$$

Qeyd edək ki, $d_{x_i} f(\tilde{x})$-da yenə də $j \neq i$ olduqda bütün $dx_j = 0$ olur. (13) düsturu tam halda əslində aşağıdakı kimidir.

$$d_{x_i} f(\tilde{x}) = \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} \overline{dx_1} ... \overline{dx_{i-1}} dx_i \overline{d_{x_{i+1}}} ... \overline{dx_k} .$$

İndi isə $d_{(x_i,x_j)}$ $f(\tilde{x})$ diferensialına baxaq və onu dx_i və dx_j üzrə ayıraq. Onda alarıq:

$$d_{(x_i,x_j)} f(\tilde{x}) = \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} dx_i \overline{dx_j} \oplus \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_j} d\bar{x}_i dx_j \oplus \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial (x_i, x_j)} dx_i dx_j . \tag{14}$$

(14) düsturunu induktiv olaraq ümumiləşdirək. Onda aşağıdakı teorem alınar.

Teorem 8. $f(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$ funksiyası və $\widetilde{x}_1 = (x_{i_1}, ..., x_{i_m})$ vektoru üçün aşağıdakı doğrudur:

a) $$d_{\widetilde{x}_1} f(\widetilde{x}) = \sum_{k=1}^{m}{}^{\oplus} \sum_{1 \le \ell_1 < ... < \ell_k \le m}{}^{\oplus} \frac{\partial f(\widetilde{x})}{\partial(x_{i_{\ell_1}}, ..., x_{i_{\ell_k}})} \overline{dx_{i_1}} ... \overline{dx_{i_{\ell_1 - 1}}} dx_{i_{\ell_1}} \overline{dx_{i_{\ell_1 + 1}}} ...$$

$$... \overline{dx_{i_{\ell_k - 1}}} dx_{i_{\ell_k}} \overline{dx_{i_{\ell_k + 1}}} ... \overline{dx_{i_m}},$$

b) $$\frac{\partial f(\widetilde{x})}{\partial \widetilde{x}_1} = df(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)\Big|_{d\widetilde{x}_1 = 1, d\widetilde{x}_2 = 0}.$$

Riyazi analizdə mürəkkəb funksiyanın diferensiallanmasına analoji olaraq bul cəbrində də analoji diferesiallama mümkündür. Bu diferensiallama zəncir qaydası adlanır və aşağıdakı teoremlə şərh olunur:

Teorem 9. Tutaq ki, $\widetilde{x}_1 = (x_{i_1}, ..., x_{i_m}), f(\widetilde{x}_1, g)$ - isə $m+1$ dəyişənli funksiyadır və $g = g(\widetilde{x}_2)$. x_i dəyişəni ancaq $\widetilde{x}_2$-də rast gəlinir. Onda aşağıdakılar doğrudur:

a) $$\frac{\partial f(\widetilde{x}_1, g(\widetilde{x}_2))}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\widetilde{x}_1, g)}{\partial g} \frac{\partial g(\widetilde{x}_2)}{\partial x_i};$$

b) $$d_{x_i} f(\widetilde{x}_1, g(\widetilde{x}_2)) = d_g f(\widetilde{x}_1, g) d_{x_i} g(\widetilde{x}_2) = \frac{\partial f(\widetilde{x}_1, g)}{\partial g} d_{x_i} g(\widetilde{x}_2);$$

Əgər $\widetilde{x}_0 \cap \widetilde{x}_1 = \varnothing$, $\widetilde{x}_0 \subseteq \widetilde{x}_2$ olarsa, onda:

c) $$\frac{\partial f(\widetilde{x}_1, g(\widetilde{x}_2))}{\partial \widetilde{x}_0} = \frac{\partial f(\widetilde{x}_1, g)}{\partial g} \frac{\partial g(\widetilde{x}_2)}{\partial \widetilde{x}_0};$$

d) $$d_{\widetilde{x}_0} f(\widetilde{x}_1, g(\widetilde{x}_2)) = d_g f(\widetilde{x}_1, g) d_{\widetilde{x}_0} g(\widetilde{x}_2) = \frac{\partial f(\widetilde{x}_1, g)}{\partial g} d_{\widetilde{x}_0} g(\widetilde{x}_2).$$

3. Teylor və Makloren düsturlarının analoqları. Əvvəlcə aşağıdakı teoremlərə baxaq:

Teorem 10. $f(\tilde{x})$ bul funksiyası və istənilən $x_i \in \tilde{x}$ dəyişəni üçün aşağıdakı münasibət doğrudur:

$$f(\tilde{x}) = f(x_i = 0) \oplus x_i \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i}. \qquad (15)$$

İsbatı. Aydındır ki,

$$f(\tilde{x}) = \bar{x}_i f(x_i = 0) \oplus x_i f(x_i = 1) = (1 \oplus x_i) f(x_i = 0) \oplus x_i f(x_i = 1) =$$

$$= f(x_i = 0) \oplus x_i [f(x_i = 0) \oplus f(x_i = 1)] = f(x_i = 0) \oplus x_i \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i}. \quad \square$$

(15) düsturundan istifadə etməklə teorem 9-u isbat edək.

Teorem 9-un isbatı. Əvvəlcə teorem 8-dən istifadə eədərək «d)» xassəsini isbat edək. Bu xassədən «c)», «a)» və «b)» xassələri alınır. «a)» və «b)» xassələri uyğun olaraq «c)» və «d)» xassələrinin $\tilde{x}_0 = \{x_i\}$ olduqda xüsusi hallarıdır. Beləliklə, göstərmək lazımdır ki,

$$d_{\tilde{x}_0} f(\tilde{x}_1, g(\tilde{x}_2)) = d_g f(\tilde{x}_1, g) \wedge d_{\tilde{x}_0} g(\tilde{x}_2).$$

Bir tərəfdən alırıq ki,

$$d_{\tilde{x}_0} f(\tilde{x}_1, g(\tilde{x}_2)) = f(g(\tilde{x}_0)) \oplus f(g(\tilde{x}_0 \oplus d\tilde{x}_0)).$$

Digər tərəfdən isə, aşağıdakı doğrudur:

$$d_g f \wedge d_{\tilde{x}_0} g = [f(g) \oplus f(g \oplus dg)][g(\tilde{x}_0) \oplus g(\tilde{x}_0 \oplus d\tilde{x}_0)]. \qquad (16)$$

g^* ilə $g(\tilde{x}_0 \oplus d\tilde{x}_0)$ funksiyasını işarə edək. (16)-da $g(\tilde{x}_0)$-ı g ilə əvəz etsək, mötərizələri açsaq, $g^* = g \oplus dg$ -i nəzərə alsaq, onda

$$d_g f \wedge d_{\tilde{x}_0} g = f(g) g \oplus f(g^*) g \oplus f(g) g^* \oplus f(g^*) g^*$$

alarıq.

$f(g)$ və $f(g^*)$ üçün teorem 10-a görə ayrılışı nəzərə alaq. Onda alarıq:

$$d_g f \wedge d_{\tilde{x}_0} g = gf(g = 0) \oplus gf(g = 1) \oplus gf(g^* = 0) \oplus$$

$$\oplus gg^* f(g^*=0) \oplus gg^*(g^*=1) \oplus$$

$$\oplus g^* f(g=0) \oplus gg^* f(g=0) \oplus gg^* f(g=1) \oplus g^* f(g^*=0) \oplus$$

$$\oplus g^* f(g^*=0) \oplus g^* f(g^*=1)\,.$$

Nəzərə alsaq ki, $f(g=0)=f(g^*=0)$, $f(g=1)=f(g^*=1)$, onda yekun olaraq alarıq:

$$d_g f d_{\widetilde{x}_0} g = g[f(g=1)\oplus f(g=0)] \oplus g^*[f(g=1)\oplus f(g=0)] \oplus$$

$$\oplus f(g=0) \oplus f(g^*=0) = gf(g=0) \oplus f(g=0) \oplus gf(g=1) \oplus$$

$$\oplus f(g^*=0) \oplus g^* f(g^*=0) \oplus g^* f(g^*=1) = f(g) \oplus f(g^*) =$$

$$= f(g(\widetilde{x}_0)) \oplus f(g(\widetilde{x}_0 \oplus d\widetilde{x}_0)) = d_{\widetilde{x}_0} f(g(\widetilde{x}_0))\,. \qquad \square$$

Teorem 10-u aşağıdakı kimi ümumiləşdirmək olar.

Teorem 11. Hər bir $f(\widetilde{x})$ bul funksiyası istənilən $x_i \in \widetilde{x}$ üçün aşağıdakı kimi göstərilə bilər:

$$f(\widetilde{x}) = f(x_i = c) \oplus (x_i \oplus c)\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad c \in \{0,1\}\,.$$

İsbatı. $c=0$ olduqda isbat teorem 10-da artıq aparılmışdır. $c=1$ olduğu hala baxaq. Aydındır ki,

$$f(\widetilde{x}) = \overline{x}_i f(x_i=0) \oplus x_i f(x_i=1) = \overline{x}_i f(x_i=0) \oplus$$

$$\oplus (1 \oplus 1 \oplus x_i)\cdot f(x_i=1) = \overline{x}_i f(x_i=0) \oplus (1 \oplus \overline{x}_i) f(x_i=1) =$$

$$= f(x_i=1) \oplus \overline{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = f(x_i=1) \oplus (x_i \oplus 1)\frac{\partial f}{\partial x_i}. \qquad \square$$

Kəsilməz funksiyalar halında Makloren düsturu olduğu kimi bul cəbrinin funksiyaları üçün də həmin Makloren düsturuna analoji düstur mümkündür:

Teorem 12. Bul cəbrinin istənilən $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyası özünün və törəmələrinin $(0,0,...,0)$ nöqtəsindəki qiymətləri vasitəsilə təsvir oluna bilər, yəni

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=f(0,0,...,0)+\sum_{i=1}^{n}{}^{\oplus}\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{0\,0...0}\& x_i\oplus$$

$$\oplus\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}{}^{\oplus}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right|_{0\,0...0}\& x_i x_j\oplus...$$

$$...\oplus\sum_{\substack{i_1,i_2,...,i_k=1\\ i_1\neq i_2,...,i_{k-1}\neq i_k}}{}^{\oplus}\left.\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_k}}\right|_{0\,0...0}\& x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}\oplus...$$

$$...\oplus\left.\frac{\partial^n f}{\partial x_1\partial x_2...\partial x_n}\right|_{0\,0...0}\& x_1x_2...x_n\,.$$

Analoji olaraq Bul cəbrinin funksiyaları üçün Teylor düsturunun da analoqu mümkündür:

Teorem 13. Bul cəbrinin istənilən $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyası özünün və törəmələrinin $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ nöqtəsindəki qiymətləri vasitəsilə təsvir oluna bilər, yəni

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\oplus\sum_{i=1}^{n}{}^{\oplus}\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\sigma_1\sigma_2...\sigma_n}\&(x_i\oplus\sigma_i)\oplus$$

$$\oplus\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}{}^{\oplus}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right|_{\sigma_1\sigma_2...\sigma_n}\&(x_i\oplus\sigma_i)(x_j\oplus\sigma_j)\oplus...$$

$$...\oplus\sum_{\substack{i_1,i_2,...,i_k=1\\ i_1\neq i_2,...,i_{k-1}\neq i_k}}{}^{\oplus}\left.\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_k}}\right|_{\sigma_1\sigma_2...\sigma_n}\mathop{\&}_{j=1}^{k}(x_{i_j}\oplus\sigma_{i_j})\oplus...$$

$$...\oplus\left.\frac{\partial^n f}{\partial x_1\partial x_2...\partial x_n}\right|_{\sigma_1\sigma_2...\sigma_n}\mathop{\&}_{i=1}^{n}(x_i\oplus\sigma_i)\,.$$

FƏSİL 2. k-QİYMƏTLİ MƏNTİQ HAQQINDA ÜMUMİ MƏLUMATLAR

§1. k-qiymətli məntiqin funksiyaları

Tutaq ki, $U = \{u_1, u_2, ..., u_m, ...\}$ dəyişənlərin giriş əlifbasıdır və bu dəyişənlərin qiymətləri $E^k = \{0,1,...,k-1\}$, $k \geq 2$, çoxluğundandır. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyasına baxaq, hansı ki, $x_1, x_2, ..., x_n$ dəyişənləri U əlifbasından götürülmüşdür. Əgər $x_i, i = \overline{1,n}$, dəyişənləri E_k-dan qiymətlər aldıqda $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyasının da qiyməti E_k-dan olur, onda $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyasına k-qiymətli məntiq funksiyası deyilir. Aydındır ki, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ k-qiymətli məntiq funksiyası

$$f : \underbrace{E^k \times E^k \times ... \times E^k}_{n \text{ sayda}} \to E^k$$

inikasını təyin edir.

Qeyd edək ki, $f(x_1, ..., x_n)$ funksiyasının cədvəli verilmiş olarsa, onda o tamamilə təyin olunmuş olur. Bu cədvəl iki hissədən – sol və sağ hissədən ibarət olur. Sol hissədə yuxarıda $x_1, x_2, ..., x_n$ dəyişənləri, sağ hissədə isə yuxarıda $f(x_1, ..., x_n)$ yazılır. $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dəyişənlər yığımının hər bir mümkün qiymətlər yığımına cədvəlin həm sol və həm də sağ hissəsində bir sətr uyğun gəlir. Bu sətrdə sol hissədə qiymətlər yığımı, sağda isə $x_1, x_2, ..., x_n$ dəyişənləri bu qiymətlər yığımını aldıqda $f(x_1, ..., x_n)$-in alacağı qiymət yazılır. $x_1, x_2, ..., x_n$ dəyişənlərinin ala biləcəyi qiymətlər yığımının sayı k^n-dir. Odur ki, cədvəldə k^n sayda sətr mövcuddur. Bunu nəzərə alaraq cədvəlin sol hissəsində $x_1, x_2, ..., x_n$

dəyişənlərinin qiymətləri $0,1,...,k^n-1$ ədədlərinin k-lıq say sistemində n rəqəmli ədədlər şəklində təsvirinə uyğun yazılırlar.

Cədvəl 1.

x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n)$
0	0	...	0	0	$f(0,0,...,0,0)$
0	0	...	0	1	$f(0,0,...,0,1)$
....	....	....	....	....	....
0	0	...	0	$k-1$	$f(0,0,...,0,k-1)$
0	0	...	1	0	$f(0,0,...,1,0)$
....	....	....	....	....	....
$k-1$	$k-1$	...	$k-1$	$k-1$	$f(k-1,k-1,...,k-1,k-1)$

P_k ilə U əlifbası üzərində bütün k-qiymətli məntiq funksiyalarından və həmçinin $0,1,...,k-1$ sabitlərindən ibarət olan çoxluğu işarə edək.

Teorem 1. P_k -dan olan bütün n dəyişənli k-qiymətli məntiq funksiyalarının sayı $p_k(n)=k^{k^n}$-ə bərabərdir.

İsbatı. k-qiymətli məntiq funksiyalarının cədvəl vasitəsilə verilməsinə uyğun olaraq hər bir n dəyişənli k-qiymətli məntiq funksiyasına k^n sayda sətrdən ibarət olan cədvəl uyğundur. n-dəyişənli müxtəlif iki funksiyaya uyğun belə cədvəllərin sol tərəfi bir-biri ilə üst-üstə düşür, ancaq onların sağ tərəfləri fərqlənir. Cədvəlin sağ tərəfi də k^n sətrdən ibarət olur. Cədvəlin sağ tərəfində E^k-dan qiymətlər yazılır. Beləliklə müxtəlif cədvəllərin ümumi sayı k^{k^n} olur. Hər cədvələ qarşılıqlı birqiymətli olaraq bir k-qiymətli funksiya uyğun olduğundan belə funksiyaların sayı da k^{k^n} olar. □

§2. k-qiymətli məntiqin elementar funksiyaları

k-qiymətli məntiqin elementar funksiyalarına aşağıdakı qrup funksiyalar aiddir:

I. *Sabit funksiyalar.* Bu funksiyalar arqumentləri fiktiv dəyişənlər olan funksiyalardır və onlar $f_i = i,\ i = 0,1,...,k-1$, funksiyalarıdır.

II. *Birdəyişənli funksiyalar.* Bu funksiyalara aşağıdakılar aiddir:

1) $\overline{x} = x + 1 \pmod{k}$. Bu funksiya inkarın «dövrü sürüşdürmə» mənada ümumiləşməsidir və Post inkarı kimi də adlandırılır.

2) $\widetilde{x}$ və ya Nx inkarı. Bu $\widetilde{x} = Nx = k-1-x$ kimi funksiyadır və inkarın qiymətlərin «güzgüvari əks olunması» mənada ümumiləşməsidir. Ədəbiyyatlarda bu funksiyanı Lukaşeviç inkarı kimi də adlandırırlar.

3) $I_i(x)$ funksiyası. Bu funksiya $i \neq k-1$ olduqda inkarın bəzi xassələrinin ümumiləşməsidir və aşağıdakı kimi təyin olunur

$$I_i(x) = \begin{cases} k-1, & \text{əgər} \quad x = i, \\ 0, & \text{əgər} \quad x \neq i. \end{cases}$$

Bu funksiyaya bəzən birinci növ xarakteristik funksiya da deyilir.

4) $\chi_i(x)$ funksiyası. Bu funksiyaya ikinci növ xarakteristik funksiya da deyilir və $j_i(x)$ kimi də işarə edirlər. Bu funksiyanın qiymətləri aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{əgər} \quad x = i, \\ 0, & \text{əgər} \quad x \neq i\ . \end{cases}$$

$\chi_i(x)$ funksiyası da $i \neq k-1$ olduqda inkarın ümumiləşməsidir. Aydındır ki, $k = 2$ olduqda $I_i(x) = \chi_i(x)$.

III. *İkidəyişənli elementar funksiyalar.*

1) $\min(x_1, x_2)$ – k qiymətli məntiqin konyunksiya funksiyası. Bu funksiya həm də $(x_1 \& x_2)$ kimi də işarə olunur.

2) $x_1 x_2 (\mathrm{mod} k)$- k moduluna görə vurma funksiyası. Bu funksiya konyunksiyanın ikinci ümumiləşməsidir.

3) $\max(x_1, x_2)$ - k-qiymətli məntiqin dizyunksiya funksiyası. Bu funksiya həm də $(x_1 \vee x_2)$ kimi də işarə olunur.

4) $x_1 + x_2 \pmod k$ - k moduluna görə toplama funksiyası

5) $V_k(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2) + 1 \pmod k$. Bu funksiya Vebb funksiyası adlanır (Pirs oxunun ümumiləşməsi).

6) Şeffer funksiyası. Bu funksiya bul cəbrində olan Şeffer funksiyasının ümumiləşməsidir və aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$S_k(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2) + 1 \pmod k.$$

7) k moduluna görə fərq funksiyası:

$$x - y(\text{ mod } k) = \begin{cases} x - y, & \text{əgər } 0 \le y \le x \le k-1, \\ k - (y - x), & \text{əgər } 0 \le x < y \le k-1. \end{cases}$$

8) k-qiymətli implikasiya funksiyası. Bu funksiya aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$x \to y = \begin{cases} k-1, & \text{əgər } 0 \le x < y < k-1, \\ k-1-x+y, & \text{əgər } 0 \le y \le x \le k-1. \end{cases}$$

9) k-qiymətli kəsik fərq funksiyası

$$x \perp y = \begin{cases} 0, & \text{əgər } 0 \le x < y \le k-1, \\ x - y, & \text{əgər } 0 \le y \le x \le k-1. \end{cases}$$

Bu funksiya bəzən $x \dot{-} y$ kimi də işarə olunur və monus adlandırılır.

Məntiq cəbrində olduğu kimi k-qiymətli məntiqdə də analoji olaraq verilən R funksiyalar sinfi üzərində düsturlar təyin olunur, hər düstura qarşı funksiya qoyulur. Analoji olaraq funksiyaların superpozisiyası və superpozisiya əməliyyatı təyin olunur.

§3. Elementar funksiyaların xassələri

Elementar funksiyaların əsas xassələrini şərh edək.

I. Tutaq ki, $(x_1 \circ x_2)$ funksiyası $\min(x_1, x_2)$, $x_1 x_2 (\text{mod} k)$, $\max(x_1, x_2)$, $x_1 + x_2 (\text{mod} k)$ funksiyalarının istənilən birini göstərir. Xassələr aşağıdakılardır:

1. $(x_1 \circ x_2)$ funksiyası assosiativlik xassəsinə malikdir:

$$((x_1 \circ x_2) \circ x_3) = (x_1 \circ (x_2 \circ x_3)).$$

2. $(x_1 \circ x_2)$ funksiyası kommutativlik xassəsinə malikdir.

$$x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_1 .$$

Qeyd edək ki, assosiativlik xassəsinə uyğun olaraq və & əməliyyatının $\vee$ əməliyyatından əvvəl yerinə yetirilməsi razılaşmasına görə bəzən düsturların yazılışında açılan və bağlanan mötərizələr atıla bilər.

II. $\{0,...,k-1, I_0(x),..., I_{k-1}(x),\ \min(x_1, x_2),\ \max(x_1 x_2)\}$ funksiyalar sisteminə (bu sistem Rosser – Turkett sistemi adlanır) aid olan bəzi xassələr aşağıdakılardır:

1. I simvolunun düsturun «dərinliyinə» enməsi xassəsi:

1.1. $I_\sigma(c) = \begin{cases} k-1, & \text{əgər } c = \sigma \\ 0, & \text{əgər } c \neq \sigma \end{cases}$ $\qquad (\sigma, c = 0,1,...,k-1)$;

1.2. $I_\sigma(I_\tau(x)) =$

$$= \begin{cases} I_0(x) \vee ... \vee I_{\tau-1}(x) \vee I_{\tau+1}(x) \vee ... \vee I_{k-1}(x), & \text{əgər } \sigma = 0, \\ 0, & \text{əgər } 0 < \sigma < k-1, \\ I_\tau(x), & \text{əgər } \sigma = k-1. \end{cases}$$

İsbatı.

a) Tutaq ki, $\sigma = 0$. Təyinə görə

$$I_0(I_\tau(x)) = \begin{cases} k-1, & \text{əgər } I_\tau(x) = 0 \\ 0, & \text{əgər } I_\tau(x) \neq 0 \end{cases}$$

və ya

$$I_0(I_\tau(x)) = \begin{cases} k-1, & \text{əgər } \tau \neq x, \\ 0, & \text{əgər } \tau = x. \end{cases} \qquad (1)$$

Digər tərəfdən

$$I_0(x) \vee ... \vee I_{\tau-1}(x) \vee I_{\tau+1}(x) \vee ... \vee I_{k-1}(x) =$$

$$= \max\{I_0(x),..., I_{\tau-1}(x),\ I_{\tau+1}(x),..., I_{k-1}(x)\} .$$

Əgər $\tau \neq x$ olarsa, onda $x \in \{0,1,..., \tau-1, \tau+1,..., k-1\}$ və, beləliklə:

$$\max\{I_0(x),..., I_{\tau-1}(x),\ I_{\tau+1}(x),..., I_{k-1}(x)\} = k-1$$

olar. Əgər $\tau = x$ olarsa, onda

$$I_i(x) = 0, \quad i \in \{0,\dots,\tau-1,\tau+1,\dots,k-1\}$$

olar və, beləliklə,

$$\max\{I_0(x),\dots,I_{\tau-1}(x),\ I_{\tau+1}(x),\dots,I_{k-1}(x)\} = 0$$

alarıq. Deməli,

$$I_0(x) \vee \dots \vee I_{\tau-1}(x) \vee I_{\tau+1}(x) \vee \dots \vee I_{k-1}(x) = \begin{cases} k-1, & \text{əgər } \tau \neq x, \\ 0\,, & \text{əgər } \tau = x. \end{cases} \qquad (2)$$

(1) və (2) münasibətlərinin sağ tərəfləri bərabər olduğundan onların sol tərəfləri də bərabər olar:

$$I_0(I_\tau(x)) = I_0(x) \vee \dots \vee I_{\tau-1}(x) \vee I_{\tau+1}(x) \vee \dots \vee I_{k-1}(x).$$

b) Tutaq ki, $0 < \sigma < k-1$. Təyinə görə

$$I_\sigma(I_\tau(x)) = \begin{cases} k-1, & \text{əgər } \sigma = I_\tau(x), \\ 0\,, & \text{əgər } \sigma \neq I_\tau(x). \end{cases} \qquad (3)$$

$I_\tau(x)$ ancaq ya 0 ya da $k-1$ qiymətləri aldığından və şərtə görə $0 < \sigma < k-1$ olduğundan (3)-də ancaq $\sigma \neq I_\tau(x)$ halı mümkün olur və, beləliklə, $I_\sigma(I_\tau(x)) = 0$ alırıq.

c) Tutaq ki, $\sigma = k-1$. Təyinə görə

$$I_{k-1}(I_\tau(x)) = \begin{cases} k-1, & \text{əgər } I_\tau(x) = k-1, \\ 0, & \text{əgər } I_\tau(x) = 0. \end{cases}$$

və ya

$$I_{k-1}(I_\tau(x)) = \begin{cases} k-1, & \text{əgər } \tau = x, \\ 0, & \text{əgər } \tau \neq x. \end{cases} \qquad (4)$$

Digər tərəfdən

$$I_\tau(x) = \begin{cases} k-1, & \text{əgər } \tau = x, \\ 0, & \text{əgər } \tau \neq x. \end{cases} \qquad (5)$$

(4) və (5) münasibətlərinin sağ tərəfləri bərabər olduğundan, onların sol tərəfləri də bərabər olar: $I_{k-1}(I_\tau(x)) = I_\tau(x)$.

□

1.3. $I_\sigma(x_1 \& x_2) = I_\sigma(x_1) \& (I_\sigma(x_2) \vee \ldots \vee I_{k-1}(x_2)) \vee I_\sigma(x_2) \&$

$$\& (I_\sigma(x_1) \vee \ldots \vee I_{k-1}(x_1)). \qquad (6)$$

İsbatı. Ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, $x_1 < x_2$. Aşağıdakı hallara ayrı-ayrılıqda baxaq: $\sigma = x_1$ və $\sigma \neq x_1$.

$\sigma = x_1$ *halı*. Bu halda (6)-ın sol tərəfindən

$$I_\sigma(x_1 \& x_2) = I_\sigma(x_1) = k-1$$

alırıq. $\sigma = x_1$ və $x_1 < x_2$ olduğundan

$$I_\sigma(x_2) \vee \ldots \vee I_{k-1}(x_2) = \max\{I_\sigma(x_2), \ldots, I_{k-1}(x_2)\} = k-1,$$

$$I_\sigma(x_1) \vee \ldots \vee I_{k-1}(x_1) = \max\{I_\sigma(x_1), \ldots, I_{k-1}(x_1)\} = k-1.$$

Beləliklə, (6)-ın sağ tərəfinin qiyməti aşağıdakına bərabərdir:

$$(k-1) \& (k-1) \vee (0) \& (k-1) = k-1,$$

yəni $\sigma = x_1$ olduqda (6)-ın həm sağ və həm də sol tərəfi eyni bir qiymətə malik olur.

$\sigma \neq x_1$ *halı*. Bu halda (6)-ın sol tərəfindən

$$I_\sigma(x_1 \& x_2) = I_\sigma(x_1) = 0$$

alırıq. $x_1 \neq \sigma$ olduğundan (6)-ın sağ tərəfində

$$I_\sigma(x_1) \& (I_\sigma(x_2) \vee \ldots \vee I_{k-1}(x_2)) = 0$$

olur. $I_\sigma(x_2) \& (I_\sigma(x_1) \vee \ldots \vee I_{k-1}(x_1))$ ifadəsinin qiymətini hesablayaq. Əgər $\sigma \neq x_2$ olarsa onda $I_\sigma(x_2) = 0$ olmasına görə

$$I_\sigma(x_2) \& (I_\sigma(x_1) \vee \ldots \vee I_{k-1}(x_1)) = (0) \& (I_\sigma(x_1) \vee \ldots \vee I_{k-1}(x_1)) = 0$$

alarıq. Əgər $\sigma = x_2$ olarsa onda $x_1 < x_2$ olduğundan

$$I_\sigma(x_2) \& (I_\sigma(x_1) \vee \ldots \vee I_{k-1}(x_1)) = (k-1) \& (0) = 0$$

alarıq. Beləliklə, $\sigma \neq x_1$ olduqda da (6) ifadəsinin həm sağ və həm də sol tərəfi eyni bir qiymətə - 0-a bərabər olur.

□

1.4. $I_\sigma(x_1 \vee x_2) = I_\sigma(x_1) \& (I_0(x_2) \vee \ldots \vee I_\sigma(x_2)) \vee I_\sigma(x_2) \&$

$$\& (I_0(x_1) \vee \ldots \vee I_\sigma(x_1)). \qquad (7)$$

İsbatı. x_1 və x_2 (7) düsturuna simmetrik daxil olduğundan ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, $x_1 > x_2$. Onda

$$I_\sigma(x_1 \vee x_2) = I_\sigma(x_1)$$

alarıq. $\sigma = x_1$ və $\sigma \neq x_1$ hallarına ayrı-ayrılıqda baxaq:

$\sigma = x_1$ *halı.* Bu halda (7)-in sol tərəfində

$$I_\sigma(x_1 \vee x_2) = I_\sigma(x_1) = k-1$$

qiymətini alırıq. $\sigma = x_1$ və $x_1 > x_2$ olduğundan

$$I_0(x_2) \vee \ldots \vee I_\sigma(x_2) = \max\{I_0(x_2), \ldots, I_\sigma(x_2)\} = k-1,$$

$$I_0(x_1) \vee \ldots \vee I_\sigma(x_1) = \max\{I_0(x_1), \ldots, I_\sigma(x_1)\} = k-1.$$

Beləliklə, (7)-in sağ tərəfinin qiyməti aşağıdakına bərabərdir:

$$(k-1) \mathbin{\&} (k-1) \vee (0) \mathbin{\&} (k-1) = k-1,$$

yəni $\sigma = x_1$ olduqda (7)-in həm sol və həm də sağ tərəfi eyni bir qiymət alır.

$\sigma \neq x_1$ *halı.* Bu halda (7)-in sol tərəfində

$$I_\sigma(x_1 \vee x_2) = I_\sigma(x_1) = 0$$

qiymətini alırıq. $x_1 \neq \sigma$ olduğundan

$$I_\sigma(x_1) \mathbin{\&} (I_\sigma(x_2) \vee \ldots \vee I_\sigma(x_2)) = 0$$

olar. $I_\sigma(x_2) \mathbin{\&} (I_0(x_1) \vee \ldots \vee I_\sigma(x_1))$ ifadəsinin qiymətini hesablayaq. Əgər $\sigma \neq x_2$ olarsa, onda $I_\sigma(x_2) = 0$ olmasına görə

$$I_\sigma(x_2) \mathbin{\&} (I_0(x_1) \vee \ldots \vee I_\sigma(x_1)) = 0$$

alarıq. Əgər $\sigma = x_2$ olarsa, onda $x_1 > x_2$ olduğundan

$$I_\sigma(x_2) \mathbin{\&} (I_0(x_1) \vee \ldots \vee I_\sigma(x_1)) = (k-1) \mathbin{\&}$$

$$\mathbin{\&} (I_0(x_1) \vee \ldots \vee I_\sigma(x_1)) = (k-1) \mathbin{\&} (0) = 0.$$

Beləliklə $\sigma \neq x_1$ olduqda da (7) ifadəsinin həm sağ və həm də sol tərəfi eyni bir qiymətə – 0-a bərabər olur.

□

III. Distibutivlik xassələri:

1. $(x_1 \vee x_2) \,\&\, x_3 = (x_1 \,\&\, x_3) \vee (x_2 \,\&\, x_3)$.

İsbatı. İsbatı $x_1 < x_2 < x_3$ halında aparaq. Qalan hallar da analoji qaydada isbat oluna bilər.

$x_1 < x_2 < x_3$ olduğundan

$$(x_1 \vee x_2) \,\&\, x_3 = \max\{x_1, x_2\} \,\&\, x_3 = x_2 \,\&\, x_3 = \min\{x_2, x_3\} = x_2,$$

$$(x_1 \,\&\, x_3) \vee (x_2 \,\&\, x_3) = \min\{x_1, x_3\} \vee \min\{x_2, x_3\} = x_1 \vee x_2 =$$
$$= \max\{x_1, x_2\} = x_2 .$$

Bu iki bərabərliklərdən baxılan xassəsinin doğruluğu alınır. □

2. $(x_1 \,\&\, x_2) \vee x_3 = (x_1 \vee x_3) \,\&\, (x_2 \vee x_3)$.

İsbatı. İsbatı $x_1 < x_2 < x_3$ halında aparaq. Qalan hallar da analoji qaydada isbat oluna bilər.

$x_1 < x_2 < x_3$ olduğundan

$$(x_1 \,\&\, x_2) \vee x_3 = \min\{x_1, x_2\} \vee x_3 = x_1 \vee x_3 = \max\{x_1, x_3\} = x_3,$$

$$(x_1 \vee x_3) \,\&\, (x_2 \vee x_3) = \max\{x_1, x_3\} \,\&\, \max\{x_2, x_3\} = x_3 \,\&\, x_3 = x_3 .$$

Bu iki bərabərliklərdən də baxılan xassəsinin doğruluğu alınır.

□

IV. Dəyişənin «təmiz» daxil olmasının istisnası qaydası:

$$x = 1 \cdot I_1(x) \vee 2 \cdot I_2(x) \vee \ldots \vee (k-1) \cdot I_{k-1}(x) .$$

İsbatı. Tutaq ki, $x = i$ -dir. Onda $I_1(x), I_2(x), \ldots, I_{k-1}(x)$ funksiyaları arasında $I_i(x) = (k-1)$-ə qalanları isə sıfra bərabər olar. Beləliklə, sağ tərəfdən

$$0 \vee 0 \vee \ldots \vee 0 \vee (k-1)i \vee 0 \vee \ldots \vee 0 =$$

$$= \max\{0,0,\ldots,0,(k-1) \cdot i, 0,\ldots,0\} = (k-1) \cdot i = i$$

□

V. Dəyişənin daxil edilməsi qaydası:

$$x_1 = x_1(I_0(x_2) \vee \ldots \vee I_{k-1}(x_2)) .$$

İsbatı. $I_0(x_2), \ldots, I_{k-1}(x_2)$ qiymətləri arasında biri $(k-1)$-ə qalanları isə 0-a bərabərdir. Digər tərəfdən

$$I_0(x_2) \vee ... \vee I_{k-1}(x_2) = \max\{I_0(x_2) \vee ... \vee I_{k-1}(x_2)\} = k-1.$$

Aydındır ki, $x(k-1) = x$. □

VI. Sadələşdirmə düsturları.

6.1. $I_\sigma(x)I_\tau(x) = \begin{cases} I_\sigma(x), & \text{əgər} \quad \tau = \sigma, \\ 0, & \text{əgər} \quad \tau \neq \sigma. \end{cases}$

İsbatı. Təyinə görə

$$I_\sigma(x) = \begin{cases} k-1, & \text{əgər} \quad \sigma = x, \\ 0, & \text{əgər} \quad \sigma \neq x. \end{cases} \qquad I_\tau(x) = \begin{cases} k-1, & \text{əgər} \quad \tau = x, \\ 0, & \text{əgər} \quad \tau \neq x. \end{cases}$$

Əgər $\sigma \neq \tau$ olarsa, onda onlardan ya heç biri x qiymətinə bərabər olmaz, ya da ki, ancaq biri sıfra bərabər olar. Təyinə görə birinci halda $I_\sigma(x)I_\tau(x) = 0 \cdot 0 = 0$ alınar. İkinci halda isə $I_\sigma(x)$ və $I_\tau(x)$-lardan biri $(k-1)$ o biri isə 0-a bərabər və, beləliklə, onların hasili yenə də 0 olar.

Əgər $\sigma = \tau$ olarsa, onda $x = \sigma$ olduqda $I_\sigma(x)I_\tau(x)$ hasilinin qiyməti $(k-1)\cdot(k-1) = (k-1)$ olar, $x \neq \sigma$ olduqda isə $I_\sigma(x)I_\tau(x)$ -ın qiyməti $0 \cdot 0 = 0$ olar, yəni hər iki halda $I_\sigma(x)I_\tau(x)$-ın qiyməti $I_\sigma(x)$-ın qiyməti ilə eyni olar. □

6.2. $(k-1)\cdot x = x$.

Doğrudan da, $(k-1)\,\&\, x = \min\{k-1, x\} = x$.

6.3. $0 \,\&\, x = 0$. Doğrudan da $0 \,\&\, x = \min\{0, x\} = 0$.

6.4. $(k-1) \vee x = k-1$. Doğrudan da

$(k-1) \vee x = \max\{k-1, x\} = k-1$

6.5. $0 \vee x = x$. Doğrudan da $0 \vee x = \max\{0, x\} = x$.

Elementar funksiyaların xassələrinə baxılması göstərir ki, bul funksiyalarının ümumiləşmələri olan uyğun k-qiymətli məntiq funksiyalarının heç də hamısında uyğun xassələr saxlanılmır. Məsələn, aşağıdakı nümunələrə baxaq:

Nümunə 1.

1) $\sim(\sim x) = x$, lakin $\bar{\bar{x}} \neq x$ ($k \geq 3$ olduqda);

2) $\sim x_1 \,\&\, x_2 = (\sim x_1) \vee (\sim x_2)$, lakin $\overline{x_1 \,\&\, x_2} \neq \bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2$.

§4. Mükəmməl dizyunktiv və konyunktiv normal formaların analoqları

Teorem 1. İstənilən $f(x_1,...,x_n) \in P_k$ funksiyası aşağıdakı kimi təsvir oluna bilər:

$$f(x_1,...,x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,...,\sigma_n)\in\Omega} I_{\sigma_1}(x_1) \,\&...\&\, I_{\sigma_n}(x_n) \,\&\, f(\sigma_1,...,\sigma_n). \quad (1)$$

Burada

$$\Omega = \{(\sigma_1,...,\sigma_n) \big| \sigma_i \in E^k, \ i = \overline{1,n}\}.$$

Aşağıdakı funksiyanı daxil edək

$$\psi_{\sigma_1...\sigma_n}(x_1,...,x_n) = I_{\sigma_1}(x_1) \,\&\ldots\&\, I_{\sigma_n}(x_n). \qquad (2)$$

Aydındır ki,

$$\psi_{\sigma_1...\sigma_n}(x_1,...,x_n) = \begin{cases} k-1, & \text{əgər } x_1 = \sigma_1,...,x_n = \sigma_n, \\ 0, & \text{əks halda}. \end{cases}$$

(2) funksiyasından istifadə etməklə (1)-i aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$f(x_1,...,x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,...,\sigma_n)\in\Omega} \psi_{\sigma_1...\sigma_n}(x_1,...,x_n) \,\&\, f(\sigma_1,...,\sigma_n). \qquad (3)$$

Teorem 1-in isbatı. İxtiyari bir $(\alpha_1,...,\alpha_n) \in \Omega$ götürək və $x_1 = \alpha_1,..., x_n = \alpha_n$ qəbul edək. Onda (3)-da sol tərəfdə $f(\alpha_1,...,\alpha_n)$ alırıq. (3)-ün sağ tərəfinə baxaq. Aydındır ki,

$$\psi_{\sigma_1...\sigma_n}(\alpha_1,...,\alpha_n) \,\&\, f(\sigma_1,...,\sigma_n) =$$

$$= \begin{cases} f(\alpha_1,...,\alpha_n), & \text{əgər } \sigma_1 = \alpha_1,...,\sigma_n = \alpha_n, \\ 0, & \text{əks halda}. \end{cases}$$

Onda

$$\bigvee_{(\sigma_1,...,\sigma_n)\in\Omega} \psi_{\sigma_1...\sigma_n}(\alpha_1,...,\alpha_n) f(\alpha_1,...,\alpha_n) =$$

$$= \max_{(\sigma_1,...,\sigma_n)\in\Omega} \psi_{\sigma_1...\sigma_n}(\alpha_1,...,\alpha_n) f(\alpha_1,...,\alpha_n) = f(\alpha_1,...,\alpha_n).$$

Deməli, istənilən $(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\Omega$ yığımı üçün (1)-in sol və sağ tərəfi eyni bir $f(\alpha_1,...,\alpha_n)$ qiymətini alır. □

(1) düsturu k-qiymətli məntiq funksiyaları üçün mükəmməl dizyunktiv normal formanın analoqu adlanır.

Teorem 1-in isbatına analoji olaraq aşağıdakı teoremi asanlıqla isbat etmək olar:

Teorem 2. İstənilən $f(x_1,...,x_n)\in P_k$ funksiyası aşağıdakı şəkildə təsvir oluna bilər:

$$f(x_1,...,x_n) = \underset{(\sigma_1,...,\sigma_n)\in\Omega}{\&} I_{\bar{\sigma}_1}(x_1)\vee...\vee I_{\bar{\sigma}_n}(x_n)\vee f(\sigma_1,...,\sigma_n). \quad (4)$$

(4) düsturu k-qiymətli məntiq funksiyaları üçün mükəmməl konyunktiv normal formanın analoqu adlanır.

§5.Tam sistemlərə nümunələr

Tərif 1. Əgər P_k-dan olan istənilən funksiya $R=\{f_1, f_2,..., f_s,...\}$ sisteminin funksiyalarının köməkliyi ilə düstur şəklində təsvir oluna bilərsə, onda R funksiyalar sistemi P_k-da tam sistem adlanır.

Bul cəbrinə analoji olaraq aşağıdakı teoremi isbat etmək olar:

Teorem 1. Tutaq ki, P_k-da aşağıdakı iki funksiyalar sistemi verilmişdir:

$$R=\{f_1, f_2,...\}, \quad \text{(I)}$$

$$Q=\{g_1, g_2,...\}. \quad \text{(II)}$$

Tutaq ki, I sistemi tamdır və onun istənilən funksiyası II sisteminin funksiyaları vasitəsilə düstur şəklində ifadə olunur. Onda II sistemi də tamdır.

Aşağıda tam sistemlərə nümunələrə baxılır. Onların tamlığının əsaslandırılmasında teorem 1-dən istifadə olunur.

1. $R = P_k$ sistemi tamdır.

2. Rosser-Turkett sistemi adlanan aşağıdakı sistem tamdır:

$$R = \{0,1,\ldots,k-1, I_0(x),\ldots,I_{k-1}(x),\ x_1 \& x_2,\ x_1 \vee x_2\}.$$

Doğrudan da istənilən $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyası teorem 4.1-ə görə (4.1) düsturu şəklində yazıla bilər və (4.1) düsturuna daxil olan istənilən funksiya R sisteminə aiddir.

3. $R = \{\bar{x},\ \max(x_1,x_2)\}$ tamdır.

İsbatı. a) Sabitlərin qurulması. $\bar{x} = x+1$ -dən

$$x+2 = (x+1)+1 = \bar{x}+1,$$
$$x+3 = (x+2)+1 = \overline{x+2},$$
$$\vdots$$
$$x+k-1 = \overline{x+(k-2)}.$$

Aydındır ki,

$$\max\{x, x+1,\ldots,x+k-1\} = k-1.$$

Onda $0 = \overline{k-1},\ 1 = \bar{0},\ 2 = \bar{1},\ldots, k-2 = \overline{k-3}$.

b) Birdəyişənli funksiyaların qurulması. Əvvəlcə $I_i(x)$ funksiyasını quraq:

$$I_i(x) = 1 + \max_{\alpha \neq k-1-i}\{x+\alpha\}. \tag{1}$$

Həqiqətən də $x = i$ olduqda (1)-in sol tərəfi $(k-1)$-ə bərabərdir. Sağ tərəf isə aşağıdakı kimidir:

$$1 + \max_{\alpha \neq k-1-i}\{i+\alpha\} = 1 + \max_{\alpha+i \neq k-1}\{i+\alpha\} = 1+k-2 = k-1,$$

yəni sağ tərəf də $(k-1)$-ə bərabərdir.

Əgər $x \neq i$ isə (1)-in sol tərəfi 0-a bərabərdir, sağ tərəfdə $x+\alpha$ -ın ən böyük qiyməti $x+\alpha = k-1$ halında olur. Bu halda $\alpha = k-1-x$ olur. Şərtə görə $\alpha \neq k-1-i$ olmalıdır, lakin $i \neq x$ olduğundan $\alpha = k-1-x$ ola bilər. Beləliklə (1) –in sağ tərəfinin qiyməti

$$1+\max_{\alpha\neq k-1-i}\{x+\alpha\}=1+(k-1)=k=0$$

olur. Beləliklə, (1) münasibəti doğrudur.

Aşağıdakı kimi $f_{s,i}(x)$ funksiyasını daxil edək:

$$f_{s,i}(x)=\begin{cases} s, & \text{əgər } x=i, \\ 0, & \text{əgər } x\neq i. \end{cases}$$

Göstərək ki,

$$f_{s,i}(x)=s+1+\max\{I_i(x),\ k-1-s\}. \qquad (2)$$

$x=i$ olduqda (2)-in sol tərəfinin qiyməti s-dir, sağ tərəfin qiyməti isə $s+1+\max\{k-1,k-1-s\}=s+1+(k-1)=s+k=s$ olur.

$x\neq i$ olduqda (2)-ün sol tərəfi 0-a bərabərdir. Sağ tərəfin qiymətini hesablayaq

$$s+1+\max\{I_i(x),\ k-1-s\}=s+1+\max\{0,\ k-1-s\}=$$

$$=s+1+k-1-s=k=0.$$

Hər iki halda (2)-ün sağ və sol tərəflərinin qiyməti bir-birinə bərabərdir.

Əgər $g(x)$ - P_k-dan olan birdəyişənli ixtiyari funksiyadırsa, onda

$$g(x)=\max\{f_{g(0),0}(x),\ \ f_{g(1),1}(x),\dots,f_{g(k-1),k-1}(x)\}.$$

Xüsusi halda

$$\sim x=\max\{f_{k-1,0}(x),\ f_{k-2,1}(x),\dots,f_{0,k-1}(x)\}.$$

c) $\min\{x_1,x_2\}$ funksiyasının qurulması. Məlum eyniliyə görə

$$\sim\min\{x_1,x_2\}=\max\{\sim x_1,\sim x_2\}.$$

Buradan da

$$\min(x_1,x_2)=\sim\max\{\sim x_1,\sim x_2\}.$$

Beləliklə, $R=\{\bar{x},\ \max(x_1,x_2)\}$ sistemi üzərində Rosser-Turkett sisteminin bütün funksiyalarını qurmaq mümkündür:

$$Q=\{0,1,\dots,k-1,I_0(x),\dots,I_{k-1}(x),\ \ \min(x_1,x_2),\ \ \max(x_1,x_2)\}.$$

Bu sonuncu funksiyalar sistemi P_k-da tam olduğundan teorem 1-ə görə $R = \{\bar{x},\ \max(x_1, x_2)\}$ sistemi də P_k-da tamdır. □

4. $R = \{V_k(x_1, x_2)\}$ sistemi P_k-da tamdır.

Bunu isbat etmək üçün $V_k(x_1, x_2)$-dən $\bar{x}$ və $\max(x_1, x_2)$ funksiyalarını quraq.

Aydındır ki, $\bar{x} = V_k(x, x)$.

$V_k(x_1, x_2)$-ın tərifinə görə $V_k(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2) + 1$. Odur ki,

$$V_k(V_k(x_1, x_2),\ V_k(x_1, x_2)) = V_k(x_1, x_2) + 1 =$$

$$= \max(x_1, x_2) + 1 + 1 = \max(x_1, x_2) + 2,$$

$$V_k(V_k(V_k(x_1, x_2),\ V_k(x_1, x_2))) = V_k(V_k(x_1, x_2), V_k(x_1, x_2)) + 1 =$$

$$= \max(x_1, x_2) + 3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\underbrace{V_k(V_k(\ldots(V_k(x_1, x_2),}_{k\ \text{dəfə}} V_k(x_1, x_2))\ldots)) = \max(x_1, x_2) + k = \max(x_1, x_2)$$

Buradan da

$$\max(x_1, x_2) = \underbrace{V_k(V_k(\ldots(V_k(x_1, x_2), V_k(x_1, x_2))\ldots))}_{k\ \text{dəfə}}.$$

Beləliklə, $R = \{V_k(x_1, x_2)\}$ sistemi vasitəsilə $Q = \{\bar{x},\ \max(x_1, x_2)\}$ sisteminin funksiyaları düstur şəklində ifadə olunur. Sonuncu sistem tam olduğundan teorem 1-ə görə $\{V_k(x_1, x_2)\}$ sistemi də P_k-da tamdır.

Qeyd edək ki, tamlıq anlayışı ilə qapanma və qapalı siniflər anlayışı sıx bağlıdır.

Tərif 2. Tutaq ki, R sinfi P_k-dan olan funksiyaların istənilən altçoxluğudur. P_k-dan olan və R sinfinin funksiyaları vasitəsilə düstur şəklində təsvir olunan bütün funksiyalar çoxluğuna R-in qapanması deyilir və $[R]$ kimi işarə olunur.

Tərif 3. R sinfi (çoxluğu) əgər $[R]=R$ şərtini ödəyərsə, onda o (funksional) qapalı sinif adlanır.

Nümunə 1. 1) $R=P_k$ sinfi qapalı sinifdir.

2) Tutaq ki, $G\subset E^k$ -dır. Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n)\in P_k$ və $\alpha_i\in G,\ i=1,...,n$ olduqda $f(\alpha_1,...,\alpha_n)\in G$ olur. Belə $f(x_1,...,x_n)$ funksiyalar sinfini T_G ilə işarə edək. Başqa sözlə T_G sinfi G çoxluğunu özündə saxlayan və P_k-dan olan funksiyalar sinfidir. T_G sinfi qapalı sinifdir.

§6. Tamlıq haqqında teoremlər

1. Tamlığın tanınması alqoritmi. Tutaq ki, ixtiyari sonlu $R\subset P_k$ çoxluğu verilmişdir. Bu çoxluğun tam olub olmadığını yoxlamaq üçün alqoritmin mövcudluğunu araşdıraq. Tutaq ki,

$$R=\{f_1,f_2,...,f_s\}.$$

Fərz edək ki, $f_1,f_2,...,f_s$ funksiyalarının hamısı $x_1,x_2,...,x_n$ dəyişənlərindən asılıdır.

İstənilən $p\geq 1$ üçün $g_i^p(x_1,...,x_p)=x_i$ işarə edək. $\Omega_{x_1,...,x_p}$ ilə $x_1,...,x_p$ dəyişənlərindən asılı və Ω çoxluğundan olan bütün funksiyalar çoxluğunu işarə edək.

Teorem 1. Tamlığın tanınması üçün alqoritm mövcuddur.

İsbatı. İnduksiya vasitəsilə x_1 və x_2 dəyişənlərindən asılı funksiyalardan ibarət olan $Q_0,Q_1,...,Q_r,...$ çoxluqlar ardıcıllığını quraq. Burada $Q_0=\varnothing$. Tutaq ki, artıq $Q_0,Q_1,...,Q_r$ çoxluqları qurulmuşdur. Q_{r+1} çoxluğunun qurulmasına baxaq.

Tutaq ki, Q_r $(r \geq 0)$ çoxluğu aşağıdakı kimidir:

$$Q_r = \{h_1(x_1, x_2), \ldots, h_{s_r}(x_1, x_2)\}.$$

Burada $r = 0$ olarsa, onda $s_r = 0$ olar.

Hər bir i $(i = 1, \ldots, s)$ üçün

$$f_i(H(x_1, x_2), \ldots, H_n(x_1, x_2))$$

şəklində olan bütün mümkün düsturlara baxaq, harada ki, $H_\ell(x_1, x_2)$ $(\ell = 1, \ldots, n)$ ya Q_r çoxluğundan olan hər hansı bir funksiya ya da ki, $\{g_1^2(x_1, x_2), g_2^2(x_1, x_2)\}$ çoxluğundandır.

Beləliklə, $s(s_r + 2)^n$ sayda düstura baxmaqla ola bilsin ki, Q_r çoxluğuna daxil olmayan funksiyalar ala bilərik. Bu funksiyaların Q_r çoxluğuna daxil olmayanlarını aşağıdakı kimi işarə edək

$$h_{s_r+1}(x_1, x_2),\ h_{s_r+2}(x_1, x_2), \ldots, h_{s_{r+1}}(x_1, x_2).$$

$Q_{r+1} = Q_r \cup \{h_{s_r+1}(x_1, x_2), \ldots, h_{s_{r+1}}(x_1, x_2)\}$ qəbul edək. Aydındır ki,

$$Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \ldots \subseteq Q_r \subseteq \ldots$$

Qurma prosesindən görünür ki, əgər $Q_{r+1} = Q_r$ olarsa, onda $Q_r = Q_{r+1} = Q_{r+2} = \ldots$ olar, yəni çoxluqlar ardıcıllığı stabilləşər. R çoxluğu sonlu və ona daxil olan funksiyalar n sayda dəyişəndən asılı olduğundan, digər tərəfdən, Q_i çoxluğunun gücü k^{k^2}-dən böyük olmadığından aydındır ki, elə r^* minimal nömrəsi tapılar ki, $Q_{r^*} = Q_{r^*+1}$ olsun.

Aydındır ki, $r^* \leq k^{k^2}$ olur. Q_{r^*} çoxluğuna baxaq. İki hal mümkündür.

1) Q_{r^*} çoxluğu x_1 və x_2-dən asılı bütün iki dəyişənli funksiyaları özündə saxlayır. Deməli, bu halda $V(x_1, x_2)$ funksiyası da Q_{r^*}-a daxildir. Onda R sistemi tamdır.

2) Q_{r^*} çoxluğu iki dəyişəndən asılı bütün funksiyaların heç də hamısını özündə saxlamır. $[R]_{x_1x_2} = Q_{r^*}$ olduğundan bu halda $[R]$ çoxluğu x_1 və x_2 dəyişənlərindən asılı bütün funksiyaları özündə saxlamır. Beləliklə, R tam sistem deyildir.

Yuxarıda söylənilənlər onu göstərir ki, verilən R funksiyalar sisteminin tam olmasını müəyyənləşdirmək üçün xüsusi $Q_0, Q_1,...$ çoxluqları ardıcıllığı qurmaqla xüsusi alqoritm istifadə etmək olar.

□

Teorem 2. P_k-da tam olan istənilən R sistemindən tam olan altsistem ayırmaq olar.

İsbatı. Tutaq ki, $R = \{f_1,..., f_s,...\}$. R tam olduğundan $V_k(x_1, x_2)$ funksiyası R-dən olan funksiyalar vasitəsilə düstur şəklində təsvir oluna bilər:

$$V_k(x_1, x_2) = U[f_{i_1},..., f_{i_r}]$$

Aydındır ki, $\{f_{i_1},..., f_{i_r}\}$ altsistemi məhz axtarılan altsistem olar. □

Bu isbat olunan teoremdən alınır ki, tamlığın tanınması alqoritminin mövcudluğu haqqında teoremdə R sisteminin sonlu olması haqda məhdudiyyət o qədər də güclü şərt deyildir.

2. Funksional tamlıq haqqında Kuzneçov teoremi. Teoremi şərh etməzdən qabaq bir anlayışla tanış olaq. Tutaq ki, $y_1,..., y_p$ dəyişənlərindən asılı və P_k-dan olan $h_j(y_1,..., y_p)$ funksiyaların R sinfinə baxırıq. Fərz edək ki, bu sinfə $g_i(y_1,..., y_p) = y_i \quad (i = 1,..., p)$ funksiyası da daxildir.

Tərif 1. Tutaq ki, $f(x_1,..., x_n)$ funksiyası P_k çoxluğundan olan funksiyadır. Əgər R-dən olan istənilən $h_{i_1}(y_1,..., y_p),...$ $..., h_{i_n}(y_1,..., y_p)$ funksiyaları üçün

$$f(h_{i_1}(y_1,..., y_p),..., h_{i_n}(y_1,..., y_p)) \in R$$

olarsa, onda deyirlər ki, $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası R çoxluğunu saxlayır.

R çoxluğunu saxlayan k- qiymətli bütün funksiyalar sinfini B ilə işarə edək.

Lemma 1. R çoxluğunu saxlayan bütün funksiyaların B sinfi qapalıdır.

İsbatı. Aydındır ki, B sinfi eynilik funksiyasını da öz daxilinə alır. Odur ki, B sinfinin qapalılığını göstərmək üçün $f, f_1,..., f_m \in B$ olduqda $\Phi = f(f_1,..., f_m)$-in də B-yə daxil olmasını göstərmək kifayətdir. Tutaq ki, Φ funksiyası n sayda dəyişəndən asılıdır. B sinfindən ixtiyari $h_{i_1},...,h_{i_n}$ funksiyalarını götürək. Onda

$$\Phi(h_{i_1},...,h_{i_n}) = f(f_1(h_{i_1},...,h_{i_n}),..., f_m(h_{i_1},...,h_{i_n})) = f(H_1,...,H_m),$$

harada ki, $H_1,...,H_m \in B$. Ona görə də $f(H_1,...,H_m)$ də B-yə daxil olar.

□

Lemma 2. Əgər R sinfi elədirsə ki, $[R]_{y_1,...,y_p} = R$ olur, onda R-i saxlayan B sinfi üçün aşağıdakı bərabərlik qüvvədədir

$$B_{y_1,...,y_p} = R.$$

İsbatı. Tutaq ki, $h(y_1,..., y_p) \in B$. Onda

$$h(h_{i_1},...,h_{i_p}) \in [R]_{y_1,...,y_p} = R,$$

yəni $h \in B_{y_1,...,y_p}$. Digər tərəfdən, əgər

$$f(y_1,..., y_p) \in B_{y_1,...,y_p},$$

onda $y_1,..., y_p$-lərin əvəzinə $g_1,..., g_p$ funksiyalarını qoysaq, alarıq:

$f(g_1,..., g_p) \in R$ və ya $f(y_1,..., y_p) \in R$. □

Teorem 3 (A.B.Kuzneçov teoremi). P_k-da bir-birinə bütövlüklə daxil olmayan qapalı elə

$$B_1, B_2,..., B_s, \qquad (1)$$

siniflər sistemi qurmaq olar ki, P_k-dan olan funksiyaların altsisteminin tam olması üçün zəruri və kafi şərt bu altsistemin (1) siniflərindən heç birinə bütövlüklə daxil olmamasıdır.

İsbatı. Əvvəlcə $B_1, B_2, ..., B_s$ siniflər sisteminin qurulmasına baxaq. Tutaq ki, $R_1, R_2, ..., R_\ell$ sistemi P_k-dan olan funksiyalar çoxluğudur və bu çoxluqlar P_k-ın məxsusi altçoxluqlarıdır. Bundan başqa, bu çoxluqlara x_1 və x_2 dəyişənlərindən asılı funksiyalar daxildirlər və istənilən i üçün $(i = 1, ..., \ell)$:

1) R_i çoxluğuna $g_1(x_1, x_2) = x_1$ və $g_2(x_1, x_2) = x_2$ funksiyalarının hər ikisi də daxildir;

2) $[R_i]_{x_1 x_2} = R_i$.

$R_1, ..., R_\ell$ - altçoxluqları P_k-dan olan və x_1 və x_2 dəyişənlərindən asılı funksiyalar çoxluğunun bütün məxsusi altçoxluqlarının gözdən keçirilməsi yolu ilə qurulur. Aydındır ki, bu altçoxluqların sayı $2^{p_k(2)}$-dən kiçikdir, harada ki, $p_k(2) = k^{k^2}$-dir. Bu nəzərdən keçirmə zamanı g_1 və g_2 funksiyalarının hər ikisinin daxil olduğu altçoxluqlar saxlanılır. Sonra isə qalan altçoxluqlar üçün $[R]_{x_1 x_2} = R$ şərti yoxlanılır. Bu yoxlama prosesi teorem 1-də olduğu kimi aparıla bilər.

B_i' ilə R_i çoxluğunu saxlayan funksiyalar sinfini işarə edək. Lemma 1 və lemma 2-yə görə B_i' qapalı sinifdir və elədir ki, $(B_i')_{x_1 x_2} = R_i$. Buradan alınır ki, bütün siniflər müxtəlifdirlər.

Başqa siniflərə daxil olan sinifləri ataq. Onda biz aşağıdakı sistemi alarıq:

$$B_1, B_2, ..., B_s.$$

Zərurilik. Tutaq ki, B çoxluğu P_k-nın hər hansı bir alt-sistemidir və B tamdır. Fərz edək ki, hər hansı bir ℓ üçün $(1 \le \ell \le s)$ $B \subset B_\ell$. Qapalı siniflərin xassələrinə görə $[B] \subseteq [B_\ell]$. Digər tərəfdən, $P_k = [B]$ olduğundan, alarıq ki, $P_k \subseteq [B_\ell]$.

Lakin B_ℓ tam olmadığından bu ziddiyyətdir. Deməli, heç bir ℓ üçün $B \subseteq B_\ell$ ola bilməz.

Kafilik. Tutaq ki, $B \subset P_k$-dır və $B_1,...,B_s$ siniflərindən heç birinə bütövlükdə daxil deyildir. $B' = [B \bigcup \{g_1, g_2\}]$ işarə edək. Aydındır ki, B' və B eyni vaxtda ya tam olar ya da ki, tam olmaz. Çünki $B' = B \bigcup [\{g_1, g_2\}]$. Deməli, $V_k(x_1, x_2)$ ya B' və B-yə daxildir, ya da ki, bu siniflərin heç birinə daxil deyildir.

$R' = B'_{x_1 x_2}$ kimi götürək. Göstərək ki, R'-ə x_1 və x_2-dən asılı bütün funksiyalar daxildir. Fərz edək ki, bu belə deyildir. Onda aydındır ki, $[R'] \subseteq B'$, $[R']_{x_1 x_2} = R'$ və, beləliklə, bu halda hər hansı bir i üçün $R' = R_i$ olar. B' çoxluğu R_i çoxluğunu özündə saxladığından hər hansı bir j üçün

$$B' \subseteq B'_i \subseteq B_j$$

olar. $B \subset B'$ olduğundan alınır ki, $B \subseteq B_j$. Bu da şərtə ziddir. Beləliklə, R' və, deməli, B' də $V_k(x_1, x_2)$ funksiyasını özündə saxlayır. Buradan da B'-in və, beləliklə, B-nin tam olması alınır.

□

3. Əsaslı funksiyaların bəzi xassələri. Slupetski teoremi və onun ümumiləşməsi. Kuzneçov teoreminə görə verilən funksiyalar sisteminin tamlığı onun verilən $B_1, B_2,..., B_s$ funksiyalar sinfinə bütövlükdə daxil olub olmamasına görə müəyyənləşdirilir. Lakin belə funksiyalar siniflərinin qurulması hətta k-ın o qədər də böyük olmayan qiymətlərində çoxlu hesablamalar tələb edir. Ona görə də verilən funksiyalar sisteminin tamlığının müəyyənləşdirilməsi üçün əlavə meyarların istifadə edilməsinə zərurət yaranır. Bu bənddə mövcud meyarlardan birinə baxılır. Bu meyara baxmazdan əvvəl bəzi anlayışlarla tanış olaq.

Ən azı iki dəyişəndən əsaslı asılı olan funksiyalara baxaq. Belə funksiyalara əsaslı funksiyalar deyəcəyik.

Əsaslı funksiyaların xassələrinə aid isbatsız aşağıdakı lemmaları şərh edək.

Lemma 3. Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n)$ əsaslı funksiyadır və $\ell(\ell \geq 3)$ sayda qiymət alır. Tutaq ki, x_1 bu funksiyanın əsaslı dəyişənidir. Onda iki elə $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ və $(\beta,\alpha_2,...,\alpha_n)$ yığımları tapılar ki,

$$f(\alpha,\alpha_2,...,\alpha_n) \neq f(\beta,\alpha_2,...,\alpha_n)$$

olsun və $f(\alpha,x_2,...,x_n)$ funksiyası $f(\alpha,\alpha_2,...,\alpha_n)$ və $f(\beta,\alpha_2,...,\alpha_n)$ qiymətlərindən fərqli qiymətlər alsın.

Lemma 4 (Əsas lemma). Əgər $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası $\ell(\ell \geq 3)$ sayda qiymət alan əsaslı funksiyadırsa, onda E^k-da n sayda elə $G_1,...,G_n$ altçoxluqları tapmaq olar ki,

$$1 \leq |G_1|,...,|G_n| \leq \ell - 1$$

olsun və $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ yığımları çoxluğunda $(\alpha_i \in G_i \ , i=\overline{1,n})$, yəni $G_1 \times ... \times G_n$-də f funksiyası ℓ sayda qiymət alsın.

Aşağıdakı yığımlar sisteminə baxaq:

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\alpha_i,\alpha_{i+1},...,\alpha_{j-1},\alpha_j,\alpha_{j+1},...,\alpha_n),\\
&(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\beta_i,\alpha_{i+1},...,\alpha_{j-1},\alpha_j,\alpha_{j+1},...,\alpha_n),\\
&(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\beta_i,\alpha_{i+1},...,\alpha_{j-1},\beta_j,\alpha_{j+1},...,\alpha_n),\\
&(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\alpha_i,\alpha_{i+1},...,\alpha_{j-1},\beta_j,\alpha_{j+1},...,\alpha_n).
\end{aligned} \tag{1}$$

Tərif 2. Əgər $\alpha_i \neq \beta_i$ və $\alpha_j \neq \beta_j$ olarsa, onda (1) yığımlar sistemi kvadrat adlanır.

Lemma 5. Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası $\ell(\ell \geq 3)$ sayda qiymət alan əsaslı funksiyadır. Onda elə kvadrat tapmaq olar ki, bu kvadratda $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası ya iki qiymətdən çox qiymət alır, ya da ki, iki qiymət alır, özü də bu qiymətlərdən biri onun ancaq bir nöqtəsində alınır.

Bu lemmalar sadə həndəsi interpretasiyaya imkan yaradır. Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası $\ell\,(\ell \geq 3)$ sayda qiymət alan əsaslı funksiyadır. Onda:

1. İki ölçüsünə malik elə kub mövcuddur ki, bu kubda f funksiyası ən azı üç qiymətə malikdir (lemma 3).

2. $\ell - 1$ ölçülü elə kub mövcuddur ki, bu kubda f funksiyası bütün ℓ sayda qiymətləri alır (lemma 4).

3. Elə kvadrat mövcuddur ki, bu kvadratda f funksiyası ya ikidən çox qiymət alır, ya da ki, iki qiymət alır, lakin bunlardan biri ancaq bir nöqtədə alınır (lemma 5).

Qeyd. Lemma 4 və lemma 5 şərtlərin qüvvətləndirilməsinə imkan vermir. Həqiqətən də, tutaq ki, $3 \leq \ell \leq k-1, n \geq 3$ və

$$f_\ell(x_1,...,x_n) = \begin{cases} i, \text{ əgər } x_1 = ... = x_n = i,\ i \leq \ell - 1, \\ 0, \text{ əks halda.} \end{cases}$$

Tutaq ki, $G_1,...,G_n$ çoxluqları E^k-dan olan ixtiyari çoxluqlardır və

$$1 \leq |G_1|,...,|G_n| \leq \ell - 2\,.$$

Onda $G_1 \times ... \times G_n$-də f_ℓ funksiyası bütün ℓ sayda qiymətləri ala bilməz. İstənilən kvadratda f_ℓ funksiyası ikidən çox olmayan qiymət alır.

P_k-dan olan və hər hansı bir $E = G_1 \times ... \times G_n$ çoxluğunda müəyyən xassələrə malik $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasından tez-tez analoji xassələrə malik, lakin başqa bir $E' = G_1' \times ... \times G_n'$ çoxluğunda təyin olunmuş $f'(x_1,...,x_n)$ funksiyasına keçmək lazım gəlir. f funksiyasından f' funksiyasına keçidi normallaşdırma adlandıracağıq. Normallaşdırma funksiyaların dəyişənlərinin və qiymətlərinin aşağıdakı şəkildə çevrilmələri ilə bağlıdır:

$$f'(x_1,...,x_n) = \psi(f(\psi_1(x_1),...,\psi_n(x_n)))\,.$$

Bu çevrilmələrdə nəzərə alırıq ki, $|G_1'| = |G_1| = \ell_1, \ldots, |G_n'| = |G_n| = \ell_n$. $\eta_0, \ldots, \eta_{\ell-1}$ ilə f funksiyasının hər hansı bir $E = G_1 \times \ldots \times G_n$ çoxluğunda aldığı qiymətlərini işarə edək. $\eta_0', \ldots, \eta_{\ell-1}'$ ilə E^k-dan olan cüt-cüt müxtəlif ədədlər yığımını işarə edək. Normallaşdırma çoxluqlar arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluğu göstərməklə təyin olunur:

$$\{\eta_0, \ldots, \eta_{\ell-1}\} \leftrightarrow \{\eta_0', \ldots, \eta_{\ell-1}'\},$$

$$G_1 \leftrightarrow G_1', \ldots, G_n \leftrightarrow G_n'.$$

Bu qarşılıqlı birqiymətli uyğunluğa əlavə tələblər qoymaq olar. Məsələn, bu əlavə tələblərə görə E -dən olan qeyd olunmuş $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ nöqtəsinə E'-dən olan $(\alpha_1', \ldots, \alpha_n')$ nöqtəsi və η_i-yə η_i' uyğun olmalıdır. Aydındır ki, bu uyğunluqlar əvəzləmələr çoxluqları vasitəsiylə təyin olunan və P_k-dan olan $\psi(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ funksiyalarının köməkliyi ilə həyata keçirilir.

Əgər $\ell, \ell_1, \ldots, \ell_n \le k-1$ olarsa, onda bu funksiyaları $(k-1)$-dən çox olmayan qiymətlər alan birdəyişənli funksiyalar kimi götürmək olar. Aydındır ki, normallaşdırma halında f' funksiyasının E'-də qiymətinin təkrarlanmalar sayı f funksiyasının E-də uyğun qiymətinin təkrarlamalar sayı ilə eyni olar. Bundan sonra normallaşdırma aşağıdakı şəkillərdə istifadə olunacaq:

1) $\{\eta_0, \ldots, \eta_{\ell-1}\} = \{\eta_0', \ldots, \eta_{\ell-1}'\}$, $\psi(x) = x$,
$G_i' = \{0, \ldots, \ell_i - 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

2) $G_i = G_i'$, $\psi_i(x) = x$ $(i = 1, \ldots, n)$,
$\{\eta_0', \ldots, \eta_{\ell-1}'\} = \{0, \ldots, \ell - 1\}$,

3) $\{\eta_0', \ldots, \eta_{\ell-1}'\} = \{0, \ldots, \ell - 1\}$, $G_i' = \{0, \ldots, \ell_i - 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

1-ci hal (dəyişənlərin çevrilməsi) və 2-ci hal (qiymətlərin çevrilməsi) natamam normallaşdırma hallarıdır. Qeyd olunmuş η_j' və $(\alpha_1', \ldots, \alpha_n')$ nöqtələri üçün adətən 0 və $(0, \ldots, 0)$ götürülür.

Slupetski teoreminin S.V.Yablonski tərəfindən ümumiləşməsi aşağıdakı kimidir:

Teorem 4. Tutaq ki, P_k -dan olan R funksiyalar sistemi $(k-1)$ -dən çox olmayan sayda qiymətlər alan bütün birdəyişənli funksiyaları öz daxilinə alır, harada ki, $k \geq 3$. Onda R sisteminin tamlığı üçün zəruri və kafi şərt k sayda bütün qiymətləri alan $f(x_1,...,x_n)$ əsaslı funksiyasının bu sistemə daxil olmasıdır.

İsbatı. Zərurilik. Tutaq ki, R sistemi tam sistemdir. Fərz edək ki, k sayda qiymətləri alan əsaslı funksiya R sisteminə daxil deyildir. Onda, aydındır ki, R -dən k sayda bütün qiymətləri alan əsaslı funksiyaları almaq olmaz. Bu isə R sisteminin tam olmasına ziddir. Deməli, k sayda bütün qiymətləri alan əsaslı funksiyalar R sisteminə daxildir.

Kafilik. Tutaq ki, R sistemi teoremin şərtini ödəyir və bütün k sayda qiymətləri alan $f(x_1,...,x_n)$ əsaslı funksiyası bu sistemə daxildir. Riyazi induksiya üsulunun köməkliyi ilə R sisteminin tam olmasını göstərək.

1) Göstərək ki, R -dən iki sayda qiymət alan bütün funksiyaları almaq olar. Lemma 5 əsasında elə (1) kvadratı tapmaq olar ki, bu kvadratda f funksiyası ikidən az olmayan sayda qiymət alır, həm də onlardan biri olan η qiyməti ancaq bir nöqtədə alınır. $\varphi(x)$ funksyiasını aşağıdakı kimi təyin edək:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{əgər} \quad x = \eta, \\ 1, & \text{əgər} \quad x \neq \eta. \end{cases}$$

Aydındır ki, $\varphi(x) \in R$. Tutaq ki,

$$g(x_1,x_2) = \varphi(f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},x_1,\alpha_{i+1},...,\alpha_{j-1},x_2,\alpha_{j+1},...,\alpha_n)).$$

$g(x_1,x_2)$ **funksiyası** $\{(\alpha_i,\alpha_j),(\beta_i,\alpha_j),(\beta_i,\beta_j),(\alpha_i,\beta_j)\}$ **kvadratında iki qiymət – 0 və 1 qiymətlərini alır, həm də 0 qiyməti bir nöqtədə alınır. Həmin nöqtəni** (α_1^0,α_2^0) **ilə işarə edək. (0,0)-ın** (α_1^0,α_2^0) **-nöqtəsinə natamam normallaşdırılması inikasını həyata keçirməklə** $g'(x_1,x_2)$ **funksiyasını alarıq:**

$$g'(x_1,x_2)=g(\psi_1(x_1),\psi_2(x_2)),$$

harada ki, $\psi_1,\psi_2\in R$. Aydındır ki, $g'(x_1,x_2)$ funksiyası $\{0,1\}\times\{0,1\}$ çoxluğunda maksimumdur. Onu $x_1\vee_{01}x_2$ ilə işarə edək. Burada $\vee_{01}$ ilə məntiq cəbrinin dizyunksiya əməli işarə olunmuşdur. R sisteminə $j_i(x)$ funksiyası da daxil olduğundan

$$x_1\,\&_{01}\,x_2=j_0(j_0(x_1)\vee_{01}j_0(x_2))$$

funksiyası $\{0,1\}\times\{0,1\}$ çoxluğunda minimumdur. Tutaq ki, $h(x_1,...,x_m)$ funksiyası sabit deyildir və iki qiymət – 0 və 1 qiymətləri alan ixtiyari funksiyadır. Onda

$$h(x_1,...,x_m)=\underset{(\sigma_1,...,\sigma_m)}{\vee} j_{\sigma_1}(x_1)\,\&\,...\,\&\,j_{\sigma_m}(x_m)\,\&\,h(\sigma_1,...,\sigma_m)=$$

$$=\underset{(\sigma_1,...,\sigma_m)}{\vee_{01}} j_{\sigma_1}(x_1)\,\&_{01}\,...\,\&_{01}\,j_{\sigma_m}(x_m)\,\&_{01}\,h(\sigma_1,...,\sigma_m).$$

Beləliklə, $h(x_1,...,x_m)$ funksiyası R sistemindən alına bilər. R sisteminə istənilən iki qiyməti alan birdəyişənli funksiyalar daxil olduğundan bu sistemdən istənilən iki qiyməti alan bütün funksiyaları almaq olar.

2) Tutaq ki, R sistemindən $(\ell-1)$-dən çox olmayan sayda qiymətlər alan bütün funksiyalar qurula bilir, harada ki, $\ell-1<k$. Göstərək ki, bu sistemdən ℓ sayda qiymətləri alan və P_k-dan olan istənilən funksiyanı almaq olar.

$f(x_1,...,x_n)$ funksiyasını götürək. Lemma 4-ə görə elə n sayda $G_1,...,G_n$ altçoxluqları tapılar ki, $|G_i|\le\ell-1$ $(i=1,...,n)$ olsun və $E=G_1\times...\times G_n$ çoxluğunda f funksiyası ℓ sayda $\eta_0,\eta_1,...,\eta_{\ell-1}$ qiymətlərini alsın.

Tutaq ki, η_i $(i=0,...\ell-1)$ qiyməti E-dən olan $\tilde{\alpha}^{(i)}=(\alpha_1^{(i)},...,\alpha_n^{(i)})$

$(i = 0,\dots,\ell-1)$ yığımında alınır, yəni $f(\tilde{\alpha}^{(i)}) = \eta_i$, $i = 0,\dots,\ell-1$. Göstərək ki, $\eta_0,\dots,\eta_{\ell-1}$ qiymətlərini alan istənilən $h(x_1,\dots,x_m)$ funksiyasını R sistemindən almaq olar.

Tutaq ki, $h(x_1,\dots,x_m)$ funksiyası cədvəl 1-də olduğu kimi təyin olunur. Burada σ yığımı $(\sigma_1,\dots,\sigma_m)$ yığımıdır. $i(\sigma)$ isə σ yığımında, yəni $x_1 = \sigma_1,\dots,x_m = \sigma_m$ olduqda $h(x_1,\dots,x_m)$-in $\eta_0,\dots,\eta_{\ell-1}$ qiymətləri arasında aldığı qiymətin indeksidir. Məsələn, $h(\sigma_1,\dots,\sigma_m) = \eta_j$ olarsa, onda $i(\sigma)$ yazısı j indeksini göstərir. Cədvəl 2-də olduğu kimi $\psi_j(x_1,\dots,x_m)$ $(j = 1,\dots,n)$ funksiyasını təyin edək.

Cədvəl 1.

$x_1,\dots,x_m$	$h(x_1,\dots,x_m)$
$\sigma_1,\dots,\sigma_m$	$\eta_{i(\sigma)}$

Cədvəl 2.

$x_1,\dots,x_m$	$\psi_j(x_1,\dots,x_m)$
$\sigma_1,\dots,\sigma_m$	$\alpha_j^{(i(\sigma))}$

Onda

$$h(x_1,\dots,x_m) = f(\psi_1(x_1,\dots,x_m),\dots,\psi_n(x_1,\dots,x_m)),$$

çünki

$$f(\psi_1(\sigma_1,\dots,\sigma_m),\dots,\psi_n(\sigma_1,\dots,\sigma_m)) = f(\alpha_1^{(i(\sigma))},\dots,\alpha_n^{(i(\sigma))}) = \eta_{i(\sigma)},$$

$$h(\sigma_1,\dots,\sigma_m) = \eta_{i(\sigma)}.$$

Verilən ℓ sayda $\eta_0,\dots,\eta_{\ell-1}$ qimətlərini alan bütün funksiyalara malik olduqda $\ell < k$ halında k qiymətdən az qiymət alan birdəyişənli funksiyaların köməkliyi ilə ℓ qiymətə malik qalan funksiyaları da almaq olar. Beləliklə, $\ell = k$ halına kimi bu prosesi davam etdirməklə P_k-dan olan bütün funksiyaları almaq olar. Bununla da teoremin kafiliyi isbat olunur. □

İsbat olunan teoremdən Slupetski meyarı adlanan aşağıdakı nəticə alınır:

Teorem 5 (Slupetski teoremi). Tutaq ki, P_k-dan olan funksiyaların R sisteminə bütün birdəyişənli funksiyalar daxildir, harada ki, $k \geq 3$. Onda R sisteminin tam olması üçün zəruri və kafi şərt k sayda bütün qiymətləri ala bilən $f(x_1,...,x_n)$ əsaslı funksiyasının bu sistemə daxil olmasıdır.

Qeyd. İsbat olunan teorem 4 $k \geq 3$ olduqda doğrudur. Lakin bu teorem $k = 2$ halında doğru olmur. Həqiqətən də

$$R = \{0, 1, x, \bar{x}, x_1 + x_2\}$$

sistemi tam deyildir, belə ki, $R \subset L$. Burada $x_1 + x_2$ funksiyası əsaslı funksiyadır.

Teorem 4-ə görə hər hansı bir verilən R sisteminin tamlığının müəyyənləşdirilməsi praktiki tətbiqlərdə o qədər də əlverişli deyildir. Çünki R sistemində $(k-1)$-dən çox olmayan sayda qiymətlər alan birdəyişənli funksiyaların hamısının olması zəruridir. Belə ki, belə funksiyaların sayı $k^k - k!$-a bərabərdir və k artdıqca R sinfinin qurulması həddindən artıq çətinləşir. Ona görə də daha səmərəli meyarların tapılmasına ehtiyac vardır. Ya da ki, bu teoremdə bütün birdəyişənli funksiyaların baxılan sistemdə mövcud olması şərtinin belə funksiyaların müəyyən bir çoxluğunun baxılan sistemdə olması şərti ilə yaxud da bu funksiyaları əmələ gətirə bilən hər hansı bir funksiyaların mövcudluğu şərti ilə əvəzlənməsinə zərurət yaranır. Deyilənlərə nümunələr isbatsız verilən aşağıdakı teoremlərdə şərh olunur.

Teorem 6 (Pikar teoremi). P_k-dan olan bütün birdəyişənli funksiyalar aşağıdakı üç funksiyanın köməkliyi ilə qurula bilər:

$$f(x) = x - 1 \ (\text{mod } k),$$

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{əgər} \quad 0 \leq x \leq k-3, \\ k-1, & \text{əgər} \quad x = k-2, \\ k-2, & \text{əgər} \quad x = k-1, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 1, \text{ əgər } x = 0, \\ x, \text{ əgər } x \neq 0. \end{cases}$$

Teorem 7. P_k-dan olan bütün birdəyişənli funksiyalar aşağıdakı k sayda funksiyalar vasitəsilə qurula bilər:

$$h(x)=\begin{cases} 1, \text{ əgər } x=0, \\ x, \text{ əgər } x\neq 0, \end{cases} \qquad f_i(x)=\begin{cases} i, & \text{əgər } x=0, \\ 0, & \text{əgər } x=i, \\ x, & \text{əgər } x\notin\{0,i\}. \end{cases}$$

$$i=1,...,k-1.$$

Teorem 4-də şərh olunan tamlıq meyarının tətbiqinə aid bir teoremi isbat edək.

Teorem 8. P_k-dan $(k\geq 3)$ $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasının Şeffer funksiyası olması üçün zəruri və kafi şərt bu funksiyanın $(k-1)$-dən çox olmayan qiymətlər alan funksiyaları əmələ gətirməsidir.

İsbatı. Zərurilik. Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n)$ Şeffer funksiyasıdır. Şeffer funksiyası tam sistem əmələ gətirdiyindən o P_k-dan olan bütün funksiyaları əmələ gətirə bilir.

Kafilik. Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası $(k-1)$-dən çox olmayan qiymətlər alan funksiyaları əmələ gətirir. Odur ki, bu funksiya bütün $0,1,...,k-1$ qiymətlərini, yəni sabitləri alır. Əgər f funksiyası əsaslı funksiya deyildirsə, onda o əvəzləmədir və bu əvəzləmədən ancaq əvəzləmələri almaq olar və bu halda hətta sabitləri də almaq olmaz. Deməli, bu mümkün deyildir, yəni f funksiyası əsaslı funksiyadır. Onda teorem 4-ə görə $R=\{f(x_1,...,x_n)\}$ sistemi tamdır.

□

4. Salomaa teoremi. Salomaa tərəfindən əvəzləmələrin müəyyən qrupu tədqiq olunmuş və onların daxil olduğu P_k-dan olan funksiyalar sisteminin tamlığı üçün müəyyən meyarlar alınmışdır.

Teorem 9 (Salomaa teoremi). Tutaq ki, P_k-dan $(k\geq 5)$ olan funksiyaların R sistemi müxtəlif qiymətli bütün birdəyişənli funksiyaları (bütün əvəzləmələrin G_k qrupu) özündə saxlayır. Onda R sisteminin tam olması üçün zəruri və kafi şərt bütün k qiymətlərini alan əsaslı funksiyanın bu R sisteminə daxil olmasıdır.

Teorem 1-in isbatı ilə [5]-də tanış olmaq olar. [5] işində həm də sübut olunur ki, $k=2, k=3$ və $k=4$ hallarında teorem 1 doğru deyildir.

G_k əvəzləmələr çoxluğu dedikdə k dərəcəli əvəzləmələr çoxluğu nəzərdə tutulur. k dərəcəli əvəzləmə ümumi halda (normal şəkildə)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \dots & k-1 \\ i_0 & i_1 & i_2 \dots & i_{k-1} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

şəklində təsvir olunur. Burada $(i_0, i_1, i_2, \dots, i_{k-1})$ yerdəyişməsi $(0,1,2,\dots,k-1)$ yerdəyişməsinin hər hansı bir ardıcıllıqla düzülüşüdür. Aydındır ki, (1) şəklində əvəzləmələrin sayı $k!$ ədədinə bərabərdir. G_k əvəzləmələr çoxluğu xüsusi qaydada təyin olunan cəbri əmələ görə abel qrupu əmələ gətirir.

§7. Qapalı siniflərin bazisi və qapalı siniflər çoxluğunun gücü

1. P_2-də qapalı siniflərin bazisi və qapalı siniflər çoxluğunun gücü. Tutaq ki, B qapalı sinfində $R=\{f_1,\dots,f_s,\dots\}$ funksiyalar sistemi verilmişdir. Əgər R sisteminin qapanması B sinfi ilə üst-üstə düşərsə, onda R sisteminə B-də tam sistem deyilir. Başqa sözlə desək, əgər B sinfinin istənilən funksiyası R-dən olan funksiyalar vasitəsilə düstur şəklində təsvir oluna bilərsə, onda R sistemi B-də tamdır.

Tərif 1. $R=\{f_1,\dots,f_s,\dots\}$ funksiyalar sistemi B qapalı sinfində tamdırsa, lakin onun heç bir məxsusi altsistemi B-də tam deyildirsə, onda R sisteminə B sinfinin bazisi deyilir.

Məsələn, $R=\{f_1=x_1x_2,\ f_2=0,\ f_3=1,\ f_4=x_1+x_2\}$ sistemi P_2-də, $R=\{0,1,x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2\}$ sistemi isə M sinfində bazisdir.

Amerikan riyaziyyatçısı E.Post tərəfindən məntiq cəbri funksiyaları üçün aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

Teorem 1. P_2-də hər bir qapalı sinif sonlu bazisə malikdir.

Teorem 2. P_2-də qapalı siniflər çoxluğunun gücü hesabidir.

2. k- qiymətli məntiqin ikiqiymətli məntiqə gətirilməsi. Bu fəslin əvvəlki paraqrafları k- qiymətli məntiqin ikiqiymətli məntiqə çox oxşadığını göstərdi. Odur ki, E.Post tərəfindən k-qiymətli məntiqin ikiqiymətli məntiqə gətirilməsi ideyası irləi sürülmüşdür. E.Posta görə P_k-dan olan $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasının yerinə aşağıdakı funksiyalar sisteminə baxmaq olar:

$$\varphi_1(x_{11},...,x_{1\ell},...,x_{n1},...,x_{n\ell}),...,\varphi_\ell(x_{11},...,x_{1\ell},...,x_{n1},...,x_{n\ell}),$$

harada ki, $\ell =]\log_2 k[$, özü də əgər α_i qiyməti ikilik $\alpha_{i1}...\alpha_{i\ell}$ $(i = 1,...,n)$ koduna malikdirsə, onda $f(\alpha_1,...,\alpha_n)$ qiyməti

$$\varphi_1(\alpha_{11},...,\alpha_{1\ell},...,\alpha_{n1},...,\alpha_{n\ell})...\varphi_\ell(\alpha_{11},...,\alpha_{1\ell},...,\alpha_{n1},...,\alpha_{n\ell})$$

ikilik koduna malik olur. Qeyd edək ki, $]x[$ ilə x ədədindən kiçik olmayan ən kiçik tam ədəd işarə olunmuşdur.

Yuxarıdakı deyilən qaydada k-qiymətli məntiqin ikiqiymətli məntiqə gətirilməsi halında P_k-da superpozisiya əməliyyatına P_2-dən olan $\{\varphi_1,...,\varphi_\ell\}$ funksiyalar sistemi üzərində xüsusi əməliyyat qarşı qoyulur. Belə kodlaşdırma kompüter və rəqəm texnikasında məntiqi məsələlərin həll edilməsində çox faydalıdır. Lakin bir sıra hallarda k qiymətli məntiqlə ikiqiymətli məntiq arasında əhəmiyyətli fərqlərin olması səbəbindən belə kodlaşdırma k-qiymətli məntiqdə tədqiqatlara çox az fayda verir. $k \geq 3$ olduqda P_k-ın özünəməxsusluğu Slutepski, Kuzneçov və Yablonskinin elmi-tədqiqatlarında məlum olmuşdur. k - qiymətli məntiqin ikiqiymətli məntiqdən fərqi bir çox məsələlərin tədqiqində özünü daha da qabarıq biruzə verir. Belə məsələlərə aşağıdakıları nümunə göstərmək olar: P_k-da qapalı sinifləri üçün bazislərin mövcudluğu; P_k-da bütün qapalı siniflər sisteminin gücü; P_k-dan olan funksiyaların polinomial təsvirlərinin mümkünlüyü məsələsi.

3. P_k -da qapalı siniflərin bazisi və qapalı siniflər sisteminin gücü. P_k -da qapalı siniflər və onların bazisləri sahəsində Y.İ.Yanov, A.A.Muçnik və başqaları böyük əhəmiyyətə malik elmi-tədqiqat işləri aparmışlar. Bu tədqiqatların bəziləri aşağıda şərh olunur.

Teorem 3 (Yanov teoremi). İstənilən k $(k \geq 3)$ üçün P_k -da bazisə malik olmayan qapalı sinif mövcuddur.

İsbatı. Aşağıdakı funksiyalar ardıcıllığına baxaq:

$$f_0 = 0,$$

$$f_i(x_1,...,x_i) = \begin{cases} 1, & x_1 = ... = x_i = 2 \text{ olduğu hallarda} \\ 0, & \text{əks hallarda} \end{cases} \qquad (i = 1,2,...).$$

B_k ilə $\{f_0, f_1,...\}$ funksiyalar sinfindən dəyişənlərin adlarının dəyişdirilməsi ilə (eyniləşdirməməklə) alınan bütün funksiyalar çoxluğunu işarə edək. Asanlıqla görmək olar ki, B_k sinfi qapalı sinifdir. Tutaq ki, B_k sinfi bazisə malikdir. Onda bazisdə elə $\tilde{f}$ funksiyası tapmaq olar ki, f_{n_0} funksiyasından dəyişənlərin adlarının dəyişdirilməsi ilə alınır, harada ki, n_0 ədədi minimaldır. İki hal mümkündür.

1. Bazisə heç olmazsa başqa bir $\tilde{f}'$ funksiyası da daxildir. Bu funksiya f_{n_1} funksiyasına uyğundur və $n_1 > n_0$. f_{n_0} funksiyası f_{n_1} funksiyasından dəyişənlərin eyniləşdirilməsi yolu ilə alına bildiyindən $\tilde{f}$ funksiyası da $\tilde{f}'$ vasitəsilə ifadə oluna bilər. Bu isə bazisin təyininə ziddir.

2. Bazis ancaq yeganə $\tilde{f}$ funksiyasından ibarətdir. Bu halda $n > n_0$ olduqda heç bir f_n funksiyası $\tilde{f}$ -dən alına bilməz, belə ki, $f_{n_0}(..., f_{n_0},...) = 0$. Beləliklə, yenə də ziddiyyət alırıq.

Bu deyilənlərdən alınır ki, B_k bazisə malik deyildir. □

Teorem 4 (Muçnik teoremi). İstənilən k $(k \geq 3)$ üçün P_k -da hesabi bazisə malik qapalı sinif mövcuddur.

İsbatı. Funksiyalar ardıcıllığına baxaq $(i = 2,3,...)$

$$f_i(x_1,...,x_i) = \begin{cases} 1, & x_1 = ... = x_{j-1} = x_{j+1} = ... = x_i = 2,\ x_j = 1 \\ & \text{olduğu hallarda} \quad (j = 1,...,i) \\ 0, & \text{qalan hallarda.} \end{cases}$$

B_k ilə $\{f_2, f_3,...\}$ sisteminin yaratdığı qapalı sinfi işarə edək. Göstərək ki, bu sistem B_k-da bazis əmələ gətirir. İsbat üçün istənilən m halında f_m funksiyasının sistemin qalan funksiyaları vasitəsilə düstur şəklində ifadə olunmadığını göstərmək kifayətdir. Yəni göstərməliyik ki,

$$f_m = \mathsf{U}[f_2,...,f_{m-1}, f_{m+1},...] \qquad (1)$$

mümkün deyildir.

U düsturunu bir az geniş yazaq:

$$\mathsf{U}[f_2,...,f_{m-1}, f_{m+1},...] = f_r(\mathsf{U}_1[f_2,...,f_{m-1}, f_{m+1},...],...$$

$$...,\mathsf{U}_r[f_2,...,f_{m-1}, f_{m+1},...])$$

və ya

$$f_m(x_1,...,x_m) = f_r(\mathsf{U}_1[f_2,...,f_{m-1}, f_{m+1},...],...$$

$$...,\mathsf{U}_r[f_2,...,f_{m-1}, f_{m+1},...]). \qquad (2)$$

Üç hal mümkündür:

1. $\mathsf{U}_1,...,\mathsf{U}_r$ (burada $r \geq 2$) düsturları arasında ən azı iki düstur dəyişənlər simvolundan fərqlənir. Onda $x_1,...,x_m$ dəyişənlərinin istənilən qiymətlərində f_r funksiyasında uyğun yerdə 0 və 1 dayanar və ona görə də sağ tərəf eyniliklə sıfır olar. Bu isə $f_m \equiv 0$ olmasına ziddir.

2. $\mathsf{U}_1,...,\mathsf{U}_r$ düsturları arasında ancaq bir U_s düsturu tapılır ki, dəyişən simvolundan fərqli olsun. Şərtə görə qalan düsturlar dəyişən simvollarına gətirilir və $r \geq 2$ olduğundan ən azı bir $\mathsf{U}_p \equiv x_q$ düsturu tapılır. Aşağıdakı yığıma baxaq:

$$x_1 = \ldots = x_{p-1} = x_{p+1} = \ldots = x_m = 2, \quad x_p = 1$$

Bu yığımda U_s düsturu ya 0, ya da ki, 1 qiymətini alır. Uyğun olaraq, dəyişənlər üçün qiymətlərin belə götürülməsində f_r funksiyasında iki yerdə 2-dən fərqli qiymət dayanar. Odur ki, (2)-də sağ tərəf 0 qiyməti alar. Bu zaman götürülən qiymətlər yığımında (2) münasibətinin sol tərəfi 1 qiymətini alar. Beləliklə, ziddiyyətə gəlib çıxdıq.

3. Bütün $U_1, \ldots, U_r$ düsturları dəyişən simvollarıdır. Bu halda $r > m$ və, beləliklə, düsturda hər hansı bir x_p simvolu ən azı iki dəfə iştirak edəcək. Dəyişənlər üçün aşağıdakı qiymətlər yığımına baxaq:

$$x_1 = \ldots = x_{p-1} = x_{p+1} = \ldots = x_m = 2, \quad x_p = 1 .$$

Dəyişənlərə belə qiymətlərin mənimsədildiyi halda (2) münasibətinin sol tərəfi 1, sağ tərəfi isə 0 qiyməti alır. Beləliklə, bu halda da ziddiyyətə gəlib çıxdıq. Deməli, (1) münasibəti mümkün deyildir. $\square$

Teorem 5. Hər bir k $(k \geq 3)$ üçün P_k-ya daxil olan müxtəlif qapalı siniflər çoxluğunun gücü kontiniumdur.

İsbatı. P_k-da qapalı siniflərin sayını P_k-da olan mümkün altçoxluqların sayı ilə yuxarıdan qiymətləndirmək olar. P_k hesabi sayda funksiyadan ibarət olduğundan və hesabi çoxluğun altçoxluqları çoxluğunun kontinium gücə malik olması haqqında teoremə görə P_k-da qapalı siniflərin sayı kontiniuma bərabərdir.

İndi P_k-da qapalı siniflərin sayını aşağıdan qiymətləndirək. Bundan ötrü teorem 4-ün isbatında qurulan B_k qapalı sinfinə baxaq. Bu sinfin bazisi aşağıdakı kimidir

$$\{f_2, f_3, \ldots\} .$$

Hər bir $\{\rho_1, \rho_2, \ldots\}$ ardıcıllığı üçün, harada ki, $2 \leq \rho_1 < \rho_2 < \ldots$ ödənir, $B_k(\rho_1, \rho_2, \ldots)$ sinfini $\{f_{\rho_1}, f_{\rho_2}, \ldots\}$ funksiyalar sistemi vasitəsilə yaranan sinif kimi quraq. Asanlıqla görmək olar ki, əgər $\{\rho'_1,\rho'_2,...\}\neq\{\rho''_1,\rho''_2,...\}$ olarsa, onda

$$B_k(\rho'_1,\rho'_2,...)\neq B_k(\rho''_1,\rho''_2,...)$$

olar. Buradan da alınır ki, $\{B_k(\rho_1,\rho_2,...)\}$ siniflər çoxluğu kontinium gücə malikdir. □

§8. k - qiymətli məntiqdə funksiyaların polinomial təsviri

Məlum olduğu kimi P_2-dən istənilən məntiq cəbri funksiyası teorem 1.6.2-yə əsasən Jeqalkin polinomu şəklində təsvir olunur. Odur ki, P_2-də Jeqalkin polinomları sistemi tam sistem təşkil edir.

k- qiymətli məntiqin ikiqiymətli məntiqdən prinsipial olaraq fərqli cəhətlərindən biri də P_k-da heç də həmişə polinomlar sisteminin tam olmamasıdır. Bu aşağıdakı teoremlə sübut olunur.

Teorem 1. mod k üzrə polinomlar sisteminin P_k-da tam olması üçün zəruri və kafi şərt $k=p$ olmasıdır, harada ki, p-sadə ədəddir.

İsbatı. P_k- dan olan istənilən $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası üçün aşağıdakı təsvir asanlıqla sübut oluna bilər:

$$f(x_1,...,x_n)=\sum_{(\sigma_1,...,\sigma_n)\in\Omega_n} j_{\sigma_1}(x_1),...,j_{\sigma_n}(x_n)f(\sigma_1,...,\sigma_n)\quad(\text{mod } k),$$

harada ki,

$$\Omega_n=\{(\alpha_1,...,\alpha_n)|\alpha_i\in E^k,\ i=\overline{1,n}\}.$$

Ona görə də $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasının mod k üzrə polinomlarla təsviri $j_0(x),...,j_{k-1}(x)$ funksiyalarının mod k üzrə təsvirinə gətirilir. Digər tərəfdən, $j_\sigma(x)=j_0(x-\sigma)$ olduğundan mod k üzrə polinomlar sisteminin tam olması üçün zəruri və kafi şərt $j_0(x)$ funksiyasının polinomlar vasitəsilə təsvir olunmasıdır. İndi isə kafiliyi isbat edək.

Kafilik. Tutaq ki, $k = p$ -dir. Onda kiçik Ferma teoreminə görə alarıq:

$$j_0(x) = 1 - x^{p-1} (\text{mod } p).$$

Bu isə o deməkdir ki, P_k -da polinomlar sistemi mod k üzrə tamdır.

Qeyd edək ki, $j_0(x)$ funksiyasından istifadə etmədən də baxılan məsələnin həllinə nail olmaq olar. Məsələn birdəyişənli $g(x)$ funksiyası naməlum əmsallar üsulundan istifadə etməklə

$$g(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{p-1} x^{p-1} \quad (\text{mod } p) \tag{3}$$

şəklində axtaraq. (3)-də $x = 0,..., p-1$ götürməklə aşağıdakı tənliklər sistemini alarıq

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot 0^1 + a_2 \cdot 0^2 + ... + a_{p-1} \cdot 0^{p-1} = g(0), \\ a_0 + a_1 \cdot 1^1 + a_2 \cdot 1^2 + ... + a_{p-1} \cdot 1^{p-1} = g(1), \\ .... \\ a_0 + a_1 \cdot (p-1)^1 + a_2 \cdot (p-1)^2 + ... + a_{p-1} \cdot (p-1)^{p-1} = g(p-1). \end{cases} \tag{4}$$

(4) sisteminin determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 1 & 1^2 & ... & 1^{p-1} \\ . & . & . & ... & . \\ 1 & p-1 & (p-1)^2 & ... & (p-1)^{p-1} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

kimidir və bu determinant Vandermond determinantına gətirilə bildiyindən onu aşağıdakı kimi hesablaya bilərik:

$$\Delta = \prod_{1 \le i < j \le p-1} (j-i) \quad (\text{mod } p).$$

$\Delta \not\equiv 0 \ (\text{mod } p)$ olduğundan (3)-də naməlum əmsallar aşağıdakı düsturla tapıla bilər:

$$a_i \equiv \Delta_i / \Delta \ (\text{mod } p), \ i = 0,...,(p-1).$$

Burada Δ_i (5)-ə uyğun Δ determinantda i-ci sütunu $(g(0), g(1), ..., g(p-1))^T$ sütunu ilə əvəz etməklə alınan determinantdır.

Zərurilik. Tutaq ki, polinomlar sistemi mod k üzrə tamdır. Onda $j_0(x)$ funksiyasını aşağıdakı kimi təsvir etmək olar:

$$j_0(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_s x^s \pmod{k}. \quad (6)$$

Göstərək ki, $k = p$-dir. Əksini fərz edək. Fərz edək ki, k sadə ədəd deyildir Onda $k = k_1 k_2$-dır, harada ki, $1 < k_1 < k$.

$x = 0$ olduqda (6)-dan $b_0 = 1$ alarıq, yəni

$$j_0(x) = 1 + b_1 x + ... + b_s x^s \pmod{k}. \quad (7)$$

(7)-də $x = k_1$ götürsək, onda

$$0 = 1 + b_1 k_1 + ... + b_s k_1^s \pmod{k}$$

və ya

$$k - 1 = b_1 k_1 + ... + b_k k_1^s \pmod{k} \quad (8)$$

alarıq. (8)-dən alınır ki, $k-1$ ədədi k_1-ə bölünür. Həm $k-1$ və həm də k ədədləri k_1-ə bölünməsi ancaq $k_1 = 1$ olduqda mümkündür. Bu isə ziddiyyətdir. Deməli k sadə ədəddir. □

§9. Əməliyyatlı funksional sistemlərin ümumiləşmələri

Əməliyyatlı funksional sistemlər funksional obyektlərdən və əməliyyatlardan ibarət olur.

Əməliyyatlı funksional sistemlərin aşağıdakıları ilə tanış olduq:

1. (P_2, C) sistemi. Bu əməliyyatlı funksional sistem məntiq cəbri funksiyaları sisteminin superpozisiya əməliyyatı ilə birlikdə nəzərdə tutulmasıdır.

2. (P_k, C) sistemi. Bu əməliyyatlı funksional sistem k-qiymətli məntiq funksiyaları sisteminin superpozisiya əməliyyatı ilə birlikdə nəzərdə tutulmasıdır.

Funksional obyektləri və əməliyyatları mürəkkəbləşdirməklə (ümumiləşdirməklə) başqa əməliyyatlı funksional sistemlər də almaq olar.

Funksional obyektlərin ümumiləşdirilməsinə hesabi qiymətli məntiq və kontinium qiymətli məntiq funksiyaları sistemləri aiddirlər.

Əməliyyatların ümumiləşdirilməsinə əks əlaqə, gecikmə (zamana görə), primitiv rekursiya, minimallaşdırma və s. əməliyyatlar aiddirlər.

Ümumiləşmiş əməliyyatlı funksional sistemlərə aşağıdakıları nümunə göstərmək olar:

(P_{N_0}, C) sistemi. Bu sistem hesabi qiymətli məntiq funksional sisteminin superpozisiya əməliyyatı ilə götürülməsidir. Bu sistem 0,1,2,… sabitlərindən və dəyişənləri $E^{N_0} = \{0,1,...\}$-dan qiymətlər alan və öz qiymətləri də E^{N_0}-dan olan $f(x_1,...,x_n)$ funksiyalarından ibarətdir;

(P_{c}, C) sistemi. Bu sistem kontinium qiymətli məntiq sisteminin superpozisiya əməliyyatı ilə götürülməsidir. Bu sistem $[0,1]$ parçasından olan sabitlərdən, həm arqumentlərinin və həm də özlərinin qiyməti $[0,1]$ parçasından olan funksiyalardan ibarətdir.

FƏSİL 3. QRAFLAR VƏ ŞƏBƏKƏLƏR

§1. Qraflar və onlar haqqında ümumi məlumatlar

1.Əsas anlayışlar. Qraf anlayışı müasir riyaziyyatın əsas anlayışlarından biridir və sonlu həndəsəyə aid oluna bilər.

Tərif 1. Tutaq ki, M çoxluğu və elementləri M çoxluğunun elementləri cütlüyündən ibarət olan T çoxluğu verilmişdir. $G =< M,T >$ cütlüyünə qraf deyilir.

M çoxluğu qrafın daşıyıcısı və ya qrafın təpələr çoxluğu adlanır. T çoxluğu qrafın siqnaturası və ya tillər çoxluğu adlanır.

Təyindən göründüyü kimi $T \subseteq M \times M$ -dir. T çoxluğunun elementlərini (a_i, a_j) kimi yazaq. Burada $a_i, a_j \in M$. (a_i, a_j) tili a_i və a_j təpəsini birləşdirir.

Əgər qrafın tillərinə istiqamətlər yazılırsa, belə qrafa orqraf və ya oriyentasiyalı qraf deyilir. Oriyentasiyalı qrafda tillərə qövs də deyirlər.

Nümunə 1. Tutaq ki,

$$M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\},$$

$$T = \{(a_1, a_2), (a_2, a_2), (a_4, a_5), (a_5, a_6), (a_5, a_6), (a_6, a_7), (a_5, a_7)\}.$$

Onda $G =< M,T >$ qrafdır.

Əgər M və T çoxluqları sonlu olarsa, onda qrafa sonlu qraf deyilir.

Əgər qrafda iki təpəni birləşdirən bir neçə til olarsa, belə qrafa multiqraf deyilir.

Şəkil 1, şəkil 2 və şəkil 3-də qrafın, multiqrafın və orqrafın həndəsi təsvirləri verilir.

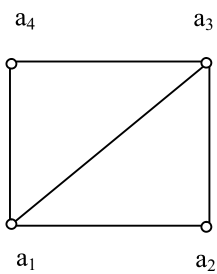
Tutaq ki, a_i və a_j G qrafının ixtiyari təpə nöqtələridir.

Tərif 2. G qrafının

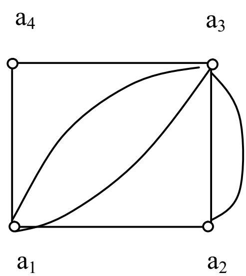
$$A_{a_i a_j} = \{(a_{i_1}, a_{i_2}), (a_{i_2}, a_{i_3}), \ldots, (a_{i_{s-1}}, a_{i_s})\}$$

tillər sistemi a_i və a_j təpələrini birləşdirən yol və ya marşrut adlanır, harada ki, $a_{i_1} = a_i$ və $a_{i_s} = a_j$.

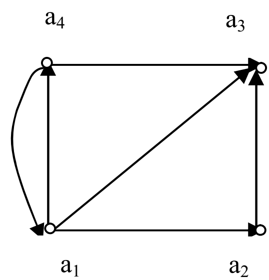
$A_{a_i a_j}$ yoluna aid olan istənilən til üçün deyilir ki, $A_{a_i a_j}$ bu tildən keçir. Əgər a təpəsi $A_{a_i a_j}$ yolunun hər hansı bir tilinə aid olarsa, onda da deyilir ki, $A_{a_i a_j}$ yolu a təpəsindən keçir.



Şəkil 1.



Şəkil 2.



Şəkil 3.

Tərif 3. Əgər $A_{a_i a_j}$ yolu üçün $a_i = a_j$ olarsa, onda ona dövrə deyilir. Xüsusi halda (a_i, a_i) dövrəsinə ilgək deyilir.

Tərif 4. Əgər G qrafında istənilən iki müxtəlif təpəni birləşdirən yol mövcuddursa, onda qraf rabitəli qraf adlanır.

Tərifdən göründüyü kimi rabitəli qraf izolə edilmiş təpələrə malik olmur.

Qraflarda tilləri təpələrsiz də adlandırmaq olar, yəni T çoxluğunu $T = \{u_1, u_2, ..., u_\ell\}$ kimi də təsvir etmək olar. Bu halda T -nin elementləri üçün insidiyent və koinsidiyent anlayışları istifadə olunur.

u tili a təpəsi ilə birləşərsə, onda u tili a təpəsi ilə insidiyent olan til, a təpəsi isə u tili ilə konsidiyent olan təpə adlanır.

a_i və a_j təpələri tillə birləşirsə, onda onlara qonşu təpələr deyilir. a təpəsi ilə qonşu olan təpələr çoxluğuna a təpəsinin ətrafı deyilir və $O(a)$ ilə işarə olunur.

u_i və u_j tilləri eyni bir təpə ilə insidiyent olarsa, onda onlara qonşu tillər deyilir.

Çəkili qraf anlayışı ilə tanış olaq. G qrafının hər bir $a \in M$ təpəsinə $W = \{w_i | i = 1,2,...\}$ çoxluğundan olan w_i əmsalı qarşı qoyaq. Onda qraf çəkili təpəyə malik qraf adlanır. G qrafının istənilən $u \in T$ tilinə $P = \{p_i | i = 1,2,...\}$ çoxluğundan bir p_i əmsalı qarşı qoyaq. Onda qraf çəkili tilə malik qraf adlanır. Təpələri və (və ya) tilləri çəkili olan qraf çəkili qraf adlanır.

Qrafların verilməsi üçün qonşuluq və insidiyentlik matrisləri istifadə oluna bilər.

Tutaq ki, G qrafının təpələr çoxluğu olan M çoxluğu n sayda elementdən ibarətdir. Çəkili olmayan qraflarda $S = [s_{ij}],\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$ qonşuluq matrisinin elementləri aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{əgər } (a_i, a_j) \in T, \\ 0, & \text{əgər } (a_i, a_j) \notin T. \end{cases}$$

Çəkili qraf halında isə

$$s_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{əgər } (a_i, a_j) \notin T, \\ p_{ij}, & \text{əgər } (a_i, a_j) \in T \text{ tili } p_{ij} \text{ çəkisinə malikdirsə}. \end{cases}$$

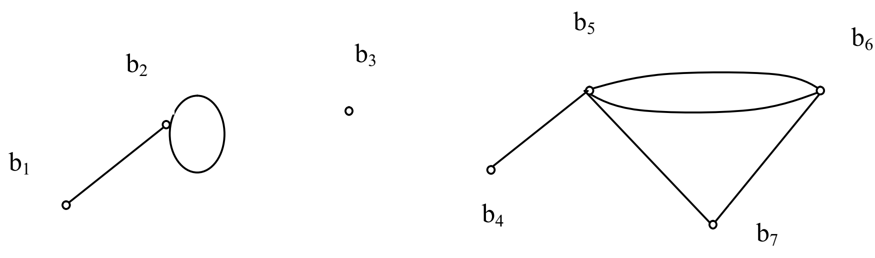
Tutaq ki, qraf n sayda təpəyə və m sayda tilə malikdir, yəni $n = |M|$, $m = |T|$. G qrafının $A(G) = [c_{ij}],\ i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}$ insidiyentlik matrisinin elementləri aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{əgər } a_i \text{ təpəsi } \ell_j \text{ tilinin başlanğıcıdırsa}, \\ -1, & \text{əgər } a_i \text{ təpəsi } \ell_j \text{ tilinin sonudursa}, \\ 0, & \text{əgər } a_i \text{ təpəsi } \ell_j \text{ tili ilə konsidiyent deyildir}. \end{cases}$$

2. Qrafların həndəsi təsvirləri. Pontryaqin-Kuratovski teoremi. Qrafların yuxarıda verilən tərifi həddindən çox abstraktdır. Əyanilik üçün qrafın həndəsi interpretasiyasına baxıla bilər, yəni qraflar Evklid fəzasında müəyyən fiqurlar kimi təsvir oluna bilər. Belə Γ fiqurları müxtəlif $b_1, b_2, ...$ təpələrindən və hər biri müəyyən bir (b_i, b_j) təpələp cütünü (trivial halda $b_i = b_j$ ola bilər) birləşdirən çevrə qövslərindən və ya düz xətt parçalarından ibarət olan xətlərdən (əyrilərdən) ibarət olur. Hesab olunur ki, Γ fiqurunun heç bir daxili nöqtəsi başqa belə fiqurların təpə və ya daxili nöqtəsi ola bilməz. Qeyd edək ki, şəkil 1, şəkil 2 və şəkil 3-də təsvir olunan fiqurlar da uyğun qrafların həndəsi təsvirləridir.

Tərif 5. Əgər Γ fiqurunun təpələri ilə G qrafının təpələri və Γ fiqurunun əyriləri və G qrafının tilləri arasında elə qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq mövcuddursa və əgər $(b_{n_i}, b_{n_j}) \leftrightarrow (a_i, a_j)$ olduqda $b_{n_i} \leftrightarrow a_i$, $b_{n_j} \leftrightarrow a_j$ (uyğun əyrilər və tillər uyğun təpələri birləşdirir) olarsa, onda Γ fiquruna G qrafının həndəsi realizə edilməsi deyilir.

Nümunə 2. Nümunə 1-də verilən G qrafının həndəsi realizəsi şəkil 4-də verilən Γ fiqurudur.



Şəkil 4

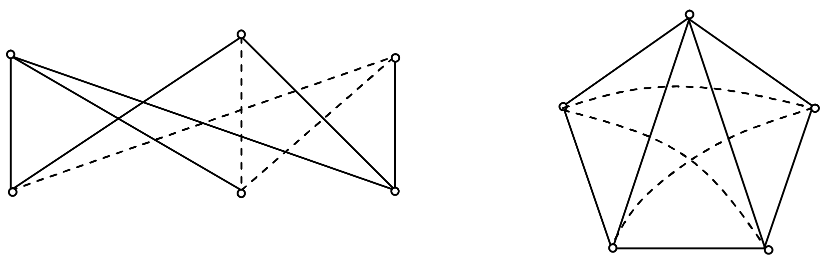
Şəkil 4-dən göründüyü kimi G qrafı multi qrafdır.

Bütün qrafları Evklid fəzalarında həndəsi realizə etmək mümkündürmü? Hansı ölçülü evklid fəzalarında bu həmişə mümkündür? Bu suallara aşağıdakı teorem və nümunələr cavab verir.

Teorem 1. Hər bir sonlu G qrafını üç ölçülü fəzada realizə etmək olar.

İsbatı. Tutaq ki, G qrafı m təpə nöqtəsindən və n tildən ibarətdir. Bir düz xətt götürək və bu düz xətdən n sayda üst-üstə düşməyən müstəvi keçirək. Düz xətt üzərində m sayda $b_1, b_2, ..., b_m$ nöqtələrini götürək. Bu nöqtələri qrafın uyğun olaraq $a_1, a_2, ..., a_m$ təpələrinə qarşı qoyaq. G qrafının hər tilinə qarşılıqlı birqiymətli olaraq düz xətdən keçirdiyimiz bir müstəvini qarşı qoyaq. Tutaq ki, (a_i, a_j) G qrafının tilidir. Bu tilə uyğun müstəvidə b_i və b_j təpələrini birləşdirək. Bu əməliyyatı qrafın bütün tilləri üçün həyata keçirək və, beləliklə, Γ fiqurunu alırıq. Aydındır ki, Γ fiquru G qrafının həndəsi realizəsidir. □

Nümunə 3. Şəkil 5-də iki qraf təsvir olunub. Bu qraflardan birincisi məşhur üç ev və üç quyu məsələsinin həlli ilə bağlı olan qrafdır. Qeyd edək ki, bu məsələ aşağıdakı kimidir: hər bir evdən hər quyuya elə yol çəkmək lazımdır ki, bu yollar bir-birini kəsməsin. İkinci qraf isə beş təpəyə malik tam qrafdır. Qeyd edək ki, tam qraf dedikdə bütün (a_i, a_j), $1 \le i \le m$, $1 \le j \le m$, $i \ne j$, şəklində tillərə malik qraf nəzərdə tutulur. Şəkil 5-də verilən qraflar müstəvi üzərində realizə oluna bilmirlər.



Şəkil 5.

Qrafların müstəvi üzərində realizə olunması şərtini müəyyən etmək üçün L.S.Pontryaqin və Kuratovski maraqlı nəticə almışdırlar. O nəticəni şərh etməzdən əvvəl bəzi anlayışları verək.

Tərif 6. Əgər qraf müstəvi üzərində elə realizə oluna bilərsə ki, onun tilləri ancaq təpələrdə kəsişsin, onda belə qrafa planar qraf deyilir.

Şəkil 5-də verilən qraflar planar olmayan qraflardır.

Tərif 7. G və G' qraflarının təpələri və tilləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq olarsa və həm də bu uyğunluq elə olarsa ki, uyğun tillər uyğun təpələri birləşdirir, onda G və G' qraflarına izomorf qraflar deyilir.

Bu tərifə əsasən abstrakt qrafla onun həndəsi realizəsi izomorf qraflardır. Teorem 1-in hökmünə görə abstrakt qraf əvəzinə onun həndəsi realizəsinə (təsvirinə) baxmaq olar. Ona görə də qrafa həndəsi obyekt kimi baxmaq olar.

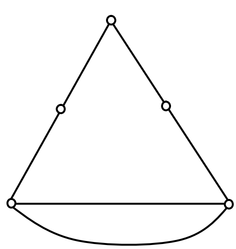
$G=<M,T>$ qrafının tillərinin hissələrə bölünməsi əməliyyatını daxil edək. Tutaq ki, (a_i,a_j) - G qrafının ixtiyari tilidir, a isə M-ə daxil olmayan obyektdir. G qrafının (a_i,a_j) tilinin hissələrə bölünməsi əməliyyatı $G'=<M',T'>$ qrafının qurulmasından ibarətdir, harada ki,

$$M'=M\bigcup\{a\},\ T'=(T\setminus(a_i,a_j))\bigcup\{(a_i,a),\ (a,a_j)\}.$$

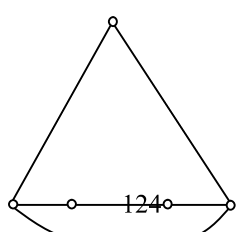
G_2 qrafı G_1 qrafının tillərinin sonlu sayda hissələrə bölünməsi əməliyyatı vasitəsilə alınırsa, onda G_2 qrafı G_1 qrafının hissələrə bölünməsi adlandırılır.

Tərif 8. G_1 və G_2 qraflarının əgər elə hissələrə bölünməsi mövcuddursa ki, onlar izomorfdurlar, onda G_1 və G_2 qrafları homoemorf qraf adlanırlar.

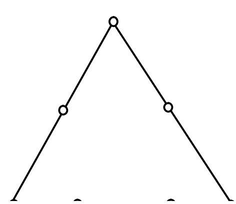
Nümunə 4. Şəkil 6-da və 7-də G_1 və G_2 qrafları təsvir olunub. Bu qraflar izomorf deyildirlər, lakin homoemorfdurlar. Çünki hər iki qraf şəkil 8-də təsvir olunan qrafa kimi hissələrə bölünə bilərlər.



G_1



G_2



Şəkil 6. Şəkil 7. Şəkil 8.

Tərif 9. Əgər $G' =< M', T' >$ qrafının təpələri və tilləri $G =< M, T >$ qrafına məxsusdursa, yəni $M' \subset M$, $T' \subset T$, onda G' qrafına G qrafının alt qrafı deyilir.

Pontryaqin-Kuratovski teoremi aşağıdakı kimi şərh olunur:

Teorem 2 (müstəvi üzərində realizə olunma kriteriyası). G qrafının müstəvi üzərində realizə oluna bilməsi üçün zəruri və kafi şərt onun istənilən alt qrafının şəkil 5-də təsvir olunan qrafların heç biri ilə homoemorf olmamasıdır.

3. Qraflar sayının qiymətləndirilməsi. h sayda tilə malik və izolə olunmuş təpəsi olmayan qraflar çoxluğuna baxaq. Tutaq ki, bu çoxluqda qraflar cüt-cüt izomorf deyildirlər. Bu çoxluğun elementlərinin maksimal sayını $\gamma(h)$ ilə işarə edək.

$\gamma(h)$-ın qiymətləndirilməsinə baxaq. Əvvəlcə bəzi faktları qeyd edək.

Tutaq ki, H_n^m ilə n elementdən hər birində m element olmaqla təkrari birləşmələrinin sayı işarə olunub. Məlum olduğu kimi

$$H_n^m = C_{n+m-1}^m .$$

Lemma 1. $n! > (n/e)^n$.

İsbatı. Analizdən məlum olduğu kimi

$$(1 + 1/n)^n < e .$$

Buradan $n^n > (n+1)^n / e$. Bu fakta əsaslanaraq riyazi induksiya üsulu ilə isbat edək ki, $n! > (n/e)^n$.

1. $n = 1$ olduqda alırıq ki, $1 > 1/e$.

2. $n=k$ halında fərz edək ki, hökm doğrudur, yəni $k!>(k/e)^k$.

3. $n=k+1$ halında hökmün doğruluğunu isbat edək:

$$(k+1)!=(k+1)k!>(k+1)(k/e)^k=\frac{k+1}{e^k}k^k>\frac{k+1}{e^k}\frac{(k+1)^k}{e}=$$
$$=\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}.$$

□

Teorem 4. Aşağıdakı münasibət doğrudur: $\gamma(h)<c_1(c_2h)^h$, harada ki, $c_1=e$ və $c_2=2e$.

İsbatı. Aydındır ki, h sayda tilə malik qrafın təpələrinin sayı $2h$-dan çox deyildir. Qrafın təpələrini 1,2,... natural ədədləri ilə işarələyək. Aydındır ki, tillərin çeşidlərinin sayı, yəni tillərlə birləşən təpələr cütünün sayı r ədədini aşmır, harada ki,

$$r=H_{2h}^2=C_{2h+1}^2=h(2h+1).$$

$\gamma(h)$ ədədi h tilinə malik cüt-cüt ekvivalent olmayan nömrələnmiş qrafların maksimal sayını aşmadığından, bu ədəd r elementdən hər birində h element olan təkrarlı birləşmələrin sayından böyük deyildir. Ona görə də

$$\gamma(h)\le H_r^h=C_{r+h-1}^h=\frac{(r+h-1)(r+h-2)...[r+h-1-(h-1)]}{h!}\le$$
$$\le\frac{(r+h-1)^h}{h!}=\frac{(2h^2+2h-1)^h}{h!}<\frac{(2h^2+2h)^h}{h!}<\frac{(2h^2+2h)^h}{(h/e)^h}=$$
$$=\left(1+\frac{1}{h}\right)^h(2eh)^h<e(2eh)^h.$$

□

Nəticə. h sayda tilə malik cüt-cüt izomorf olmayan nömrələnmiş qrafların maksimal sayı $e(2eh)^h$-ı aşmır.

§2. Şəbəkələr və onlar haqqında ümumi məlumatlar

1. Əsas anlayışlar. Şəbəkə anlayışı qraf anlayışının ümumiləşməsidir.

Tərif 1. $G=\{a_1,a_2,...\}$ çoxluğu və $M=\{E_0;E_1,E_2,...\}$ yığımları şəbəkə adlanır və $<G,(E_0;E_1,E_2,...)>$ ilə işarə olunur, harada ki, hər bir E_i G-dən olan elementlər yığımıdır, yəni $E_i=(a_{\nu_1(i)},a_{\nu_2(i)},...)$. G çoxluğunun obyektləri şəbəkənin təpələri, E_0-dan olan obyektlər isə şəbəkənin qütbləri adlanır.

Nümunə 1. Tutaq ki,

$$G=\{1,2,3,4,5,6,7\},\quad M=\{E_0;E_1,E_2,E_3,E_4,E_5\}.$$

Burada

$$E_0=(1,2,6,7),\ E_1=(1,3,3,4,5),\ E_2=(4,4,5,6),$$
$$E_3=E_4=(2,4),\ E_5=(2,5,6,7).$$

Onda $<G,(E_0;E_1,E_2,E_3,E_4,E_5)>$ şəbəkə olur.

G çoxluğu və M yığımı sonlu olduqda şəbəkə sonlu şəbəkə adlanır. Nümunə 1-də baxılan şəbəkə sonlu şəbəkədir. Sonsuz şəbəkələrə hesabi şəbəkələri nümunə göstərmək olar. Belə şəbəkələrdə G və M hesabi çoxluqdan güclü olmurlar.

Qraflarda olduğu kimi şəbəkələr üçün də həndəsi realizə olunmaq anlayışı vermək olar. Bir işarələmə daxil edək. Əgər E – yığımdırsa, onda $<E>$ ilə E-dən olan bütün obyektlərin çoxluğunu işarə edək.

Tutaq ki, $<G,(E_0;E_1,...)>$ - şəbəkədir. G çoxluğunu bir-biri ilə kəsişməyən üç hissəyə bölək:

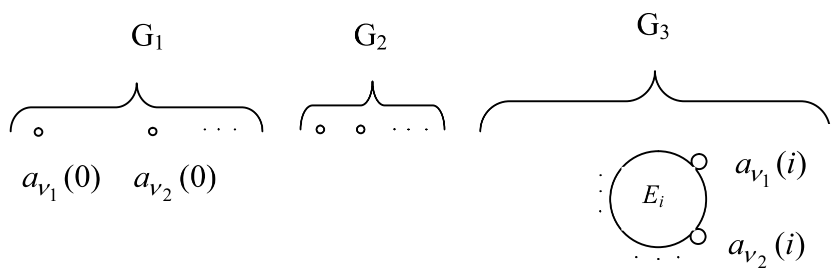
$G_1=<E_0>$ - qütblər çoxluğu,

$G_2=G\setminus\bigcup\limits_{i\geq 0}<E_i>$-qütblərdən fərqlənən izolə edilmiş təpələr çoxluğu,

G_3 - yerdə qalan təpələrdən ibarət çoxluq.

G_1 və G_2–dən olan hər bir təpəyə üçölçülü evklid fəzasında bir nöqtə elə qarşı qoyaq ki, müxtəlif təpələrə müxtəlif nöqtələr uyğun olsun. Bu nöqtələrə G çoxluğundan a_i-yə uyğun simvollarla qeydlər edək. Aydındır ki, qütblərə $a_{\nu_1(0)},a_{\nu_2(0)},...$ simvolları ilə qeyd olunmuş nöqtələr uyğun olacaq. M-dən olan hər bir

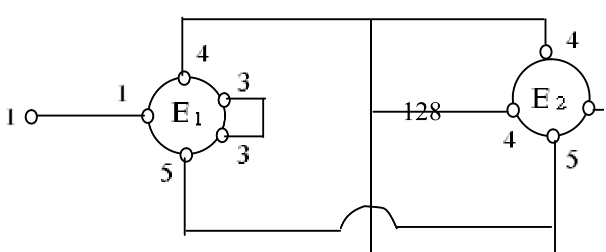
$E_i = (a_{\nu_1(i)}, a_{\nu_2(i)}, ...)$, $i \geq 1$, yığımlarına üç ölçülü evklid fəzasında dairə (əgər E_i bir və ya iki obyektdən ibarət olarsa, onda dairə əvəzinə təpə və ya qövs götürmək olar) qarşı qoyaq. Dairənin kənarlarında E_i-dən olan $a_{\nu_1(i)}, a_{\nu_2(i)}, ...$ simvolları ilə qeyd olunmuş cüt-cüt müxtəlif təpələr götürülür. Bu zaman tələb olunur ki, dairələr cüt-cüt kəsişməsinlər və əvvəl götürülmüş təpələrə malik olmasınlar (şəkil 1).



Şəkil 1.

Sonra isə G-dən olan eyni bir a_i simvolu ilə qeyd olunmuş təpələr A_i əlaqə komponenti ilə birləşdirilir. $i \neq j$ olduqda A_i və A_j əlaqə komponentləri ümumi nöqtələrə malik olmamalıdırlar. Bu qayda ilə qurulan fiqur verilən şəbəkənin həndəsi realizəsi adlanır. Aydındır ki, G_2-dən olan a_i təpələrinin obrazları həndəsi realizənin a_i izolə edilmiş təpələri, G_1 və G_3-dən olan a_i təpələrinin obrazları həndəsi realizənin ya izolə edilmiş a_i təpəsi (əgər a_i yığımların ancaq birində və bir dəfə rast gəlinirsə), ya da ki, A_i əlaqə komponenti (qalan hallarda) olur. E_i $(i \geq 1)$ yığımlarının obrazları dairələr (uyğun olaraq təpə, qövs) olar.

Nümunə 2. Nümunə 1-də verilən şəbəkənin həndəsi realizəsi şəkil 2-də verilir.



Şəkil 2.

Tərif 2. Tutaq ki, G' və G''-in obyektləri arasında və həm də M' və M'' yığımlarının obyektləri arasında elə qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq olur ki, aşağıdakı şərtlər ödənir:

1) E' və E''-in uyğun yığımları uyğun obyektlərdən (onların daxil olma sayları da nəzərə alınmaqla) ibarətdir;

2) E_0' və E_0''-in yığımları bir-birinə uyğun gəlir.

Onda $< G', (E_0'; E_1', E_2', ...) >$ və $< G'', (E_0''; E_1'', E_2'', ...) >$ şəbəkələrinə izomorf şəbəkələr deyilir.

Aydındır ki, abstrakt şəbəkə öz həndəsi realizəsilə izomorfdur. Şəbəkələr izomorf dəqiqliklə baxıldığından, abstrakt şəbəkə əvəzinə onların həndəsi realizasiyasına baxmaq olar. Bu mənada şəbəkələr həndəsi obyektlər kimi təsvir olunurlar.

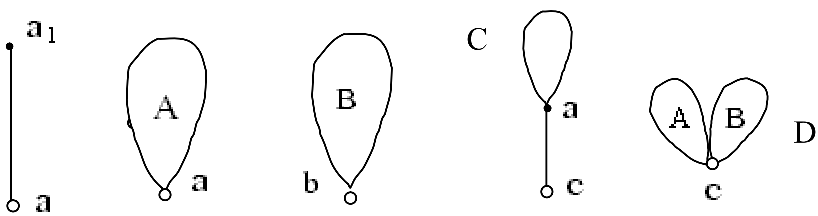
2. Şəbəkələrin bəzi növləri. Aydındır ki, şəbəkədə $E_0 = \Lambda$ olduqda və hər bir E_i yığımı $(i \geq 1)$ G çoxluğunun iki obyektindən ibarət olduqda şəbəkə qrafa çevrilir.

Şəbəkələri başqa bir növü ağaclardır. Ağac dedikdə dövrə malik olmayan əlaqəli qraf başa düşülür. Ağacda bir təpə ayrılır və kök adlandırılır. Aydındır ki, ağac bir qütbdən ibarət olan şəbəkədir, yəni $E_0=(a)$.

Ağacın başqa bir tərəfini verək. Bu tərif induktiv tərifdir və birinci tərifə ekvivalentdir. Tərifi həndəsi şəkildə verək.

İnduksiya bazisi. Şəkil 3-də verilən fiqur a kökünə malik ağac adlanır.

İnduksiya keçidi. Tutaq ki, A (şəkil 4, a) a kökünə malik ağac və B (şəkil 4,b) b kökünə malik ağacdır. Onda C fiquru (şəkil 5, a) c kökünə malik ağac olar, harada ki, bu fiqur A-dan a kökünə təzə til «qoşmaqla» alınır. Sonra, D fiquru, harada ki, A və B-dən köklərin birləşdirilməsi vasitəsi ilə alınır, c köklü $(c=a=b)$ ağac olar.



a) b) a) b)

Şəkil 3. Şəkil 4. Şəkil 5.

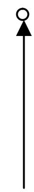
Asanlıqla görmək olar ki, ağacların induktiv təyinini abstrakt şəbəkələr terminində də vermək olar:

İnduksiya bazisi. $<G,(E_0;E_1)>$ a kökünə malik ağacdır, harada ki, $G=\{a,a_1\}$, $E_0=(a), E_1=(a,a_1)$.

İnduksiya keçidi. Tutaq ki, $A=<G_1,(E_0';\, E_1',...)>$ və $B=<G_2,(E_0'';E_1'',...)>$ uyğun olaraq a və b köklərinə malik ağaclardır, harada ki, $G_1\cap G_2=\Lambda$, $E_0'=(a)$ və $E_0''=(b)$. Əgər $G=G_1\cup\{c\}, E_0=(c), E=(a,c)$ olarsa, onda $C=<G,(E_0;E,E_1',...)>$

ağacı c kökünə malik ağacdır, harada ki, c - təzə obyektdir. Sonra, əgər $G' = (G_1 \setminus a) \bigcup (G_2 \setminus b) \bigcup \{c\}$, $E_0 = (c)$ isə və $\widetilde{E}'_i$ (uyğun olaraq $\widetilde{E}''_i$) yığımı E'_i (E''_i) yığımından $a\,(b)$ simvolunun hər daxil olmalarını c ilə əvəzləməklə alınırsa, onda $D =< G', (E_0; \widetilde{E}'_1, ... \widetilde{E}''_1, ...) >$ ağacı c təpəsində kökə malik ağac olur, harada ki, c-yeni obyektdir.

Ağacın həndəsi təyini onun müstəvi üzərində həndəsi realizəsini həyata keçirməyə imkan verir. Ağacın tillərinin düz xətt parçaları, kökünün ox əlavə olunmuş təpə kimi (şəkil 6) təsvir olunduğu müstəvi üzərində həndəsi realizəsinə ağacın düzümü, yaxud döşənməsi deyilir.



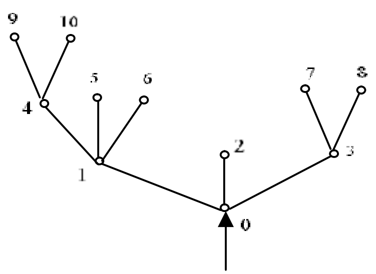
Şəkil 6.

Nümunə 3. Tutaq ki,

$G = \{0,1,2,...,10\}$, $M = \{E_0; E_1, ..., E_{10}\}$.

Burada $E_0 = (0)$, $E_1 = (0,1)$, $E_2 = (0,2)$, $E_3 = (0,3)$, $E_4 = (1,4)$, $E_5 = (1,5)$, $E_6 = (1,6)$, $E_7 = (3,7)$, $E_8 = (3,8)$, $E_9 = (4,9)$, $E_{10} = (4,10)$.

Aydındır ki, $< G, (E_0; E_1, ..., E_{10}) >$ ağacdır. Şəkil 7-də bu ağacın bir düzümü verilmişdir. Bu ağacın başqa düzümləri də mümkündür.



Şəkil 7.

$< G, (E_0; E_1, ..., E_h) >$ şəbəkəsinə baxaq. E_i yığımında obyektlərin sayını e_i ilə işarə edək. Əgər $e_i = 2$, $i = 0,1,...,h$ olarsa, onda belə şəbəkə iki qütblü, iki obyektli şəbəkə adlanır. Tutaq ki,

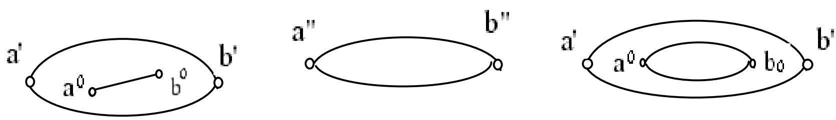
$E_0 = (a,b)$. Bu halda iki qütblü şəbəkəni $\Gamma(a,b)$ ilə işarə edək. Aydındır ki, $\Gamma(a,b)$ şəbəkəsi iki təpəsi ayrılmış (qütblər) sonlu qraflarla üst-üstə düşür.

Qraflarda olduğu kimi iki qütblü şəbəkələrdə yol anlayışı verilir, analoji olaraq əlaqəli şəbəkə anlayışı daxil edilir.

Tutaq ki, $\Gamma_1(a',b')$ və $\Gamma_2(a'',b'')$ iki kəsişməyən əlaqəli şəbəkələrdir, yəni

$\Gamma_1(a',b') =< G_1,(E'_0;E'_1,...,E'_{h'})>$, $\Gamma_2(a'',b'') =< G_2,(E''_0;E''_1,...,E''_{h''})>$,

harada ki, $G_1 \cap G_2 = \Lambda$. $\Gamma_1(a',b')$ şəbəkəsinin ixtiyari $E'_i = (a^\circ, b^\circ)$ tilinə baxaq. Bu tili $\Gamma_2(a'',b'')$ şəbəkəsi ilə əvəzləmək olar. Nəticədə $\Gamma(a',b')$ şəbəkəsi alınır (şəkil 9).



$\Gamma_1(a',b')$ $\Gamma_2(a'',b'')$ $\Gamma(a',b')$

Şəkil 8.

Tərif 3. $\Gamma_1(a',b')$ şəbəkəsinə aid olan $E'_i = (a^\circ, b^\circ)$ tilinin $\Gamma_2(a'',b'')$ şəbəkəsi ilə əvəzlənməsinin nəticəsi $\Gamma'(a',b')$ və $\Gamma''(a',b')$ şəbəkələrinin hər birinə deyilir. Burada

$$\Gamma'(a',b') =< G,(E'_0;E'_1,...,E'_{i-1},\ E'''_1,...,E'''_{h''},\ E'_{i+1},...,E'_{h'})>,$$

$$\Gamma''(a',b') =< G,(E'_0;E'_1,...,E'_{i-1},\ E^{IV}_1,...,E^{IV}_{h''},\ E'_{i+1},...,E'_{h'})>,$$

harada ki, $G = G_1 \cup (G_2 \setminus (a'',b''))$.

E'''_j $(j=1,...,h'')$ yığımı E''_j yığımından a''-i a° və b''-i b° ilə əvəzləməklə alınır. E^{IV}_j $(j=1,...,h'')$ yığımı E''_j yığımından a''-i b° və b''-i a° ilə əvəzləməklə alınır.

Tərif 4. $\Gamma_1(a',b'),...,\Gamma_m(a^{(m)},b^{(m)})$ şəbəkələrinə izomorf olan şəbəkələrdə sonlu sayda əvəzləmə əməliyyatı vasitəsilə alınan $\Gamma(a,b)$ şəbəkəsinə bu şəbəkələrin superpozisiyası deyilir.

3. Şəbəkələr sayının qiymətləndirilməsi. Əvvəlcə sadə məsələyə baxaq. $\delta(h)$ ilə h sayda tilə malik cüt-cüt izomorf olmayan ağacların, $\delta^*(h)$ ilə isə uyğun çoxluqdan olan ağacların düzümünün maksimal sayını işarə edək.

Teorem 1. $\delta(h) \le \delta^*(h) < 4^h$**.**

İsbatı. İzomorf olmayan ağacların düzümləri müxtəlif olduqlarından $\delta(h) \le \delta^*(h)$.

h sayda tilə malik ağacların hər bir düzümünə qarşılıqlı birqiymətli olaraq 0 və 1-dən ibarət olan $2h$ uzunluqda korteji qarşı qoymaq olar. Bunun üçün ağacların induktiv təyinindən istifadə edək.

İnduksiya bazisi. Bir tildən ibarət ağacın düzümünə 01 kortejini qarşı qoyaq. Bunun uzunluğu 2-yə bərabərdir.

İnduksiya keçidi. Tutaq ki, uyğun olaraq h_1 və h_2 sayda tildən ibarət olan A və B ağaclarının düzümlərinə $2h_1$ və $2h_2$ uzunluqlarına malik α və β kortejləri qarşı qoyulmuşdur. Onda A ağacının düzümündən til qoşmaqla alınan C ağacının düzümünə $0\alpha1$ korteji qarşı qoyula bilər. Bunun uzunluğu $2(h_1+1)$-ə bərabərdir, yəni A ağacının tillərinin sayının 2 mislinə bərabərdir. A və B ağaclarının düzümündən köklərin birləşdirilməsi yolu ilə alınan D ağacının düzümünə onların gəlmə ardıcıllığından asılı olaraq $\alpha\beta$ və ya $\beta\alpha$ qarşı qoyula bilər. Bu kortejlərdən hər biri $2(h_1+h_2)$ uzunluğuna, yəni D ağacının tillərinin sayının 2 mislinə bərabərdir. Beləliklə alırıq:

$$\delta^*(h) = C_{2h}^h < 2^{2h} = 4^h. \qquad \square$$

h sayda tilə malik cüt-cüt izomorf olmayan qrafların $\gamma(h)$ sayını $\delta(h)$ ilə müqayisə etsək, görərik ki, $h \to \infty$ olduqda $\delta(h)$ çox-çox $\gamma(h)$-dan kiçikdir.

İndi isə ümumi halda sonlu şəbəkələrin sayını qiymətləndirək. Aşağıdakı şəbəkəyə baxaq:

$$< G,(E_0;E_1,...,E_h) > .$$

E_i yığımında obyektlərin sayını təkrarlanmaları da nəzərə almaqla e_i ilə işarə edək. e_i kəmiyyəti yığımların qüvvəti adlanır. Tutaq ki, $\varepsilon = \max\{e_1,e_2,...,e_h\}$. ε-kəmiyyəti şəbəkənin qüvvəti adlanır.

Tutaq ki, h_i $(1 \le i \le \varepsilon)$ i qüvvətinə malik yığımların (E_0 yığımını nəzərə almadan) sayıdır. $(h_1,h_2,...,h_\varepsilon)$ korteji şəbəkənin qüvvət strukturu adlanır. Aydındır ki, $\sum_{i=1}^{\varepsilon} h_i = h$. Şəbəkənin orta qüvvəti adlanan aşağıdakı μ kəmiyyətini daxil edək

$$\mu = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{\varepsilon} ih_i .$$

Aşağıdakı məhdudiyyətin qüvvədə olduğu şəbəkələr sinfinə baxaq:

$$G = \bigcup_{i=0}^{h} < E_i > .$$

Bu məhdudiyyət o deməkdir ki, şəbəkənin qütblərdən fərqli olan izoləedilmiş təpələrə və yığımlara daxil olan təpələrdən fərqlənən təpələrə malik deyildir.

$S(e_0,h_1,...,h_\varepsilon)$ ilə e_0 sayda qütbə və verilən qüvvət strukturuna malik verilən sinifdən olan və cüt-cüt izomorf olmayan şəbəkələrin sayını işarə edək. Tutaq ki, $S(e_0,\mu,\varepsilon,h)$ e_0 sayda qütbə, μ orta qüvvətinə, ε maksimal qüvvətinə və h sayda yığıma (E_0 nəzərə alınmadan) malik olan şəbəkələr sinfində cüt-cüt izomorf olmayan şəbəkələrin sayıdır.

Teorem 2 (O.B.Lupanov teoremi).

$$S(e_0,h_1,...,h_\varepsilon) \le c(e_0,\mu,\varepsilon)^h \, h^{(\mu-1)h},$$

harada ki, $c(e_0,\mu,\varepsilon) = 2(e_0+1)e\varepsilon(2\mu)^\mu$.

İsbatı. Aydındır ki, $E_1,...,E_h$ yığımlarında təpələrin p sayı aşağıdakı kəmiyyətə bərabərdir

$$\sum_{i=1}^{\varepsilon} ih_i = \mu h = p\,.$$

Şəbəkələr izomorf dəqiqliyinədək baxıldığından, hesab etmək olar ki, qütblər $a_1, a_2, ..., a_{e_0}$ -lar olur. Verilən şəbəkələrdə rast gəlinən i qüvvətinin yığımlarının çeşidləri sayının qiymətləndirilməsini aparaq. Aydındır ki, bu verilən p_i kəmiyyəti üçün aşağıdakı münasibət doğrudur:

$$p_i = H_p^i = C_{p+i-1}^i \le (p+i-1)^i \le (2p)^i = (2\mu h)^i\,,$$

belə ki, $i \le \varepsilon \le \mu\, h = p$. Qeyd edək ki, $p_i \ge C_p^1 = p = \mu h \ge h_i$.

Asanlıqla görmək olar ki, hər biri h_i yığımdan ibarət olan i qüvvətdən yığımlar sisteminin sayı $H_{p_i}^{h_i}$ -ni aşmır. $h_i \ne 0$ olduqda alırıq:

$$H_{p_i}^{h_i} = C_{p_i+h_i-1}^{h_i} \le \frac{(p_i+h_i-1)^{h_i}}{h_i!} \le \frac{(2p_i)^{h_i}}{(h_i/e)^{h_i}} = \frac{(2ep_i)^{h_i}}{h_i^{h_i}}\,.$$

Buradan $S(e_0, h_1, ..., h_\varepsilon)$ kəmiyyəti üçün (bunu sadəcə olaraq S ilə işarə edək) qiymətlənmə alırıq:

$$S \le (e_0+1)\prod_{\substack{i=0\\ h_i\ne 0}}^{\varepsilon} H_{p_i}^{h_i}\,.$$

e_0+1 vuruğu ya heç bir qütbün $\bigcup_{i=1}^{h} < E_i >$ çoxluğuna daxil olmamasını, ya bir qütbün $\bigcup_{i=1}^{h} < E_i >$ çoxluğuna məxsus olmasını və i.a. ya da ki, nəhayət bütün e_0 sayda qütbün $\bigcup_{i=1}^{h} < E_i >$ çoxluğuna məxsus olması faktını əks etdirir. Alırıq:

$$S \le (e_0+1)\prod_{\substack{i=1\\ h_i\ne 0}}^{\varepsilon} \frac{(2e)^{h_i}(2\mu h)^{ih_i}}{h_i^{h_i}}$$

və ya

$$\ln S \le \ln(e_0+1) + \sum_{\substack{i=1\\ h_i\ne 0}} \ln\frac{(2e)^{h_i}(2\mu h)^{ih_i}}{h_i^{h_i}} =$$

$$= \ln(e_0+1) + h(\ln 2e + \mu\ln 2\mu) + \mu h\ln h - \sum_{\substack{i=1\\ h_i\ne 0}}^{\varepsilon} h_i \ln h_i .$$

Tutaq ki, $h_i = \xi_i h$. Aydındır ki, $\sum_{i=1}^{\varepsilon}\xi_i = 1$. Bu şərtlər daxilində aşağıdakı bərabərsizlik (entropiya üçün) doğrudur:

$$-\sum_{i=1}^{\varepsilon}\xi_i \ln\xi_i \le \ln\varepsilon .$$

Alırıq ($\xi = 0$ olduqda $\xi\ln\xi = 0$ götürürük):

$$\ln S \le \ln(e_0+1) + h(\ln\varepsilon + \ln 2e + \mu\ln 2\mu) + (\mu-1)h\ln h .$$

Buradan alırıq:

$$S \le (e_0+1)(2e\varepsilon(2\mu)^{\mu})^{h} h^{(\mu-1)h} .$$

Əgər $c(e_0,\mu,\varepsilon) = (e_0+1)2e\varepsilon(2\mu)^{\mu}$ qəbul etsək, onda alarıq:

$$S(e_0,h_1,\ldots,h_\varepsilon) \le c(e_0,\mu,e)^{h} h^{(\mu-1)h} . \qquad \square$$

Teoremdə alınan qiymətlənmə $(h_1,\ldots,h_\varepsilon)$ qüvvət strukturundan zəif asılıdır: bu qiymətlənməyə ancaq iki μ və ε xarakteristikaları daxil olur. Bu da $S(e_0,\mu,\varepsilon,h)$ üçün e_0,μ və ε-un istənilən qeyd olunmuş qiymətləri halında asanlıqla qiymətlənmə almağa imkan verir. Bundan ötrü verilən μ,ε,h parametrli $(h_1,\ldots,h_\varepsilon)$ qüvvət strukturunun sayını qiymətləndirmək lazımdır. Bu $h_1+h_2+\ldots+h_\varepsilon = h$ tənliyinin həllərinin sayı ilə əlaqədardır. Beləliklə aşağıdakı nəticə alınır:

Nəticə 1. Aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$S(e_0,\mu,\varepsilon,h) \le c(e_0,\mu,\varepsilon)^h (h+1)^{\varepsilon-1} h^{(\mu-1)h} \le c'(e_0,\mu,\varepsilon)^h h^{(\mu-1)h}.$$

Bu qiymətlənmə xüsusi hal kimi qrafların sayının da qiymətlənməsindən ibarətdir.

$$\gamma(h) = S(0,2,2,h) \le c^h h^h.$$

Buradan iki ayrılmış təpəli və izolə edilmiş təpəsiz (qütb olmayan) qraflar üçün də qiymətlənmə alınır:

$$S(2,2,2,h) \le c_1^h h^h.$$

FƏSİL 4. MƏHDUD DETERMİNİK (AVTOMAT) FUNKSİYALAR

§1. Determinik funksiyalar

1. Determinik funksiyanın tərifi. Baxacağımız funksional obyekt kontinium qiymətli məntiqin müxtəlif növlərindən biridir. $[0,1]$ parçasından olan həqiqi ədədlər əvəzinə k-qiymətli α ardıcıllqlarının E_k^{c} çoxluğunu götürək, hansı ki,

$$\alpha = \{\alpha(1), \alpha(2), ..., \alpha(m), ...\}, \quad \alpha(i) \in E^k, \ i = 1,2,... \ .$$

P_c^k ilə $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ ardıcıllıqlar yığımında təyin olunan və özü də E_k^c- dən qiymətlər alan $f(x_1, ..., x_n)$ funksiyalar çoxluğunu işarə edək, harada ki, $\alpha_i \in E_k^c \ (i = 1,2,...,n)$. Beləliklə, P_c^k-dan olan funksiyalar k-qiymətli ardıcıllıqlar yığımını k-qiymətli ardıcıllığa çevirirlər. P_c^k-ya həm də E_k^c-dən olan bütün ardıcıllıqları daxil edək. Bu ardıcıllıqlara $n = 0$ sayda arqumentə malik funksiyalar kimi, yəni sabitlər kimi baxıla bilər.

Nümunə 1. Tutaq ki, $k = 2$ və

$$f(\alpha) = \begin{cases} (0,0,...), & \text{əgər} \quad \alpha = (0,0,...), \\ (1,1,...), & \text{əgər} \quad \alpha \neq (0,0,...). \end{cases}$$

Aydındır ki, $f(x) \in P_c^2$.

Qeyd edək ki, E_k^c çoxluğu kontinium güclü çoxluq olduğundan P_c^k- dan olan funksiyaların verilməsi üçün cədvəl üsulu qəbuledilməzdir. Buradan da belə görünür ki, P_c^k çoxluğunun gücü hiper kontiniumdur.

Yazılışın sadələyi üçün vektorial yazılışlardan istifadə edəcəyik. $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dəyişənlər yığımını X ilə işarə edək və $f(x_1, ..., x_n)$ əvəzinə $f(X)$ yazılısını istifadə edəcəyik. Bu halda X

dəyişəninin qiyməti $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ vektorudur (yığımıdır). α-nın komponentləri isə k-qiymətli ardıcıllıqlardır:

$$\alpha = \{\alpha_i(1), \alpha_i(2), ..., \alpha_i(m), ...\} \qquad (i = 1,2,...,n).$$

α vektorlar ardıcıllığı kimi də başa düşülə bilər:

$$\alpha = \{\alpha(1), \alpha(2), ..., \alpha(m), ...\},$$

harada ki, $\alpha(i) = (\alpha_1(i), ..., \alpha_n(i))$ $(i = 1,2,...)$.

Aydındır ki, $(\alpha_1(i), ..., \alpha_n(i))$-lər k-lıq say sistemində ədədlər yığımı kimi də başa düşülə bilər. Belə yığımların - ədədlərin hər biri E^N çoxluğuna məxsus olan ədədlərdir, belə ki, $N = k^n$.

Beləliklə, P_{C}^k-dan olan $f(x_1, ..., x_n)$ funksiyasına P_{C}^N çoxluğundan olan $f(X)$ funksiyası kimi baxmaq olar, lakin bu funksiya $E^k \subset E^N$-dən qiymətlər alır. Beləliklə, $f(x_1, ..., x_n)$ funksiyasına birdəyişənli $f(X)$ funksiyası kimi baxmaq olar.

Tərif 1. Əgər istənilən m ədədi üçün və

$$\alpha(1) = \beta(1), \quad \alpha(2) = \beta(2), ..., \alpha(m) = \beta(m)$$

şərtlərini ödəyən istənilən α və β ardıcıllıqları üçün f funksiyasının $\gamma = f(\alpha)$ və $\delta = f(\beta)$ qiymətləri də ilk m hədləri üst-üstə düşən, yəni

$$\gamma(1) = \delta(1), \ \gamma(2) = \delta(2), ..., \gamma(m) = \delta(m)$$

şərtini ödəyən ardıcıllıqdırsa, onda $f(X) \in P_{\text{C}}^N$ funksiyası determinik funksiya adalanır.

P_D^k ilə bütün determinik funksiyalar çoxluğunu işarə edək. Aydındır ki, P_D^k-ya P_{C}^k-dan olan bütün sabitlər də daxildir

Tutaq ki, $f(\alpha) = \gamma$. Determinik funksiyaların tərifindən görünür ki, γ-ın m-ci $(m = 1,2,...)$ həddinin $\gamma(m)$ qiyməti α-ın ilk m həddinin $\alpha(1), \alpha(2), ..., \alpha(m)$ qiymətləri ilə tamamilə təyin olunur, yəni

$$\gamma(m) = f_m(\alpha(1), \alpha(2), ..., \alpha(m)).$$

Digər tərəfdən,

$$f_m(\alpha(1),\alpha(2),...,\alpha(m)) = f_m(\alpha_1(1),...,\alpha_n(1),\alpha_1(2),...$$
$$...,\alpha_n(2),...,\alpha_1(m),...,\alpha_n(m))$$

olduğundan aydındır ki, $f_m \in P_k$ funksiyası nm sayda dəyişəndən asılı olar.

Beləliklə, $f(x)$ determinik funksiyası k- qiymətli məntiqin aşağıdakı funksiyaları ardacıllığı ilə təyin olunur:

$$f \sim \{f_1, f_2,..., f_m,...\}.$$

Burada

$$f_i = f_i(X_1,...,X_i),$$
$$X_i = (x_1(i), x_2(i),..., x_n(i)),\ \ i = 1,2,...m,...$$

Determinik funksiyaya $x_1, x_2,..., x_n$ girişlərinə və f çıxışına malik «diskret çevrici» kimi baxıla bilər, harada ki, x_i girişinə $(i = 1,2,..., n)$ $t = 1,2,..., m,...$ zaman anlarında

$$\alpha_i = \{\alpha_i(1),\ \alpha_i(2),...,\alpha_i(m),...\}$$

ardıcıllığı daxil olur, həmin t zaman anlarında isə çıxışda $\gamma = \{\gamma(1), \gamma(2),..., \gamma(m),...\}$ ardıcıllığı əmələ gəlir. Aydındır ki, $\gamma = f(\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n)$. $\gamma(m)$-in qiyməti ancaq $t = 1,2,..., m$ zaman anlarında girişə daxil olan giriş ardıcıllığından asılıdır və gələcək zaman anlarında girişin qiymətlərindən asılı deyildir. Odur ki, f determinik funksiyadır.

P_D^k-dən olan sabitlərə $(n = 0)$ girişi olmayan çeviricilər kimi baxıla bilər.

$f(x_1,..., x_n)$ determinik funksiyasının k-qiymətli məntiq funksiyaları ardıcıllığı vasitəsilə tamamilə təyin oluna bilməsindən aşağıdakı nəticəni alırıq:

Teorem 1. $x_1, x_2,..., x_n$ dəyişənlərindən asılı bütün determinik funksiyalar çoxluğunun gücü kontiniumdur.

Nümunə 2. 1) $f_\Phi(x_1,..., x_n)$ funksiyası, aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$f_\Phi(x_1,...,x_n) \sim \{\Phi(x_1(1),...,x_n(1)),\ \Phi(x_1(2),...,x_n(2)),...$$
$$...,\Phi(x_1(m),...,x_n(m)),...\},$$

harada ki, $\Phi(x_1,...,x_n)\in P_k$. f_Φ-nin qiyməti giriş ardıcıllıqlrının uyğun hədlərinin verilən qiymətləri halında Φ funksiyasının qiymətinin hesablanmasının köməkliyi ilə təyin olunur. Buradan alırıq ki, $f_\Phi \in P_D^k$. Məsələn, $\Phi(x_1,x_2)=x_1 \& x_2$ $(k=2)$ olarsa, onda

$$f_\&(x_1,x_2)=\{x_1(1)\&x_2(1), x_1(2)\&x_2(2),...,x_1(m)\&x_2(m),...\}.$$

$\Phi\in P_k$ olduqda bütün f_Φ funksiyalar çoxluğunu P^k ilə işarə edək.

2) Sonsuz sayda rəqəmlərə malik iki k-lıq ədədlərin toplanmasını həyata keçirən $z=x+y$ funksiyası. Bu funksiya k-lıq say sistemində iki ədədin sütunlar üzrə toplanması alqoritmindən istifadə edilməsi ilə təyin olunur:

$$\begin{array}{r} ...x(3),\ x(2),\ x(1) \\ +\ \ ...y(3),\ y(2),\ y(1) \\ \hline ...z(3),\ z(2),\ z(1) \end{array}$$

Aydındır ki, $z(m)$ toplananların ilk m hədlərinə görə təyin olunur. Odur ki, $x+y$ funksiyası da determinik funksiyadır: $x+y\in P_D^k$.

Aydındır ki, determinik olmayan funksiyalar da mövcuddur, məsələn nümunə 1-də şərh olunan $f(x)$ funksiyası determinik deyildir.

2. Determinik funksiyaların ağaclar vasitəsilə verilməsi. Tutaq ki, k, n – tam ədədlərdir və $N=k^n$. Şəkil 1-də verilən sonsuz fiqura baxaq. Bu fiqur təpələrdən və oriyentasiyalı (istiqamətlənmiş) tillərdən ibarətdir. Bu fiqur ağacdır. ξ_0 təpəsi ağacın köküdür və ondan N tildən ibarət tillər dəstəsi çıxır. Bu birinci mərtəbəni təşkil edir. Birinci mərtəbənin hər bir tili bir təpəyə gedir və təpədən də öz növbəsində N til çıxır. Belə tillər 2-ci mərtəbəni təşkil edir və i.a. m-ci mərtəbənin tillərinin sonu olan təpələr də m-ci mərtəbəyə aid hesab olunur (ξ_0 0-cı mərtəbənin təpəsi hesab olunur). Hər dəstənin tilləri soldan sağa $0,1,...,N-1$ ədədləri ilə və ya onların k-lıq say sistemində təsvirləri olan

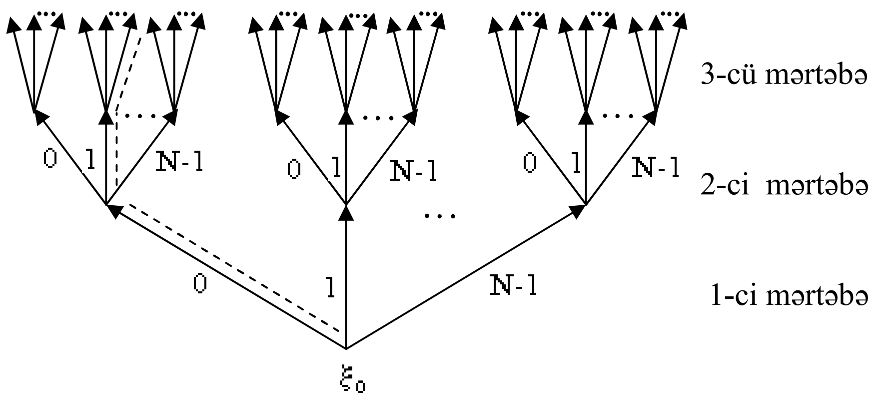
$$\underbrace{(0,...,0,0)}_{n};\quad \underbrace{(0,...,0,1)}_{n};...;\underbrace{(k-1,k-1,...,k-1,k-1)}_{n}$$

yazıları ilə nömrələnirlər.

Bundan sonra tilləri sadəlik üçün nömrələməyəcəyik. Hər mərtəbədə düz bir tildən ibarət olan tillərin əlaqəli alt çoxluğuna ağacın budağı deyilir. Aydındır ki, ağacın hər bir budağına

$$\alpha = \{\alpha(1), \alpha(2),..., \alpha(m),...\}$$

ardıcıllığını qarşı qoymaq olar, hansı ki, i mərtəbənin nömrəsidir, $\alpha(i)$ - bu budağa aid olan tilin nömrəsidir. Şəkil 1-də qırıq-qırıq xətlərlə qeyd olunmuş budaq $\{0,1,N-1,...\}$ ardıcıllığına uyğundur. Aydındır ki, $\alpha \in E_N^{\text{c}}$. Əks hökm də doğrudur: E_N^{c} -dən olan hər bir ardıcıllığa ağacın hər hansı bir budağı uyğundur.



Şəkil 1.

Beləliklə, ağacın budaqları ilə E_N^{c} çoxluğunun elementləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq mövcuddur. Ona görə də ağaclar E_N^{c} çoxluğunun həndəsi təsviri üçün istifadə oluna bilər.

Tutaq ki, $f(X)$ funksiyası P_D^N-dən olan $(N = k^n)$ funksiyadır və $X = (x_1,...,x_n)$.

$f(X) \sim \{f_1(X_1), f_2(X_1, X_2),..., f_m(X_1, X_2,..., X_m),...\}$

münasibətindən istifadə etməklə $f(X)$-ın köməkliyi ilə ağacın hər bir tilinə E^k - dan bir ədəd yazaq. Bundan ötrü m-ci mərtəbədən $(m = 1,2,...)$ ixtiyari bir til götürək və kökdən bu tilə gətirən yola baxaq. Bu budağa baxılan tildən keçən istənilən bir budağın hissəsi kimi baxıla bilər. Aydındır ki, yol birqiymətli olaraq təyin olunduğundan o yolun kökdən başlayaraq sayılan tillərinin $\alpha(1), \alpha(2),..., \alpha(m)$ nömrələrinin müəyyən bir korteji kimi xarakterizə oluna bilər. Götürülən tilə çıxış ardıcıllığının m-ci həddini - $\gamma(m)$ ədədini yazaq, hansı ki,

$$\gamma(m) = f_m(\alpha(1),...,\alpha(m)).$$

Bu əməliyyatı ağacın bütün tilləri üçün aparaq. Alınan ağac nömrələnmiş ağac yaxud da tilləri nömrələnmiş ağac adlanır.

Nümunə 3. a) $f_{\&}(x_1, x_2)$ üçün alarıq: $k = n = 2$, $N = 4$ və

$$\gamma(m) = f_m(X_1, X_2,..., X_m) = f_m(X_m) = x_1(m) \,\&\, x_2(m).$$

Beləliklə, $\gamma(m)$ verilən tilə aparan kortejin sonuncu həddindən asılı olur, yəni ancaq tilin nömrəsindən asılı olur.

$0 = (0,0)$ nömrəli tilə $0 \,\&\, 0 = 0$ qiyməti uyğun olur,

$1 = (0,1)$ nömrəli tilə $0 \,\&\, 1 = 0$ qiyməti uyğun olur,

$2 = (1,0)$ nömrəli tilə $1 \,\&\, 0 = 0$ qiyməti uyğun olur,

$3 = (1,1)$ nömrəli tilə $1 \,\&\, 1 = 1$ qiyməti uyğun olur.

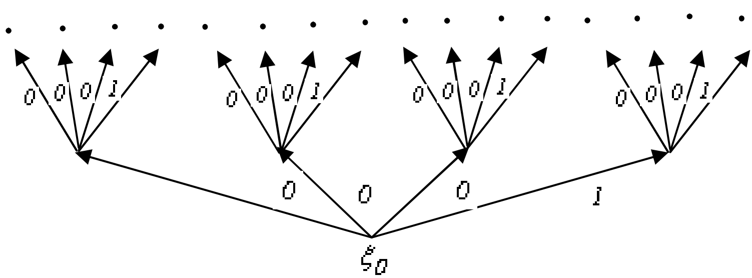
Şəkil 2-də uyğun nömrələnmiş ağac təsvir olunur.

b) $z = x + y$ funksiyası üçün alırıq: $k = 2, n = 2$ və $N = 4$. Aydındır ki,

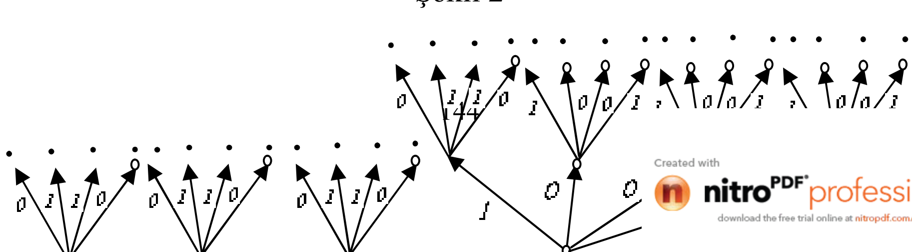
$$z(m)=\begin{cases} x(m)+y(m) \pmod 2, & \text{əgər } (m-1)-\text{ci mövqedən} \\ & m-\text{ci mövqeyə "1" keçidi yoxdursa,} \\ x(m)+y(m)+1 \pmod 2, & \text{əgər } (m-1)-\text{ci mövqedən} \\ & m-\text{ci mövqeyə "1" keçidi varsa.} \end{cases}$$

Bu düsturdan ağacın nişanlanması qaydasını almaq olar (şəkil 3). Tillərə qiymətlərin yazılması 1-ci mərtəbədən başlanır. Sonra ikinci mərtəbəyə keçilir və i.a. Bu zaman növbəti mövqeyə keçid baş verirsə, onda uyğun tilin sonu kiçik dairə ilə göstərilir. Bu isə növbəti mərtəbədə hesablamalar aparılmasına imkan verir.

Beləliklə, determinik funksiyalara görə nömrələnmiş ağac almaq olar. Əksi ümumiyyətlə doğru deyildir, çünki nömrələnmiş ağac bir neçə determinik funksiya təyin edə bilər. N və k' parametrləri (N – hər təpədən çıxan tillərin sayıdır, k' isə tillərə yazılan maksimum ədədlərdir) $k \geq k'$ olduqda $N = k^n$ tənliyinin bir neçə həllinin olmasına imkan verirlər (Həmişə $k = N$ və $n = 1$ həlləri mövcuddur, yəni bir dəyişənli determinik funksiya təyin olunur). Lakin əgər $f(x_1,...,x_n)$ determinik funksiyasına görə nömrələnmiş ağac qurulursa, onda n və k parametrli bu nömrələnmiş ağaca görə ancaq bir determinik funksiya və özü də $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası təyin olunur. Beləliklə, nömrələnmiş ağaclardan determinik funksiyaları öyrənmək üçün istifadə etmək olar.



Şəkil 2



Şəkil 3.

Hər hansı bir $f(x_1,...,x_n)$ determinik funksiyası üçün nömrələnmiş ağacı götürək. Tutaq ki, ξ onun m-ci mərtəbəsində ixtiyari bir təpə nöqtəsidir. Bu təpəyə ξ_0 kökündən $a(1),...,a(m)$ yolu gətirir ($\xi=\xi_0$ olduqda yol boşdur). ξ təpəsindən çıxan bütün budaqlar ξ kökünə malik müəyyən bir ağac əmələ gətirir və bu ağac ilk verilən ağacın xüsusi alt ağacı adlanır. Bu alt ağac əvvəli sabit $\alpha(1),...,\alpha(m)$ və E_k^{c}-dən olan bütün ardıcıllıqlarda təyin olunur. İlkin ağac nömrələndiyindən alt ağac da nömrələnmiş olur. Əgər alt ağacda 1-ci mərtəbədən başlayaraq bütün mərtəbələrdə nömrələnmə aparılarsa, onda ona $f^{\xi}(X)$ determinik funksiya uyğun gələr. Bu funksiyanı analitik olaraq aşağıdakı kimi təyin etmək olar: Tutaq ki,

$$f(X)\sim\{f_1(X_1),f_2(X_1,X_2),...\},$$

$$f^{\xi}(X)\sim\{f_1^{\xi}(X_1),f_2^{\xi}(X_1,X_2),...\}.$$

Onda

$$f_i^{\xi}(X_1,...,X_i)=f_{m+i}(\alpha(1),...,\alpha(m),X_1,...,X_i) \quad (i=1,2,...).$$

Tərif 2. İlk ağacın ξ_1 və ξ_2 köklərinə malik iki alt ağacı üçün əgər $f^{\xi_1}(X)=f^{\xi_2}(X)$ olarsa, onda bu alt ağaclar ekvivalent adlanırlar.

Aydındır ki, iki ekvivalent alt ağacların nömrələri üst-üstə düşür. Məsələn, şəkil 2-də bütün alt ağaclar ekvivalentdir, şəkil 3-də isə ξ_0 və ξ_2 köklərinə malik alt ağaclar ekvivalentdirlər, ξ_0 və ξ_1 köklərinə malik alt ağaclar isə ekvivalent deyildirlər.

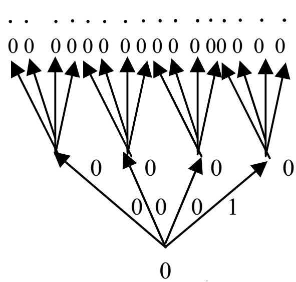
Ekvivalentlik münasibətləri ilkin ağacda olan bütün alt ağacları ekvivalent siniflərə bölməyə imkan verir.

Tərif 3. Verilən ağacın alt ağaclarının bölündüyü ekvivalent siniflərin r sayına ağacın çəkisi və uyğun olaraq determinik funksiyanın çəkisi deyilir.

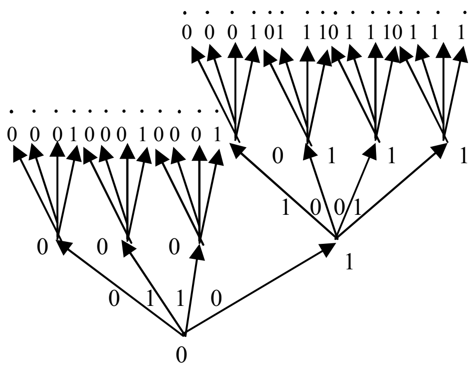
Qeyd edək ki, r sonsuz ədəd də ola bilər. $f_{\&}(x_1, x_2)$ funksiyası üçün şəkil 2-də verilən ağacın alt ağacları hamısı ekvivalentdirlər və beləliklə $r = 1$. $z = x + y$ funksiyası üçün şəkil 3-də verilən ağacın hər bir alt ağacı ya ξ_0 kökünə malik alt ağaca, ya da ki, ξ_1 kökünə malik alt ağaca ekvivalentdirlər. Ona görə də $r = 2$.

Nömrələnmiş ağacda təpələri nömrələmək olar. Əvvəlcə ekvivalentlik siniflərini 0,1,2,... ilə elə nömrələmək olar ki, ilkin ağacın düşdüyü sinif 0 nömrəli sinif olsun.

Beləliklə, nömrələnmədə sərbəstlik ola bilər. Sonra isə istənilən ξ təpəsini götürürük və ξ təpəsinin kök olduğu ağacın hansı sinfə aid olduğunu tapırıq. Tutaq χ həmin sinfin nömrəsidir. Onda ξ təpəsinə χ nömrəsini yazırıq. Beləliklə, bütün təpələri də nömrələnmiş ağac alırıq, hansı ki kök 0-la nömrələnib. Şəkil 4-də $f_{\&}(x_1, x_2)$ və şəkil 5-də $z = x + y$ funksiyaları üçün təpələri də nömrələnmiş ağaclar təsvir olunur.



Şəkil4



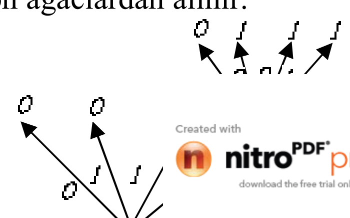
Şəkil 5.

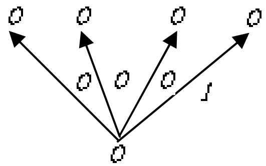
Təpələri də tilləri də nömrələnmiş ağaca baxaq. İstənilən bir budağı götürək. O $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_i, ..., \xi_j, ...$ təpələrindən keçir. Tutaq ki, bu təpələrə aşağıdakı nömrələr yazılıb:

$$0, \chi_1, ..., \chi_i, ..., \chi_j, ...$$

Fərz edək ki, $\chi_i = \chi_j \;\; (i \neq j)$ və $\chi_i = \chi_j$-in ödəndiyi bütün $(i, j) \;\; (i \neq j)$ cütlüyü üçün j indeksi ən kiçik olur. Bu budaqda başlanğıcdan ξ_j təpəsinə kimi hissəni saxlayaq, qalan hissəni isə kəsib ataq. Bu kəsmə əməliyyatını bütün budaqlar üçün aparmaqla kəsilmiş ağac alarıq.

Sonlu r çəkisinə malik funksiya halı üçün hər budaqda təpələrin nömrəsi təkrarlanır və kəsməni təyin edən j nömrəsi üçün $j \leq r$ ödənir. Beləliklə, belə funksiya üçün kəsilmiş ağac sonlu olur. Şəkil 6 «a)» –da $f_{\&}(x_1, x_2)$ və şəkil 6 «b)»-də $z = x + y$ funksiyaları üçün kəsilmiş ağaclar verilir. Bu kəsilmiş ağaclar bilavasitə şəkil 4 və şəkil 5-də verilən ağaclardan alınır.





a) b)

Şəkil 6.

Asanlıqla görmək olar ki, nömrələnmiş tilli və təpəli kəsilmiş ağac ilkin ağacı tamamilə bərpa etməyə imkan verir.

§2. Məhdud determinik funksiyalar

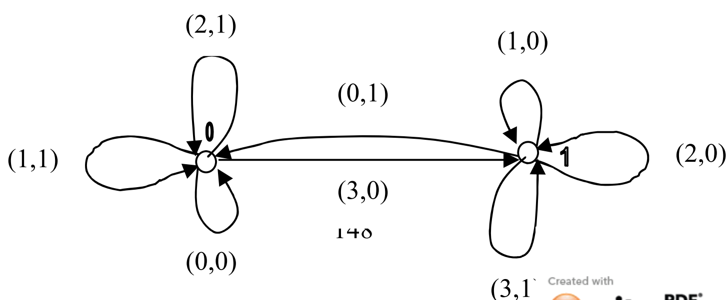
1. Məhdud determinik funksiya və onun verilmə üsulları.

Tərif 1. Əgər $f(x_1,...,x_n)$ determinik funksiyası sonlu çəkiyə malik olarsa, onda o məhdud-determinik (m.-d.) funksiya adlanır.

Bütün m.-d. funksiyalar sinfi P_{md}^k ilə işarə olunur.

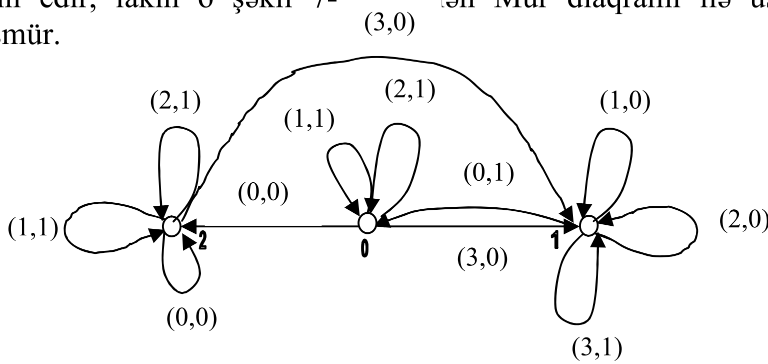
m.-d. funksiyalara nümunə alaraq §1-də nümunə 3-də «a)» və «b)»-ləri göstərmək olar.

İstənilən m.-d. funksiya üçün uyğun tam nömrələnmiş ağacı həmişə nömrələnmiş tilə və təpələrə malik sonlu ağaca gətirmək olar. Əgər bu kəsilmiş ağacda eyni nömrəyə malik təpələri eyniləşdirsək, onda Mur diaqramı adlanan diaqramı alarıq. Şəkil 7-də $z = x + y$ funksiyası üçün Mur diaqramı verilmişdir. Bu diaqramda başlanğıc təpə sıfrla qeyd olunmuşdur və tillərə (α,γ) ədədlər cütü yazılmışdır. Bunlardan biri tilin nömrəsi, ikincisi isə tilə uyğun olan ədəddir.



Şəkil 7.

Beləliklə, m.-d. funksiyalarını Mur diaqramları vasitəsilə də vermək olar. Ümumi halda, f funksiyası r çəkisinə malik olduqda Mur diaqramı r sayda təpəyə malik olur və onlardan biri də başlanğıc təpə nöqtəsi kimi ayrılır; hər təpədən $N = k^n$ sayda til çıxır; tillərə $(0,\gamma')$, $(0,\gamma''),...,(N-1,\gamma^{(N)})$ cütlükləri yazılır. Mur diaqramları istənilən r çəkisinə malik olan m.-d. funksiyaları qurmağa imkan verir. Lakin belə qurmalar halında nəzərə almaq lazımdır ki, Mur diaqramı vasitəsilə təyin olunan m.-d. funksiyanın formal olaraq birqiymətli bərpa olunmasına baxmayaraq, əgər bu m.-d. funksiya üçün yuxarıda göstərilən qaydada Mur diaqramı qurularsa, onda o ilkin Mur diaqramı ilə üst-üstə düşməyə də bilər. Məsələn, şəkil 8-də verilən Mur diaqramı $z = x + y$ funksiyasının təyin edir, lakin o şəkil 7-də verilən Mur diaqramı ilə üst-üstə düşmür.

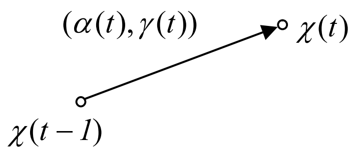


Şəkil 8.

Beləliklə, r təpəyə malik Mur diaqramlarının heç də hamısı r çəkisinə malik m.-d. funksiyaları təşkil etmir. Lakin Mur diaqramları r çəkisinə malik və $x_1, x_2, ..., x_n$ dəyişənlərindən asılı olan m.-d. funksiyaların sayını müəyyən etməyə imkan verir.

Teorem 1. P_{C}^{k} -dan olan, r çəkisinə malik və n sayda $x_1,...,x_n$ dəyişənli m.-d. funksiyaların $p(k,n,r)$ sayı $(rk)^{rk^n}$ -i aşmır.

Tutaq ki, $f(X)=f(x_1,...,x_n)$ m.-d. funksiyadır. Onun Mur diaqramına baxaq. Tutaq ki, $(t-1)$ anı biz $\chi(t-1)$ təpəsində idik. t anında $\alpha(t)$ ədədi daxil olduqda diaqramda biz $\chi(t-1)$ təpəsindən çıxan $\alpha(t)$ tili ilə hərəkət edərək $\gamma(t)$ çıxış qiyməti alırıq və $\chi(t)$ təpəsinə gəlirik (şəkil 9). Beləliklə, $(\alpha(t),\chi(t-1))$ kəmiyyəti birqiymətli olaraq $(\gamma(t),\chi(t))$ kəmiyyətlər cütünü təyin edir. α və γ kəmiyyətlərini uyğun olaraq giriş və çıxış kəmiyyətləri, χ-ni isə vəziyyət adlandıraq.



Şəkil 9.

Tutaq ki, α,χ və γ kəmiyyətlərinin qiymətlərini uyğun olaraq X,Q və Z dəyişənləri təsvir edir. Yuxarıda şərh edilən mülahizələrə görə aşağıdakı tənlikləri yazmaq olar:

$$Z(t)=\mathsf{F}(X(t),\ Q(t-1)),$$
$$Q(t)=\mathsf{G}(X(t),\ Q(t-1)),\ Q(0)=0. \qquad (1)$$

Bu tənlik kanonik tənlik adlanır.

P_{md}^{k}-dan olan sabitlər üçün də (1) rekurrent düsturu mümkündür, lakin onlar üçün $X(t)$ dəyişəni iştirak etmir.

(1) kanonik tənlikləri vektorial yazılışdır. Asanlıqla vektorial yazılışdan skalyar yazılışa keçmək olar. Tutaq ki, $\ell=]\log_k r[$, hansı

ki, $]a[$ ilə a-dan kiçik olmayan ən kiçik tam ədəd işarə olunur. Onda:

$$Z(t) = F'(x_1(t),...,x_n(t), q_1(t-1),...,q_\ell(t-1)),$$

$$q_i(t) = G_i'(x_1(t),...,x_n(t), q_1(t-1),...,q_\ell(t-1)),\ i = \overline{1,\ell}, \qquad (2)$$

$$q_1(0) = ... = q_\ell(0) = 0.$$

Burada $F', G_1',...,G_\ell'$ funksiyaları P_k-dan olan və $\underbrace{E^k \times ... \times E^k}_{n+\ell}$ çoxluğunun D altçoxluğunda təyin olunan funksiyalardır: $x_1,...,x_n$-lər E^k-dan qiymətlər alır, $(q_1, q_2,...,q_\ell)$ vektoru isə cəmi r sayda qiymət alır (məsələn, $0,1,...,r-1$ ədədlərinin ikilik say sistemində ikilik yazılışı). Aydındır ki, D çoxluğu $x_1,...,x_n$-lərə görə silindrdir.

$F', G_1',...,G_\ell'$ funksiyalarını bütün $\underbrace{E^k \times ... \times E^k}_{n+\ell}$ oblastında yenidən təyin edək, onda (2)-nin əvəzinə aşağıdakı kanonik tənliyi alarıq:

$$z(t) = F(x_1(t),...,x_n(t), q_1(t-1),...,q_\ell(t-1)),$$

$$q_i(t) = G_i(x_1(t),...,x_n(t), q_1(t-1),...,q_\ell(t-1)),\ i = \overline{1,\ell}, \qquad (3)$$

$$q_1(0) = ... = q_\ell(0) = 0.$$

§1-də nümunə 3 «a)»-da təsvir edilən m.-d. funksiyanın kanonik tənliyi

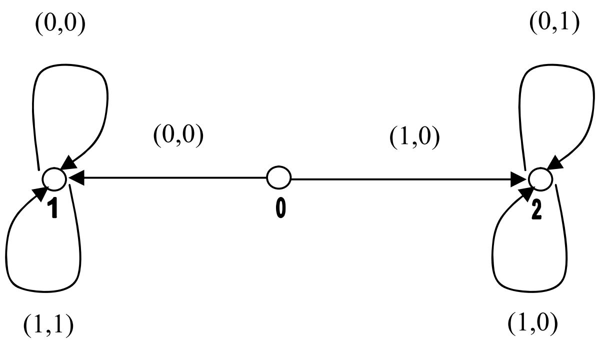
$$z(t) = x_1(t)\ \&\ x_2(t)$$

kimidir, nümunə 3 «b)»-də təsvir edilən m.-d. funksiyanın kanonik tənliyi isə aşağıdakı kimidir:

$$z(t) = x(t) + y(t) + q(t-1)\ \ (\text{mod } 2),$$
$$q(t) = x(t)y(t) \vee x(t)q(t-1) \vee y(t)q(t-1),$$
$$q(0) = 0.$$

Nümunə 1. Şəkil 10-da verilən Mur diaqramı ilə iəyin olunan $f(x)$ m.-d. funksiyası üçün kanonik tənliyi qurmalı.

Mur diaqrammı əsasında $f(x)$ m.-d. funksiyasının (1) kanonik tənliyinə uyğun F və G funksiyalarının qiymətlərini cədvəl 1-dəki kimi yazmaq olar. $f(x)$ m.-d. funksiyasının 0,1 və 2 vəziyyətlərini (0,0), (0,1) və (1,0) ilə kodlaşdıraq. Onda F', G_1' və G_2' funksiyalarının qiymətləri cədvəl 2-dəki kimi olar:



Şəkil 10.

Arqumentlərin müəyyən qiymətlərində F', G_1' və G_2' funksiyalarının məlum olmayan qiymətlərini ixtiyari halda təyin etmək olar. Odur ki, onları yenidən təyin edək. Məsələn, cədvəl 3-dəki kimi təyin edib F, G_1 və G_2 funksiyalarını alırıq. Bu yenidən təyin etmə zamanı F', G_1' və G_2'-lərə onların arqumentlərinin (0,1,1) və (1,1,1) qiymət yığımları halında (bu yığımlarda onlar təyin olunmayıblar) qiymətlər mənimsədilir.

Cədvəl 1

χ	Q	F	G
0	0	0	1
0	1	0	1
0	2	1	2

Cədvəl 2

x	q_1	q_2	F'	G_1'	G_2'
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0

1	0	0	2
1	1	1	1
1	2	0	2

0	1	1	təyin olunmayıblar		
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	təyin olunmayıblar		

Beləliklə, cədvəl 3-dən istifadə etməklə mükəmməl dizyunktiv normal forma əsasında aşağıdakı kanonik tənliyi alarıq:

$$z(t) = \bar{x}(t)q_1(t-1)\bar{q}_2(t-1) \vee \bar{x}(t)q_1(t-1)q_2(t-1) \vee$$

$$\vee\, x(t)\bar{q}_1(t-1)q_2(t-1) \vee x(t)q_1(t-1)q_2(t-1),$$

$$q_1(t) = \bar{x}(t)q_1(t-1)\bar{q}_2(t-1) \vee \bar{x}(t)q_1(t-1)q_2(t-1) \vee x(t)\bar{q}_1(t-1)\,\&$$

$$\&\, q_2(t-1) \vee x(t)q_1(t-1)\bar{q}_2(t-1) \vee x(t)q_1(t-1)q_2(t-1),$$

$$q_2(t) = \bar{x}(t)\bar{q}_1(t-1)\bar{q}_2(t-1) \vee \bar{x}(t)\bar{q}_1(t-1)q_2(t-1) \vee \bar{x}(t)q_1(t-1)\,\&$$

$$\&\, q_2(t-1) \vee x(t)\bar{q}_1(t-1)q_2(t-1) \vee x(t)q_1(t-1)q_2(t-1),$$

$$q_1(0) = 0,\ \ q_2(0) = 0.$$

Cədvəl 3

x	q_1	q_2	F	G_1	G_2
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

Bu sistemi sadələşdirsək, alarıq:

$$z(t) = \bar{x}(t)\,\&\,q_1(t-1) \vee x(t)\,\&\,q_2(t-1)\,,$$

$$q_1(t) = q_1(t-1) \vee x(t)\,\&\,\bar{q}_2(t-1)\,,$$

$$q_2(t) = q_2(t-1) \vee \overline{x}(t) \,\&\, \overline{q}_1(t-1),$$

$$q_1(0) = q_2(0) = 0.$$

Beləliklə, hər bir m.-d. funksiyası üçün kanonik tənlik yazmaq olar. Lakin kanonik tənlik yazılması birqiymətli deyildir. Bu birqiymətli olmamaqlıq aşağıdakılarla bağlıdır:

a) vəziyyətlərin kodlaşdırılmasının müxtəlif üsullarla aparılması;

b) $F', G_1', \ldots, G_\ell'$ funksiyalarının müxtəlif üsullarla yenidən təyin olunması.

Asanlıqla görmək olar ki, kanonik tənlik $\alpha = \{\alpha(1), \alpha(2), \ldots\}$ giriş ardıcıllığına görə $\gamma = \{\gamma(1), \gamma(2), \ldots\}$ çıxış ardıcıllığını hesablamağa imkan verir.

2. m.-d. funksiyalar üzərində əməliyyatlar. m.-d. funksiyalar üzərində əməliyyatların təyini zamanı P_{C}^k və P_D^k siniflərindən başlamaq lazımdır.

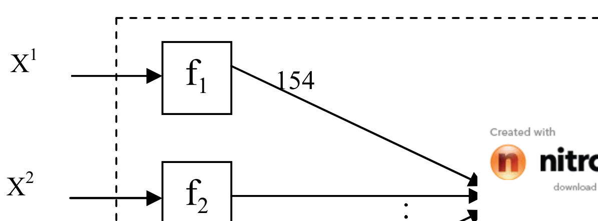
P_{C}^k-də P_k-da olduğu kimi superpozisiya əməliyyatı təyin olunur: əvvəlcə P_{C}^k-dən olan funksiyalar sistemi üzərində düstur anlayışı təyin olunur, sonra hər düstura P_{C}^k-dan olan funksiya qarşı qoyulur. Asanlıqla isbat etmək olar:

Teorem 2. Determinik funksiyalar sinfi superpozisiya əməliyyatına görə qapalıdır.

Determinik funksiyaların superpozisiyasını qrafik olaraq blok-sxem şəklində göstərmək olar. Əgər sistemə eynilik funksiyası daxil olarsa, onda superpozisiya

$$f(X) = f_0(f_1(X^1), \ldots, f_m(X^m))$$

şəklində elementar superpozisiyaların çoxsaylı tədbiqinə gətirilir. Ona görə də elementar superpozisiyalar üçün blok sxemlərin necə olmasını göstərmək kifayətdir. Şəkil 11-də belə blok-sxemə nümunə göstərilir. Bu blok-sxemdə kvadratlarla onların daxilində göstərilən funksiyanı realizə edən çevirici təsvir olunur.



Şəkil 11.

Asanlıqla isbat etmək olar:

Teorem 3. m.-d. funksiyalar sinfi superpozisiya əməliyyatlarına görə qapalıdır.

P_D^k sinfində O (əks əlaqənin daxil edilməsi) əməliyyatını təyin edək. Əvvəlcə bir anlayışla tanış olaq.

Tərif 2. Tutaq ki, $f(x_1,...,x_i,...,x_n)$ funksiyası verilib və əgər istənilən

$$\alpha_i = \{\alpha_i(1), \alpha_i(2), ..., \alpha_i(t), ...\}, \; i = 1,2,...,n$$

giriş ardıcıllıqları və istənilən t zaman anı üçün

$$\gamma = f(\alpha_1,...,\alpha_n)$$

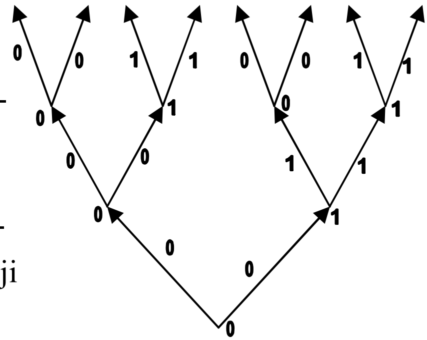
kimi təyin olunan çıxış ardıcıllığının t zaman anında $\gamma(t)$ qiyməti tamamilə $\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},...,\alpha_n$ ardıcıllığının ilk t həddinin qiymətləri və α_i ardıcıllığının isə ilk $t-1$ həddinin qiymətləri ilə təyin olunursa, onda deyirlər ki, $f(x_1,...,x_i,...,x_n)$ funksiyası x_i dəyişənindən gecikməklə asılıdır.

Təyindən görünür ki, $\gamma(t)$ qiyməti $\alpha_i(t)$ qiymətindən asılı deyildir.

Nümunə 2. P_D^2-dən olan $f(x)$ funksiyasına baxaq, harada ki, $\gamma(t) = \alpha(t-1)$ və $\gamma(1) = 0$, yəni $f(x)$ funksiyası giriş ardıcıllığının bir mövqe sürüşməsini həyata keçirir. Bu funksiya adətən $\vec{x}$ kimi işarə olunur. $\vec{x}$ üçün ağac şəkil 12-də verilir. Şəkildən göründüyü kimi $\vec{x}$ m.-d. funksiyasının çəkisi 2-dir və onun kanonik tənliyi aşağıdakı kimidir:

$$z(t) = q(t-1),$$
$$q(t) = x(t),\ q(0) = 0$$

Asanlıqla görmək olar ki, $\vec{x}$ funksiyası x-dəyişənindən gecikməklə asılıdır. $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasının $x_{i_1}, x_{i_2},..., x_{i_s}$ dəyişənlərindən gecikməklə asılı olmasını tərif 2-yə analoji olaraq təyin etmək olar.



Şəkil 12.

$f(x_1,...,x_n) \in P^k_{md}$ halında bu funksiyanın x_i dəyişənindən gecikməklə asılı olmasının təyinini kanonik tənliklər dilində vermək olar: $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasının x_i dəyişənindən gecikməklə asılı olması üçün zəruri və kafi şərt $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası

$$z(t) = F(x_1(t),...,x_n(t),\ q_1(t-1),...,q_\ell(t-1)),$$
$$q_i(t) = G_i(x_1(t),...,x_n(t),\ q_1(t-1),...,q_\ell(t-1)),\ q_i(0)=0,\ i=\overline{1,\ell}$$

kanonik tənliklərlə yazıldıqda $F(x_1,...,x_n,q_1,...,q_\ell)$ funksiyası P_k -dan olan və x_i -dən əsaslı asılı olmayan funksiya olmasıdır.

Nümunə 2 –dən görünür ki, $F(x,q) = q$.

İndi isə O əməliyyatının təyininə baxaq:

Tutaq ki, $\{f_1(x_1,...,x_n),...,f_m(x_1,...,x_n)\}$ $(m \geq 2)$ determinik funksiyalar sinfidir və f_d funksiyası x_j dəyişənindən gecikməklə asılıdır $(1 \leq j \leq n,\ 1 \leq d \leq m)$ Onda bu sistemə n girişli və m çıxışlı çevirici kimi baxmaq olar. Çeviricinin d çıxışını j-ci girişlə birləşdirək, yəni d çıxışı ilə j girişi arasında əks əlaqə yaradaq. Nəticədə biz $m-1$ determinik funksiyalardan ibarət

$$\{f_1'(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n\},...,f_{d-1}'(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n),$$

$$f'_{d+1}(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n),..., f'_m(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n)\}$$

sistemi realizə edən çevirici alarıq.

Əgər $f_1,...,f_m$ funksiyaları m.-d. funksiyalar olarsa, onda O əməliyyatı kanonik tənliklər vasitəsilə təyin oluna bilər. Tutaq ki, f_d funksiyası x_j dəyişənindən gecikməklə asılıdır. $f_1,...,f_m$ funksiyaları üçün kanonik tənlikləri yazaq:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= F_1(x_1(t),...,x_j(t),...,x_n(t),\ q_1(t-1),...,q_\ell(t-1)),\\ &\ldots\\ z_d(t) &= F_d(x_1(t),...,-,...,x_n(t),\ q_1(t-1),...,q_\ell(t-1)),\\ &\ldots\\ z_m(t) &= F_m(x_1(t),...,x_j(t),...,x_n(t),\ q_1(t-1),...,q_\ell(t-1)), \end{aligned} \tag{4}$$

$$q_i(t) = G_i(x_1(t),...,x_j(t),...,x_n(t),\ q_1(t-1),...,q_\ell(t-1)),\ \ i=1,...,\ell,$$

$$q_1(0) = ... = q_\ell(0) = 0.$$

F_d funksiyasında x_j-nin əvəzinə «-» yazılması F_d-nin x_j-dən əsaslı asılı olmadığını göstərir. (4) sistemində z_d-yə uyğun tənliyi atmaqla və $x_j(t)$-nin əvəzinə hər yerdə $F_d(...)$ yazmaqla yeni kanonik tənliklər sistemi almaq olar. Aydındır ki, alınan tənliklər sistemi yuxarıda göstərilən $f'_1,...,f'_{d-1},f'_{d+1},...,f'_m$ m.-d. funksiyalarını təyin edir.

O əməliyyatının daxil edilməsinə nümunə olaraq aşağıdakı kanonik tənliklərlə verilən m.-d. funksiyalara baxaq:

$$\begin{aligned} z(i) &= x(i) + y(i) + q(i-1) \quad (\text{mod } 2)\\ w(i) &= x(i)y(i) \vee x(i)q(i-1) \vee y(i)q(i-1),\\ q(i) &= y_1(i),\quad q(0)=0. \end{aligned} \tag{5}$$

(5)-dən göründüyü kimi həm z və həm də w funksiyaları y_1 dəyişənindən gecikməklə asılıdır.

$w(i) = y_1(i)$ eyniliyi ilə əks əlaqə daxil edək. Onda aşağıdakı kanonik tənlikləri alarıq:

$$z(i) = x(i) + y(i) + q(i-1) \quad (\mathrm{mod}\ 2),$$

$$q(i) = x(i)y(i) \vee x(i)q(i-1) \vee y(i)q(i-1), \quad q(0) = 0 .$$

Beləliklə, O əks əlaqə əməliyyatının nəticəsi m.-d. funksiyadır. Deməli, aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 4. m.-d. funksiyalar sinfi O əksəlaqə əməliyyatına görə qapalıdır.

Teorem 3 və teorem 4-dən alınır:

Teorem 5. P_{md}^k sinfi C və O əməliyyatlarına nəzərən qapalıdır.

FƏSİL 5. AVTOMATLAR NƏZƏRİYYƏSİ HAQQINDA ÜMUMİ MƏLUMATLAR

§1. Sonlu avtomatlar diskret modellər kimi. Sonlu avtomatların xarakterik xüsusiyyətləri.

Avtomatlar nəzəriyyəsi idarəedici sistemlər nəzəriyyəsinin bir bölməsi olub avtomatlar adlanan diskret informasiya çeviricilərinin riyazi modellrini öyrənir. Müəyyən nöqteyi-nəzərdən belə çeviricilər həm real qurğular (hesablama maşınları, avtomatlar, canlı orqanizmlər və i.a.), və həm də abstrakt sistemlərdir (riyazi maşınlar, aksiomatik nəzəriyyə və i.a.). Bu çeviricilərin xarakterik xüsusiyyətləri – fəaliyyətlərinin diskretliyi və onları təsvir edən parametrlərin qiymətlər oblastının sonlu olmasıdır.

Avtomatlar nəzəriyyəsi XX əsrin ortalarında sonlu avtomatların xassələrinin öyrənilməsi ilə əlaqədar olaraq yaranmışdır. Sonlu avtomatları giriş və çıxış kanallarına malik və taktlar adlanan hər bir diskret zaman anlarında sonlu sayda vəziyyətlərdən birində olan qurğu kimi xarakterizə etmək olar.

Çoxlu real qurğular və prosesləri kəsilməz modellərlə (məsələn, diferensial tənliklər sistemlərilə) təsvir etməklə yanaşı həm də onların keyfiyyət xarakteristikalarını və dəyişmə məntiqlərini əks etdirən diskret modellərlə də təsvir etmək olar. Bəzi «keçid» xarakterli proseslərdə dəyişmələri diskret modellər kəsilməz modellərə nəzərən daha adekvat təsvir edir. Digər tərəfdən rəvan dəyişən parametrli proseslərin EHM-də modelləşdirilməsi mahiyyət etibarı ilə diskret olur, belə ki, ədədlər sonlu sayda mövqelər vasitəsilə təsvir olunurlar və bir takt müddətində dəyişməz qalırlar.

Diskret modellərin xarakterik xüsusiyyəti fəaliyyətin baş verdiyi «zamanın» diskretliyidir. Belə ki, real qurğu yaxud prosesin vəziyyətinin baxıldığı real vaxtın hər hansı $\tau_1, \tau_2, \tau_3, ...$ anları ayrılır və fərz edilir ki, quruğunun yaxud prosesin $\tau_1, \tau_2, \tau_3, ...$ anlarında vəziyyəti və ona təsir edən xarici təsirlər kifayət qədər qurğunun yaxud prosesin özünü aparmasını təsvir edir. $\tau_1, \tau_2, \tau_3, ...$ anlarının seçilməsi müxtəlif təsəvvürlər əsasında baş verir: ya bu ardıcıllıq sabit addımlıdır: $\tau_i = \tau_1 + \Delta\tau \cdot (i-1),\ i = 1,2,...;$ ya bu ardıcıllıq qurğunun «dayanıqlı» vəziyyətlərinə uyğun anlardır, bu halda anlar arası intervallar müxtəlif olur; ya $\tau_1, \tau_2,...$ anları xarici təsirlərin baş verdiyi anlardır və i.a. τ_i anında baş verən təsir beləliklə faktiki olaraq $[\tau_i, \tau_{i+})$ intervalına aid olur, ya da ki, τ_i - anının başqa bir ətrafına aid olur. Diskret modellərin özünü aparmasında əhəmiyyətli $\tau_1, \tau_2, \tau_3,...$ zaman qiymətlərinin özü deyil, ancaq onların 1,2,3…. nömrələridir.

Diskret modellərin ikinci əhəmiyyətli xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, modelin cari vəziyyətini təyin etmək üçün kəmiyyət deyil, keyfiyyət xarakteristikaları istifadə olunur. Belə ki, bir çox hallarda hesab etmək mümkün olur ki, modelin vəziyyəti hər hansısa bir sonlu çoxluğun elementləridir.

Diskret modellərin bir andan başqa bir ana vəziyyətlərinin dəyişməsi həm determinik (növbəti vəziyyət əvvəlki anda vəziyyətin və xarici təsirin verilməsi ilə birqiymətli təyin olunur) və həm də qeyri-determinik ola bilər. Qeyri-determiniklik o deməkdir ki, τ_i anında vəziyyətin və xarici təsirin məlum olması imkan vermir ki, τ_{i+1} anında modelin vəziyyəti birqiymətli müəyyən olunsun, ancaq mümkün vəziyyətin hansı sinifdən olması müəyyən olunur.

Nümunə kimi şəkil 1-də verilən sxemə baxaq. Bu şəkildə şəkil 2-də təsvir olunan elementlər istifadə olunur.

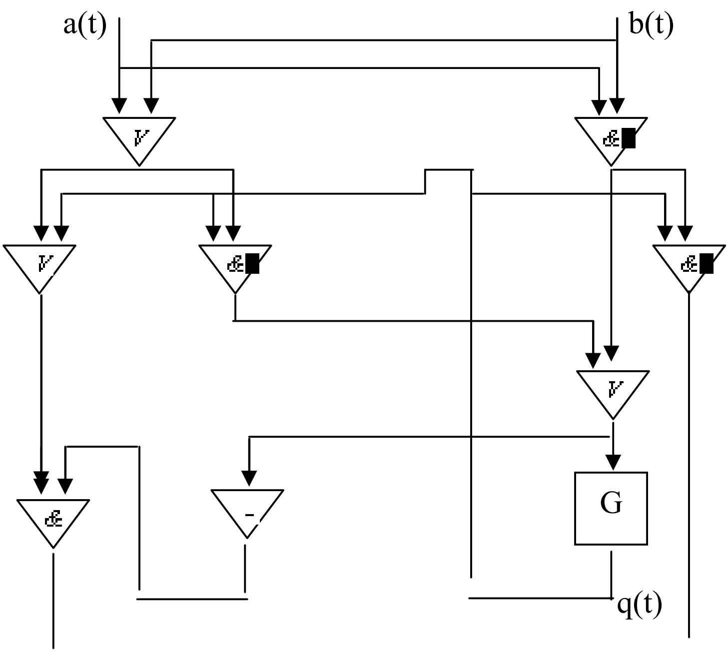
Şəkil 2 «a)», «b)» və «c)»-də verilən elementlər «anı» fəaliyyətli elementlərdir və uyğun olaraq inkar, dizyunksiya və konyunksiya əməliyyatları yerinə yetirirlər. Şəkil 2«ç)»-də göstərilən element gecikmə elementidir. Bu elementin qiyməti $t = 1$ anında $\{0,1\}$ çoxluğundan olan hər hansı bir qiymətdir. $t > 1$ anında elementin çıxışında qiyməti onun $t-1$ anında girişində olan qiymətə bərabərdir.

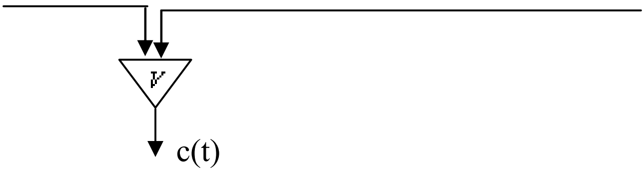
Şəkil 1-in girişlərinə $a(1), a(2), a(3),...$ və $b(1), b(2), b(3),...$ ikilik ardıcıllıqlar daxil olur. Çıxışda isə $c(1), c(2), c(3),...$ ardıcıllığı alınır. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, sxem ikilik ədədlərin toplanması əməliyyatını yerinə yetirir. Əgər $a(n+1)=b(n+1)=q(1)=0$ isə, onda

$$\overline{c(n+1)...c(1)}_2 = \overline{a(n)...a(1)}_2 + \overline{b(n)...b(1)}_2 .$$

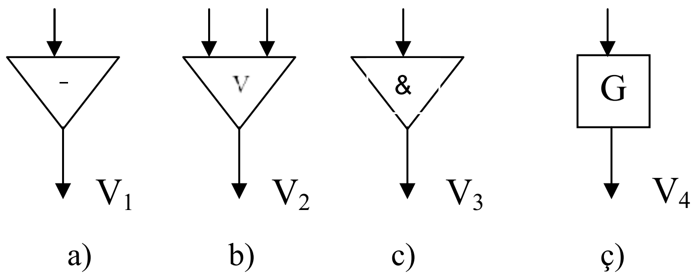
Sxemin vəziyyəti kimi sxemin hər bir elementinə onun müəyyən bir vəziyyətini qarşı qoyan funksiya başa düşülə bilər. Əgər elementlər nömrələnərsə, onda belə funksiyanı ayrı-ayrı elementlərin vəziyyətlərinin yığımı kimi vermək olar. Gecikmə elementindən başqa digər elementlərin vəziyyəti sabitdir. Gecikmə elementinin vəziyyəti kimi onun çıxış qiyməti götürülə bilər. Ona görə də baxılan sxemin vəziyyəti kimi $q(t)$ götürülə bilər. Baxılan sxem aşağıdakı kimi yazıla bilər

$$\begin{cases} q(1)=\sigma, \\ q(t+1)=a(t)\cdot b(t) \vee a(t)q(t) \vee b(t)q(t), \\ c(t)=a(t)+b(t)+q(t) \pmod 2. \end{cases} \tag{1}$$





Şəkil 1.



Şəkil 2.

Real qurğuların işi öyrənilərkən iki müxtəlif yanaşma istifadə olunur. Birinci yanaşmada ancaq giriş və çıxış ardıcıllıqları arasında qarşılıqlı əlaqə ilə maraqlanılır, lakin qurğunun strukturuna, yəni onun hər bir detalına baxılmır. Belə halda qurğuya sonlu abstrakt avtomat kimi baxılır. İkinci yanaşma halında qurğu ayrı-ayrı sadə elementlərdən ibarət sxem kimi təsəvvür edilir. Bu halda qurğuya sonlu strukturlu avtomat kimi baxılır.

Abstrakt avtomat modeli aşağıdakı kimi yazıla bilər. Model daxili vəziyyətlərin sonlu $Q=\{q_1,q_2,...,q_n\}$ çoxluğuna, mümkün giriş siqnallarının sonlu $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$ çoxluğuna və mümkün çıxış siqnallarının sonlu $B=\{b_1,b_2,...,b_p\}$ çoxluğuna malikdir. A və B çoxluqlarının elementləri modelin uyğun olaraq giriş və çıxış simvolları adlanır. Modelin işlədiyi vaxt diskret hesab olunur və ardıcıl vaxt anları 1,2,3,… ədədləri ilə nömrələnirlər. Bunlardan başqa keçid və çıxış funksiyaları adlanan uyğun olaraq φ və ψ

funksiyaları istifadə olunur və bu funksiyalar fəaliyyət dövründə modelin hansı vəziyyətə keçdiyini və hansı çıxış simvoluna malik olduğunu müəyyən edir. Beləliklə model A, Q, B çoxluqları və φ, ψ funksiyaları ilə bütövlükdə təsvir olunur. Əgər modeldə $q(1) = q$ həmişəlik qeyd olunubsa, onda inisiallı abstrakt sonlu avtomat modeli alınır.

Baxılan qurğuya giriş ardıcıllıqları bir neçə müxtəlif kanalla daxil olursa, qurğunun çıxışından məlumatlar həmçinin bir neçə kanalla «oxunursa», bu halda giriş və çıxış əlifbalarını bir neçə əlifbaların dekart hasili şəklində təsvir etmək olar: $A = A_1 \times ... \times A_{p_1}$, $B = B_1 \times ... \times B_{p_2}$. Bu zaman deyirlər ki, model p_1 sayda girişə və p_2 sayda çıxışa malikdir.

Struktur avtomat modeli «elementlər»-dən təşkil olunmuş sxemlərə baxılan zaman əmələ gəlir. Hər bir element özünü hər hansı bir abstrakt sonlu avtomat kimi göstərir. Baxılan «elementlər» yığımından olan müxtəlif avtomatlar müxtəlif sayda giriş və çıxışlara malik ola bilərlər. Sxemlərin qurulması zamanı elementlərin «ani asılılıq» dövrələrinin olmaması şərti gözlənilir.

§2. Abstrakt sonlu avtomatlar və onlarla bağlı məsələlər

Abstrakt sonlu avtomat $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ kimi təyin olunan yığıma deyilir. Burada A, Q, B – sonlu çoxluqlardır, φ funksiyası $Q \times A$ çoxluğunda təyin olunub və Q çoxluğunda qiymətlər alır, ψ funksiyası $Q \times A$ çoxluğunda təyin olunub və B çoxluğunda qiymətlər alır.

A, Q və B çoxluqları V avtomatının uyğun olaraq giriş əlifbası, vəziyyət əlifbası və çıxış əlifbası adlanırlar. φ və ψ funksiyaları V avtomatının uyğun olaraq keçid funksiyası və çıxış funksiyası adlanır. Əgər $\psi(x, y)$, hansı ki, $x \in Q$, $y \in A$, ikinci arqumentindən fiktiv asılı olarsa, onda V avtomatı abstrakt Mur avtomatı adlanır.

Sadəlik üçün «abstrakt sonlu avtomat» əvəzinə bəzən avtomat termini işlədəcəyik. Əgər giriş, çıxış və vəziyyət əlifbaları uyğun olaraq $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r$, $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_\upsilon$, $Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_s$ dekart hasilləri isə, onda φ və ψ funksiyaları $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s)$ və $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\upsilon)$ vektor funksiyaları olar. Bu halda deyilir ki, V avtomatı r sayda girişə və υ sayda çıxışa malikdir.

Abstrakt sonlu avtomatların əsas verilmə üsullarını baxaq.

A, Q, B çoxluqlarını onların elementlərini birbaşa sadalamaqla təsvir etmək olar. φ və ψ funksiyalarını ikigirişli cədvəllər vasitəsilə təsvir etmək olar. Belə cədvəllər şəkil 3 və şəkil 4-də verilir.

a	q					
	q_1	q_2	$\cdots$	q_j	$\cdots$	q_n
a_1			$\cdots$		$\cdots$	
a_2			$\cdots$		$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_i			$\cdots$	$\varphi(q_j, a_i)$	$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m			$\cdots$		$\cdots$	

Şəkil 3.

a	q					
	q_1	q_2	$\cdots$	q_j	$\cdots$	q_n
a_1			$\cdots$		$\cdots$	
a_2			$\cdots$		$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

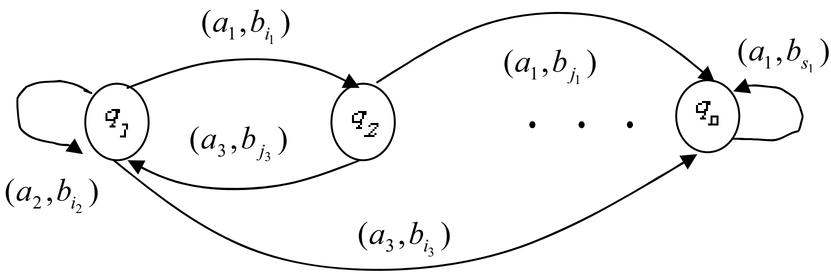
a_i			...	$\psi(q_j, a_i)$	...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m			...		...	

Şəkil 4.

Bu cədvəllərdə hər sətrə qarşılıqlı birqiymətli olaraq $A = \{a_1,...,a_m\}$ çoxluğundan hər hansı bir a_i elementi qarşı qoyulur. Hər sütun $Q = \{q_1, q_2,..., q_n\}$ çoxluğundan olan bir elementə uyğundur. Şəkil 3-də verilən cədvəl vəziyyətlər cədvəli, şəkil 4-də verilən cədvəl isə çıxışlar cədvəlidir. Şəkil 3-də a_i girişinə uyğun sətrlə q_j vəziyyətinə uyğun sütunun kəsişməsində yerləşən mövqeyə $\varphi(q_j, a_i)$ yazılır, şəkil 4-də analoji mövqeyə isə $\psi(q_j, a_i)$ yazılır. Bəzi hallarda bir cədvəldən istifadə olunur və analoji mövqeyə $(\varphi(q_j, a_i), \psi(q_j, a_i))$ cütlüyü yazılır.

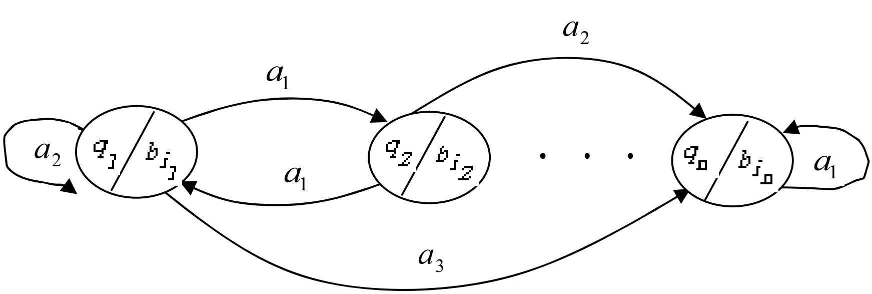
Abstrakt sonlu avtomatların verilməsinin başqa üsulu Mur diaqramları üsuludur. Avtomatın Mur diaqramını qurmaq üçün müstəvidə n sayda kiçik dairə çəkilir və dairənin hər birinin daxilinə $Q = \{q_1, q_2,..., q_n\}$ çoxluğundan bir simvol yazılır. Müxtəlif dairələrə müxtəlif simvollar yazılır. Bütün mümkün (q_i, a_i) cütlüyünə baxılır, hansı ki, $q_i \in Q$, $a_j \in A = \{a_1,...,a_m\}$. q_i-nin yazıldığı dairədən hər bir (q_i, a_1), (q_i, a_2),...,(q_i, a_m) üçün bir ox keçirilir. $j = 1,..., m$ üçün (q_i, a_j)-ə uyğun ox $\varphi(q_i, a_j)$-nin təyin etdiyi vəziyyətin yazıldığı dairəyə birləşdirilir və oxun itiqaməti q_i-nin yazıldığı dairədən $\varphi(q_i, a_j)$-ın təyin etdiyi vəziyyətin yazıldığı dairəyə istiqamətlənir. Oxun üzərinə $(a_j, \psi(q_i, a_j))$ cütlüyü yazılır. Deməli, hər dairədən düz m sayda ox çıxır. Nəticədə alınan təsvir Mur diaqramı adlanır. Şəkil 5-də Mur diaqramına nümunə verilir.

ψ çıxış funksiyası ikinci dəyişəndən (giriş dəyişənindən) fiktiv asılı olarsa, yəni V avtomatı Mur avtomatı olarsa, onda eyni bir dairədən çıxan oxların üzərinə yazılan cütlüyün ikinci elementi eyni olacaq. Ona görə də oxların üzərinə ancaq birinci elementi yazmaq, ikinci elementi isə oxun çıxdığı dairənin daxilində yazmaq kifayətdir. Şəkil 6-da Mur avtomatları üçün olan Mur diaqramlarına nümunə verilir.



Şəkil 5.

Avtomatların verilməsi üçün bir avtomatı başqa avtomatlarla ifadə edən müxtəlif əməliyyatlar istifadə oluna bilər. Nümunə



Şəkil 6.

olaraq avtomatların cəmi əməliyyatına baxaq. Tutaq ki, $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, $W = (A, Q', B, \varphi', \psi')$, hansı ki, $Q \cap Q' = \varnothing$. Bu avtomatların cəmi $V + W = (A, Q \cup Q', B, \varphi'', \psi'')$ kimidir. Burada

$$\varphi''(q,\alpha) = \begin{cases} \varphi(q,\alpha), & \text{əgər } q \in Q, \\ \varphi'(q,\alpha), & \text{əgər } q \in Q', \end{cases}$$

$$\psi''(q,\alpha) = \begin{cases} \psi(q,\alpha), & \text{əgər } q \in Q, \\ \psi'(q,\alpha), & \text{əgər } q \in Q'. \end{cases}$$

Nümunə kimi gecikmə avtomatına baxaq:

$$V = (\{a_1, a_2\}, \{q_1, q_2\}, \{b_1, b_2\}, \varphi, \psi).$$

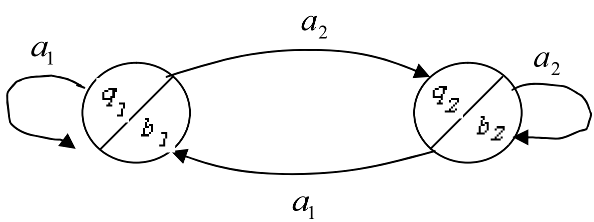
φ və ψ funksiyaları şəkil 7-də təsvir olunan cədvəldə verilir.

a	q	
	q_1	q_2
a_1	(q_1, b_1)	(q_1, b_2)
a_2	(q_2, b_1)	(q_2, b_2)

Şəkil 7.

Gecikmə avtomatı Mur avtomatıdır və onun Mur diaqramı şəkil 8-də verilir.

Gələcəkdə istifadə olunacaq bəzi işarələmə və anlayışları verək: $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ avtomatının giriş sözü A çoxluğundan olan simvolların istənilən sonlu ardıcıllığına deyilir. Boş söz A-dan heç bir simvolu olmayan və Λ kimi işarə olunan sözdür. Çıxış və



Şəkil 8.

vəziyyət sözü uyğun olaraq B və Q-dən olan simvolların sonlu ardıcıllığına deyilir (hər iki halda Λ- boş sözün olması mümkün hesab olunur). Tutaq ki, C hər hansı sonlu çoxluqdur. Əgər $\gamma = c(1)...c(n)$ C-əlifbasından olan $c(1),...,c(n)$ simvollarının sonlu ardıcıllığıdırsa, onda deyirlər ki, γ C əlifbasında sözdür. n ədədi γ sözünün uzunluğu adlanır və $|\gamma|$ ilə işarə olunur. Boş sözün uzunluğu sıfra bərabərdir. Əgər γ və δ sözlər isə və həm də hər hansı bir δ' sözü üçün $\gamma = \delta\delta'$ isə, onda δ -sözün əvvəli, δ' isə sözün sonu adlanır. Əgər $\gamma \neq \delta$ isə, onda γ sözünün başlanğıcı olan δ sözü məxsusi başlanğıc adlanır; əgər $\gamma \neq \delta'$ isə, onda γ sözünün sonu olan δ' məxsusi son adlanır. C əlifbasından olan bütün sözlər çoxluğunu C^* ilə işarə edək. C əlifbasından olan ℓ uzunluqlu bütün sözlər çoxluğunu C_ℓ ilə işarə edək. γ sözünün ℓ uzunluğa malik başlanğıcı $\gamma\underset{\ell}{]}$ kimi işarə olunur. Aydındır ki, $\gamma\underset{0}{]} = \Lambda$.

C əlifbasından olan simvolların sonsuz ardıcıllığı yüksək söz adlanır. C əlifbasından olan yüksək sözlər çoxluğu C^∞ kimi işarə olunur. $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ avtomatının A, Q, B əlifbalarında yüksək sözlər V avtomatının uyğun olaraq giriş yüksək sözləri, vəziyyət yüksək sözləri, çıxış yüksək sözləri adlanır.

M çoxluğunun elementlərinin sayını $|M|$ ilə işarə edək.

$V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ avtomatının keçid və çıxış funksiyalarını çox asanlıqla $Q \times A^*$ çoxluğuna genişləndirmək olar:

$$\varphi(q, \Lambda) = q, \ \ \varphi(q, \beta a) = \varphi(\varphi(q, \beta), a),$$

harada ki, $q \in Q$, $\beta \in A^*$, $a \in A$. Analoji olaraq:

$$\psi(q, \Lambda) = \Lambda, \ \ \psi(q, \beta a) = \psi(\varphi(q, \beta), a),$$

harada ki, q ixtiyari vəziyyətdir, $\beta \in A^*$ və $a \in A$.

Qeyd edək ki, $\varphi(q,\beta)$ başlanğıc anda q vəziyyətində olmuş və girişə β sözü daxil olduqdan sonra modelin olduğu vəziyyətdir. $\psi(q,\beta)$ isə modelə β sözünün sonuncu simvolunun daxil olduğu halda modelin çıxışıdır. β sözünün «emalı» prosesində modelin vəziyyətlər ardıcıllığını və çıxış simvollar ardıcıllığını işarələmək üçün aşağıdakı $\overline{\varphi}$ və $\overline{\psi}$ funksiyalarını daxil edək:

$$\overline{\varphi}(q,\beta) = \varphi(q,\beta\underset{0}{]})\varphi(q,\beta\underset{1}{]})...\psi(q,\beta),$$

$$\overline{\psi}(q,\beta) = \psi(q,\beta\underset{1}{]})\psi(q,\beta\underset{2}{]})...\psi(q,\beta).$$

Burada $q \in Q,\ \beta \in A^*$.

$V = (A,Q,B,\varphi,\psi)$ sonlu abstrakt avtomatının işi ternar münasibətdir:

$$F = \{(\beta,\overline{\varphi}(q,\beta),\ \overline{\psi}(q,\beta)) \big| \beta \in A^*,\ q \in Q\}.$$

Bu münasibət avtomatın giriş sözünü uyğun vəziyyət sözü və çıxış sözü ilə əlaqələndirir. Bu münasibət sonlu avtomatın əsas xarakteristikasıdır.

Tutaq ki, $V = (A,Q,B,\varphi,\psi)$ sonlu abstrakt avtomatdır. V avtomatının hər bir q vəziyyəti üçün (A,Q,B,φ,ψ,q) yığımına baxmaq olar. Bu yığım seçilmiş q başlanğıc vəziyyətli V avtomatını təyin edir. Belə (A,Q,B,φ,ψ,q) yığımı inisiallı sonlu abstrakt avtomat adlanır. Belə avtomatlar üçün həmçinin V_q işarələməsi itifadə olunur. V_q inisiallı avtomatın işləməsi də ternar münasibətdir:
$F_q = \{(\beta,\overline{\varphi}(q,\beta),\overline{\psi}(q,\beta)) \big| \beta \in A^*\}$.

Mur diaqramlarında inisiallı avtomatların başlanğıc vəziyyəti $*$ işarəsilə fərqləndirilir. Bu zaman $*$ işarəsi uyğun dairənin yanında yazılır. Hər bir $V_q = (A, Q, B, \varphi, \psi, q)$ inisiallı avtomat müəyyən bir $f : A^* \to B^*$ kimi funksiya təyin edir: $f(\alpha) = \overline{\psi}(q, \alpha)$. Belə funksiyalar sonlu-avtomat funksiyaları adlanır. n vəziyyətə malik V avtomatı n sayda inisiallı avtomat əmələ gətirir və tərsinə, yəni n sayda verilmiş inisiallı avtomatlar n sayda vəziyyətə malik avtomat müəyyən edir.

İnisiallı avtomatların verilməsi və onların işinin təyini üçün kanonik tənliklər istifadə oluna bilər. Aydındır ki, V_q inisiallı avtomatın F_q işləməsi ancaq və ancaq o (α, k, β) sözlər cütlüyündən ibarətdir ki, onlar üçün birincisi, hər hansı bir n üçün $\alpha = \alpha(1)\alpha(2)...\alpha(n),\ \beta = \beta(1)\beta(2)...\beta(n),\ k = k(1)k(2)...k(n)$ və, ikincisi, $1 \le t \le n$ şərtini ödəyən istənilən t üçün aşağıdakı münasibətlər sistemi qüvvədədir:

$$\begin{cases} k(1) = q, \\ k(t+1) = \varphi(k(t), \alpha(t)), \\ \beta(t) = \psi(k(t), \alpha(t)). \end{cases} \tag{2}$$

(2) münasibətlər sistemi V_q avtomatının kanonik tənliklər sistemi adlanır. Əgər $\varphi = \vec{\varphi} = (\varphi_1, ..., \varphi_r);\ \psi = \vec{\psi} = (\psi_1, ..., \psi_s)$, hansı ki, $\varphi_1, ..., \varphi_r, \psi_1, ..., \psi_s$ məntiq cəbrinin funksiyalarıdır, onda (2) münasibətlərini yazmaq üçün məntiq cəbrinin adi düsturlar dili istifadə oluna bilər.

Sonlu avtomatların işləməsinin xüsusiyyətlərinə uyğun olaraq onların əhəmiyyətli xüsusi siniflərini ayıraq.

$V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ sonlu avtomatlarında $\varphi(z, x)$ və $\psi(z, x)$ funksiyaları ikinci arqumentdən əsaslı asılı deyildirsə, onda V avtomatı avtonom adlanır. Avtonom sonlu avtomat qeyd edilmiş başlanğıc vəziyyət halında ixtiyari giriş ardıcıllıqlarını bu avtomat üçün sabit olan bir ardıcıllığa çevirir. Belə avtomatların Mur diaqramlarında oxlar üzərində yazıları atmaq olar və hər dairədən bir ox keçirmək olar.

V sonlu avtomatı elədirsə ki, ancaq keçid $\varphi(z,x)$ funksiyası x-dan asılı deyildir, onda belə avtomat saat-avtomat adlanır. Belə atomatlarda sonlu sayda taktdan sonra vəziyyətlər təkrarlanmağa başlayır. Avtomatın girişinə daxil olan siqnal avtomatın çıxışında həmin vaxt anında ancaq taktdan asılı olan hər hansı bir informasiyanın əmələ gəlməsinə səbəb olur.

Əgər $V=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ avtomatında $\psi(z,x)=z$ olarsa, onda belə avtomata keçid sistemi deyilir. Belə avtomatların çıxış reaksiyası cari anda avtomatın daxili vəziyyəti haqqında tam informasiya əldə etməyə imkan verir.

Əgər sonlu avtomatın vəziyyət çoxluğu ancaq bir elementdən ibarətdirsə, belə avtomata yaddaşsız avtomat deyilir. Belə avtomatlara funksional elementlər də deyilir və onlar avtomatların sintezində geniş istifadə olunurlar.

Verilən $V=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ avtomatı üçün əgər elə k natural ədədi varsa ki, k uzunluqlu istənilən $\alpha \in A^*$ sözü və q, q' vəziyyətləri üçün $\overline{\psi}(q,\alpha)$ və $\overline{\psi}(q',\alpha)$ sözlərinin üst-üstə düşməsi $\varphi(q,\alpha)$ və $\varphi(q',\alpha)$ vəziyyətlərinin üst-üstə düşməsinə gətirib çıxarır, onda V avtomatı sonlu yaddaşlı avtomat adlanır. Belə avtomatın yekun vəziyyəti onun son k taktda giriş və çıxış simvolları ilə müəyyən olunur. Bu şərti ödəyən ən kiçik k ədədi V avtomatının yaddaşının tərtibi adlanır. Şəkil 9-da sonlu yaddaşlı avtomata nümunə verilir. Şəkil 10-da verilən avtomat sonlu yaddaşa malik deyildir.

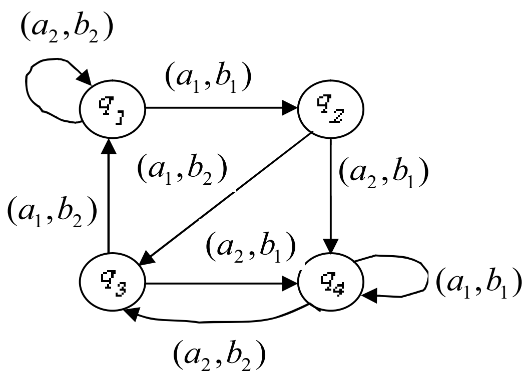
Şəkil 9-da verilən avtomatın yaddaşının tərtibi 2-dir.

$V=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ avtomatı üçün əgər elə k natural ədədi varsa ki, V avtomatının istənilən q vəziyyəti və eyni k uzunluqlu sonluğa malik istənilən $\alpha,\alpha' \in A^*$ sözləri üçün $\psi(q,\alpha)=\psi(q,\alpha')$

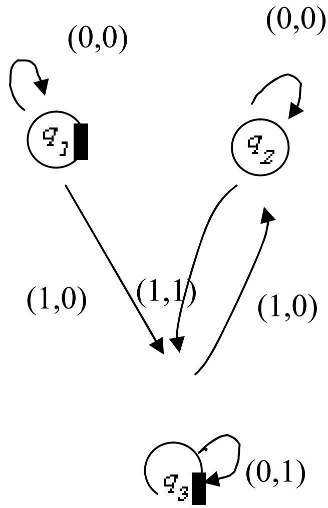
şərti ödənir, onda V avtomatı sonlu yadda saxlamalı avtomat adlanır. Şəkil 11-də sonlu yadda saxlamalı avtomata nümunə verilir. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, şəkil 9-da verilən avtomat sonlu-yadda saxlamalı avtomat deyildir, şəkil 11-də verilən avtomat isə sonlu yaddaşlı avtomat deyildir.

Əgər sonlu yadda saxlamalı avtomatın çıxış simvolları hər hansı bir k üçün istənilən $t \geq k$ anlarında başlanğıc vəziyyətdən asılı deyildirsə, onda belə avtomata özü-özünü sazlayan avtomat deyilir. Belə tip avtomatlar kodlaşdırma nəzəriyyəsində geniş istifadə olunurlar.

Əgər $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ atomatında hər bir $q \in Q$ üçün $\psi_q(x) = \psi(q, x)$ funksiyası A çoxluğunun B çoxluğuna qarşılıqlı birqiymətli inikasını təyin edirsə, onda belə avtomata informasiya itkisiz avtomat deyilir. Başlanğıc vəziyyəti qeyd olunduqda belə avtomat A^* çoxluğunu B^* çoxluğuna inikas etdirir.

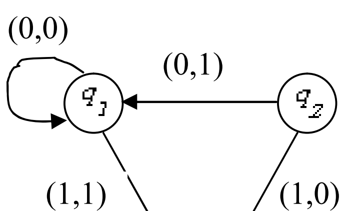


Şəkil 9.



Şəkil 10.

V sonlu avtomatının Mur diaqramı elədirsə ki, onun istənilən dairəsi başqa dairələrlə oxlar (düz yaxud əks istiqamətdə) vasitəsilə birləşirsə, onda V avtomatına rabitəli avtomat deyilir. Əgər əlaqə ancaq düz istiqamətli oxlarla olarsa, onda avtomat güclü rabitəli avtomat adlanır. Güclü rabitəli avtomatlarda istənilən q və q' vəziyyətləri üçün elə $\alpha \in A^*$ mövcuddur ki, $q' = \varphi(q, \alpha)$ olur. Rabitəli, lakin güclü rabitəli olmayan avtomata nümunə olaraq şəkil 10-da olan avtomatı göstərmək olar. Güclü rabitəli avtomata nümunə isə şəkil 9-da verilən avtomatı göstərmək olar. Şəkil 11-də verilən avtomat rabitəsiz avtomatdır.



Şəkil 11.

Əgər $V_q = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ inisiallı avtomatının istənilən q' vəziyyəti üçün elə $\alpha \in A^*$ sözü varsa ki, $q' = \varphi(q, \alpha)$ olur, onda belə avtomat rabitəli inisiallı avtomat adlanır.

Sonlu avtomat anlayışı ilə bağlı bir sıra tipik məsələlər ortaya çıxır. Bu məsələlərə aşağıdakıları göstərmək olar:

1) çıxışı verilən şərti ödəyən ən az vəziyyətə malik sonlu avtomatın qurulması;

2) Mur diaqramı ilə verilən inisiallı avtomatın giriş sözlərinin çıxış sözlərinə inikasının təyini;

3) giriş ardıcıllıqlarnda verilən altsözlərin tanınmasını həyata keçirən sonlu avtomatın qurulması.

4) verilən inisiallı avtomatda çıxışda məlum sözü yaradan giriş sözləri çoxluğunun tapılması;

5) verilən V_q inisiallı avtomatın başlanğıc vəziyyəti dəyişərsə elə ən kiçik uzunluqlu giriş sözü tapmaq lazımdır ki, bu girişə avtomatın reaksiyası əsasında naməlum başlanğıc vəziyyəti tapılsın

6) sonlu avtomatın idarəedici qurğu kimi tətbiqi və i.a.

§3. Struktur avtomatların qurulmasına nümunə

Abstrakt sonlu avtomatların sintezi, yəni onların Mur diaqramları yaxud cədvəl vasitəsilə verilməsi real avtomatik qurğuların yaradılmasının ancaq ilk etapıdır. Növbəti etap struktur avtomatın sintezi etapıdır, yəni müəyyən M sayda verilmiş «elementar» avtomatlar vasitəsilə sxemin qurulmasıdır. Deyilənləri dəqiqləşdirmək üçün nümunəyə baxaq: Tutaq ki, $M=\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$ «elementar» avtomatlar çoxluğudur və bu elementar avtomatlar aşağıdakı kimidir:

$$V_i=(A_i,Q_i,B_i,\varphi_i,\psi_i,s_i),\ i=1,2,3,4;\ B_1=B_2=B_3=B_4=\{0,1\};$$

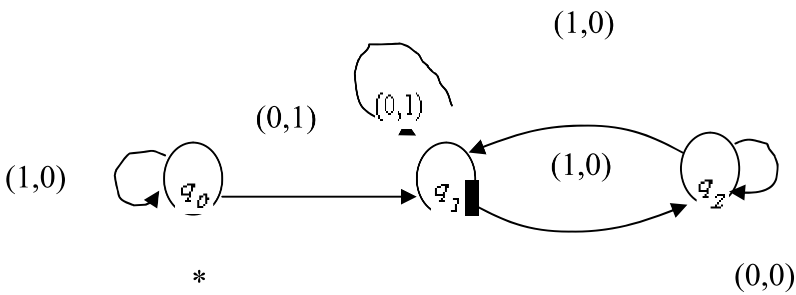
$$Q_1=Q_2=Q_3=\{0\},\ Q_4=\{0,1\};\ A_1=A_4=\{0,1\},\ A_2=A_3=\{0,1\}\times\{0,1\};$$

$$\varphi_1(z,x)=\varphi_2(z,x)=\varphi_3(z,x)\equiv 0,\ \varphi_4(z,x)=x;$$

$$\psi_1(z,x)=\bar{x},\ \psi_2(z,(x_1,x_2))=x_1\vee x_2,\ \psi_3(z,(x_1,x_2))=x_1\,\&\,x_2,$$
$$\psi_4(z,x)=z.$$

V_1, V_2, V_3, V_4 avtomatları hesab olunur ki, inisiallı avtomatlardır, V_4 avtomatının başlanğıc vəziyyəti 0-dır. Aydındır ki, V_1, V_2, V_3 funksional elementlərdir və uyğun olaraq «inkar», «dizyunksiya» və «konyunksiya» əməliyyatlarını realizə edirlər, V_4 gecikmə elementidir. V_1, V_2, V_3 və V_4 avtomatları şəkil 2-də verilir. Bu elementlərdən istifadə etməklə şəkil 12-də Mur diaqramı verilən sonlu abstrakt avtomatın sxemini quraq.

Verilən avtomatın q_0, q_1 və q_2 vəziyyətlərini uyğun olaraq 00,01 və 10-larla kodlaşdıraq. Avtomatın cədvəllə verilməsinə baxaq (yəni cədvəli quraq). Cədvəl şəkil 13-də verilir. Bu cədvəldə avtomatın vəziyyəti kodlaşdırılmış halda verilir.



Şəkil 12.

Avtomatın keçid funksiyası məntiq cəbri funksiyaları cütlüyü şəklində təsvir olunur:

a	q		
	00	01	10
0	(01,1)	(01,1)	(10,0)
1	(00,0)	(10,0)	(01,0)

Şəkil 13.

$\varphi((z_1,z_2),x)=(\varphi_1(z_1,z_2,x)),\varphi_2(z_1,z_2,x))$, çıxış funksiyası isə bir məntiq cəbri funksiyası şəklində təsvir olunur:
$\psi((z_1,z_2),x)=\psi_1(z_1,z_2,x)$.

Cədvəl 13-dən alarıq:

$$\varphi_1(z_1,z_2,x)=z_1\bar{z}_2\bar{x}\vee\bar{z}_1z_2x,$$

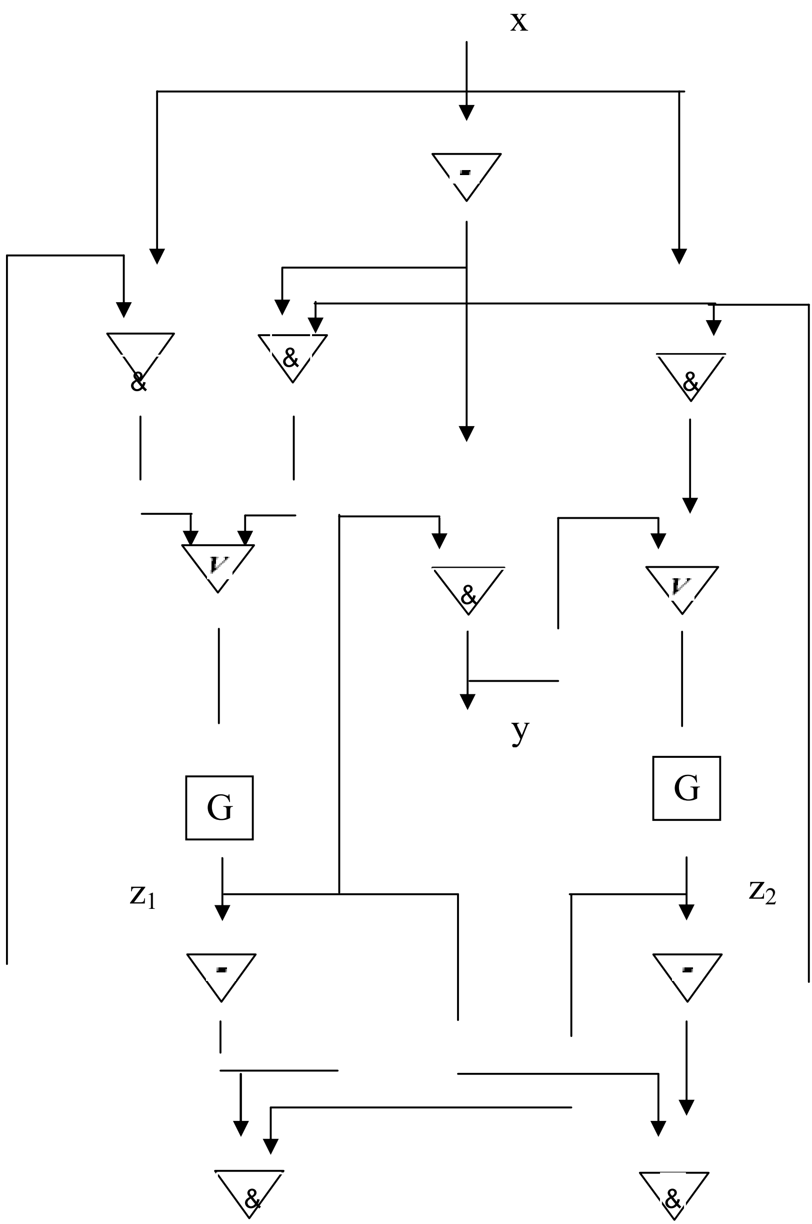
$$\varphi_2(z_1,z_2,x)=\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{x}\vee\bar{z}_1z_2\bar{x}\vee z_1\bar{z}_2x=\bar{z}_1\bar{x}\vee z_1\bar{z}_2x,$$

$$\psi_1(z_1,z_2,x)=\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{x}\vee\bar{z}_1z_2\bar{x}=\bar{z}_1\bar{x}.$$

Avtomat üçün sxemi iki gecikmə elementi istifadə etməklə quraq; bu gecikmə elementlərinin vəziyyətinin (α_1,α_2) cütlüyü avtomatın vəziyyətini də təyin edər. Birinci gecikmə elementinin girişinə $\varphi_1(z_1,z_2,x)$ funksiyasını realizasiya edən funksional elementlər sxeminin çıxışını birləşdirək; ikinci gecikmə elementinin girişinə $\varphi_2(z_1,z_2,x)$ funksiyasını realizasiya edən funksional elementlər sxeminin çıxışını birləşdirək. $\psi_1(z_1,z_2,x)$ funksiyasını realizasiya edən funksional elementlərdən ibarət sxem avtomatın çıxış qiymətini təyin edir. Deyilən sxemlərin z_1 və z_2 girişləri birinci və ikinci gecikmə elemenilərinin çıxışları ilə birləşir, x girişi isə bütünlüklə sxemin girişidir. y bütünlüklə sxemin çıxışıdır. Sxem bütünlüklə şəkil 14-də verilir.

Qeyd edək ki, qurulan sxem verilən abstrakt avtomatı ancaq o halda realizasiya edir ki, onun diaqramı (yəni şəkil 12-dəki diaqram) sxemin təyin etdiyi avtomatın diaqramının fraqmenti olsun. Sxemin gecikmə elementinin (1,1) cütlüyü vəziyyətinə uyğun vəziyyəti şəkil 12-də verilməyibdir.

Struktur avtomatlarının qurulması zamanı minimal sayda elementli sxemlərin qurulması məsələsi ortaya çıxır.


x
-
&
&
&
v
&
v
y
G
G
z_1
z_2
-
-
&
&

Şəkil 14.

Struktur avtomatlar anlayışı ilə bağlı digər əhəmiyyətli məsələ tamlıq məsələsidir. Bu məsələ abstrakt avtomatların hər hansı bir M çoxluğuna baxıldıqda ortaya çıxır. M çoxluğundan olan abstrakt avtomatlar sxemlərin qurulmasında «elementlər» kimi istifadə olunur. M çoxluğuna daxil olan «elementlərin» universal olub-olmadağını, yəni istənilən sxemlərin bunlar vasitəsilə qurmaq mümkün olub olmadığını bilmək lazım gəlir. Əgər M -in elementləri universal isə onda deyirlər ki, M tam sistem təşkil edir.

§4. Determinik və qeyri-determinik sonlu avtomatlar

Bu paraqrafda sonlu avtomatların leksik analizatorların qurulmasında, formal dillər və qrammatikalar nəzəriyyəsində geniş istifadə olunan siniflərinə baxacağıq. Materialın şərhində həmin sahələrdə istifadə olunan terminalogiyadan istifadə edəcəyik.

1. Determinik sonlu avtomatlar. Determinik sonlu avtomatlar (DSA) aşağıdakı komponentlərdən ibarətdir.

1. Vəziyyətlərin sonlu çoxluğu. Bu çoxluğu Q ilə işarə edəcəyik.

2. Giriş simvollarının sonlu çoxluğu. Bu çoxluğu Σ ilə işarə edəcəyik.

3. Keçid funksiyası. Bu funksiyanın arqumentləri cari vəziyyət və giriş simvolu olub qiyməti yeni bir vəziyyətdir. Keçid funksiyasını δ ilə işarə edəcəyik. Avtomatları formal olaraq qraflar kimi təsvir etdikdə δ keçid funksiyası vəziyyətləri birləşdirən qeyd olunmuş oxlar kimi təsvir edilir. Əgər q vəziyyət, a giriş simvolu və $\delta(q,a)=p$ -dirsə, onda a simvolu ilə qeyd olunmuş və q -dən p -yə aparan ox mövcuddur.

4. Başlanğıc vəziyyət. Bu Q çoxluğundan olan bir vəziyyətdir.

5. Yekun yaxud da məqbul vəziyyətlər çoxluğu. Bu çoxluğu F ilə işarə edəcəyik. Aydındır ki, F çoxluğu Q çoxluğunun alt çoxluğudur.

A sonlu determinik avtomatı aşağıdakı beşlik kimi yazılır:

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F),$$

harada ki, A-DSA-nın adı, Q -vəziyyətlər çoxluğu, Σ-giriş simvollar çoxluğu, δ-keçid funksiyası, q_0-başlanğıc vəziyyət, F-yekun yaxud da məqbul vəziyyətlər çoxluğudur.

DSA-ların yuxarıda verilən beşlik şəklində təsviri o qədər də anlaşıqlı deyildir. Onların verilməsi üçün §2-də olduğu kimi cədvəl üsulu və Mur diaqramları üsulu da istifadə oluna bilər və bu üsullar daha anlaşıqlı üsullardır. Əvvəlcə Mur diaqramları üsuluna baxaq. Bu üsul keçid diaqramları üsulu kimi də adlandırılır. $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sonlu determinik avtomatı üçün keçid diaqramları aşağıdakı kimi təyin olunan qrafdır:

a) Q çoxluğundan olan hər bir vəziyyətə bir təpə uyğundur;

b) tutaq ki, Q -dən olan hər hansı bir q vəziyyəti və Σ-dan olan hər hansı bir a simvolu üçün $\delta(q,a) = p$-dir. Onda keçid diaqramında q təpəsindən p təpəsinə aparan və üzərində a simvolu qeyd olunan qövs (ox) mövcud olmalıdır. Əgər avtomatı q təpəsindən p təpəsinə aparan bir neçə simvol olarsa, onda keçid diaqramında bir neçə ox əvəzinə üzərində bütün bu simvolların qeyd olunduğu (yazıldığı) bir ox istifadə edilə bilər;

c) keçid diaqramında başlanğıc vəziyyəti göstərmək üçün uyğun təpəyə üzərində «başlanğıc» sözü yazılan ox birləşdirilir;

ç) F-dən olan vəziyyətlərə uyğun təpələr ikiqat dairələrlə, qalan vəziyyətlərə uyğun təpələr isə sadə dairələrlə əhatə olunurlar.

Nümunə 1. $\Sigma = \{0,1\}$ əlifbası üzərində olan sözlər arasında «01» sözünü daxilinə alan sözləri tanıyan DSA-nın keçid diaqramını qurmalı.

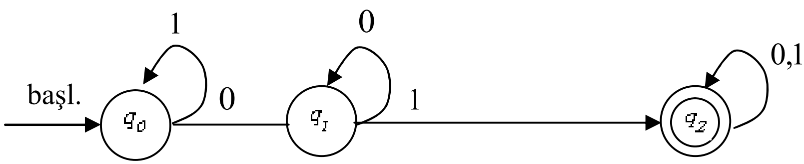
Axtarılan avtomatın aşağıdakı vəziyyətləri ola bilər:

q_0 vəziyyəti. Bu başlanğıc vəziyyətidir.

q_1 vəziyyəti. Bu vəziyyət DSA başlanğıc vəziyyətdə olduqda 0 simvolu daxil olduqda onun keçdiyi vəziyyətidir.

q_2 vəziyyəti. Bu vəziyyət DSA q_1 vəziyyətində olduqda 1 simvolu daxil olduqda onun keçdiyi vəziyyətidir. Aydındır ki, q_2 vəziyyəti məqbul vəziyyətdir.

Axtarılan avtomatın keçid diaqramı şəkil 15-də təsvir olunur.



Şəkil 15.

İndi isə DSA-nın verilməsi üçün cədvəl üsuluna baxaq. Bu üsul δ keçid funksiyasının adi cədvəl qaydası ilə təsviridir. Cədvəlin sətrləri vəziyyətlərə, sütunları isə giriş simvollarına uyğun qoyulur. q vəziyyətinə uyğun sətrlə a giriş simvoluna uyğun sütunun kəsişməsində yerləşən mövqedə $\delta(q,a)$ vəziyyəti yazılır. Başlanğıc vəziyyətə uyğun sətrin qarşısında ox işarəsi, məqbul vəziyyətə uyğun sətrin qarşısında isə $*$ işarəsi yazılır.

Nümunə 1-də axtarılan DSA-nın cədvəli şəkil 16-da verilir.

		0	1
$\rightarrow$	q_0	q_1	q_0
	q_1	q_1	q_2
$*$	q_2	q_2	q_2

Şəkil 16.

DSA-ın δ keçid funksiyasının genişlənməsi anlayışı geniş istifadə olunur. Bu anlayış DSA-nın təyin etdiyi dil anlayışı ilə sıx bağlıdır.

Tutaq ki, w sözü Σ əlifbası üzərində sözdür. Λ isə boş sözdür, yəni heç bir simvoldan ibarət deyildir. δ keçid funksiyasının genişlənməsi $\hat{\delta}$ kimi işarə olunur və aşağıdakı kimi təyin olunur.

İnduksiya bazisi. $\hat{\delta}(q,\Lambda)=q$, yəni q vəziyyətində olduqda heç bir simvol oxunmadıqda DSA q vəziyyətində qalır.

İnduksiya keçidi. Tutaq ki, w sözü xa şəklindədir, yəni a sözdə sonuncu simvol, x isə w sözündə a simvolunu nəzərə almadıqda alınan sözdür (zəncirdir). Onda

$$\hat{\delta}(q,w)=\delta(\hat{\delta}(q,x),a).$$

$A=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ şəklində DSA-nın dili dedikdə aşağıdakı kimi təyin olunan $L(A)$ sözlər çoxluğu başa düşülür:

$$L(A)=\{w \mid \hat{\delta}(q_0,w)\in F\}.$$

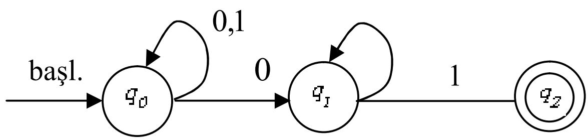
Beləliklə, A avtomatının dili dedikdə bu avtomatı q_0 vəziyyətindən bir məqbul vəziyyətinə aparan sözlər çoxluğu başa düşülür.

2. Qeyri-determinik sonlu avtomatlar. Qeyri-determinik sonlu avtomat (QDSA) eyni vaxtda bir neçə vəziyyətdə ola bilər və ya da heç bir vəziyyətdə olmaya bilər. Bu onu göstərir ki, QDSA-lar girişə daxil olan simvollardan və onun cari halda olduğu vəziyyətdən asılı olaraq ya bir neçə vəziyyətə keçə bilər və ya da boş vəziyyətə keçə bilər.

QDSA-ların formal təyininə baxaq. QDSA-ın strukturu DSA-ın strukturuna oxşayır: $A=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$. Burada Q,Σ,q_0 və F determinik sonlu avtomatlarda olduğu kimidir. δ keçid funksiyası isə bir arqumenti Q çoxluğundan olan vəziyyət, digər arqumenti isə Σ çoxluğundan olan giriş simvolu olan funksiyadır. DSA-lardan fərqli olaraq bu halda δ funksiyasının qiyməti Q çoxluğunun hər hansı bir altçoxluğudur.

QDSA-nın δ keçid funksiyasının yuxarıda şərh olunan qaydada təyini onu göstərir ki, QDSA-ın keçid diaqramları vasitəsilə verilməsi halında təpələrdən eyni bir giriş simvolu halında müxtəlif təpələrə keçidləri göstərən oxlar mövcud ola bilər, yaxud da giriş simvolu daxil olduqda keçid olmaya da bilər. Bu sonuncu halda QDSA-da «dalan» vəziyyəti alınır, yəni o «ölür».

Nümunə 1-də göstərilən məsələni həll etmək üçün QDSA da istifadə oluna bilər. Bu zaman keçid diaqramı şəkil 17-dəki kimi təsvir oluna bilər.



Şəkil 17.

QDSA-ların keçid cədvəlləri də DSA-ların keçid cədvəlləri kimidir. Lakin QDSA-ların keçid cədvəllərində sətr və süiunların kəsişməsində çoxluq göstərilir. Bu çoxluq bir elementli çoxluq və ya çoxelementli çoxluq və ya boş çoxluq ola bilər. Nümunə 1-ə uyğun QDSA-nın keçid cədvəli şəkil 18-də verilir.

		0	1
→	q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$
*	q_2	$\varnothing$	$\varnothing$

Şəkil 18.

İndi isə QDSA-nın keçid funksiyasının genişlənməsinə baxaq. Genişlənmiş keçid funksiyası $\hat{\delta}$ ilə işarə olunur. $\hat{\delta}$ genişlənmiş keçid funksiyasının arqumentləri q vəziyyəti və $w \in \Sigma^*$ sözüdür. Formal olaraq $\hat{\delta}$ aşağıdakı kimi təyin olunur.

İnduksiya bazisi. $\hat{\delta}(q, \Lambda) = q$, yəni QDSA heç bir giriş simvolu daxil olmadıqda o əvvəlki vəziyyətdə qalır.

İnduksiya keçidi. Fərz edək ki, $w = xa$, harada ki, a simvolu w sözünün sonuncu simvoludur, x isə w sözünün əvvəlidir. Bundan başqa, fərz edək ki, $\hat{\delta}(q,x) = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$. Tutaq ki,

$$\bigcup_{j=1}^{k} \delta(p_i, a) = \{r_1, r_2, ..., r_m\}.$$

Onda $\hat{\delta}(q,w) = \{r_1, r_2, ..., r_m\}$.

Nümunə 2. Şəkil 17-də təsvir olunan QDSA-nın «00101» sözünü emal etdikdə $\hat{\delta}$ genişlənmiş keçid funksiyasının qiymətlərini qurmalı.

$\hat{\delta}$ genişlənmiş keçid funksiyasının qiymətləri aşağıdakı kimidir.

1. $\hat{\delta}(q_0, \Lambda) = \{q_0\}$.
2. $\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$.
3. $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \varnothing = \{q_0, q_1\}$.
4. $\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$.
5. $\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \varnothing = \{q_0, q_1\}$.
6. $\hat{\delta}(q_0, 00101) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$.

$\hat{\delta}$ genişlənmiş keçid funksiyası əsasında QDSA üçün dil anlayışı verilir.

Əgər $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ hər hansı bir QDSA isə, onda bu avtomatın dili dedikdə aşağıdakı kimi təyin olunan $L(A)$ sözlər çoxluğu başa düşülür:

$$L(A) = \{w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \varnothing\}.$$

Beləliklə, $L(A)$ çoxluğu Σ^*-dan olan w sözlərindən ibarət çoxluqdur, harada ki, bu w sözləri üçün $\hat{\delta}(q_0, w)$ vəziyyətləri arasında heç olmazsa bir məqbul vəziyyət mövcuddur.

3. Determinik və qeyri-determinik sonlu avtomatların ekvivalentlikləri. Verilən sözü tanıyan QDSA-lar DSA-lara nisbətən daha asan qurulur. Aydındır ki, QDSA vasitəsilə təsvir olunan istənilən dili eyni sayda vəziyyətə malik hər hansı bir DSA vasitəsilə də təsvir etmək olar, lakin bu DSA-da keçidlərin sayı (oxların sayı) daha çox olar. Ən pis halda ən kiçik DSA 2^n sayda vəziyyətə malik ola bilər, harada ki, verilən dil üçün QDSA ancaq cəmi n sayda vəziyyətə malik olar.

Verilən QDSA-ya görə onun bütün imkanlarına malik DSA-nı qurmaq üçün altçoxluqların konstruksiyası üsulu istifadə olunur. Bu üsul eyni bir dilə malik QDSA və DSA üçün qüvvədədir. Tutaq ki, N və D uyğun olaraq aşağıdakı qeyri-determinik və determinik sonlu avtomatlardır:

$$N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N), \quad D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D),$$

harada ki, $L(N) = L(D)$. Qeyd edək ki, giriş əlifbası bu iki avtomatda üst-üstə düşür, D-də başlanğıc vəziyyət isə ancaq N avtomatının başlanğıc vəziyyətindən ibarət olan çoxluqdur. D avtomatının qalan komponentləri aşağıdakı qaydada qurulur.

1. Q_D çoxluğu Q_N-in bütün altçoxluqlrı çoxluğudur, yəni Q_N-in buleanıdır. Qeyd edək ki, əgər Q_N çoxluğu n sayda vəziyyətdən ibarətdirsə, onda Q_D çoxluğu 2^n sayda vəziyyətdən ibarət olar. Lakin çox hallarda bu vəziyyətlərin hamısı başlanğıc vəziyyətdən əldə oluna bilmir. Belə nail ola bilməyən vəziyyətləri atmaq olar. Odur ki, D-nin vəziyyətlərinin sayı faktik olaraq 2^n-dən olduqca kiçik ola bilər.

2. F_D çoxluğu Q_N çoxluğunun S altçoxluqlarının çoxluğudur ki, $S \cap F_N \neq \varnothing$, yəni F_D çoxluğu N-in vəziyyətləri çoxluğunun o altçoxluqlarından ibarətdir ki, bu altçoxluqlara N-in heç olmazsa bir məqbul vəziyyəti daxildir.

3. Hər bir $S \subseteq Q_N$ və Σ -dan olan hər bir a simvolu üçün

$$\delta_D(S,a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p,a).$$

Beləliklə, $\delta_D(S,a)$-nı tapmaq üçün S-dən olan bütün p vəziyyətlərinə baxılır, N-in o vəziyyətləri axtarılır ki, onlara p

vəziyyətindən a simvolu vasitəsilə gəlmək olar, sonra isə bütün p vəziyyətlərinə görə tapılan vəziyyətlər çoxluğunun birləşməsi götürülür.

Nümunə 3. Şəkil 17-də verilən QDSA üçün altçoxluqların tam konstruksiyasını qurmalı.

Aydındır ki, baxılan QDSA-da üç vəziyyət - q_0, q_1 və q_2 vəziyyətləri mövcuddur. Ona görə də DSA üçün $2^3 = 8$ vəziyyət alınır. Şəkil 19-da səkkiz vəziyyət üçün keçid cədvəli təsvir olunur. DSA üçün vəziyyətləri aşağıdakı kimi işarə edək:

$$A = \varnothing,\ B = \{q_0\},\ C = \{q_1\},\ D = \{q_2\},\ E = \{q_0, q_1\},$$

$$F = \{q_0, q_2\},\ G = \{q_1, q_2\},\ H = \{q_0, q_1, q_2\}.$$

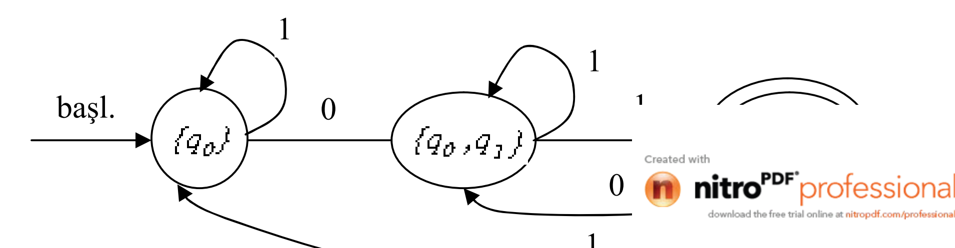
		0	1
	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
*	$\{q_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
*	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
*	$\{q_1, q_2\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
*	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Şəkil19.

		0	1
	A	A	A
$\rightarrow$	B	E	B
	C	A	D
*	D	A	A
	E	E	F
*	F	E	B
*	G	A	D
*	H	E	F

Şəkil 20.

Şəkil 20-dən görünür ki, B vəziyyətindən başlamaqla ancaq B, E və F vəziyyətlərinə gəlmək olar. Qalan beş vəziyyətə B başlanğıc vəziyyətdən gəlmək mümkün deyildir. Ona görə də onları cədvəldən silmək olar. Beləliklə, şəkil 21-də verilən DSA-nı almaq olar.



Şəkil 21.

Teorem 1. Əgər $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_0, F_D)$ determinik sonlu avtomatı $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ qeyri-determinik sonlu avtomatından altçoxluqların konstruksiyası vasitəsilə qurulubsa, onda $L(D) = L(N)$.

Teorem 2. L dilinin hər hansı bir determinik sonlu avtomat üçün məqbul olması üçün zəruri və kafi şərt onun hər hansı bir qeyri-determinik sonlu avtomat üçün məqbul olmasıdır.

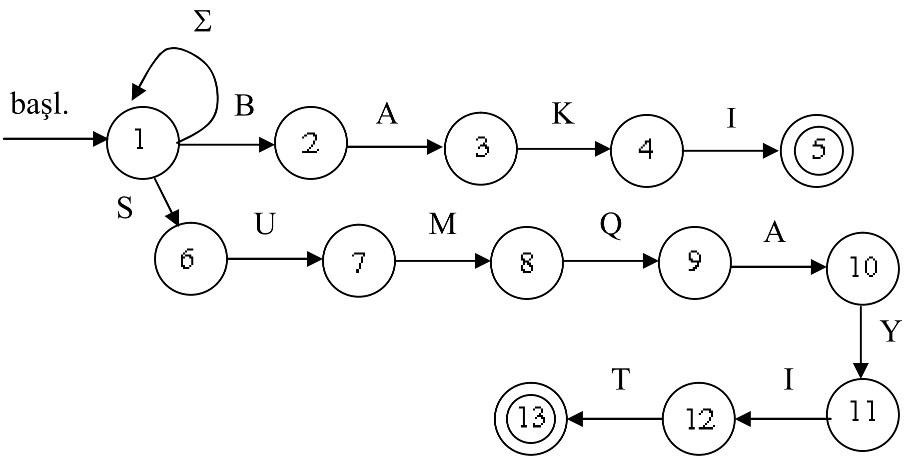
4. Mətnlərdə axtarış üçün qeyri-determinik və determinik sonlu avtomatlar. Tutaq ki, müəyyən sözlər çoxluğu verilmişdir. Bu sözləri açar sözləri adlandıracağıq. Verilmiş mətnlərdə bu açar sözlərinin istənilən birinin axtarılmasına baxaq. Belə hallarda qeyri-determinik avtomatların tətbiqi çox münasibdir. Belə ki, qeyri-determinik avtomat məqbul vəziyyətlərdən birinə keçməklə açar sözlərdən birinə rast gəlməsini bildirir. Axtarış aparılan mətnin simvolları birbəbir QDSA-nın girişinə verilir və bununla da mətndə axtarılan açar sözlərin olması müəyyənləşdirilir. Açar sözləri çoxluğunu tanıyan QDSA-ların çox sadə forması mövcuddur. Hesab edək ki, mətn hər hansı bir Σ giriş simvolları əlifbasından olan sözlərdən ibarətdir. Məsələn, Σ giriş simvolları əlifbası ASCII çap simvolları yığımı ola bilər.

1. Σ –dan olan hər bir simvola görə özünə keçən başlanğıc vəziyyət mövcuddur. Başlanğıc vəziyyəti hələ heç bir açar sözünün tapılmasına başlanmadığını göstərir (bu sözlərdən birinin artıq bir neçə simvolu hətta tapılıbsa belə).

2. Simvolları Σ-dan olan hər bir $a_1a_2...a_k$ açar sözü üçün k vəziyyət mövcuddur, deyək ki, $q_1, q_2, ..., q_k$ vəziyyətləri. a_1 giriş simvolu üçün başlanğıc vəziyyətdən q_1 vəziyyətinə keçid, a_2 giriş simvolu üçün q_1 vəziyyətindən q_2 vəziyyətinə keçid və i.a. nəzərdə tutulur. q_k vəziyyəti məqbul vəziyyətdir və bu vəziyyət $a_1a_2...a_k$ açar sözünün tapılmasını göstərir.

Nümunə 4. Azərbaycan dili əlifbasında verilmiş BAKI və SUMQAYIT açar sözlərini tanıyan QDSA-nı qurmalı.

Axtarılan QDSA-nın keçid diaqramı şəkil 22-də verilmişdir. Burada Σ giriş əlifbası azərbaycan dilinin hərflərindən ibarət əlifbadır.



Şəkil 22.

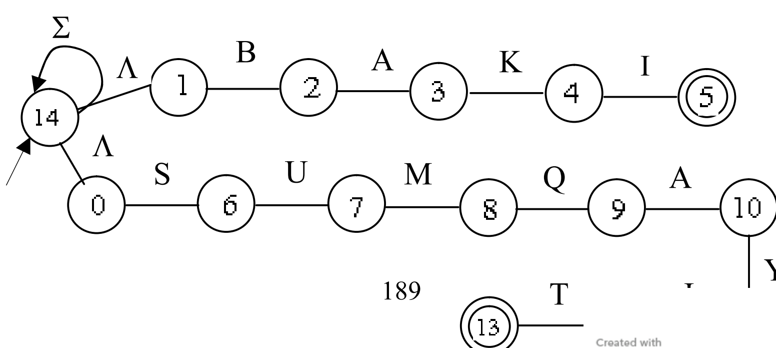
Mətnlərdə açar sözlərini tanıyan DSA-ları qurmaq üçün əvvəlcə uyğun QDSA-ları qurmaq, sonra isə altçoxluqların konstruksiyası üsulunu tətbiq etmək lazımdır. Qeyd edək ki, mətnlərdə açar sözlərini tanıyan DSA-lar uyğun QDSA-lar vasitəsilə qurulduqda DSA-ların vəziyyətlərinin sayı QDSA-ların vəziyyətlərinin sayını aşmır. Odur ki, belə üsullarla DSA-ların qurulması çox əlverişlidir və aşağıdakı qaydadan ibarətdir:

a) Əgər q_0 QDSA-nın başlanğıc vəziyyətidirsə, onda $\{q_0\}$ DSA-nın vəziyyətlərindən biri olar;

b) Tutaq ki, p vəziyyəti QDSA-nın hər hansı bir vəziyyətidir və QDSA bu vəziyyətə onun başlanğıc vəziyyətindən $a_1a_2...a_m$ simvollar ardıcıllığının qeyd olunduğu (yazıldığı) yol vasitəsilə gəlir. Onda DSA-nın bir vəziyyəti q_0, p və QDSA-ın q_0 vəziyyətindən $a_1a_2...a_m$ sözünün sonları vasitəsilə (sufiksləri vasitəsilə), yəni $a_ja_{j+1}...a_m$ simvolları ardıcıllığı şəklində olan sözlər vasitəsilə qeyd olunmuş yolla gələ bildiyi bütün vəziyyətlərdən ibarət olan çoxluq olur.

5. Λ**- keçidli avtomatlar.** Belə avtomatlar sonlu avtomatların daha bir ümumiləşməsidirlər. Λ-keçidli avtomatlar Λ-a (boş sözə) görə keçidə malik olurlar, yəni onlarda girişə heç bir simvol daxil olmadan öz-özünə keçid baş verir. Λ-keçidli avtomatlar tətbiqlər zamanı əlavə imkanlar yaradır.

Nümunə 5. Açar sözlər çoxluğunun tanınması üçün nümunə 4-də təklif olunan üsulu Λ-keçidlə sadələşdirmək olar. Məsələn, şəkil 22-də BAKI və SUMQAYIT açar sözlərini tanıyan QDSA-nı Λ-keçid vasitəsilə realizə etmək olar. Bu şəkil 23-də təsvir olunur. İş ondan ibarətdir ki, hər bir açar söz üçün ancaq yeganə bir açar sözün mövcudluğu halında olduğu kimi bütöv vəziyyətlər ardıcıllığı qurulur. Sonra isə yeni başlanğıc vəziyyət əlavə olunur (şəkil 23-də 14 vəziyyəti) və bu vəziyyət hər bir açar sözün başlanğıc vəziyyətinə Λ-keçidli hesab olunur.



Şəkil 23.

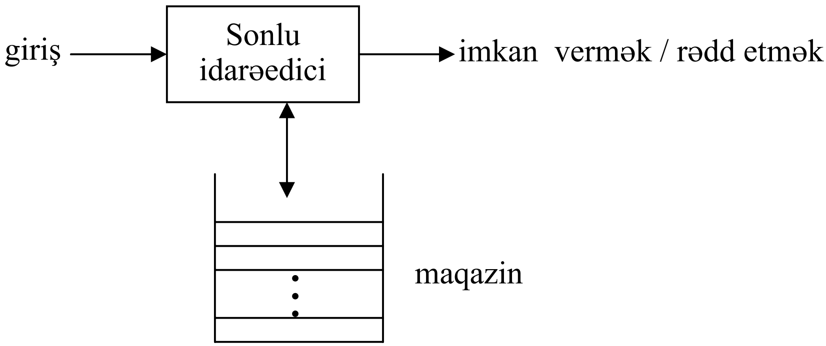
Λ-DSA-nı dəqiq olaraq QDSA kimi təsvir etmək olar. Ancaq yeganə fərq ondan ibarətdir ki, Λ-keçidli QDSA-nın keçid funksiyası Λ-ya görə keçid haqqında informasiyaya malik olmalıdır. Formal olaraq A Λ-QDSA-nı $A=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ şəklində təsvir etmək olar, harada ki, δ-dan başqa bütün komponentlər QDSA üçün olduğu mənaya malikdirlər. δ keçid funksiyasının arqumentləri Q-dən və $\Sigma\bigcup\{\Lambda\}$ çoxluğundan qiymətlər alır. Belə ki, Λ boş söz simvolu Σ əlifbasının elementi deyildir. QDSA-lara analoji olaraq Λ-QDSA-lar üçün keçid funksiyasının genişlənməsi, Λ-QDSA-ların təyin etdiyi dil və s. anlayışlarını vermək olar.

İstənilən E Λ-QDSA üçün onun təsvir etdiyi dili təsvir edə bilən DSA-nı tapmaq olar. Bunun üçün altçoxluqların konstruksiyası qaydasının analoqu istifadə oluna bilər.

§5. Maqazin yaddaşlı sonlu avtomatlar

1. Giriş. Maqazin yaddaşlı avtomat mahiyyətcə Λ-keçidli qeyri-determinik sonlu avtomatdır. Bundan başqa, bu avtomata maqazin əlavə olunmuşdur və burada «maqazin simvollarının» sözləri saxlanılır. Maqazinin mövcudluğu o deməkdir ki, sonlu avtomatdan fərqli olaraq maqazinli avtomat sonsuz miqdarda informasiya «yadda saxlaya» bilər. Maqazinli avtomat maqazində olan informasiyaya onun ancaq bir ucundan «sonuncu gəldi-birinci getdi» prinsipi ilə yanaşa bilər.

Maqazin yaddaşlı avtomata (MY – avtomata) qeyri-formal olaraq şəkil 24-də təsvir olunan qurğu kimi baxıla bilər. «Sonlu idarəedici» giriş simvollarını birbəbir oxuyur. Maqazinli avtomat maqazinin zirvəsində (yuxarı səviyyəsində) olan simvolu nəzərdən keçirərək cari vəziyyət, giriş simvolu və maqazinin yuxarısında olan simvol əsasında keçid edə bilər. O giriş simvolu olaraq Λ -nı istifadə etməklə həmçinin öz-özünə keçid də edə bilər.



Şəkil 24.

Bir keçiddə avtomat aşağıdakıları həyata keçirir.

1. Keçiddə istifadə olunan giriş simvolunu oxuyur və onu ötürür, yəni növbəti giriş simvoluna baxmağa hazır olur. Əgər giriş olaraq Λ istifadə olunursa, giriş simvolu ötürülmür.

2. Yeni vəziyyətə keçilir. Yeni vəziyyət əvvəlkindən fərqlənməyə bilər.

3. Maqazinin zirvəsində olan simvolu hər hansı bir sözlə əvəzləyir. Söz Λ ola bilər. Bu da maqazinin zirvəsindən götürülmüşə uyğun olur. Simvolu əvəzləyən söz maqazinin zirvəsində əvvəl olan simvol da ola bilər, yəni maqazin dəyişdirilmir. Bu da zirvədən informasiya çıxarmamaqla və əlavə etməməklə eynigüclüdür. Zirvədə simvol bir neçə simvolla əvəz oluna bilər. Bu onunla eynigüclüdür ki, zirvədə simvol dəyişilir və maqazinə bir və ya bir neçə simvol əlavə olunur.

2. MY-avtomatın formal təyini. Bu təyin yeddi komponentdən ibarətdir və aşağıdakı kimidir:

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F) \ .$$

Komponentlər aşağıdakı məqsədlə istifadə olunurlar:

Q -vəziyyətlərin sonlu çoxluğu;

Σ -giriş simvollarının sonlu çoxluğu;

Γ-maqazin simvollarının sonlu çoxluğu. Bu çoxluğun sonlu avtomatlarda analoqu yoxdur və bu çoxluq maqazinə yerləşdirilə bilən simvolların çoxluğudur;

δ-keçid funksiyası. Bu funksiya avtomatın fəaliyyətini idarə edir. Formal olaraq δ-nın arqumentləri üçlük təşkil edir: $\delta = \delta(q, a, X)$. Burada q kəmiyyəti Q çoxluğundan olan simvol, a kəmiyyəti Σ çoxluğundan olan simvol və ya Σ çoxluğuna daxil olmayan boş söz (Λ-sözü), X -isə Γ-dan olan simvoldur. δ keçid funksiyasının qiyməti (çıxışı) (p, γ) cütlüyü əmələ gətirir, harada ki, p yeni vəziyyət, γ -maqazinin zirvəsində X -ı əvəzləyəcək maqazin simvollarından ibarət sözdür. Məsələn, əgər $\gamma = \Lambda$ olarsa, onda maqazin simvolu götürülmür, əgər $\gamma = X$ olarsa, onda maqazin dəyişdirilmir, əgər $\gamma = YZ$ isə onda X Z-lə əvəzlənir və Y maqazinə daxil edilir;

q_0- MY-avtomatın başlanğıc vəziyyətidir və işin əvvəlində MY-avtomat bu vəziyyətdə olur;

Z_0-başlanğıc maqazin simvoludur (maqazinin «dib markeri»). Başlanğıc halda maqazində ancaq bu simvol olur.

F -məqbul və ya yekun vəziyyətlər çoxluğu.

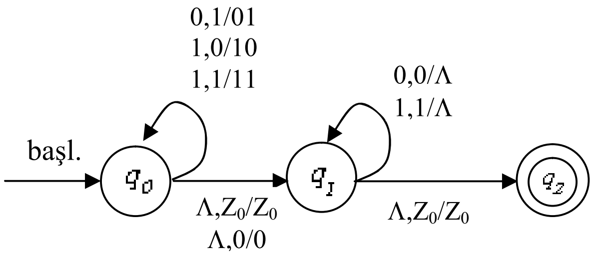
3. MY-avtomatların qrafik təsviri. MY-avtomatların qrafik təsviri onların keçid diaqramları adlanır. Bu keçid diaqramları aşağıdakı xassələrə malikdir.

1. Diaqram təpələri MY-avtomatın vəziyyətlərinə uyğundur.

2. «Başlanğıc» sözü ilə qeyd olunmuş ox MY-avtomatın başlanğıc vəziyyətini göstərir. İkiqat dairə daxilində avtomatın məqbul vəziyyətləri göstərilir.

3. Oxlar (qövslər) aşağıdakı mənada MY-avtomatların keçidlərinə uyğun gəlir. $a, X / \alpha$ yazısı ilə qeyd olunmuş və q vəziyyətindən p vəziyyətinə istiqamətlənmiş (q vəziyyətindən p vəziyyətinə aparan) ox onu göstərir ki, $\delta(q, a, X)$ keçidi (p, α) cütündən ibarətdir (başqa cütlüklər də ola bilər). Beləliklə, oxlarda olan qeydlər hansı giriş simvolunun istifadə edilməsini, həmçinin maqazinin zirvəsində nəyin olmasını və nəyin olacağını göstərir.

Şəkil 25-də MY-avtomatın qrafik təsvirinə nümunə verilmişdir.



Şəkil 25.

4. MY-avtomatların konfiqurasiyası. MY-avtomatlar giriş simvolları və ya Λ sözünə uyğun olaraq bir konfiqurasiyadan başqa bir konfiqurasiyaya keçir. Adi sonlu avtomatlardan fərqli olaraq MY-avtomatların konfiqurasiyasına həm onun vəziyyəti və həm də maqazinin məzmunu daxildir. Maqazin çox böyük ola bildiyindən o konfiqurasiyanın ən əhəmiyyətli hissəsi hesab olunur. Girişin oxunmayan hissəsinin də konfiqurasiya hissəsi kimi təsəvvür olunması çox faydalı olur.

MY-avtomatın konfiqurasiyasını (q, w, γ) üçlüyü kimi təsvir etmək olar, harada ki, q-vəziyyət, w-girişin qalan hissəsi, γ-maqazinin məzmunudur. Razılaşmaya əsasən maqazinin zirvəsi solda, dibi (altı) isə sağda təsvir olunur. Belə üçlük MY-avtomatın konfiqurasiyası və ya onun ani təsviri (AT) adlanır.

Sonlu avtomatın ani təsviri sadəcə olaraq onun vəziyyəti olduğundan onun keçdiyi konfiqurasiyalar ardıcıllığını təsvir etmək üçün $\hat{\delta}$ keçid funksiyasının genişlənməsini istifadə etmək kifayətdir. Lakin MY-avtomatlar üçün vəziyyətin, girişin və maqazinin dəyişməsini təsvir edən vasitə lazımdır.

Beləliklə, konfiqurasiyalar cütlüyü istifadə olunur, harada ki, onlar arası əlaqə MY-avtomatın keçidini təmsil edir.

Tutaq ki, $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ avtomatı MY-avtomatdır. P aşağıdakı kimi başa düşüldüyü halda $\underset{P}{\vdash}$ və ya sadəcə olaraq $\vdash$

münasibətini təyin edək. Tutaq ki, $\delta(q,a,X)$ keçidi (p,α) cütünü özündə saxlayır. Onda Σ^*-dan olan bütün w sözü və Γ^*-dan olan bütün β sözü üçün $(q,aw,X\beta) \vdash (p,w,\alpha\beta)$ qəbul edilir. Bu keçid aşağıdakı ideyanı əks etdirir. Girişdən a simvolunu oxumaqla (bu Λ da ola bilər) və maqazinin zirvəsində X-ı α sözü ilə əvəzləməklə q vəziyyətindən p vəziyyətinə keçmək olar. Qeyd edək ki, girişin qalan hissəsi (w) və maqazinin zirvədən aşağıda qalan məzmunu (β) MY-avtomatın fəaliyyətinə təsir etmir. Onlar sadəcə olaraq, mümkündür ki, gələcəkdə istifadə olunmaq üçün saxlanırlar.

$\overset{*}{\underset{P}{\vdash}}$ və ya sadəcə $\overset{*}{\vdash}$ simvolu istifadə etməklə P MY-avtomatının bir neçə keçidini təsvir etmək olar.

Beləliklə, aşağıdakı induktiv təyini alırıq.

İnduksiya bazisi. İstənilən I ani təsviri üçün $I \overset{*}{\vdash} I$.

İnduksiya keçidi. Əgər $I \vdash K$ və $K \overset{*}{\vdash} J$ şərtlərini ödəyən K ani təsviri olarsa, onda $I \overset{*}{\vdash} J$.

Beləliklə, əgər elə $K_1, K_2, ..., K_n$ ani təsvirlər ardıcıllığı mövcud olarsa ki, bütün $i = 1,2,...,n-1$ üçün $I = K_1$, $J = K_n$ və $K_i \vdash K_{i+1}$, onda $I \overset{*}{\vdash} J$.

Teorem 1. Əgər $P = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$ avtomatı MY-avtomatdırsa və $(q,x,\alpha) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (p,y,\beta)$ doğrudursa, onda Σ^* və Γ^*-dan olan uyğun olaraq istənilən w və γ sözləri üçün aşağıdakı doğrudur:

$$(q,xw,\alpha\gamma) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (p,yw,\beta\gamma).$$

Qeyd edək ki, bu teoremin tərsi doğru deyildir.

Teorem 2. Əgər $P = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$ avtomatı MY-avtomatdırsa və $(q,xw,\alpha) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (p,yw,\beta)$ doğrudursa, onda $(q,x,\alpha) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (p,y,\beta)$ münasibəti də doğrudur.

İndi isə MY-avtomatların dili anlayışına baxaq. Tutaq ki, $P = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$ MY- avtomatdır. Onda P avtomatının təyin etdiyi $L(P)$ dili dedikdə F-dən olan hər hansı bir q vəziyyəti və istənilən α maqazin sözü (zənciri) üçün aşağıdakı kimi təyin olunan sözlər çoxluğu başa düşülür:

$$\{w|(q_0, w, Z_0) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (q, \Lambda, \alpha)\}.$$

§6. Türinq maşını

1. Türinq maşınının təsviri. Sonlu avtomatlarda yaddaşın həcminin məhdudluğu bu qurğuların hesablama imkanlarına məhdudiyyətlər qoyur. Praktiki maraqlar kəsb edən situasiyalarda, harada ki, ancaq sonlu çoxluqlarda təyin olunmuş operatorların realizasiyası tələb olunur, bu məhdudiyyətlər o qədər də böyük deyildir. Lakin effektiv hesablama prosedurlarının nəzəri təsvirlərində bu məhdudiyyətlər maneçilik törədir. Ona görə də alqoritmlər nəzəriyyəsində sonsuz «xarici yaddaşla» təmin olunmuş sonlu avtomatlara – Türinq maşınına baxılır.

Türinq maşını sonlu avtomatdan, kvadrat xanalara bölünmüş sonsuz uzunluqlu lentdən və lent başlığından ibarət olan qurğudur.

Türinq maşını şəkil 26-da təsvir olunur. Burada SA sonlu avtomatdır.

Başlanğıc anda lentə giriş sözü yazılır. Bu söz hər hansı bir sonlu Σ əlifbasından olan simvolların sonlu ardıcıllığıdır. Lentin giriş sözü yazılan xanalarından solda və sağda olan və sonsuzluğa qədər olan qalan xanalarda xüsusi boş simvol (Λ) və ya aralıq (probel) simvolu yazılır. Bu simvollar giriş simvolları deyil, lent simvolları adlanırlar. Giriş simvollarından, boş və ya «probel» simvollardan başqa digər lent simvolları da ola bilər. Türinq maşınında B lent başlığı (buna başlıq da deyəcəyik) həmişə hər hansı bir xananın qarşısında dayanır. Bu xana skanirə olunan və ya nəzərdən keçirilən xana adlanır. Başlanğıc olaraq giriş sözünün olduğu xanalardan ən solda olan xana nəzərdən keçirilir. B başlığı sağa və sola hərəkət edə bilir. Bəzi ədəbiyyatlarda SA sonlu avtomatı ilə B lent başlığı bir yerdə götürülür və Türinq maşınının başlığı və ya sonlu idarəedicisi adlandırılır. SA avtomatının girişinə Σ əlifbasından simvollar daxil olur, avtomatın çıxışı isə $\Sigma \times \{S, L, R\}$ kimi təsvir olunur. Burada S, L və R xüsusi simvollardır.

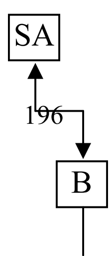
Türinq maşınının işləməsi $t = 1,2,...$ diskret zaman anlarında baş verir. Hər bir anda B lent başlığının qarşısında dayanan xanadan giriş simvolu oxunur və SA avtomatının girişinə daxil edilir. Əgər avtomatın çıxışında həmin anda (a_i, α) cütlüyü əmələ gələrsə, onda avtomatın qarşısında dayanan xanaya əvvəlki simvolun əvəzinə a_i simvolu yazılır. Sonra isə α-dan asılı olaraq B başlığı ya əvvəlki yerdə qalır ($\alpha = S$ olduqda), ya bir mövqe sola ($\alpha = L$ olduqda), ya da ki, bir mövqe sağa ($\alpha = R$ olduqda) hərəkət edir.

Beləliklə, SA avtomatı lent üzrə hərəkət etməklə, onun xanalarını oxuya, onu poza və ora təzə simvol yaza bilər. SA avtomatı ayrılmış yekun vəziyyətlərdə ola bilər. Əgər Türinq maşını bu vəziyyətlərdə olarsa, onda onun işi kəsilir və lentdə yazılmış simvollar aparılmış hesablamanın nəticəsi kimi qəbul olunur.

Ümumiyyətlə, Türinq maşını müasir alqoritmlər nəzəriyyəsində və başqa sahələrdə böyük əhəmiyyətə malik bir vasitədir.

XX əsrin əvvəlində dahi riyaziyyatçı D.Hilbert istənilən riyazi hökmün doğru və yaxud yalan olmasını təyin etmək üçün alqoritmin axtarılması haqqında məsələ qarşıya qoymuşdur. Xüsusi halda, o soruşurdu, tam ədədli birinci tərtib predikatlar hesabında ixtiyari düsturun doğru yaxud yalan olmasını müəyyən etmək üçün üsul vardırmı.

1931-ci ildə K.Hödel qeyri-tamlıq haqqında məşhur teoremini çap etdirdi. O isbat etdi ki, tam ədədli birinci tərtib elə düstur mövcuddur ki, tam ədədlər üzərində birinci tərtib predikatlar hesabında onun doğruluğunu isbat etmək yaxud inkar etmək olmaz.



Şəkil 26.

Predikatlar hesabı «istənilən mümkün hesablamaların» formalaşdırmasında yeganə anlayış deyildir. Həqiqətən də predikatlar hesabı «hesablama» deyil, deklarativ olmaqla «qismən rekursiv funksiyalar» da daxil olmaqla müxtəlif notasiyalarla (şərti yazılı işarələmələr sistemi notasiya adlanır) rəqabət apara bilir.

1936-cı ildə Alan Türinq «istənilən mümkün hesablama» modeli olaraq xüsusi vasitə təklif etmişdir. Bu vasitə və ya model deklarativ deyil «maşınaoxşar» olmuşdur və Türinq maşını adlandırılmışdır. Qeyd edək ki, elektron və hətta elektro-mexaniki hesablama maşınları bu modeldən nisbətən sonra yaradılmışdır.

Müasir dövrdə Türinq maşınına hər şeydən əvvəl «dilləri tanıyan» və ya «problemləri həll edən» vasitə kimi baxılır. Lakin Türinq öz maşınına natural qiymətli funksiyaların hesablayıcısı kimi baxırdı. Onun sxemlərində natural ədədlər vahidlik say sistemində təsvir olunurdu. Belə təsvir halında ədəd eyni simvoldan ibarət olan blok halında təsvir olunur. Məsələn, verilən n ədədi n sayda eyni bir simvoldan ibarət blok şəklində. Türinq maşını hesablama zamanı verilən simvollar blokunun ya uzunluğunu dəyişir, ya da ki, lentin başqa bir hissəsində yeni simvollar bloku yaradır.

Türinq maşınının (TM) formal təsviri sonlu avtomatların və ya maqazin yaddaşlı avtomatların təsviri kimidir və yeddilik şəklindədir:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F),$$

harada ki, bu təsvirin komponentləri aşağıdakı məqsədlə istifadə olunur:

- Q çoxluğu Türinq maşınının sonlu avtomatının vəziyyətlərinin sonlu çoxlüğüdür;

- Σ çoxluğu giriş simvollarının sonlu çoxluğudur;

- Γ çoxluğu lentə yazılan simvollar çoxluğudur (onlara lent simvolları deyəcəyik). Aydındır ki, $\Sigma \subset \Gamma$;

- δ keçid funksiyasıdır. δ keçid funksiyasının arqumenti q vəziyyəti və X lent simvoludur. Əgər $\delta(q, X)$ təyin olunubsa, onda onun qiyməti (p, Y, D) üçlüyü hesab olunur. Bu üçlükdə p kəmiyyəti Q çoxluğundan olan vəziyyətdir. Y kəmiyyəti Γ çoxluğundan olan simvoldur və bu simvol nəzərdən keçirilən xanadakı simvolun yerinə yazılır. D kəmiyyəti isə lent başlığının hərəkətini təyin edir və yuxarıda qeyd edildiyi kimi $\{S, R, L\}$ çoxluğundan olan simvollardan istənilən biri ola bilər;

- q_0 vəziyyəti Q-dən olan vəziyyətdir və TM-in sonlu avtomatının başlanğıc vəziyyətidir;

- B boş simvol və ya aralıq (probel) simvoludur. Bu simvol Γ çoxluğuna daxildir, lakin Σ çoxluğuna daxil deyildir, yəni giriş simvolu deyildir. Başlanğıc halda bu simvol lentin sonlu sayda xanasından (harada ki, bu sonlu sayda xanalarda giriş sözünün simvolları saxlanılır) başqa qalan xanalara yazılmış olur. Xanalara B simvolundan başqa yazılan simvollar qiymətli simvollar adlanır;

- F çoxluğu məqbul və ya yekun vəziyyətlər çoxluğudur və $F \subset Q$.

2. Türinq maşınının konfiqurasiyası. TM-in işinin formal təsviri üçün onun konfiqurasiyalarının təsviri sistemini və ya ani təsvirlərini qurmaq lazımdır. TM sonsuz uzunluqda lentə malik olduğundan belə düşünmək olar ki, TM-in ani təsviri mümkün deyildir. Lakin istənilən sonlu sayda addımdan sonra TM ancaq sonlu sayda xananı nəzərdən keçirə bilir və bu say heç nə ilə məhdudlaşmır. Beləliklə, istənilən ani təsvirdə hələ ki, nəzərdən keçirilməyən xanaların sonsuz prefiksləri (söz önləri) və sonsuz suffiksləri (söz sonları) vardır. Bütün bu xanalar ya aralıqlardan (probellərdən) və ya da bu xanaların sonlu çoxluqlarından olan xanalar giriş simvollarından ibarət olmalıdır. Beləliklə, ani təsvirə ancaq qiymətli simvollardan ibarət olan ən sol və ən sağ xanalar arasında yerləşən xanalar qoşulur. Ayrı-ayrı hallarda, harada ki, başlıq qiymətli simvollardan qabaqda yaxud axırda olan probellərdən birini nəzərdən keçirir, probellərin sonlu sayı da həmçinin ani təsvirə daxil edilir.

Lentdən başqa, sonlu avtomatı və başlığın mövqesini də təsvir etmək lazımdır. Bundan ötrü vəziyyət nəzərdən keçirilən xananın bilavasitə sonunda yerləşdirilir. Vəziyyət lent simvollarından fərqli olan simvollarla işarə olunur.

Beləliklə, ani təsviri göstərmək üçün aşağıdakı kimi zəncir istifadə olunur:

$$X_1 X_2 \ldots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \ldots X_n .$$

Burada q başlığı soldan i-ci xananı nəzərdən keçirən TM-in vəziyyətidir, $X_1 X_2 \ldots X_n$ isə sol və sağ kənar qiymətli simvollar arası lent hissəsini təmsil edir. $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ Türinq maşınının keçidi $\underset{M}{\vdash}$ münasibəti və ya sadəcə olaraq $\vdash$ münasibəti vasitəsilə təsvir olunur (bu münasibət MY-avtomatlarda istifadə olunan münasibətdir). Bir qayda olaraq, sıfırları və ya M Türinq maşınının bir neçə keçidlərini göstərmək üçün və ya $\overset{*}{\underset{M}{\vdash}}$ $\overset{*}{\vdash}$ münasibətindən istifadə olunur.

Tutaq ki, $\delta(q, X) = (p, Y, L)$, yəni başlıq sola sürüşür. Onda

$$X_1 X_2 \ldots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \ldots X_n \underset{M}{\vdash} X_1 X_2 \ldots X_{i-2} p X_{i-1} Y X_{i+1} \ldots X_n .$$

Aydındır ki, bu keçid q vəziyyətinin p vəziyyətinə, X simvolunun Y simvoluna dəyişilməsinə və lent başlığının $i-1$ saylı xanaya keçirilməsinə səbəb olur. Burada iki əhəmiyyətli istisna mövcuddur.

1. Əgər $i=1$ olarsa, onda M Türinq maşını X_1 simvolundan soldakı aralığın (probelin) üzərinə gəlir. Bu halda

$$qX_1X_2...X_n \vdash_{\mathrm{M}} pBYX_2...X_n .$$

2. Əgər $i=n$ və $Y=B$ olarsa, onda X_n -i əvəz edən B simvolu sağda olan probellərə qoşulur və növbəti ani təsvirdə yazılmır. Beləliklə,

$$X_1X_2...X_{n-1}qX_n \vdash_{\mathrm{M}} X_1X_2...X_{n-2}pX_{n-1} .$$

İndi fərz edək ki, $\delta(q,X)=(p,Y,R)$ yəni, başlıq sağa sürüşür. Onda

$$X_1X_2...X_{i-1}qX_iX_{i+1}...X_n \vdash_{\mathrm{M}} X_1X_2...X_{i-1}YpX_{i+1}...X_n .$$

Bu halda da iki əhəmiyyətli istisna mövcuddur.

1. Əgər $i=n$ və $(i+1)$-ci xana aralıq simvolundan ibarətdirsə, onda

$$X_1X_2...X_{n-1}qX_n \vdash_{\mathrm{M}} X_1X_2...X_{n-1}YpB .$$

2. Əgər $i=1$ və $Y=B$ olarsa, onda B simvolu X_1 simvolunun yerinə yazılır, sonsuz sayda probellər ardıcıllığına birləşir və ani təsvirdə buraxılır. Beləliklə,

$$qX_1X_2...X_n \vdash_{\mathrm{M}} pX_2...X_n .$$

3. Türinq maşınlarının verilməsi üsulları. Türinq maşınlarının verilməsi üçün keçid cədvəlləri və keçid diaqramları üsulu istifadə olunur.

$M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,B,F)$ Türinq maşınının keçid cədvəlində Q vəziyyətlər çoxluğundan olan hər vəziyyətə bir sətr, Γ lent simvolları çoxluğunun hər bir simvoluna isə bir sütun uyğun gəlir. İstənilən $q\in Q$ və $X\in\Gamma$ cütü üçün uyğun sətrlə uyğun sütunun kəsişməsində δ keçid funksiyasının $\delta(q,X)$-ə uyğun üçlüyü yazılır. Bu üçlük (p,Y,D) şəklində olur.

Türinq maşınının cədvəli onun fəaliyyəti üçün proqram hesab olunur.

Nümunə 1.

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0,1\}, \{0,1, X, Y, B\}, \delta, q_0, B, \{q_4\})$$

Türinq maşınına baxaq. Bu maşının keçid cədvəlinə nümunə olaraq şəkil 27-də verilən keçid cədvəlini göstərmək olar.

Türinq maşınının keçid diaqramları üsulu ilə verilməsi onların keçidlərinin qraflar vasitəsilə təsviridir. Keçid diaqramları düyün nöqtələrindən-təpələrdən ibarətdir və bu təpələr sonlu avtomatlarda və MY-avtomatlarda olduğu kimi TM-in vəziyyətlərinə uyğundur. q vəziyyətini p vəziyyəti ilə birləşdirən qövs (ox) üzərində bir və ya bir neçə X/YD şəklində elementlər qeyd olunur, harada ki, X və Y lent simvolları, D isə istiqamətdir. İstiqamət kimi L və R-lərin əvəzinə uyğun olaraq $\leftarrow$ və $\rightarrow$ simvolları istifadə olunur (ancaq L və R istiqamətləri halına baxacağıq). Beləliklə, əgər $\delta(q, X) = (p, Y, D)$ olarsa, onda q-dən p-yə aparan qövs üzərində X/YD yazılır. Keçid diaqramının başlanğıc vəziyyəti üzərində «başlanğıc» sözü yazılmış və bu vəziyyətə istiqamətlənmiş oxla göstərilir. Məqbul və ya yekun vəziyyətlər ikiqat dairələrlə, qalan vəziyyətlər isə adi dairələrlə əhatə olunurlar. B simvolunu aralıq (probel) simvolu hesab edəcəyik.

Vəziyyət	0	1	X	Y	B
q_0	(q_1, X, R)	-	-	(q_3, Y, R)	-
q_1	$(q_1, 0, R)$	(q_2, Y, L)	-	(q_1, Y, R)	-
q_2	$(q_2, 0, L)$	-	(q_0, X, R)	(q_2, Y, L)	-
q_3	-	-	-	(q_3, Y, R)	(q_4, B, R)
q_4	-	-	-	-	-

Şəkil 27.

Nümunə 2. Şəkil 27-də keçid cədvəli verilən və nümunə 1-də formal təsvir olunan TM-ə baxaq. Bu TM-in keçid diaqramını şəkil 28-də olduğu kimi təsvir etmək olar.

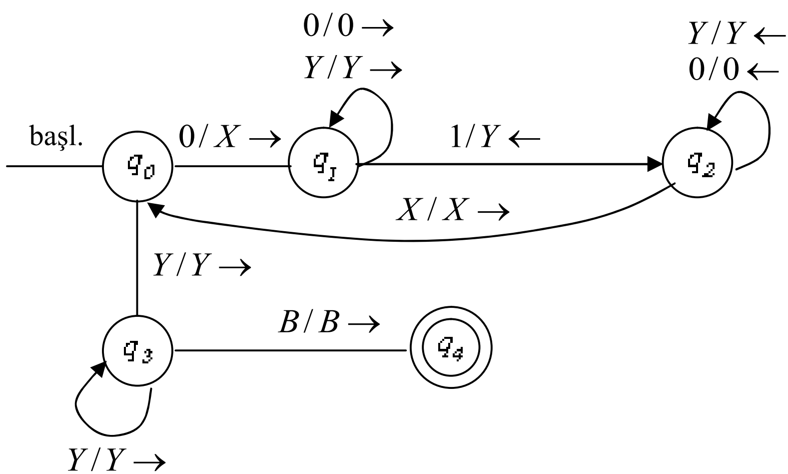
Nümunə 3. Kəsik fərq funksiyasını hesablayan Türinq maşınını qurmalı.

Kəsik fərqi hesablayan Türinq maşını aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$M = (\{q_0, q_1, ..., q_6\}, \{0,1\}, \{0,1,B\}, \delta, q_0, B) .$$

Axtarılan M Türinq maşınında məqbul yaxud yekun vəziyyət nəzərdə tutulmur. M Türinq maşını 0^m10^n sözünün (yəni m sayda 0, sonra 1 və sonra n sayda 0 simvolundan ibarət olan söz) yazıldığı lentdən işləməyə başlayır. İşin sonunda hər iki tərəfdən probellərlə əhatə olunan $m \perp n$ sayda 0 simvolundan ibarət olan lent alınır.

Axtarılan M Türinq maşınının keçid cədvəli şəkil 29-da, keçid diaqramı isə şəkil 30-da verilir.



Şəkil 28.

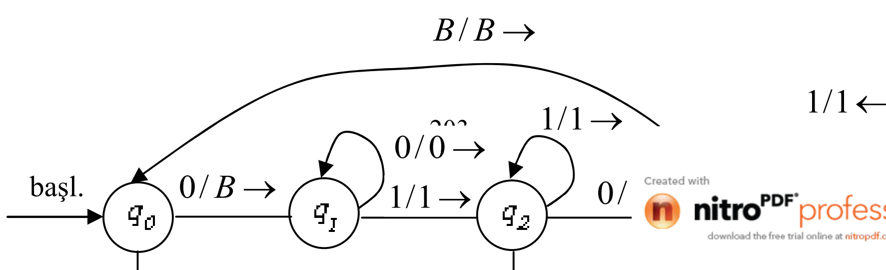
Vəziyyət	0	1	B
q_0	(q_1, B, R)	(q_5, B, R)	-
q_1	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	-
q_2	$(q_3, 1, L)$	$(q_2, 1, R)$	(q_4, B, L)
q_3	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	(q_0, B, R)
q_4	$(q_4, 0, L)$	(q_4, B, L)	$(q_6, 0, R)$
q_5	(q_5, B, R)	(q_5, B, R)	(q_6, B, R)
q_6	-	-	-

Şəkil 29.

M maşını qalan 0 simvollarından ən soldakını tapır və onu probellə əvəz edir. Sonra o 1 simvoluna qədər sağa hərəkət edir. 1 simvolunu tapdıqdan sonra 0 simvolu əmələ gələnədək sağa hərəkətini davam etdirir. 0 simvolunu 1 simvolu ilə əvəzləyir. Sonra o təzədən sola hərəkət edərək ən sol 0 simvolunu tapır və fəaliyyətini yuxarıdakı kimi təkrar-təkrar yerinə yetirir. Təkrarlama aşağıdakı hallardan biri halında sona yetir.

1. Sağdan 0 simvolunu axtardıqda aralıq simvolu (probel) rast gəlinir. Bu o deməkdir ki, 0^n-də bütün sıfırlar 1-lə əvəzlənib və 0^m-də isə $n+1$ sıfır aralıq simvolu ilə əvəzlənib. Onda M maşını $n+1$ sayda vahidi aralıq simvolu ilə əvəzləyir və sıfır simvolu əlavə etməklə lentdə $m-n$ sıfır saxlayır. Bu halda $m \geq n$ olduğundan $m-n = m \perp n$.

2. M maşını dövrə başladıqda, əvəzinə aralıq simvolu yazmaq üçün 0 simvolu tapmır, belə ki, artıq m sayda 0 simvolu B simvoluna əvəzlənib. Bu o deməkdir ki, $n \geq m$ və $m \perp n = 0$. Bu halda M maşını qalan bütün 1 və 0 simvollarını B aralıq simvolu ilə əvəzləyir və işini boş lentlə qurtarır.



Şəkil 30.

Qurulan M Türinq maşını $q_0, q_1, ..., q_6$ vəziyyətlərində aşağıdakıları yerinə yetirir.

q_0 *vəziyyəti.* Bu vəziyyət dövrü başlayır və lazım olduqda onu yekunlaşdırır. Əgər M maşını 0 simvolunu nəzərdən keçirirsə, dövr davam etməlidir: 0 simvolu B aralıq simvolu ilə əvəzlənir, başlıq sağa sürüşür və M maşını q_1 vəziyyətinə keçir. Əgər 1 simvolu nəzərdən keçirilirsə onda lenti boşaltmaq üçün q_5 vəziyyətinə keçilir.

q_1 *vəziyyəti.* Bu vəziyyət 1 simvolunu tapmaq üçün 0 simvollarından ibarət başlanğıc bloku buraxır. 1 simvolunu tapan kimi q_2 vəziyyətinə keçilir.

q_2 *vəziyyəti.* Bu vəziyyətdə M maşını 1 simvollarından ibarət bloku 0 simvolu əmələ gələnə kimi buraxmaq üçün sağa sürüşür. Sonra 0 simvolu 1 simvoluna dəyişir, başlıq sola sürüşür və q_3 vəziyyətinə keçilir. Lakin, mümkündür ki, 1 simvollarından ibarət blokdan sonra 0 simvolu qalmasın. Onda q_2 vəziyyətində M maşını B aralıq simvoluna rast gəlir. Onda yuxarıda təsvir olunan hal 1 rast gəlinir. Bu zaman M maşını q_4 vəziyyətinə keçir.

q_3 *vəziyyəti*. Bu vəziyyətdə M maşınının başlığı aralıq simvolu rast gələnə kimi 0 və 1 simvollarını buraxmaqla sola hərəkət edir. Sonra başlıq sağa sürüşür, q_0 vəziyyətinə keçir və, beləliklə, yeni dövr başlayır.

q_4 *vəziyyəti*. Bu vəziyyətə gəldikdə hesab olunur ki, çıxma əməliyyatı qurtarmışdır, lakin birinci blokdan bir 0 simvolu artıq olaraq B aralıq simvolu ilə əvəzlənmişdir. M maşınının başlığı B aralıq simvoluna rast gələnədək bütün 1 simvollarını B simvoluna çevirməklə sola sürüşür. Son simvol 0 simvolu ilə əvəzlənir və M maşını q_6 vəziyyətinə keçir və dayanır.

q_5 *vəziyyəti.* Bu vəziyyətə M maşını q_0 vəziyyətindən gəlir və bu zaman hesab olunur ki, birinci blokda bütün 0 simvolları aralıq simvolu ilə əvəz olunub. Yuxarıda təsvir olunan hal 2-yə görə kəsik fərq sıfra bərabərdir. Odur ki, M maşını bütün 0 və 1 simvollarını B aralıq simvolu ilə əvəzləyir və nəhayət q_6 vəziyyətinə keçir.

q_6 *vəziyyəti*. Bu vəziyyət M Türinq maşınının dayanmaq vəziyyətidir.

4. Türinq maşınının dili. Türinq maşınının dili tanıması intuitiv olaraq təsvir olunur. Giriş sözü (zənciri) lentə daxil edilir, yəni sözün simvolları ardıcıl olaraq lentin xanalarına yazılır və başlıq ən sol simvoldan başlayaraq nəzərdən keçirilməyə başlayır. Əgər Türinq maşını nəhayət məqbul vəziyyətlərdən birinə keçərsə, onda giriş qəbul olunur – tanınır, əks halda giriş tanınmır.

Dilin tanınmasının formal təyininə baxaq. Tutaq ki, $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ -Türinq maşınıdır. Onda bu Türinq maşınının $L(M)$ dili dedikdə Σ^*-dan olan sözlər çoxluğu başa düşülür, harada ki, bu sözlər üçün hər hansı bir $p \in F$ və istənilən α və β lent simvolları zənciri halında $q_0 w$ $\alpha p \beta$ olur.

Türinq maşınının tanıdığı dillər rekursiv sadalanan və ya RS-dillər adlanır.

Türinq maşınının daha bir anlayışı onun dayanması anlayışıdır. Bu anlayışa məqbul dayanma və ya yekun dayanma da deyilir.

Əgər Türinq maşını q vəziyyətində X lent simvolunu nəzərdən keçirərsə və bu halda keçid olmazsa, yəni $\delta(q, X)$ təyin olunmayıbsa, onda deyirlər ki, Türinq maşını dayanır. Sonda məqbul vəziyyətdə olub yaxud olmayıb dayanan Türinq maşınının dilinə rekursiv dil deyilir.

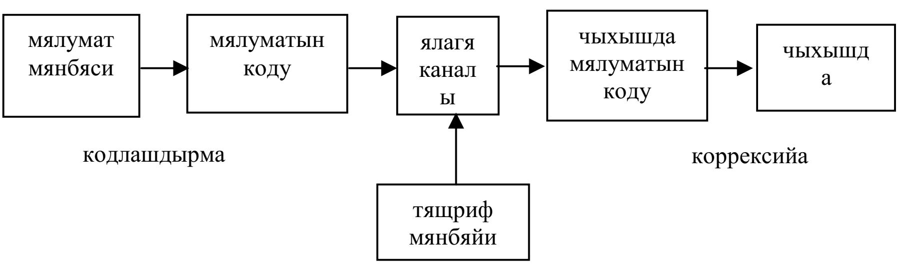
6. Türinq maşınının ümumiləşmələri. Türinq maşınının ümumiləşmələrində sonlu avtomatda yaddaşın olması, lentdə bir neçə cığırın olması nəzərdə tutulur. Bununla yanaşı çoxlentli Türinq maşını da tədqiq olunur. Türinq maşınının növlərinə qeyri-determinik Türinq maşınları, məhdudiyyətli Türinq maşınları, multistekli (bir neçə maqazin yaddaşlı) Türinq maşınları və s. aiddir.

FƏSİL 6. KODLAŞDIRMA NƏZƏRİYYƏSİ

§ 1. Kodlaşdırma nəzəriyyəsi və onun problemləri

1. Məlumat mənbələri və onların təsvir üsulları. Kodlaşdırma məsələləri riyaziyyatda böyük əhəmiyyətə malikdir. Kodlaşdırma obyektlərin öyrənilməsini digər bir obyektlərin öyrənilməsinə gətirməyə imkan verir. Buna nümunə olaraq ədədlərin onluq say sistemində təsvirini, analitik həndsədə koordinatlar üsulu ilə həndəsi təsvirlərin analitik ifadələrlə təsvirini və s. göstərmək olar. Lakin bu nümunələrdə kodlaşdırma vasitəsi köməkçi vasitədir və o tədqiqat predmeti deyildir. İdarəedici sistemlərlə əlaqədar olaraq kodlaşdırma nisbətən başqa xarakterə malikdir. Bununla əlaqədar olaraq kodlaşdırma nəzəriyyəsində sistematik tədqiqata zərurət yaranmışdır.

Kodlaşdırmanın tətbiq olunduğu ən mühüm sahələrdən biri də rabitə sahəsidir. Burada əsas məsələlər şəkil 1 əsasında izlənilə bilər.



Şəkil 1.

Tutaq ki, sonlu sayda simvollardan-hərflərdən ibarət olan $U = \{a_1, ..., a_r\}$ əlifbası verilmişdir. $A = a_{i_1} a_{i_2}, ..., a_{i_n}$ şəklində olan sonlu simvollar ardıcıllığı U üzərində söz adlanır, hansı ki, $a_{i_\ell} \in U$, $\ell = \overline{1, n}$. Tutaq ki, $S(U)$ — U əlifbası üzərində olan bütün sözlər çoxluğudur, S' isə $S(U)$ çoxluğunun hər hansı bir altçoxluğudur.

S' altçoxluğundan olan sözlərə məlumatlar, S' altçoxluğundan olan sözləri yaradan (əmələ gətirən) obyektə isə məlumatların mənbəyi deyilir. Obyekt avtomat, insan və s. ola bilər.

Kodlaşdırma nəzəriyyəsi məsələlərində adətən məlumat mənbələri haqqında əlavə irformasiyalar da istifadə olunur. Bu irformasiyalar məlumat mənbələrinin hər hansı bir qaydada təsviri şəklində olur. Məlumat mənbələrinin aşağıdakı təsvir üsulları mövcuddur:

a) Nəzəri-çoxluq təsvir üsulu. Bu üsul halında güc xarakteristikaları qeyd olunur, məsələn, S' — m uzunluqlu bütün sözlər çoxluğudur və s.;

b) Statistik təsvir üsulu. Bu üsul halında S' çoxluğunun ehtimal xarakteristikaları verilir. Məsələn, $S' = S$ və məlumatlarda $a_1, a_2, ..., a_r$ hərflərinin əmələ gəlməsinin uyğun olaraq $p_1, p_2, ..., p_r$ ehtimalları verilir $(p_1 + p_2 + ... + p_r = 1)$;

c) Məntiqi təsvir. Bu üsul halında S' çoxluğu hər hansı bir «dil» kimi təsvir olunur. Bu «dil» S' çoxluğunun qurulma üsulunu xarakterizə edir. Məsələn, S' hər hansı bir avtomat vasitəsilə yaradıla bilər və s.

2. Kodlaşdırma anlayışı. Tutaq ki, $\mathsf{B} = \{b_1, b_2, ..., b_q\}$ əlifbası verilib. Bu əlifba üzərində olan sözü B ilə işarə edək. Bütün belə sözlər çoxluğunu isə $S(\mathsf{B})$ ilə işarə edək.

Tutaq ki, $S(\mathsf{U})$ çoxluğundan olan hər bir sözü $S(\mathsf{B})$ çoxluğundan olan sözə çevirən F inikası verilmişdir, yəni $B \in S(\mathsf{B})$ və $A \in S(\mathsf{U})$ üçün $B = F(A)$. Bu halda B sözünə A sözünün kodu deyilir, A sözündən onun B koduna keçilməsinə (qurulmasına) isə kodlaşdırma deyilir. Kodlaşdırma nəzəriyyəsində F inikası hər hansı bir alqoritmlə verilir.

Kodlaşdırma nəzəriyyəsində müxtəlif kodlaşdırma üsulları öyrənilir. Bu üsullardan bəzilərinə baxaq.

Əlifba kodlaşdırması. U əlifbasının simvolları (hərfləri) ilə B əlifbası üzərində olan bəzi sözlər arasında aşağıdakı uyğunluğa baxaq:

$$a_1 — B_1,\ a_2 — B_2, ..., a_r — B_r. \qquad (\Sigma)$$

Bu uyğunluq sxem adlanır və Σ ilə işarə olunur. Σ sxemi aşağıdakı qaydada əlifba kodlaşdırması təyin edir: $S'(\mathrm{U})$-dan olan hər bir $A = a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_n}$ sözünə $B = B_{i_1} B_{i_2} ... B_{i_n}$ sözü qarşı qoyulur və bu söz A sözünün kodu adlandırılır. $B_1, B_2, ..., B_r$ sözləri elementar kodlar adlanır.

Müntəzəm kodlaşdırma. Tutaq ki, $\{A_1, A_2, ..., A_s\}$ çoxluğu U əlifbası üzərində cüt-cüt müxtəlif olan m uzunluqlu sözlərin altçoxluğudur. Aydındır ki, $A = A_{i_1} A_{i_2} ... A_{i_n}$ şəklində ayrılışa malik olan A sözü yeganə ayrılışa malikdir. Tutaq ki, $S'(\mathrm{U})$ çoxluğu U əlifbasından yuxarıdakı şəkildə ayrılışa malik olan sözlərin hər hansı bir altçoxluğudur. Aşağıdakı sxemə baxaq:

$$A_1 — B_1,\ A_2 — B_2, ..., A_s — B_s. \qquad (\Sigma)$$

Σ sxemi müntəzəm kodlaşdırmanı aşağıdakı qaydada həyata keçirir: $S'(\mathrm{U})$-dan olan hər bir $A = A_{i_1} A_{i_2} ... A_{i_n}$ sözünə $B = B_{i_1} B_{i_2} ... B_{i_n}$ sözü qarşı qoyulur və bu A sözünün kodu adlanır.

q-lük kodlaşdırma. $\mathrm{B} = \{0, 1, ..., q-1\}$ əlifbasına baxaq, harada ki, $q \geq 2$. Tutaq ki, A ixtiyari çoxluqdur. A çoxluğunun q-lük kodlaşdırılması dedikdə bu çoxluğun elementlərinin B əlifbası üzərində olan sözlərə ixtiyari bir inikası başa düşülür. Xüsusi halda, $q = 2$ olduqda belə kodlaşdırmaya nümunə kimi ikilik say sistemində təsvir göstərilə bilər. Məsələn, natural ədədlər aşağıdakı kimi ikilik kodlaşdırılır: 0 – «0», 1 – «1», 2 – «10», 3 – «11» və i.a.

Tutaq ki, $\mathrm{B} = \{0, 1\}$ əlifbası (bu əlifba binar əlifba adlanır) üzərində $B = \{\upsilon_i, i = 0, 1, ...\}$ elementar kodlar çoxluğu verilib. $\mathrm{A} = \{a_i, i = 0, 1, ...\}$ əlifbasının kodları $a_i - \upsilon_i$ sxemi ilə verilir. Əgər belə əlifba kodlaşdırması halında

$$\upsilon_{i_1} \upsilon_{i_2} ... \upsilon_{i_k} = \upsilon_{j_1} \upsilon_{j_2} ... \upsilon_{j_\ell}$$

bərabərliyindən alınarsa ki, $\ell = k$ və $i_t = j_t$, $t = 1,...,k$, onda $V = \{\upsilon_i, i = 0,1,...\}$ kodları ayrılabilən (bölünəbilən) kodlar adlanır.

Kodlar müxtəlif xüsusiyyətlər əsasında seçilirlər (qurulurlar). Bu xüsusiyyətlərə aşağıdakılar aiddir:

1) Kodların ötürülməsinin asanlığı nöqteyi-nəzərindən. Məsələn, ikilik kodları texniki olaraq asan istifadə etmək olar;

2) Anlaşıqlıq nöqteyi-nəzərindən. Məsələn, maşın kodları prosessorun işi üçün çox əlverişlidir;

3) Rabitə kanalında yüksək ötürmə qabiliyyəti təmin etmək nöqteyi-nəzərindən;

4) Təhriflərə davamlılıq nöqteyi-nəzərindən;

5) Kodlaşdırma alqoritmində müəyyən bir xassələrin əldə edilməsi nöqteyi-nəzərindən (məsələn, kodlaşdırmanın sadəliyi, birqiymətli dekodlaşmanın mümkünlüyü) və s.

4. Rabitə kanalı və məlumatların təhrifi. Rabitə kanalına bir girişdən və bir çıxışdan ibarət olan qurğu kimi baxıla bilər. Kanalın girişinə B kod sözü daxil olur, çıxışda isə B' kod sözü alınır. B' hər hansı bir B' əlifbası üzərində olan sözdür və $B' = f(B)$. İdeal əlaqə kanalı halında $B' = B$ (təhrifsiz kanal halında) və həm də $\mathsf{B}' = \mathsf{B}$ olur.

Təhrif mənbələri rabitə kanalında səhvlər yaradır və bunun da nəticəsində kanalın girişinə daxil olan məlumatla onun çıxışında alınan məlumat arasında fərq yaranır. Bu fərqin əmələ gəlməsi məlumatın təhrif olunması adlanır. Təhrif mənbələrinin təsviri üçün iki üsul istifadə olunur:

a) məntiqi-kombinator təsvir üsulu. Bu üsul ayrı-ayrı təsadüf olunan səhvlərin sayına məhdudiyyətlə bağlıdır;

b) statistik təsvir üsulu. Bu üsul mənbənin ehtimal xarakteristikalarının verilməsi ilə bağlıdır.

4. Məlumatların dekodlaşdırılması. **Rabitə kanalında məlumatlar təhrifə məruz qaldıqda $B' \neq B$ olur. Burada B' rabitə kanalının çıxışında olan məlumatdır.**

Kanalın çıxışında məlumat kodlarının korreksiyası ancaq xüsusi məlumat kodları halında mümkündür. Korreksiya əməliyyatından sonra dekodlaşdırma baş verir. Aydındır ki, dekodlaşdırma heç də bütün kodlar üçün mümkün deyildir. Əgər F^{-1} əks inikası mövcuddursa onda dekodlaşdırma mümkündür. Ümumiyyətlə, dekodlaşdırma koddan uyğun məlumata keçid prosesidir.

§ 2. Birqiymətli dekodlaşdırma

1. Birqiymətli dekodlaşdırma meyarı. U və B əlifbaları üçün aşağıdakı Σ sxemi ilə verilən əlifba kodlaşdırmasına baxaq:

$$a_1 — B_1,\ a_2 — B_2, \ldots, a_r — B_r\ . \qquad (\Sigma)$$

$S'(\mathrm{U}) = S(\mathrm{U})$ götürək, yəni məlumatlar mənbəsi U əlifbasında olan bütün sözləri yaradır (əmələ gətirir). Aydındır ki, əlifba kodlaşdırması $S(\mathrm{U})$ çoxluğunun $S(\mathrm{B})$ çoxluğuna inikasını əmələ gətirir. $S_\Sigma(\mathrm{B})$ ilə $S(\mathrm{U})$ çoxluğunun bu inikasda obrazını işarə edək.

$S(\mathrm{U})$-nun $S_\Sigma(\mathrm{B})$-yə inikası qarşılıqlı birqiymətli olduğu halda dekodlaşdırma mümkündür, yəni B koduna görə ilkin A məlumatını bərpa etmək olar, harada ki, A məlumatının kodu B sözüdür.

Nümunə 1. Tutaq ki, $\mathrm{U} = \{a_1, a_2\}$, $\mathrm{B} = \{b_1, b_2\}$ və əlifba kodlaşmasının sxemi aşağıdakı kimidir:

$$a_1 — b_1,\ a_2 — b_1 b_2 .$$

Tutaq ki, B' və B'' sözləri uyğun olaraq A' və A'' sözlərinin kodlarıdır. Aydındır ki, $A' \neq A''$, onda $B' \neq B''$.

Dekodlaşdırma prosesi aşağıdakı kimi aparılır. $B \in S_\Sigma(\mathrm{B})$ sözü elementar kodlara ayrılır. Qeyd edək ki, B sözündə b_2 hərfinin hər bir daxil olmasında b_1 hərfi də iştirak edir. Bu da bütün $(b_1 b_2)$ cütlərinin ayrılmasına imkan yaradır. B sözündə qalan hissələr b_1 hərflərindən ibarət olar. Əgər B sözündə hər bir $(b_1 b_2)$ cütünü a_2 ilə, qalan b_1 hərflərini a_1 ilə əvəz etsək, onda B kodunun proobrazı olan A sözünü alarıq. Tutaq ki, $B = b_1 b_1 b_2 b_1 b_2 b_1 b_1 b_1 b_2$.

Cütləri ayırdıqdan sonra alarıq: $B = b_1(b_1b_2)(b_1b_2)b_1b_1(b_1b_2)$. Burada b_1-i a_1 ilə, (b_1b_2)-ni a_2 ilə əvəz etsək $A = a_1a_2a_2a_1a_1a_2$ alarıq.

Aydındır ki, əlifba kodlaşdırması ancaq və ancaq o zaman qarşılıqlı birqiymətli olar ki, o, ayrılabilən kodlar vasitəsilə verilsin.

Çoxlu sayda nümunə göstərmək olar ki, əlifba kodlaşması qarşılıqlı birqiymətliliyə malik olmasın. Bununla əlaqədar olaraq belə bir sual ortaya çıxır: əlifba kodlaşdırmasının Σ sxeminə görə onun qarşılıqlı birqiymətlilik xassəsinə malik olmasını müəyyən etmək mümkündürmü. Bu məsələnin həll edilməsinin çətinliyi ondan ibarətdir ki, sonsuz sayda sözləri bilavasitə yoxlamaq lazım gəlir.

Əlifba kodlaşdırmasının qarşılıqlı birqiymətliliyinin ümumi əlamətini verməzdən əvvəl qarşılıqlı birqiymətlilik üçün sadə bir kafi əlamətə baxaq.

Tərif 1. Tutaq ki, B sözü $B = B'B''$ şəklindədir. Onda B' sözü B sözünün əvvəli və ya prefiksi, B'' sözü isə B sözünün sonu adlanır.

Tərif 2. Əgər istənilən i və j üçün $(1 \le i,\ j \le r,\ i \ne j)$ B_i sözü B_j sözünün başlanğıcı (prefiksi) deyildirsə, onda deyirlər ki, Σ sxemi prefiks xassəsinə malikdir.

Aydındır ki, perefiks kod ayrılabilən koddur (əksi ümumiyyətlə desək, doğru deyildir).

Teorem 1. Əgər Σ sxemi prefiks xassəsinə malikdirsə, onda əlifba kodlaşdırması qarşılıqlı birqiymətli olar.

İsbatı. Əksini fərz edək, yəni fərz edək ki, $S_\Sigma(\mathrm{B})$ -dən olan hər hansı bir B sözü iki proobraza malikdir, deməli, həm də iki elementar kodlara parçalanma mövcuddur:

$$B = B_{i_1}B_{i_2}...B_{i_s}, \qquad B = B_{j_1}B_{j_2}...B_{j_t}.$$

Tutaq ki, $B_{i_1} = B_{j_1},...,B_{i_{n-1}} = B_{j_{n-1}}$, $B_{i_n} \ne B_{j_n}$. Bu halda B_{i_n} və B_{j_n} sözlərindən biri digərinin prefiksidir. Bu isə Σ sxeminin prefikslik xassəsinə malik olmasına ziddir. Deməli, prefiks xassəsinə malik Σ sxeminin əmələ gətirdiyi əlifba kodlaşdırması qarşılıqlı birqiymətlidir. □

Asanlıqla göstərmək olar ki, prefikslik şərti qarşılıqlı birqiymətli kodlaşdırma üçün zəruri şərt deyildir. Məsələn, nümunə 1-ə baxmaq olar.

Tutaq ki, $B = b_{i_1} \dots b_{i_n}$ sözü $S(\mathrm{B})$ -dən olan sözdür. $\widetilde{B}$ ilə B sözünün «əks olunması»-nı işarə edək, yəni $\widetilde{B} = b_{i_n} \dots b_{i_1}$. $\widetilde{\Sigma}$ ilə aşağıdakı kodlaşma sxemini işarə edək.

$$a_1 — \widetilde{B}_1,\ a_2 — \widetilde{B}_2, \dots, a_r — \widetilde{B}_r. \qquad (\widetilde{\Sigma})$$

Aydındır ki, Σ və $\widetilde{\Sigma}$ sxemləri ilə təyin olunan əlifba kodlaşdırması eyni vaxtda ya qarşılıqlı birqiymətli olar, ya da ki, qarşılıqlı birqiymətli olmaz. Bu fikir də teorem 1-i aşağıdakı kimi gücləndirməyə imkan verir.

Teorem 2. Əgər ya Σ sxemi, ya da $\widetilde{\Sigma}$ sxemi prefiks xassəsinə malik olarsa, onda Σ sxemi ($\widetilde{\Sigma}$ sxemi) ilə verilən əlifba kodlaşdırması qarşılıqlı birqiymətli olar.

Σ sxeminə malik əlifba kodlaşdırmasına elə nümunə göstərmək olar ki, Σ və $\widetilde{\Sigma}$ prefiks xassəsinə malik olmasın, lakin əlifba kodlaşdırması qarşılıqlı birqiymətli olsun. Bunun üçün aşağıdakı nümunəyə baxaq.

Nümunə 2. Tutaq ki, $\mathrm{U} = \{a_1, a_2, a_3\}$ və $\mathrm{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ əlifbaları verilmişdir. Aşağıdakı Σ kodlaşdırma sxeminə baxaq:

$$a_1 — b_1,\ a_2 — b_1 b_2,\ a_3 — b_3 b_1. \qquad (\Sigma)$$

Aydındır ki, Σ və $\widetilde{\Sigma}$ sxemləri prefiks xassəsinə malik deyildirlər, lakin əlifba kodlaşdırması qarşılıqlı birqiymətlidir. Həqiqətən də, əgər $B \in S_{\Sigma}(\mathrm{B})$ olarsa, onda bu söz birqiymətli olaraq elementar kodlara parçalanır:

- b_2 hərfindən solda bilavasitə b_1 dayanırsa $(b_1 b_2)$ cütünü ayırırıq;
- b_3 hərfindən sağda bilavasitə b_1 dayanırsa $(b_3 b_1)$ cütünü ayırırıq;
- bütün $(b_1 b_2)$ və $(b_3 b_1)$ cütlərini ayırdıqdan sonra ancaq b_1 simvolları qalır.

Bundan sonra hesab edəcəyik ki, Σ sxemində elementar kodlar cüt-cüt müxtəlifdir. Bir sıra işarələmələri daxil edək. $\ell(B)$ ilə B sözünün uzunluğunu, yəni bu sözdə olan simvolların sayını işarə edək. Xüsusi halda, B_i elementar kodunun uzunluğunu $\ell(B_i) = \ell_i$ götürək. L ilə $\ell(B_1 ... B_r)$-i işarə edək, yəni Σ sxeminin «uzunluğunu» işarə edək.

$V = \{\upsilon_0, \upsilon_1, ..., \upsilon_{m-1}\}$ elementar kodlar çoxluğuna baxaq, hansı ki, $m \geq 2$ və υ_i elementar kodları $\mathrm{B} = \{0,1\}$ əlifbası üzərindədir. υ_i $(i = 0,..., m-1)$ kodunun uzunluğunu ℓ_i ilə işarə edək. Tutaq ki,

$$\ell_{\max} = \max_{0 \leq i \leq m-1} \ell_i .$$

Teorem 3. Tutaq ki, $\ell_0, \ell_1, ..., \ell_{m-1}$ - natural ədədlərin ixtiyari yığımıdır $(m \geq 2)$. $\ell(\upsilon_i) = \ell_i,\ i = \overline{0, m-1}$ uzunluqlu $V = \{\upsilon_0, \upsilon_1, ..., \upsilon_{m-1}\}$ ayrılabilən kodunun mövcud olması üçün zəruri və kafi şərt aşağıdakı bərabərsizliyin ödənməsidir

$$\sum_{i=0}^{m-1} 2^{-\ell_i} \leq 1 .$$

İsbatı. Zərurilik. İxtiyari $V = \{\upsilon_0, \upsilon_1, ..., \upsilon_{m-1}\}$ kodu üçün

$$h_V(x) = \sum_{i=0}^{m-1} x^{-\ell(\upsilon_i)}$$

funksiyasını daxil edək.

V kodunun n sayda sözündən ixtiyari ardıcıllıqla düzəldilmiş sözlər çoxluğuna baxaq (mümkündür ki, üst-üstə düşən, məsələn,

$$\left. \underbrace{\upsilon_0\upsilon_0 ... \upsilon_0}_{n \text{ söz}},\ \underbrace{\upsilon_0\upsilon_0 ... \upsilon_1}_{n \text{ söz}}, ..., \underbrace{\upsilon_0\upsilon_0 ... \upsilon_{m-1}}_{n \text{ söz}}, ..., \underbrace{\upsilon_{m-1}\upsilon_{m-1} ... \upsilon_{m-1}}_{n \text{ söz}} \right).$$

Bu kodlar çoxluğunu $V^{(n)}$ ilə işarə edək. Onda

$$V^{(n)} = \{\omega_i \,|\, i = \overline{0, m^n - 1},\ \omega_i = \upsilon_{i_1}\upsilon_{i_2}...\upsilon_{i_n},\ i_1, i_2, ..., i_n \in \{0, 1, ..., m-1\} \text{ və}$$

$$i = \sum_{j=1}^{n} i_j m^{n-j}\}.$$

$V^{(n)}$ çoxluğunun elementlərinə nümunə olaraq aşağıdakıları göstərmək olar:

$$\omega_0 = \upsilon_0\upsilon_0...\upsilon_0,\ \omega_1 = \upsilon_0\upsilon_0...\upsilon_1, ...$$

$$..., \omega_{m-1} = \upsilon_0\upsilon_0...\upsilon_{m-1}, ..., \omega_{m^n-1} = \upsilon_{m-1}\upsilon_{m-1}...\upsilon_{m-1}$$

ω_i sözünün uzunluğunu $\lambda(\omega_i)$ ilə işarə edək. Aydındır ki,

$$\lambda(\omega_i) = \ell(\upsilon_{i_1}) + \ell(\upsilon_{i_2}) + ... + \ell(\upsilon_{i_n}).$$

Asanlıqla göstərmək olar ki,

$$h_{V^{(n)}}(x) = [h_V(x)]^n.$$

İndi fərz edək ki, $V = \{\upsilon_0, \upsilon_1, ..., \upsilon_{m-1}\}$ ayrılabilən koddur və $\ell_i = \ell_i(\upsilon_i)$. M_i ilə $V^{(n)}$ kodunda i uzunluğuna malik sözlərin sayını işarə edək. Aydındır ki,

$$h_{V^{(n)}}(2) = \sum_{i=0}^{m^n-1} 2^{-\ell(\omega_i)} = \sum_{i=1}^{n\ell_{\max}} M_i 2^{-i}$$

(burada $n\ell_{\max} - V^{(n)}$ kodunda ən uzun kodun uzunluğudur).

Kod ayrılabilən olduğundan $V^{(n)}$ kodunun bütün sözləri müxtəlifdir və, beləliklə, 1-dən $n\ell_{\max}$-a qədər bütün i-lər üçün $M_i \le 2^i$ (burada 2^i 0 və 1-dən ibarət i uzunluqlu bütün mümkün yığımların sayıdır). Bunu və son bərabərliyi istifadə etməklə alarıq:

$$\left(\sum_{i=0}^{m-1} 2^{-\ell_i}\right)^n = \sum_{i=1}^{n\ell_{\max}} M_i 2^{-i} \le \sum_{i=1}^{n\ell_{\max}} 1 = n\ell_{\max}.$$

Buradan da

$$\sum_{i=0}^{m-1} 2^{-\ell_i} \le \sqrt[n]{n\ell_{\max}}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\ell_{\max}} = 1$ olduğundan alırıq: $\sum\limits_{i=0}^{m-1} 2^{-\ell_i} \le 1$.

Kafilik. Tutaq ki, $\ell_0, \ell_1, ..., \ell_{m-1}$ - natural ədədlərin ixtiyari yığımıdır $(m \ge 2)$ və

$$\sum_{i=0}^{m-1} 2^{-\ell_i} \le 1 \qquad (1)$$

şərtini ödəyir. Göstərək ki, $\ell(\upsilon_i) = \ell_i$, $i = \overline{0, m-1}$ uzunluqlu $V = \{\upsilon_0, \upsilon_1, ..., \upsilon_{m-1}\}$ kodu mövcuddur. Ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, $\ell_0 \le \ell_1 \le ... \le \ell_{m-1}$. Aşağıdakı $q_0, ..., q_{m-1}$ ədədlərinə baxaq: $q_0 = 0$,

$$q_i = \sum_{j=0}^{i-1} 2^{-\ell_j},\ i = \overline{1, m-1}.$$

Aydındır ki, $0 \le q_i < 1$, belə ki, (1) qüvvədədir. q_i yeganə təsvirə malikdir:

$$q_i = \sum_{j=1}^{\ell_i} c_j^{(i)} 2^{-j},$$

hansı ki, $c_j^{(i)} \in \{0,1\}$.

$V = \{\upsilon_0, \upsilon_1, ..., \upsilon_{m-1}\}$ koduna baxaq, hansı ki,

$$\upsilon_i = c_1^{(i)} c_2^{(i)} ... c_{\ell_i}^{(i)}.$$

$h > i$ olduğundan $\ell_h \ge \ell_i$ və $q_h \ge q_i + 2^{-\ell_i}$. Odur ki, kod prefiks koddur və, beləliklə, ayrılabilən koddur. · □

Nümunə 3. $\ell_0 = 2, \ell_1 = 2, \ell_2 = 3, \ell_3 = 4$ uzunluqlu $V = \{\upsilon_0, \upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3\}$ prefiks kodunu qurmalı.

Aydındır ki,

$$\sum_{i=0}^{3} 2^{-\ell_i} = 1/2^2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 =$$
$$= 1/4 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 11/16 < 1.$$

Odur ki, teorem 3-ə görə axtarılan kodu qurmaq olar. Əvvəlcə q_0, q_1, q_2, q_3 ədədlərini tapaq:

$$q_0 = 0,\ q_1 = 1/2^2,\ q_2 = 1/2^2 + 1/2^2 = 1/2,\ q_3 = 1/2 + 1/2^3 .$$

Bu halda

$$c_1^{(0)} = 0,\ c_2^{(0)} = 0;\ c_1^{(1)} = 0,\ c_2^{(1)} = 1;\ c_1^{(2)} = 1,\ c_2^{(2)} = 0,\ c_3^{(2)} = 0;$$

$$c_1^{(3)} = 1,\ c_2^{(3)} = 0,\ c_3^{(3)} = 1,\ c_4^{(3)} = 0 .$$

Beləliklə, $\upsilon_0 = 00,\ \upsilon_1 = 01,\ \upsilon_2 = 100,\ \upsilon_3 = 1010$.

Deməli, $V = \{00, 01, 100, 1010\}$.

Nəticə 1. İstənilən $V = \{\upsilon_0, \upsilon_1, ..., \upsilon_{m-1}\}$ ayrılabilən kodu üçün bu kodun kod sözlərinin uzunluqları ilə eyni uzunluqlara malik olan kod sözləri yığımından ibarət olan prefiks kod mövcuddur.

(1) bərabərsizliyi ayrılabilən kodlar üçün Kraft-Makmillan bərabərsizliyi adlanır.

Nümunə 4. a) Verilən $V = \{01, 10, 100, 111, 011\}$ ayrılabilən kodunun kod sözləri uzunluqları ilə eyni uzunluqlu kod sözləri yığımından ibarət olan prefiks kodu qurmalı.

Aydındır ki, $\ell_0 = 2,\ \ell_1 = 2, \ell_2 = 3, \ell_3 = 3,\ \ell_4 = 3$. Kodun ayrılabilən kod olmasını yoxlayaq:

$$2^{-\ell_0} + 2^{-\ell_1} + 2^{-\ell_2} + 2^{-\ell_3} + 2^{-\ell_4} = 1/2 + 3/8 = 7/8 \le 1 .$$

Deməli, kod ayrılabilən koddur. q_0, q_1, q_2, q_3 və q_4 kəmiyyətlərini hesablayaq:

$$q_0 = 0, q_1 = 1/2^2, q_2 = 1/2^2 + 1/2^2 = 1/2 ,$$

$$q_3 = 1/2 + 1/8,\ q_4 = 1/2 + 1/8 + 1/8 = 1/2 + 1/4 .$$

Beləliklə, $\upsilon_0 = 00,\ \upsilon_1 = 01,\ \upsilon_2 = 100,\ \upsilon_3 = 101,\ \upsilon_4 = 110$. Buradan da prefiks kod aşağıdakı kimi olar:

$$V_1 = \{00, 01, 100, 101, 110\}$$

b) $V = \{10, 101, 111, 1011\}$ ayrılabilən kodunun kod sözləri uzunluqları ilə eyni uzunluqlu kod sözləri yığımından ibarət olan prefiks kodu qurmalı.

Əvvəlcə verilən kodun ayrılabilən olmasını yoxlayaq.

$$2^{-2}+2^{-3}+2^{-3}+2^{-4}=1/4+1/4+1/16=9/16<1.$$

Deməli, kod ayrılabiləndir. Aydındır ki, $\ell_0=2,\quad \ell_1=3,$ $\ell_2=3,\quad \ell_3=4$.

$$q_0=0,\ q_1=2^{-2},q_2=2^{-2}+2^{-3},\ q_3=2^{-2}+2^{-3}+2^{-3}=2^{-1}.$$

Buradan da alırıq: $\upsilon_0=00,\upsilon_1=010,\ \upsilon_2=011,\upsilon_3=1000$.

Deməli, axtarılan prefiks kod: $V_1=\{00,010,011,1000\}$ kodudur.

Tutaq ki, $B=\{0,1\}$ əlifbası üzərində olan bütün sözlər çoxluğu B^* ilə, V üzərində olan bütün sözlər çoxluğu V^* ilə işarə olunub və $\vec{V}^*$ isə V^*-dan olan bütün sözlərin əvvəli olan sözlər çoxluğudur. Əgər $\vec{V}^*=B^*$ olarsa, onda B əlifbası üzərində olan V koduna tam kod deyilir.

Teorem 4. $V=\{\upsilon_0,\upsilon_1,...,\upsilon_{m-1}\}$ ayrılabilən kodunun tam kod olması üçün zəruri və kafi şərt onun prefiks kod olması və aşağıdakı şərtin ödənməsidir:

$$\sum_{i=0}^{m-1}2^{-\ell(\upsilon_i)}=1.$$

Nümunə 5. $V_1=\{00,01,100,101,110,111\}$ kodu tam koddur, belə ki,

$$\sum_{i=0}^{5}2^{-\ell(\upsilon_i)}=2^{-2}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-3}+2^{-3}+2^{-3}=1.$$

$V_2=\{00,01,100,101,110\}$ kodu tam deyildir. Çünki

$$2^{-2}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-3}+2^{-3}=1/2+3/8=7/8<1.$$

Tutaq ki,

$$B_i=\beta' B_{i_1}...B_{i_w}\beta''. \tag{2}$$

B_i kodunun trivial olmayan ayrılışıdır, yəni $B_i=B_i$ ($\beta'=\beta''=\Lambda$, Λ-boş sözdür – heç bir simvola malik deyildir) ayrılışından fərqli ayrılışdır. Bu ayrılışda hesab olunur ki, aşağıdakılar ödənir:

a) β' elementar kodla qurtara bilməz;

b) β'' başlanğıc (prefiks) kimi elementar kodu özündə saxlamır;

(2)-də w sıfırdan böyük və ya ona bərabər olan tam ədəddir. (2)-nin mənası ondan ibarətdir ki, B_i elementar kodunda hər hansı bir β' başlanğıcını və hər hansı bir β'' sonunu atmaq olar ki, qalan hissə elementar kodlara parçalansın.

Aydındır ki, hər bir B_i üçün (2) şəkilli ayrılış sonludur. Bütün i-lər və B_i-nin bütün ayrılışları halında w ədədləri arasında ən böyüyünü W ilə işarə edək: $W = \max w$.

Nümunə 6. Tutaq ki, $\mathsf{U} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $\mathsf{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ və Σ kodlaşma sxemi aşağıdakı kimidir:

$$a_1 — b_1b_2,\ a_2 — b_1b_3b_2,\ a_3 — b_2b_3, \qquad (\Sigma)$$

$$a_4 — b_1b_2b_1b_3,\ \ a_5 — b_2b_1b_2b_2b_3.$$

$2 \le \ell_2 < 6$ olduğundan $W < 3$. Digər tərəfdən, $B_5 = b_2b_1b_2b_2b_3 = = b_2B_1B_3$, odur ki, $W = 2$.

U əlifbası üzərində olan və uzunluğu N ədədini aşmayan bütün sözlər çoxluğunu $S^N(\mathsf{U})$ ilə işarə edək. Aydındır ki, $S^N(\mathsf{U})$ sonlu çoxluqdur və gücü $r + r^2 + ... + r^N$-ə bərabərdir.

Əlifba kodlaşdırmasının qarşılıqlı birqiymətlilik meyarı aşağıdakı kimidir:

Teorem 5. Σ sxemli hər bir əlifba kodlaşdırması üçün elə N_0 ədədi mövcuddur ki, əlifba kodlaşdırmasının qarşılıqlı birqiymətlilik problemi $S^{N_0}(\mathsf{U})$ sonlu çoxluğunun kodlaşdırılmasının analoji probleminə gəlir və

$$N_0 \le \left[(W+1)(L-r+2)/2\right].$$

Burada $[x]$ ilə x ədədinin tam hissəsi, yəni x ədədini aşmayan ən böyük tam ədəd işarə olunmuşdur.

2. Birqiymətli kodlaşdırmanın tanınması alqoritmi. Bu alqoritm qraflar nəzəriyyəsi dilində şərh olunur. Tutaq ki, Σ sxemli kodlaşdırma aşağıdakı kimidir:

$$a_1 - B_1,\, a_2 - B_2, ..., a_r - B_r. \qquad (\Sigma)$$

Hər bir B_i elementar kodu üçün

$$B_i = \beta' B_{i_1} ... B_{i_\omega} \beta'' \qquad (3)$$

şəklində bütün trivial olmayan təsvirlərə baxaq.

B_0 ilə aşağıdakıları özündə saxlayan çoxluğu işarə edək:

a) Λ boş sözünü;

b) (3) şəklində həm sözönü (prefiks), həm də ki, sözsonu kimi rast gələn β sözünü.

B_0-dan olan hər bir sözə müstəvi üzərində bir nöqtə qarşı qoyaq.

Tutaq ki, $\beta', \beta'' \in \mathrm{B}_0$. Aşağıdakı şəkildə bütün ayrılışlara baxaq:

$$B_i = \beta' B_{i_1} ... B_{i_\omega} \beta''.$$

Hər bir belə ayrılış üçün β' və β'' sözlərinə uyğun olan nöqtələri istiqamətlənmiş (β'-dən β''-ə) parça ilə birləşdirək və həmin parçanın üzərinə $B_{i_1} ... B_{i_\omega}$ yazaq. Bu qayda ilə alınan qrafı $\Gamma(\Sigma)$ ilə işarə edək.

Teorem 6. Σ sxemli əlifba kodlaşdırmasının qarşılıqlı birqiymətlilik xassəsinə malik olmaması üçün zəruri və kafi şərt $\Gamma(\Sigma)$ qrafının Λ təpəsindən keçən oriyentasiyalı dövrədən ibarət olmasıdır.

Nümunə 7. Tutaq ki, $\mathrm{U} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $\mathrm{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Aşağıdakı sxemli əlifba kodlaşdırmasına baxaq.

$$a_1 - b_1 b_2,\, a_2 - b_1 b_3 b_2,\, a_3 - b_2 b_3,\, a_4 - b_1 b_2 b_1 b_3,\, a_5 - b_2 b_1 b_2 b_2 b_3. \quad (\Sigma)$$

Aydındır ki, aşağıdakı trivial olmayan ayrılışlar mövcuddur:

$$B_1 = (b_1)(b_2); \quad B_2 = (b_1)(b_3 b_2) = (b_1 b_3)(b_2); \quad B_3 = (b_2)(b_3);$$

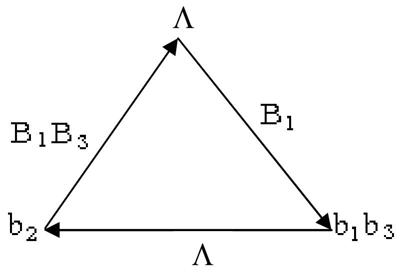
$$B_4 = (b_1)(b_2 b_1 b_3) = (b_1 b_2)(b_1 b_3) = (b_1 b_2 b_1)(b_3);$$

$$B_5 = (b_2)(b_1b_2b_2b_3) = (b_2)(b_1b_2)(b_2b_3) = (b_2b_1)(b_2b_2b_3) =$$
$$= (b_2b_1b_2)(b_2b_3) = (b_2b_1b_2b_2)(b_3)\,.$$

Deməli,

$$B_2 = (b_1b_3)(b_2)\,,\quad B_4 = (b_1b_2)(b_1b_3) = B_1(b_1b_3)\,,$$
$$B_5 = (b_2)(b_1b_2)(b_2b_3) = (b_2)B_1B_3\,.$$

Buradan da $B_0 = \{\Lambda, b_2, b_1b_3\}$ alınır. Bu çoxluq əsasında qurulan $\Gamma(\Sigma)$ qrafı şəkil 1-dəki kimidir. Göründüyü kimi $\Gamma(\Sigma)$ -da



Şəkil 1.

oriyentasiyalı dövrə olduğundan (Σ) kodlaşma sxemi qarşılıqlı birqiymətli deyildir. Bu dövrə $B = B_1b_1b_3b_2B_1B_3$ sözünü əmələ gətirir və bus söz aşağıdakı iki proobraza malikdir:

$$B = (B_1b_1b_3)(b_2B_1B_3)\,, \text{ yəni } A' = a_4a_5$$

və

$$B = B_1(b_1b_3b_2)B_1B_3\,, \text{ yəni } A'' = a_1a_2a_1a_3\,.$$

Nümunə 8. Tutaq ki, $U = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{b_1, b_2\}$.

Aşağıdakı Σ kodlaşdırma sxeminə baxaq:

$$a_1 - b_1,\ a_2 - b_2b_1,\ a_3 - b_1b_2b_2,\ a_4 - b_2b_1b_2b_2,\ a_5 = b_2b_2b_2b_2\,. \qquad (\Sigma)$$

Aşağıdakı trivial olmayan ayrılışlar mövcuddur:

$$B_2 = (b_2)b_1 = b_2B_1\,,$$

$$B_3 = (b_1)(b_2b_2) = B_1(b_2b_2),\quad B_3 = (b_1b_2)(b_2)\,,$$

$$B_4 = (b_2)(b_1)(b_2b_2) = (b_2)B_1(b_2b_2),\quad B_4 = (b_2)(b_1b_2b_2) = b_2B_3\,,$$

$$B_4 = (b_2b_1)(b_2b_2) = B_2(b_2b_2), \quad B_4 = (b_2b_1b_2)(b_2),$$

$$B_5 = (b_2)(b_2b_2b_2) = (b_2b_2)(b_2b_2) = (b_2b_2b_2)(b_2).$$

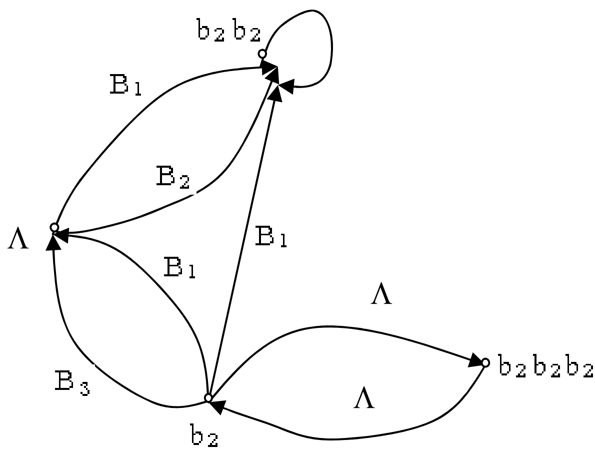
Deməli,

$$B_2 = b_2B_1; \; B_3 = B_1(b_2b_2);$$

$$B_4 = (b_2)B_1(b_2b_2); \; B_4 = b_2B_3; \; B_4 = B_2(b_2b_2);$$

$$B_5 = (b_2)(b_2b_2b_2) = (b_2b_2)(b_2b_2) = (b_2b_2b_2)(b_2).$$

Buradan da, $B_0 = \{\Lambda, b_2, b_2b_2, b_2b_2b_2\}$. Beləliklə, şəkil 2-də təsvir olunan və Λ-dan keçən oriyentasiyalı dövrəyə malik olmayan $\Gamma(\Sigma)$ qrafını alırıq. Odur ki, Σ əlifba kodlaşdırması qarşılıqlı birqiymətlilik xassəsinə malikdir.



Şəkil 2.

3. Qarşılıqlı birqiymətli kodların xassəsi. Tutaq ki, Σ sxemli əlifba kodlaşdırması verilmişdir:

$$a_1 - B_1, \; a_2 - B_2, ..., a_r - B_r.$$

B əlifbasının elementlərinin sayını q ilə işarə edək. Tutaq ki, $\ell_i = \ell(B_i),\ i = \overline{1,r}$.

Teorem 7. (Makmillan bərabərsizliyi). Əgər Σ sxemli əlifba kodlaşdırması qarşılıqlı birqiymətlilik xassəsinə malikdirsə, onda

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{q^{\ell_i}} \le 1 .$$

İsbatı. U əlifbası üzərində olan və n uzunluğuna malik bütün mümkün olan sözlərə baxaq. Bütün bu sözlər aşağıdakı ifadənin köməkliyi ilə yaranır:

$$(a_1 + \ldots + a_r)^n .$$

Burada mötərizə açıldıqdan sonra (vurma yerinə yetdikdən sonra) kommutativlik nəzərə alınmır, hər bir toplanana bir söz kimi baxılır və bu zaman

$$a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n}$$

hasilinə U əlifbasında sözlərin yazılışı kimi baxılır. Aydındır ki, a_{i_1} simvolu birinci, a_{i_2} simvolu ikinci, ..., a_{i_n} simvolu n-ci mötərizə daxilinə aiddir. Beləliklə, alırıq:

$$(a_1 + \ldots + a_r)^n = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} .$$

Bu sözlərə aid kodlar a_1-i B_1-lə ,..., a_r-i B_r-lə əvəz etməklə alınır. Beləliklə, alırıq:

$$(B_1 + \ldots + B_r)^n = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} B_{i_1} B_{i_2} \ldots B_{i_n} . \quad (4)$$

Əlifba kodlaşdırmasının qarşılıqlı birqiymətliliyinə görə, əgər $(i_1,\ldots,i_n) \ne (j_1,\ldots,j_n)$, yəni $a_{i_1} \ldots a_{i_n} \ne a_{j_1} \ldots a_{j_n}$ olarsa, onda

$$B_{i_1} \ldots B_{i_n} \ne B_{j_1} \ldots B_{j_n} .$$

(4) eyniliyi aşağıdakı eyniliyə uyğundur:

$$\left(q^{-\ell_1} + \ldots + q^{-\ell_r}\right)^n = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)} q^{-(\ell_{i_1} + \ldots + \ell_{i_n})} . \quad (5)$$

Aydındır ki, burada sağ tərəfdə eyni bir məxrəcli hədlərə (4)-dən eyni uzunluqlu $B_{i_1}B_{i_2}...B_{i_n}$ sözləri uyğun gəlir.

t ilə $\ell_{i_1}+...+\ell_{i_n}$ cəmini işarə edək. (4)-dən t uzunluğuna malik olan $B_{i_1}B_{i_2}...B_{i_n}$ sözlərinin sayını $\nu(n,t)$ ilə işarə edək. Aydındır ki, verilən söz t uzunluğuna malik söz olmazsa, onda $\nu(n,t)=0$ olar. Tutaq ki, $\ell=\max\limits_{1\le i\le r}\ell_i$. Onda alarıq:

$$\sum_{(i_1,...,i_n)} q^{-(\ell_{i_1}+...+\ell_{i_n})}=\sum_{t=1}^{n\ell}\nu(n,t)\cdot q^{-t}\ .$$

Əlifba kodlaşdırmasının qarşılıqlı birqiymətliliyinə görə alınır ki, $\nu(n,t)\le q^t$ və, beləliklə,

$$\sum_{t=1}^{n\ell}\nu(n,t)\cdot q^{-t}\le n\ell\,.$$

Bu bərabərsizliyi (3) bərabərsizliyi ilə birləşdirsək, alarıq:

$$\sum_{i=1}^{r}q^{-\ell_i}\le\sqrt[n]{n\ell}\,.$$

Bu bərabərsizlik bütün n-lər üçün doğrudur. Sol tərəf n-dən asılı deyildir. Ona görə də $n\to\infty$ olmaqla bərabərsizliyin hər tərəfində limitə keçsək alarıq:

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{q^{\ell_i}}\le 1\,,$$

belə ki, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\ell}=1$. □

§3. Minimal izafilikli kodlar

Tutaq ki, $\mathsf{U}=\{a_1,...,a_r\}\ (r\ge 2)$ əlifbası və $p_1,p_2,...,p_r$ ehtimallar yığımı verilmişdir, belə ki, $p_i\ (i=\overline{1,n})$ ehtimalı a_i simvolunun əmələ gəlməsi ehtimalıdır və $p_1+p_2+...+p_r=1$. Tutaq ki, həm də $\mathsf{B}=\{b_1,...,b_q\}$ əlifbası da verilmişdir $(q\ge 2)$. Onda çoxlu sayda Σ əlifba kodlaşdırması qurmaq olar.

$$a_1 - B_1, a_2 - B_2, ..., a_r - B_r, \qquad (\Sigma)$$

harada ki, bu sxemlər hamısı qarşılıqlı birqiymətli olar. Xüsusi halda elementar $B_1, B_2, ..., B_r$ kodlarını eyni bir ℓ uzunluğunda götürmək olar, harada ki, $\ell =]\log_q r[$.

Hər bir Σ sxemi üçün kodlaşdırma izafiliyi adlanan və elementar kodların uzunluqlarının riyazi gözləməsi kimi təyin olunan ℓ_{ort} kəmiyyəti daxil etmək olar:

$$\ell_{ort} = \sum_{i=1}^{r} p_i \ell_i, \quad \ell_i = \ell(B_i).$$

Aydındır ki, ℓ_{ort} Σ sxemi ilə kodlaşdırma zamanı sözlərin uzunluğunun neçə dəfə artmasını göstərir.

ℓ_{ort} kəmiyyəti $V = \{B_1, ..., B_r\}$ kodunun dəyəri kimi də adlandırılır və $L_V(P)$ kimi də işarə olunur, belə ki, $P = \{p_1, ..., p_r\}$ - dir.

Nümunə 1. Tutaq ki, $r = 5, q = 2$ və $p_1 = 0{,}20$, $p_2 = 0{,}20$, $p_3 = 0{,}25$, $p_4 = 0{,}20$, $p_5 = 0{,}15$.

Tutaq ki, Σ kodlaşdırma sxemi aşağıdakı kimidir.

$$a_1 - 000, a_2 - 111, a_3 - 01, a_4 - 1, a_5 - 001.$$

Bu kod qarşılıqlı birqiymətlilik xassəsinə malikdir. Kodun izafiliyini hesablayaq:

$$\ell_{ort} = 3 \cdot 0{,}20 + 3 \cdot 0{,}20 + 2 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}20 + 3 \cdot 0{,}15 = 2{,}35.$$

Aydındır ki, izafilik kəmiyyəti bir kodlaşdırma sxemindən başqa bir sxemə keçdikdə dəyişir. Ona görə də hər bir məlumatlar mənbəyi üçün ℓ_* kəmiyyətini daxil etmək olar və bu kəmiyyət

$$\ell_* = \inf_{\Sigma} \ell_{ort}^{\Sigma}$$

düsturu ilə təyin olunur. Burada minimum qarşılıqlı birqiymətlilik xassəsinə malik bütün mümkün Σ kodlaşdırma sxemləri üzrə götürülür. Aydındır ki,

$$1 \le \ell_* \le]\log_q r[.$$

Bu düstur onu göstərir ki, ℓ_* kəmiyyətinə yaxın olan ℓ_{ort} izafilikli kodları qurduqda $]\log_q r[$ kəmiyyətindən böyük olan izafiliyə malik kodları nəzərə almamaq olar. Deməli, belə sxemlər üçün

$$p_i \ell_i \le]\log_q r[\,.$$

ℓ_{ort} hesablandıqda $p = 0$-a uyğun hədlər nəzərə alınmadığından $p_* = \min\limits_{i:p_i \neq 0} p_i$ qəbul etməklə alarıq ki, istənilən i üçün

$$\ell_i \le \frac{]\log_q r[}{p_*},$$

harada ki, $p_i \neq 0$. Deməli, $\ell_* \le \ell_{ort} \le]\log_q r[$.

Tərif 1. Σ sxemi ilə təyin olunan və $\ell_{ort} = \ell_*$ şərtini ödəyən kod minimal izafilikli kod və ya Xafman kodu adlanır.

Qarşılıqlı birqiymətli əlifba kodlaşdırması haqqında teoremlərə görə minimal izafilik verən və prefiks xassəsinə malik olan əlifba kodlaşdırması mövcuddur. Ona görə də minimal izafilikli kodları tapmaq üçün prefiks xassəsinə malik kodlara baxmaq kifayətdir.

Minimal izafilikli kodların qurulması məsələlərinə baxaq. Hər bir prefiks xassəli əlifba kodlaşdırmasına kod ağacı qarşı qoymaq olar. Buna aşağıdakı nümunə halında baxaq.

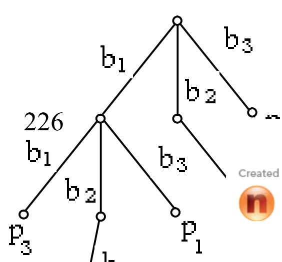
Nümunə 2. Tutaq ki, $\mathsf{U} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, $\mathsf{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$.

$$a_1 - b_1 b_3 \;,\quad p_1 = 0{,}22\,,$$
$$a_2 - b_3 \;,\quad p_2 = 0{,}20\,,$$
$$a_3 - b_1 b_1 \;,\quad p_3 = 0{,}14\,,$$
$$a_4 - b_2 b_1 \;,\quad p_4 = 0{,}11\,,$$
$$a_5 - b_1 b_2 b_3 \;,\quad p_5 = 0{,}33\,.$$

Bu kod prefiks xassəsinə malikdir və orta izafiliyi aşağıdakı kimidir

$$\ell_{ort} = 2 \cdot 0{,}22 + 1 \cdot 0{,}20 + 2 \cdot 0{,}14 + 2 \cdot 0{,}11 + 3 \cdot 0{,}33 = 2{,}13\,.$$

Elementar kodlar şəkil 1-də verilən kod ağacını əmələ gətirir.



Şəkil 1.

Kod ağacında son təpə nöqtələri ağacın kökündən başlayan yolun (budağın) təyin etdiyi elementar koda uyğun gəlir və bu təpələrə elementar kodun əmələ gəlməsi ehtimalı yazılır. Asanlıqla görmək olar ki, son təpələrinə ehtimallar yazılan kod ağacı prefiks xassəinə malik əlifba kodlaşdırması verir.

Ümumiliyi pozmadan fərz edək ki,

$$p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_r \,.$$

Lemma 1. Minimal izafilikli kodlar üçün $p_j < p_i$ şərtindən alınır ki, $\ell_j > \ell_i$.

Nəticə 1. Minimal izafilikli kodlar üçün kod ağacında ℓ' yarusunda son təpədə yazılan ehtimal qiymətləri $\ell'' > \ell'$ şərtini ödəyən ℓ'' yarusunda son təpədə yazılan ehtimal qiymətlərindən kiçik deyildir.

Kod ağaclarında təpələrdən çıxan tillərin sayı həmin təpənin uyğun olaraq budaqlanma dərəcəsi adlanır.

Tərif 2. Əgər sonlu ağacda bütün təpələrin (ola bilsin ki, sondan əvvəlki yarusda olan bir təpə istisna olmaqla) budaqlanma dərəcələri 0 və ya q-yə (istisna olunan təpədə budaqlanma dərəcəsi isə q_0-a bərabərdir, harada ki, $2 \leq q_0 < q$) bərabər olarsa, onda belə ağac ifrat ağac adlanır.

Asanlıqla görmək olar ki, q_0 ədədi

$$r = t(q-1) + q_0$$

münasibətindən təyin olunur. r ədədini $(q-1)$-ə bölərək qalığı tapaq (əgər istisna olunan təpə olarsa, onda qalıq 1-ə bərabər olmaz):

$$q_0 = \begin{cases} q-1 \;, & \text{əgər qalıq } 0-\text{a bərabərdirsə,} \\ \text{qalığa,} & \text{əgər qalıq } \geq 2 \text{ isə.} \end{cases} \qquad (1)$$

Lemma 2. (1) məhdudiyyəti daxilində kod ağacı ifrat olan minimal izafilikli kod mövcuddur.

İsbatı. İsbat üçün yuxarıda göstərilən tipli kod ağacı üzərində iki çevirməyə baxaq, harada ki, bu çevirmələr izafiliyi artırmır.

1. Sonuncu yarusda tilin ləğvi. Əgər sonuncu yarusda kod ağacında düz bir til mövcuddursa, onda bu tillə $B = B'b$ elementar kodu p ehtimalı ilə bağlıdır, həm də B' heç bir başqa elementar kodun prefiksi deyildir. Bu tili ləğv etməklə və p ehtimalını tilin çıxdığı təpəyə gətirməklə yeni kod ağacı alarıq. Bu çevirmədən Σ sxemindən Σ' sxeminə keçid alınır, belə ki, Σ sxemində B kodu B' kodu ilə əvəz olunur. Aydındır ki,

$$\ell'_{ort} = \ell_{ort} - p \leq \ell_{ort}\,.$$

2. Kod ağacının sonuncu yarusundan tilin ifrat olmayan ağacın tilinə köçürülməsi. Tutaq ki, kod ağacında sonuncu yarusda ən azı iki til mövcuddur. Deməli, son təpəsinə p ehtimalının yazıldığı til və hər hansı bir elementar B kodu mövcuddur. Tutaq ki, ℓ' yarusunda $(\ell' \leq \ell - 1)$ təpə mövcuddur və ifrat deyildir. B^0 ilə bu təpəyə uyğun sözü işarə edək. Təpənin ifrat olmadığı üçün $B^0 b_j$-nin heç bir elementar kodun prefiksi olmadığı b_j simvolu mövcuddur. Bu halda sonuncu yarusun adı çəkilən tilini verilən ifrat olmayan təpənin j-ci istiqamətinə köçürmək olar. Beləliklə, B elementar kodunu $B^0 b_j$ koduna dəyişməklə Σ sxemindən Σ' sxemini alırıq və bu zaman

$$\ell_{ort} = \ell_{ort} - p\ell + p(\ell(B^0) + 1) \leq \ell_{ort}\,.$$

1 və 2 çevirmələri baxılan sinifdən istənilən prefiks kodu, o cümlədən minimal izafilikli kodu, izafiliyi dəyişmədən ağacı ifrat olan koda çevirməyə imkan verir. □

Qeyd. Kod ağacı ifrat olan minimal izafilikli koda baxaq. İstisna olunan təpədən çıxan və sonuncu yarusda olan tillər dəstəsini götürək. Əgər belə təpə yoxdursa, onda sonuncu yarusdan istənilən tillər dəstəsini götürək. Tutaq ki, götürülən dəstədə tillərin sayı q_0 -dır, $2 \le q_0 \le q$. Maksimal uzunluqlu elementar kodların yerdəyişməsi ilə götürülən dəstənin son təpələrində aşağıdakı ehtimal qiymətlərinin yazılmasına nail olmaq olar

$$p_{r-q_0+1}, \dots, p_r .$$

Alınan kodu gətirilən kod adlandıracağıq. Aydındır ki, gətirilmiş kod üçün $p_{r-q_0+1}, \dots, p_r$ ehtimalları birqiymətli təyin olunurlar, belə ki, onlar tənlikdən birqiymətli olaraq tapılan q_0 parametri ilə verilir. Məsələn, $r = 8,\ q = 4$ olduqda

$$8 = 3t + q_0$$

tənliyindən $t = q_0 = 2$ alırıq. Bu zaman ayrılan dəstəyə p_7 və p_8 ehtimalları yazılır.

Teorem 1 (reduksiya). Tutaq ki, (r,q) parametrli və $p_1,\dots,p_r$ ehtimallı minimal izafilikli prefiks kod verilmişdir. Uyğun kod ağacında ancaq son təpələrə aparan və $2 \le q_0 \le q$ bərabərsizliyini ödəyən q_0 sayda tillərin çıxdığı təpələrə baxaq. $p_{i_1}, \dots, p_{i_{q_0}}$ $(p_{i_1} \ge \dots \ge p_{i_{q_0}})$ ilə verilən tillər dəstəsinin son təpələrinə yazılan ehtimalları işarə edək. Əgər $r > q$ isə, onda verilən tillər dəstəsini ləğv etməklə və onların çıxdığı təpəyə $p = p_{i_1} + \dots + p_{i_{q_0}}$ ehtimalını yazmaqla (r',q) parametrli

$$p_1, \dots, p_{i_1-1}, p_{i_1+1}, \dots, p_{i_{q_0}-1}, p_{i_{q_0}+1}, \dots, p_r, p \qquad (1)$$

ehtimallı minimal izafilikli koda uyğun kod ağacı alarıq, harada ki, $r' = r - q_0 + 1$ ($i_1 = 1$ və ya $i_{q_0} = r$ olduqda (1) ardıcıllığı p_{i_1+1} ilə başlayır və ya $p_{i_{q_0}-1}$ ilə qurtarır).

Teorem 1 lemma 1-lə birlikdə minimal izafilikli kodların qurulması üçün alqoritm verir. Alqoritm teorem 1-in (r,q) parametrli və $p_1,\dots,p_r\,(p_1 \ge \dots \ge p_r)$ ehtimallarlı gətirilmiş koda tətbiqinə əsaslanır. Tillər dəstəsi olaraq q_0 sayda tildən ibarət

$(2 \le q_0 \le q)$ tillər dəstəsi götürülür. q_0 parametri birqiymətli olaraq ilkin verilənlər əsasında təyin olunur. Dəstənin son təpələrinə yazılan

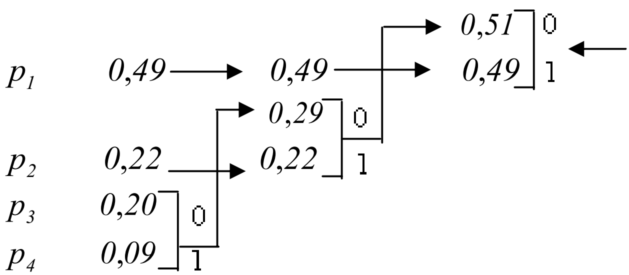
$$p_{r-q_0+1},\ldots,p_r$$

ehtimalları da həmçinin ilkin verilənlər əsasında birqiymətli təyin olunurlar, bu da ki, $r > q$ olduqda reduksiya vasitəsilə alınan kodun parametrlərini tapmağa imkan verir. Biz $r' = r - q + 1 < r,\ q' = q$ və $p_1,\ldots,p_{r-q_0},p$ ehtimallarını alırıq, harada ki, $p = p_{r-q_0+1} + \ldots + p_r$.

Beləliklə, reduksiyanın çoxsaylı tətbiqi nəticəsində $r \le q$ olduğu məsələ alınır və əgər elementar kodlar üçün birsimvollu elementar kodlar götürülərsə onda bu məsələ trivial həllə malikdir.

Nümunə 3. 1) Tutaq ki, $r = 4, q = 2$ və $p_1 = 0,49$, $p_2 = 0,22$, $p_3 = 0,20$, $p_4 = 0,09$. Optimal kodu qurmalı.

Qurma prosesini aşağıdakı kimi təsvir etmək olar:



Reduksiya ilə bağlı üç addıma malik oluruq. Təsvirdə bağlanan kvadrat mötərizə ilə birləşdirilən hədlər göstərilir. Kodları qurmaq üçün hər bir mötərizə üçün ehtimallar ilə B-dən olan simvolların altçoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq qurmaq lazımdır. Bu nümunə halında yuxarı sırada olan birləşdirilən ədədə 0, aşağıda olan ədədə isə 1 simvolu qarşı qoyulur. Sonra isə əks istiqamətdə $p_1,\ldots,p_r$ simvollarına doğru hərəkətə başlanılır və mötərizələrdən keçməklə uyğun kod yazılır. Məsələn,

$$0,51 - 0,29 - 0,20 - p_3$$

yolu 000 kodunu,

$$0{,}51-0{,}22-p_2$$

yolu isə 01 kodunu verir. Beləliklə, aşağıdakı kodlaşdırma sxemini alırıq:

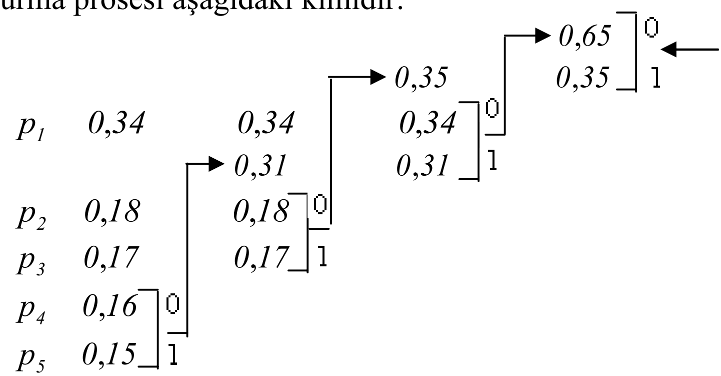
$$a_1-1,\ a_2-01,\ a_3-000,\ a_4-001\,.$$

2) Tutaq ki,

$r=5, q=2, p_1=0{,}34, p_2=0{,}18, p_3=0{,}17, p_4=0{,}16, p_5=0{,}15$.

Optimal kodu qurmalı.

Qurma prosesi aşağıdakı kimidir:



Aşağıdakı yolları alırıq:

$$0{,}65-0{,}31-0{,}15-p_5;\qquad 0{,}65-0{,}31-0{,}16-p_4;$$

$$0{,}35-0{,}17-p_3;\qquad 0{,}35-0{,}18-p_2;$$

$$0{,}65-0{,}34-p_1\,.$$

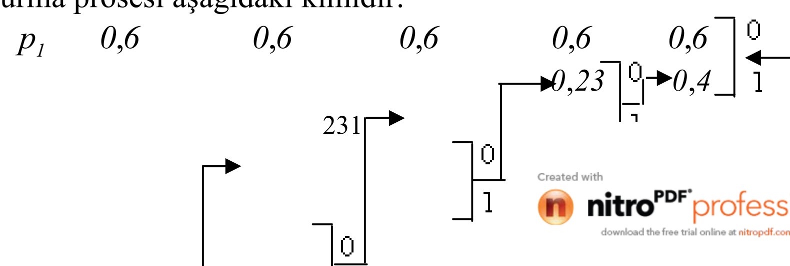
Beləliklə,

$$a_1-00,\quad a_2-10,\quad a_3-11,\quad a_4-010,\quad a_5-011,$$

$$\ell_{ort}=0{,}34\cdot 2+0{,}18\cdot 2+0{,}17\cdot 2+0{,}16\cdot 3+0{,}15\cdot 3=2{,}31\,.$$

3) Tutaq ki, $r=6,\ q=2,\ p_1=0{,}6,\ p_2=0{,}1,\ p_3=0{,}09,$ $p_4=0{,}08,\ p_5=0{,}07,\ p_6=0{,}06$. Optimal kodu qurmalı və onun çəkisini tapmalı.

Qurma prosesi aşağıdakı kimidir:



			0,17	0,17
		0,13	0,13	
p_2	0,1	0,1	0,1	
p_3	0,09	0,09		
p_4	0,08	0,08		
p_5	0,07			
p_6	0,06			

Sxemdən aşağıdakı yolları alırıq:

$$0{,}6 - p_1;$$

$$0{,}4 - 0{,}23 - 0{,}1 - p_2;$$

$$0{,}4 - 0{,}17 - 0{,}09 - p_3;$$

$$0{,}4 - 0{,}17 - 0{,}08 - p_4;$$

$$0{,}4 - 0{,}23 - 0{,}13 - 0{,}07 - p_5;$$

$$0{,}4 - 0{,}23 - 0{,}13 - 0{,}06 - p_6.$$

Beləliklə, optimal kodlaşdırma sxemi aşağıdakı kimidir:

$$a_1 - 0,\ a_2 - 101,\ a_3 - 110,\ a_4 - 111,$$

$$a_5 - 1000,\ a_6 - 1001.$$

$$L(p) = 0{,}6 \cdot 1 + (0{,}1 + 0{,}09 + 0{,}08) \cdot 3 + (0{,}07 + 0{,}06) \cdot 4 = 1{,}93.$$

Reduksiya zamanı hər bir addımda ehtimallar qiymətlərinə görə nizamlandırılır. Bu nizamlanma heç də həmişə birqiymətli olmur, belə ki, eyni qiymətə bərabər olan ehtimallar da yarana bilər.

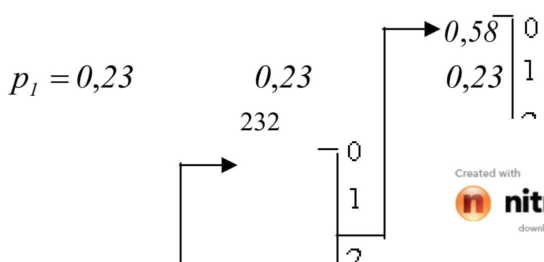
Nümunə 4. Tutaq ki, $r = 7$, $q = 4$ və

$$p_1 = 0{,}23,\ p_2 = 0{,}14,\ p_3 = 0{,}15,\ p_4 = 0{,}13,$$

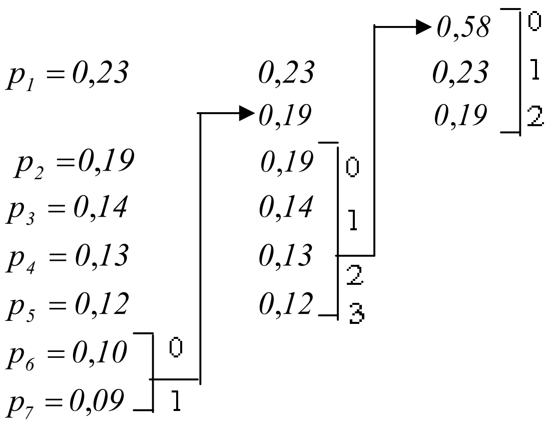
$$p_5 = 0{,}12,\ p_6 = 0{,}10,\ p_7 = 0{,}09.$$

Tutaq ki, $\mathrm{B} = \{0,1,2,3\}$.

Bu nümunə halında reduksiyanı iki üsulla aparmaq olar.



$p_2 = 0,19$	$0,19$	$0,19$
	$0,19$	
$p_3 = 0,14$	$0,14$	
$p_4 = 0,13$	$0,13$	
$p_5 = 0,12$	$0,12$	
$p_6 = 0,10$		
$p_7 = 0,09$		



Bu üsullar əsasında kvadrat mötərizə daxilində olan elementləri yuxarıdan aşağı 0,1,2 və 3 ədədləri ilə nömrələməklə aşağıdakı iki əlifba kodlaşdırması sxemini alarıq:

$$a_1 - 1,\ a_2 - 2,\ a_3 - 01,\ a_4 - 02,\ a_5 - 03,\ a_6 - 000,\ a_7 - 001\,, \qquad (\Sigma)$$

$$a_1 - 1,\ a_2 - 00,\ a_3 - 01,\ a_4 - 02,\ a_5 - 03,\ a_6 - 20,\ a_7 - 21\,. \qquad (\Sigma''')$$

Yuxarıda şərh olunan kodlaşdırma üsulunda hesab olunurdu ki, $p_1, p_2, \ldots, p_r$ ehtimalları arasında ən çoxu biri sıfıra bərabər ola bilər.

$p_1, \ldots, p_r$ ehtimallarının müxtəlif və $p_1 \geq \ldots \geq p_r$ və həm də bu ehtimallardan sıfra bərabər olanların sayı vahiddən böyük olduğu halda minimal izafilikli kodların qurulması halına baxaq. Tutaq ki, $p_1 \geq \ldots \geq p_{r_0} > 0$ və

$$p_{r_0+1} = \ldots = p_r = 0,\ r - r_0 > 1.$$

Əvvəlcə məsələ $(r_0 + 1)$ giriş simvoluna malik əlifba və $p_1, \ldots, p_{r_0},\ p_{r_0+1}$ (burada $p_{r_0+1} = 0$) ehtimalları halında həll olunur. Tutaq ki, $B_1, \ldots, B_{r_0}, B_{r_0+1}$ minimal izafilikli kodlar üçün elementar kodlardır. Sonra isə B_{r_0+1} elementar kodu atılır və $a_{r_0+1}, \ldots, a_r$ hərfləri üçün elementar kod olaraq aşağıdakı şəkildə sözlər götürülür:

$$B'_{r_0+1} = B_{r_0+1}B^{(r_0+1)}, \ldots, B_r = B_{r_0+1}B^{(r)},$$

harada ki, $\ell(B^{(r_0+1)}) = \ldots = \ell(B^{(r)})$ və bütün $B^{(r_0+1)}, \ldots, B^{(r)}$ müxtəlifdirlər. Aydındır ki, belə qurulan kod minimal izafiliklidir və prefiks xassəsini ödəyir.

Minimal izafilikli kodların qurulması üçün yuxarıda təsvir olunan üsul Xafman üsulu adlanır. İndi isə optimal kodlara yaxın olan kodların qurulması üçün iki üsula baxaq. Bu üsullardan biri Fano, digəri isə Şennon üsuludur. Bu üsullarda $\mathsf{B} = \{0,1\}$ hesab olunur.

Fano üsulu kifayət qədər sadədir. U əlifbasının simvolları ehtimallarının artmaması ardıcıllığı ilə nizamlanır. Sonra isə simvollar siyahısı iki ardıcıl hissəyə bölünür. Bu hissəyə bölmə zamanı elə edilir ki, həm birinci və həm də ikinci hissəyə daxil olan simvolların ehtimallarının cəmi mümkün qədər bir-birinə yaxın olsun. Birinci hissəyə aid olan simvollara 0, ikinci hissəyə aid olan simvollara 1 simvolu uyğun qoyulur. Sonra isə hər bir hissəyə daxil olan simvollar da yuxarıdakı qaydada iki ardıcıl hissəyə bölünür və onlara da 0 və 1 simvolları uyğun qoyulur. Bu proses alınan hissədə ən azı iki simvol olduqda təkrarlanır və i.a. Proses qurtardıqdan sonra hər bir simvola hissələrə bölmə zamanı uyğun qoyulan simvollar (0 və ya 1 simvolları) ardıcıllığı qarşı qoyulur. Bu qayda ilə alınan kod prefiks və tam kod olur.

Nümunə 5. 1) Tutaq ki, $r = 11$ və

$$p_1 = 0{,}21,\ p_2 = 0{,}19,\ p_3 = 0{,}15,\ p_4 = 0{,}07, p_5 = 0{,}06,\ p_6 = 0{,}06,$$
$$p_7 = 0{,}06,\ p_8 = 0{,}05,\ p_9 = 0{,}05,\ p_{10} = 0{,}05,\ p_{11} = 0{,}05 .$$

Fano üsulu ilə optimala yaxın kodu qurmalı.

Qurma prosesini aşağıdakı cədvəl vasitəsilə təsvir edək.

a_i	p_i	1	2	3	4
a_1	0,21	0	00		
a_2	0,19	0	01	010	
a_3	0,15	0	01	011	
a_4	0,07	1	10	100	1000
a_5	0,06	1	10	100	1001
a_6	0,06	1	10	101	1010
a_7	0,06	1	10	101	1011
a_8	0,05	1	11	110	1100
a_9	0,05	1	11	110	1101
a_{10}	0,05	1	11	111	1110
a_{11}	0,05	1	11	111	1111

Cədvəldən göründüyü kimi kodlaşdırma sxemi aşağıdakı kimidir:

$$a_1 - 00,\ a_2 - 010, a_3 - 011,\ a_4 - 1000,\ a_5 - 1001,\ a_6 - 1010,\ a_7 - 1011,$$
$$a_8 - 1100, a_9 - 1101,\ a_{10} - 1110,\ a_{11} - 1111 .$$

Kodun izafiliyi isə aşağıdakı kimidir:

$$\ell_{ort} = 0{,}21 \cdot 2 + (0{,}19 + 0{,}15) \cdot 3 + 4(0{,}07 + 3 \cdot 0{,}06 + 4 \cdot 0{,}05) = 3{,}24 .$$

2) Tutaq ki, $r = 5, q = 2,\ p_1 = 0{,}34,\ p_2 = 0{,}18,\ p_3 = 0{,}17,$ $p_4 = 0{,}16,\ p_5 = 0{,}15$. Fano üsulu ilə optimala yaxın kodu qurmalı və kodun qiymətini tapmalı.

Qurma prosesini aşağıdakı cədvəl vasitəsilə təsvir edək:

a_i	p_i	1	2	3
a_1	0,34	0	00	
a_2	0,18	0	01	
a_3	0,17	1	10	
a_4	0,16	1	11	110
a_5	0,15	1	11	111

Deməli, $a_1 - 00,\ a_2 - 01,\ a_3 - 10,\ a_4 - 110,\ a_5 - 111$.

$$L(p) = (0{,}34 + 0{,}18 + 0{,}17)\cdot 2 + (0{,}16 + 0{,}15)\cdot 3 = 2{,}31\,.$$

3) Tutaq ki, $r = 6,\ q = 2,\ p_1 = 0{,}6,\ p_2 = 0{,}1,\ p_3 = 0{,}09,$ $p_4 = 0{,}08,\ p_5 = 0{,}07,\quad p_6 = 0{,}06$. Fano üsulu ilə optimala yaxın kodu qurmalı və kodun qiymətini tapmalı.

Qurma prosesi aşağıdakı cədvəl vasitəsilə təsvir edək:

a_i	p_i	1	2	3	4
a_1	0,6	0			
a_2	0,1	1	10	100	
a_3	0,09	1	10	101	
a_4	0,08	1	11	110	
a_5	0,07	1	11	111	1110
a_6	0,06	1	11	111	1111

Deməli,

$$a_1 - 0,\ a_2 - 100,\ a_3 - 101,\ a_4 - 110,\ a_5 - 1110,\ a_6 - 1111\,.$$

$$L(p) = 0{,}6\cdot 1 + (0{,}1 + 0{,}09 + 0{,}08)\cdot 3 + (0{,}07 + 0{,}06)\cdot 4 = 1{,}93\,.$$

Optimal kodlara yaxın olan kodların Şennon üsulu ilə qurulmasına baxaq. Bu üsul ancaq bütün ehtimallar sıfırdan böyük olduğu halda istifadə olunur. Şennon üsulu aşağıdakılardan ibarətdir.

Simvollar ehtimalların azalması ardıcıllığı ilə nizamlanırlar. p_i ehtimalına malik a_i hərfinə q_i ədədinin sonsuz ikilik kəsrə ayrılışının vergüldən sonrakı ilk $\ell_i =]\log 1/p_i[$ sayda rəqəmlər ardıcıllığı uyğun qoyulur, harada ki,

$$q_i = \sum_{j=0}^{i-1} p_j \qquad (i = \overline{0, m-1}).$$

Aydındır ki, $h > i$ olduqda (və, beləliklə, $p_h \le p_i$) $\ell_h \ge \ell_i$ və $1 > q_h \ge q_i + p_i \ge q_i + 2^{-\ell_i}$ olur. Odur ki, alınan kod prefiks kod olar. Sonra alınmış koddan kəsilmiş kod (rəqəmlərin sayı məhdud) alırıq, hansı ki, optimal koda yaxın kod olur.

Teorem 2. **İstənilən** $P = \{p_0, p_1, ..., p_{m-1}\}$ **paylanması halında**

$$\sum_{i=1}^{m-1} p_i \log \frac{1}{p_i} \le L(P) \le \sum_{i=0}^{m-1} p_i \log \frac{1}{p_i} + 1$$

münasibətinin qüvvədə olması üçün zəruri və kafi şərt elə $\ell_0, \ell_1, ..., \ell_{m-1}$ tam ədədlərinin mövcud olmasıdır ki,

$$p_i = 2^{-\ell_i}, \ i = 0, ..., m-1$$

olsun. Burada

$$L(P) = \sum_{i=0}^{m-1} p_i \log \frac{1}{p_i}.$$

Nümunə 6. Tutaq ki, $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ simvollarının əmələgəlmə ehtimalları $p_0 = 0{,}20$, $p_1 = 0{,}20$, $p_2 = 0{,}19$, $p_3 = 0{,}12$, $p_4 = 0{,}11$, $p_5 = 0{,}09$, $p_6 = 0{,}09$-dır. Optimal kodlaşdırmanı tapmalı.

Sennon üsuluna uyğun kodlaşdırma aşağıdakı cədvəldə verilir.

a_i	p_i	ℓ_i	q_i	Şennon kodu
a_0	0,20	3	0,00 = 0,000	000
a_1	0,20	3	0,20 = 0,001	001
a_2	0,19	3	0,40 = 0,011	01
a_3	0,12	4	0,59 = 0,1001	100
a_4	0,11	4	0,71 = 0,1011	101
a_5	0,09	4	0,82 = 0,1101	110

a_6	0,09	4	$0,91 = 0,1110$	111
Kodun dəyəri				2,81

§4. Səhflərə nəzarətedici kodlar haqqında qısa məlumatlar

Rabitə sistemləri verilənlər (məlumatlar) mənbəsini verilənləri qəbul edənlərlə kanal vasitəsilə birləşdirir. Kanala rabitə kanalı da deyilir. Kanala nümunə koaksial kabellər, telefon şəbəkəsi, optik liflər şəbəkəsi, kiçik dalğalı elektromaqnit xətləri və hətta maqnit lentləri və diskləri ola bilər. Rabitə sistemlərinin layihələndirilməsi zamanı kanalın girişini hazırlayan və çıxışını emal edən qurğular yaradılır.

Verilənlər mənbəsindən rabitə sisteminə daxil olan verilənlər (məlumatlar) ilkin olaraq mənbə koderi vasitəsilə emal olunur və daha yığcam halda təşkil olunur. Bu aralıq təsvir simvollar ardıcıllığından ibarət olur və mənbənin kod sözü adlanır. Sonra məlumatlar kanal koderində emal olunaraq mənbə kod sözləri ardıcıllığından kanal kod sözləri adlanan simvollar ardıcılığına çevrilirlər. Kanal kod sözləri mənbə kod sözlərinə nisbətən daha uzun ardıcıllıqdan ibarət olur və bu da izafi hesab olunur. Kod sözünün hər bir simvolu bit şəklində və ya mümkündür ki, bitlər qrupu şəklində olur.

Buradan sonra modulyator qurğusu kanalın kod sözünün hər bir simvolunu mümkün sonlu analoq siqnalları çoxluğundan olan uyğun analoq siqnalına çevirir. Analoq simvolları ardıcıllığı kanal vasitəsilə ötürülür. Kanalda müxtəlif təhrifedici təsirlər olduğundan kanalın çıxışı ilə girişi bir-birindən fərqlənir. Kanalın çıxışı demodulyasiya olduqdan sonra alınan simvollar ardıcıllığı qəbuledilən söz adlanır. Kanalda təhriflər, yaxud interferensiyalar olduğundan qəbul edilən söz kanalın kod sözü ilə heç də həmişə üst-üstə düşmür.

Kanal dekoderi qəbul edilən sözdə səhvləri tapa bilməsi üçün izafilikdən (artıqlıqdan) istifadə edir və bunun nəticəsində mənbə kod sözünün «qiymətləndirilməsini» yaradır. Əgər bütün səhvlər düzəldilibsə, onda mənbə kod sözünün «qiymətləndirilməsi» ilə mənbənin ilkin kod sözü üst-üstə düşür. Mənbənin dekoder qurğusu koder qurğusunun yerinə yetirdiyi əməliyyatı əksinə yerinə yetirir və nəticədə alınan məlumat istifadəçiyə verilir.

Səhvlərə nəzarətedici kodların tarixi amerika alimi Klod Şennonun 1948-ci ildə çap etdirdiyi işlərdən sonra başlamışdır. Aydındır ki, hər bir kanal üçün kanalın ötürmə qabiliyyəti adlanan və saniyədə ötürüləbilən bitlərin maksimal sayını göstərən C ədədi mövcuddur. Şennonun fikrincə əgər sistemdən tələb olunan informasiya ötürmə sürəti R (saniyədə bitlərlə ölçülür) C –dən kiçik isə, onda səhvlərə nəzarətedici kodlardan istifadə etməklə elə rabitə sistemi qurmaq olar ki, çıxışda səhvin olması ehtimalı istənilən qədər kiçik olsun. Şennonun bu nəzəriyyəsindən çıxır ki, həddən artıq yaxşı rabitə sistemi qurmaq çox vəsait tələb edir. İqtisadi cəhətdən sərfəlidir ki, kodlaşdırma nəzəriyyəsi istifadə olunsun. Lakin Şennon yaxşı kodların necə tapılması haqqında heç bir məlumat verməmişdir, ancaq belə kodların mövcud olmasını isbat etmişdir. XX əsrin 50-ci illərində «yaxşı» kodların axtarılmasına çoxlu qüvvələr cəlb edilməsinə baxmayaraq o qədər də yaxşı nəticələr əldə edilməmişdir. Sonrakı on illiklər bu maraqlı məsələyə az fikir verilmişdi. Bunun əvəzinə kod tədqiqatçıları əsas iki istiqamətdə uzunmüddətli tədqiqat işləri aparmışlar.

Birinci istiqamət təmiz cəbri xarakter daşımışdır və əsasən blok kodlarına baxılmışdır. İlk blok kodu Xemminq tərəfindən 1950-ci ildə daxil edilmişdir. Bu kodlar bir səhvi düzəltməyə müvəffəq olur. 50-ci illərin sonunadək bu sahədə irəliləyiş olmamışdır. Eyni bir nəzəriyyəyə əsaslanmayan kiçik uzunluqlu çoxlu kodlar tapılmışdır. Əsas irəliləyiş, Bouz və Roy-Çoudxuri tərəfindən 1960-cıildə, Xokvinqem tərəfindən isə 1959-cu ildə çoxqat səhvləri düzəltməyə imkan verən kodlar sinfinin tapılması ilə bağlı olmuşdur. Belə kodlar BÇX kodları adlanır.

Rid və Solomon 1960-ci ildə BÇX kodları ilə bağlı olan və ikilik olmayan kanallar üçün kodlar sinfi tapmışlar.

BÇX kodlarının kəşfi «bərk» və «yumşaq» koder və dekoder qurğularının qurulmasının praktik üsullarının axtarılmasına təkan verdi. İlk yaxşı üsul Piterson tərəfindən verilmişdir. Sonralar

Pitersonun təsvir etdiyi hesablamaları yerinə yetirməyin güclü alqoritmi Berlekemp və Messi tərəfindən təklif edilmişdir. Bu alqoritmlərin realizasiyası yeni rəqəm texnikası yaranan kimi praktikada istifadə olunmağa başladı.

Kodlaşdırma sahəsində tədqiqatların ikinci istiqaməti ehtimal xarakterinə malikdir. İlkin tədqiqatlar hələ məlum olmayan blok kodları siniflərinin ən yaxşılarının səhvlərinin ehtimallarının qiymətləndirilməsi ilə əlaqədar idi. Bu tədqiqatlar kodlaşdırma və dekodlaşdırmanın ehtimal nöqteyi-nəzərindən başa düşülməsi cəhdi ilə bağlı idi və bu cəhd ardıcıl dekodlaşdırmaya gətirib çıxartdı. Ardıcıl dekodlaşdırmada bloklu olmayan sonsuz uzunluqlu kodlar sinfi daxil edilir. Belə kodları ağaclar vasitəsilə təsvir etmək və ağaclarda axtarış alqoritmlərinin köməkliyi ilə dekodlaşdırmaq olur. Ən səmərəli ağacvari kodlardan bağlı kodları nümunə göstərmək olar. Bu kodları xətti sürüşdürmə registrlər dövrəsi ilə, ardıcıllıqlı maşınlar vasitəsilə yaratmaq olar. Bu zaman məlumatlar ardıcıllığının bağlanması əməliyyatı həyata keçirilir. 50-ci illərin sonunda bağlı kodlar üçün ardıcıl dekodlaşdırma alqoritmləri yaradılmışdır. Belə kodlar üçün Biterbi alqoritmi kimi ən sadə alqoritm 1967-ci ildə yaradılmışdır. Bağlı kodlar üçün olan və çox kiçik mürəkkəbliyə malik Biterbi alqoritmi çox geniş tətbiq olunur. Lakin çox qüvvətli kodlar üçün o məqsədə uyğun deyildir.

70-ci illərdə yuxarıda adı çəkilən iki tədqiqat istiqaməti bir-birinə qarışmışdır. Bağlı kodlar nəzəriyyəsi ilə cəbrçilər məşğul olmağa başlamış və onu yeni yanaşmalar ilə zənginləşdirmişlər. Bloklu kodlar nəzəriyyəsində Şennonun vəd etdiyi kodlara yaxın olan kodların alınması müyəssər olmuşdur. Belə ki, kodlaşdırma üçün iki müxtəlif kodlaşdırma sxemi - biri Yusteson tərəfindən, digəri isə Qopp tərəfindən təklif edilmişdir. Bu sxemlər vasitəsilə həm çox böyük uzunluğa və həm də yaxşı xarakteristikalara malik kodlar sinfi yaratmaq mümkün olmuşdur. Lakin bu sxemlər praktik məhdudiyyətlərə malikdirlər.

80-ci illərin əvvəlindən başlayaraq koder və dekoderlər yeni rəqəm rabitə sistemləri və yaddaşa malik rəqəm sistemləri konstruksiyalarında qurulurlar. Səhvlərə nəzarətedici kodların inkişafı ilkin olaraq rabitə məsələləri ilə stimullaşdırıldığından terminologiya rabitə nəzəriyyəsindən götürülmüşdür. Lakin kodların qurulması başqa tətbiqlərlə də bağlıdır. Məsələn, hesablama qurğularının yaddaşında olan məlumatların qorunmasında kodlar istifadə olunur (həm əməli yaddaşda, və həm də xarici yaddaş qurğularında, verilənlər bazasında). Kodlar rəqəm məntiqi dövrələrinin təhriflərin təsirindən qorunmasında da istifadə olunur. Kodlar verilənlərin sıxlaşdırılmasında, kriptoqrafiyada da istifadə olunur. Kodlaşdırma nəzəriyyəsinin rabitə məsələlərində tətbiqi müxtəlif xarakterlərə malik olur. İkilik verilənlər (məlumatlar) adətən hesablama terminalları arasında, uçan aparatlar arasında, sputniklər arasında mübadilə olunurlar. Kodlaşdırma etibarlı mübadilə təşkil etmək üçün istifadə oluna bilər. Getdikcə efir insanlar tərəfindən yaradılan elektromaqnit dalğaları ilə doldurulduğundan kodlaşdırma nəzəriyyəsi getdikcə daha güclü qorunma vasitəsinə çevrilir. Çünki kodlaşdırma nəzəriyyəsi rabitə xətlərində interferensiyalar olduğu halda da etibarlı işləməyə imkan verir.

Kodlaşdırma nəzəriyyəsi hərbi tətbiqlərdə tez-tez rəqib tərəfin bilərəkdən yaratdığı interferensiyalar mühitində etibarlı işləməyi təmin edir.

Bir çox rabitə sistemlərində məlumatların mübadiləsində ötürmə güclərinə məhdudiyyətlər mövcuddur. Məsələn, sputnik vasitəsilə retranslyasiyada gücün artırılması çox baha başa gəlir. Səhvlərə nəzarətedici kodların tətbiqi zəruri gücün azaldılmasında çox yaxşı vasitədir. Belə ki, onlar vasitəsilə zəiflədilmiş məlumatların düzgün bərpasını təşkil etmək olur. Səhvlərə nəzarətedici kodların tətbiqi nəticəsində xarici yaddaş qurğularında məlumatları daha yığcam (sıx) yerləşdirmək mümkün olur.

Kompüter sistemlərində, şəbəkələrində çox böyük uzunluqlu məlumatlar paketlərə bölünür və mübadilə olunur. Sistemin çox yükləndiyi dövrlərdə, yaxud digər səbəblərdən bu və ya digər paket itə bilər. Uyğun səhvlərə nəzarətedici kodların tətbiqi belə itkilərin qarşısının alınmasına kömək edə bilər. Belə ki, itmiş paketləri məlum paketlər vasitəsilə bərpa etmək olar.

Fərz edək ki, bizi maraqlandıran bütün məlumatlar (verilənlər) ikilik məlumatlar kimi təsvir oluna bilər, yəni «0» və «1»-lər ardıcıllığı kimi. Bu ikilik məlumatlar ötürmə kanalı ilə ötürüldükdə təsadüfi səhvlərə məruz qalır. Kodlaşdırma məsələsi aşağıdakından ibarətdir: məlumat simvollarına əlavə simvollar elə qoşulur ki, qəbuledicidə təhriflər tapılıb düzəldilə bilsin. Başqa sözlə desək verilənlər simvolları ardıcıllığı nisbətən uzun simvollar ardıcıllığı ilə əvəz olunur və bu artıqlıq (izafilik) verilənlərin qorunmasına kifayət edir.

M gücünə malik və n uzunluqlu ikilik kod M sayda n uzunluqda ikilik sözlərdən ibarət çoxluq kimi təsəvvür olunur. Adətən $M = 2^k$, harada ki, k hər hansı bir müsbət tam ədəddir. Belə kod (n,k) – kodu adlanır.

Tutaq ki, x və y n uzunluqlu ikilik simvollar ardıcıllığıdır. x və y arasında Xemminq məsafəsi dedikdə bu ardıcıllıqlarda bir-birindən fərqlənən mövqelərin sayı nəzərdə tutulur və $d(x,y)$ kimi işarə olunur.

Tutaq ki, $C = \{c_i, i = 0,1,...,M-1\}$ kodu verilib

$$d^* = \min_{\substack{c_i, c_j \in C \\ i \neq j}} d(c_i, c_j)$$

kimi təyin olunan d^* kəmiyyəti C kodunun minimal məsafəsi adlanır.

Nümunə 1. Tutaq ki, $C = \{1010, 1100, 0010, 1101\}$. Aydındır ki,

$$d(1010,1100) = 2, \quad d(1010,0010) = 1, d(1010,1101) = 3,$$

$$d(1100,0010) = 3, d(1100,1101) = 1, d(0010,1101) = 4.$$

Deməli, $d^* = 1$.

d^* minimal məsafəsinə malik (n,k)-kodu (n,k,d^*) - kodu kimi də adlandırılır.

Fərz edək ki, kod sözü ötürülüb və kanalda bir səhv baş verib. Onda qəbul edilən söz ötürülən sözdən bir xemminq məsafəsində olar. Başqa kod sözlərinə qədər məsafə 1-dən böyük olduğu halda dekoder səhvi düzəldə bilər, yəni qəbul edilən sözə ən yaxın olan kod sözünü ötürülən söz kimi götürə bilər.

Ümumi halda əgər kodların ötürülməsi zamanı t sayda səhv (təhrif) baş veribsə və əgər qəbul edilən söz ilə kod sözləri arasında məsafə t-dən çox olarsa,onda dekoder bu səhvi düzəldə bilər və bu zaman qəbul edilən sözə ən yaxın kod sözü ötürülən kod sözü kimi götürülə bilər. Deyilənlər $d^* \geq 2t+1$ şərti ödənildiyi halda mümkün olar. Bəzən bu şərt ödənmədiyi halda da səhvlər düzəldilə bilir, lakin onun doğruluğuna zəmanət verilmir. Deyilənlərə həndəsi şərh aşağıdakı kimi verilir: q-lük n-ardıcıllıqların hamısının əmələ gətirdiyi fəzada n-ardıcıllıqların müəyyən bir çoxluğu ayrılır və onlara kod sözləri deyilir. Əgər kod sözlərinin minimal məsafəsi d^* isə və t ədədi $d^* \geq 2t+1$ şərtini ödəyən ən böyük tam ədəddirsə, onda hər bir kod sözü ətrafında t radiuslu bir-biri ilə kəsişməyən kürələr çəkmək olar. Bu kürələr dekodlaşdırma kürələri adlanırlar. Qəbul edilən söz hər hansı bir kürəyə daxil olur. Dekodlaşdırma zamanı qəbul edilən söz onun daxil olduğu kürənin mərkəzində yerləşən kod sözünə dekodlaşdırılır. Məlumatların ötürülməsi zamanı t-dən çox olmayan sayda səhv baş verərsə, onda qəbul edilən söz həmişə uyğun kürəyə daxil olar və dekodlaşdırma düzgün olar. Əgər t-dən çox sayda səhv baş verərsə qəbul edilən sözlərdən bəzisi başqa dekodlaşdırma kürəsinə daxil olacaq və dekodlaşdırma düzgün olmayacaq. Bəzi qəbul edilən sözlər t-dən çox sayda səhv baş vermiş olduğu halda sferalar arası sahəyə düşür.

Dekoderlər iki qrupa bölünür: natamam dekoderlər və tam dekoderlər.

Natamam dekoderlər ancaq dekodlaşdırma sferası daxilinə düşən qəbul edilmiş sözləri dekodlaşdırır. Qalan sözləri isə, harada ki, t-dən çox sayda səhvdən ibarət olur, dekoder düzəldilə bilməyən söz kimi götürür.

Tam dekoderlər isə qəbul edilən sözü ona ən yaxın olan kod sözünə (ən yaxın sfera mərkəzinə) dekodlaşdırır. Əgər ən yaxın kod sözünün sayı birdən çox isə (yəni bərabər məsafələrdə isə), onda onlardan hər hansı biri göndərilən kod sözü elan edilir. t saydan çox səhv baş verdiyi halda tam dekoderlər çox vaxt dekodlaşdırmanı düzgün həyata keçirmir.

(n,k) - kodunda $R = k/n$ kimi təyin olunan kəmiyyətə kodun sürəti deyilir.

Tutaq ki, c kod sözü verilib. c kodunun sıfırdan fərqli simvollarının (mövqelərinin) sayını göstərən $w(c)$ kəmiyyəti c kod sözünün Xemminq çəkisi adlanır.

Verilən $C = \{c_1, c_2, ..., c_M\}$ kodunda d^* minimal məsafəsi üçün aşağıdakı münasibət doğrudur:

$$d^* = \min_{\substack{c \in C \\ c \neq 0}} w(c) = w^*.$$

t sayda səhvi düzəltmək üçün w^* minimal çəkisi $w^* \geq 2t+1$ şərtini ödəyən kod tapmaq lazımdır.

Ən əvvəl sadə kodlar adlanan kodlara baxaq. Sadə kodlara aşağıdakı kodlar aiddir: cütlüyə tamamlamaqla sadə kod; təkrarlamaqla sadə kod, Xemminq kodları.

Cütlüyə tamamlamaqla sadə kodlar. Bu kodlar yüksək sürətli, lakin pis korreksiyaedici xarakteristikalıdırlar. Verilmiş k sayda informasiyaya bir bit əlavə olunur və beləliklə $k+1$ sayda bit alınır. $k+1$-ci bitin məzmunu k sayada bitin məzmunundan asılı olur. Əgər ilk k sayda mövqedə «1»-ə bərabər məzmunlu bitlərin sayı cüt olarsa, $k+1$-ci bitə «0», tək olarsa – «1» yazılır. Belə kodlar $(k+1, k)$ yaxud $(n, n-1)$ kodlardır və $d^* = 2$ - dir. Odur ki, bu kodlar vasitəsilə heç bir səhv düzəldilə bilmir. Belə kodlar bir səhvi aşkar etmək üçün istifadə olunur. Bəzən təkliyə tamamlamaqla sadə kodlar da istifadə olunur.

Təkrarlamaqla sadə kodlar. Bu kodlar kiçik sürətli kodlardır və yaxşı korreksiyaedici xarakteristikaya malikdir. Təkrarlamaqla sadə kodlar bir informasiya sözünü n dəfə təkrarlamaqla (adətən n tək ədəd olur) alınır. Belə kodlar $(n,1)$ -kodlardır və minimal məsafə n -dir. Bu kodlarla $(n-1)/2$ sayda səhv düzəldilə bilər.

Xemminq kodları. Hər bir m tam ədədi üçün $(2^m - 1,\ 2^m - 1 - m)$ - Xemminq kodu mövcuddur. Xemminq kodları bir səhvi düzəltməyə imkan verir və böyük m-lər üçün bu kodların sürəti vahidə yaxındır.

Xemminq kodlarının qurulmasına baxaq: Tutaq ki, məlumat mövqeləri $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ -dir. Bu mövqelər $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_\ell$ mövqelərinə kodlaşır, harada ki, ℓ

$$2^m \le \frac{2^\ell}{\ell + 1}$$

şərtini ödəyən ən kiçik tam ədəddir.

$1,2,...,\ell$ ədədlərini aşağıdakı kimi qruplara bölək: $R_1, R_2, ..., R_k$, harada ki, $k = \ell - m$. Qeyd olunmuş i üçün R_i çoxluğuna o ədədləri daxil edək ki, onların ikilik say sistemində yazılışında i-ci mövqe (vahiddən başlamaqla saydıqda) «1»-dən ibarət olsun. Aydındır ki, $R_1, R_2, ..., R_k$ çoxluqlarının birinci elementləri uyğun olaraq $1 = 2^0$, $2 = 2^1, ..., 2^{k-1}$, yəni ikinin qüvvətləri olacaq. β_i, $i = 1,2,...,\ell$ mövqelərindən indeksləri $1,2,...,2^{k-1}$ kəmiyyətlərinə bərabər olanları nəzarət mövqeləri adlanır, qalanları isə informasiya mövqeləri adlanır. β_i, $i = 1,2,...,\ell$ mövqelərindən informasiya mövqelərini indekslərin artmasına görə ardıcıl düzərək onlara uyğun olaraq $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ informasiya mövqelərinin qiymətlərini mənimsədək:

$$\beta_3 = \alpha_1,\ \beta_5 = \alpha_2,\ \beta_6 = \alpha_3, ..., \beta_{2^{k-1}+1} = \alpha_m .$$

Sonra isə nəzarət mövqeləri aşağıdakı kimi müəyyən edilir

$$\beta_{2^{i-1}} = \sum_{j \in R_i \setminus \{2^{i-1}\}} \beta_j,\ \ GF(2)\ ,\quad i = 1,2,...,k .$$

Burada $GF(2)$ yazısı cəmləmənin mod 2-yə görə aparılmasını göstərir.

Sonuncu düsturdan göründüyü kimi Xemminq kodları yaradılan zaman ardıcıllıqlı maşınlardan istifadə oluna bilər.

İndi Xemminq kodlarının dekodlaşdırılması sxeminə baxaq. Tutaq ki, $\beta_1', \beta_2', ..., \beta_\ell'$ simvolları qəbul edilmişdir. Aşağıdakı kimi hesablama aparılır:

$$s_i = \sum_{j\in R_i} \beta'_j, \quad GF(2), \ i = 1,2,...,k .$$

Əgər $s_i = 0, \ i = 1,2,...,k$ olarsa, onada heç bir səhv baş verməmişdir. Əks halda $(s_k s_{k-1}...s_1)$ ikilik koduna uyğun olan ədəd müəyyən edilir və bu indeks kimi götürülür. Tutaq ki, bu indeks γ-dır. Onda $\beta'_\gamma := 1 \oplus \beta'_\gamma$ korreksiyası həyata keçirilir. Sonra isə ötürülən kodun mövqelərini $\beta'_1, \beta'_2,..., \beta'_\ell$ kimi götürməklə dekodlaşdırma prosesi sona yetmiş hesab olunur.

Nümunə 2. Tutaq ki, informasiya sözləri $m = 4$ ikilik mövqedən ibarətdir: i_1, i_2, i_3, i_4. Belə sözlərin sayı $2^m = 16$ ədədinə bərabərdir və onlar cədvəl 1-də verilir. Bu m sayda mövqeyə k sayda mövqe əlavə edək. Nəticədə $\ell = m + k$ sayda mövqe alarıq, yəni $\ell = 4 + k$. k ədədini elə seçək ki,

$$2^m \le \frac{2^\ell}{\ell + 1} \quad \text{və ya} \quad 2^4 \le \frac{2^{4+k}}{4 + k + 1}$$

şərti ödənsin. Bu şərti ödəyən ən kiçik k ədədi 3-ə bərabərdir. Deməli, (i_1, i_2, i_3, i_4) sözlərinin kodlaşdırılması nəticəsində alınan kod $(\ell, m) = (7, 4)$ kodu olacaq.

R_1, R_2, R_3 çoxluqları aşağıdakı çoxluqlardır:

$$R_1 = \{1,3,5,7\}, \ R_2 = \{2,3,6,7\}, \ R_3 = \{4,5,6,7\} .$$

(i_1, i_2, i_3, i_4) sözü $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_7)$ sözünə kodlaşır. $\beta_1, \beta_2, \beta_4$ mövqeləri nəzarət mövqeləri, $\beta_3, \beta_5, \beta_6, \beta_7$ isə informasiya mövqeləridir. Kodlaşdırma zamanı

$$\beta_3 = i_1, \ \beta_5 = i_2, \ \beta_6 = i_3, \ \beta_7 = i_4 \qquad (1)$$

götürülür. Sonra isə $\beta_1, \beta_2, \beta_4$ yoxlayıcı mövqelərinin qiymətləri aşağıdakı düsturla təyin olunur.

$$\beta_1 = \beta_3 \oplus \beta_5 \oplus \beta_7, \ \beta_2 = \beta_3 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7, \ \beta_4 = \beta_5 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7 . \qquad (2)$$

(i_1, i_2, i_3, i_4) sözünə uyğun $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7)$ kodunun hər bir mövqesinin qiyməti (1) və (2) münasibətləri ilə hesablanaraq cədvəl 1-də verilmişdir.

Cədvəl 1.

i_1	i_2	i_3	i_4	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tutaq ki, ötürülən informasiya mövqeləri

$$\beta_1' = 1,\ \beta_2' = 1,\ \beta_3' = 0,\ \beta_4' = 0,\ \beta_5' = 0,\ \beta_6' = 0,\ \beta_7' = 1$$

kimi olan söz şəklində qəbul olunub. Ötürmə prosesində təhrif baş verib verməməsini yoxlayaq. Bunun üçün aşağıdakı hesablamaları aparaq:

$$s_1 = \beta_1' \oplus \beta_3' \oplus \beta_5' \oplus \beta_7' = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0,$$

$$s_2 = \beta_2' \oplus \beta_3' \oplus \beta_6' \oplus \beta_7' = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0,$$

$$s_3 = \beta_4' \oplus \beta_5' \oplus \beta_{65}' \oplus \beta_7' = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1.$$

$s_3 \neq 0$ olduğundan təhrifin baş verməsi aydın olur. $(s_3\, s_2\, s_1) = 100_2 = 4_{10}$ olduğundan təhrifə məruz qalan mövqe dördüncü mövqedir. Deməli, dördüncü mövqe $\beta_4 = 1 \oplus \beta_4' = 1 \oplus 0 = 1$ kimidir, ötürülən kod sözü isə $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7) = (1101001)$ sözüdür.

Kod sinifləri aşağıdakı qruplara bölünürlər:

-blok kodları;

-ağacvari kodlar;

-hesabı kodlar və i.a.

Blok kodları xətti və qeyri-xətti blok kodlarına bölünürlər.

Xətti blok kodları. Bu kodları şərh etmək üçün bəzi əlavə anlayışları verək.

Tutaq ki, *GF(q)* meydanından olan elementlərdən *n* uzunluqda sözlər yaxud n-ardıcıllıqlar düzəldilmişdir. Belə ardıcıllıqlar komponentlər üzrə toplama (bu zaman toplama *GF(q)* meydanı üzrə aparılır) və *GF(q)* meydanından olan skalyara vurma (skalyarın n-ardıcıllığın komponentinə vurulması *GF(q)* üzrə aparılır) əməlinə görə vektor fəzası əmələ gətirir. Bu vektor fəzası $GF^n(q)$ ilə işarə olunur. Ən əhəmiyyətli xüsusi hal $GF^n(2)$ fəzasıdır. Bu fəza *n* uzunluğuna malik ikilik sözlərdən ibarətdir. $GF^n(2)$-də vektorlar komponentlər üzrə toplandıqda *mod 2* üzrə toplama əməliyyatı baş verir.

Xətti blok kodu dedikdə $GF^n(q)$ vektor fəzasında hər hansı bir altfəza başa düşülür. Xətti blok kodların öyrənilməsində xətti fəzalar nəzəriyyəsi çox böyük köməklik göstərir. $GF^n(q)$ fəzasının istənilən bazis vektorları çoxluğu bu fəzada hər hansı bir altfəza təşkil edir. Odur ki, istənilən bazis vektorları çoxluğu müəyyən bir xətti kodun yaradılmasında istifadə olunur. $GF^n(q)$ fəzası $n \times n$ ölçülü və elementləri *GF(q)*-dən olan və ranqı n-ə bərabər olan kvadrat matrislə əlaqələndirilə bilər. Belə ki, bu matrisin sətr yaxud sütün vektorlarının müxtəlif mümkün xətti kombinasiyaları $GF^n(q)$

fəzasını təşkil edən n-ardıcıllıqlardır. $GF^n(q)$ fəzasının hər hansı bir altfəzasının elementləri $GF^n(q)$ fəzasını yaradan matrisin müəyyən sayda sətr yaxud sütun vektorlarının xətti kombinasiyalarıdır. Beləliklə, $GF^n(q)$ fəzasının bazis vektorlarının istənilən bir altçoxluğu hər hansı bir matrisin sətrləri kimi götürülməklə uyğun xətti kodun əmələgətirici matrisi kimi istifadə oluna bilər. (n,k)-xətti kodunun əmələgətirici matrisi $(k \times n)$ ölçülü matrisdir. Əmələgətirici matris məlum olduqda verilən informasiya sözü əsasında ona uyğun kod sözü aşağıdakı kimi qurulur:

$$c = i \cdot G, \quad GF(q). \tag{3}$$

Burada i ilə k uzunluqlu informasiya sözü, G ilə $(k \times n)$ ölçülü əmələgətirici matris, c ilə isə kod sözü işarə olunmuşdur.

Əgər c kod sözü ötürülən zaman təhrif baş veribsə, onda qəbul edilən söz G matrisinin əmələ gətirdiyi altfəzaya deyil, ona ortoqonal tamamlayıcıya daxil olacaq. Bu o deməkdir ki, qəbul edilən kod sözü bütün kod sözlərinə ortoqonaldır, yəni onların skalyar hasili sıfıra bərabərdir. Ümumiyyətlə, G matrisinin əmələgətirdiyi altfəzaya ortoqonal tamamlayıcı olan altfəza müəyyən bir H matrisinin əmələ gətirdiyi altfəza olur. H matrisi yoxlayıcı matris adlanır və $(n-k)\times n$ ölçüsünə malikdir və G ilə aşağıdakı şərti ödəyir.

$$G \cdot H^T = 0, \; GF(q). \tag{4}$$

(4) münasibətinə görə istənilən c kod sözü

$$c \cdot H^T = 0, \; GF(q) \tag{5}$$

şərtini ödəyir. (5) münasibəti qəbul edilən sözlərin kod sözü olduğunu, yəni təhrifə məruz qalıb-qalmadığını müəyyən etmək üçün istifadə oluna bilər. Əgər qəbul edilən υ sözü

$$\upsilon \cdot H^T = 0, \; GF(q)$$

şərtini ödəyirsə, onda o təhrifə məruz qalmayıb, əks halda ötürmə prosesində kanalda səhv baş verib.

G və H matrisləri (4) münasibəti ilə bir-birindən asılı olduğundan onlardan biri məlum olduqda o birisi qurula bilər. Tutaq ki, G matrisi sətrlər üzərində elementar əməliyyatlar vasitəsilə $G=(I\vdots P)$ şəklinə salınıb, harada ki, P matrisi $k\times(n-k)$ ölçülü matris, I isə $k\times k$ ölçülü vahid matrisdir. Onda H matrisi aşağıdakı kimi təyin oluna bilər:

$$H=(-P^T\vdots I).$$

Doğrudan da (H matrisində I altmatrisi $(n-k)\times(n-k)$ ölçülüdür)

$$G\cdot H^T=(I\vdots P)\cdot\begin{pmatrix}-P\\ \ldots\\ I\end{pmatrix}=P+P=0,\ GF(q).$$

İndi fərz edək ki, H yoxlayıcı matrisi $H=(P\vdots I_{(n-k)\times(n-k)})$ şəklindədir. Aydındır ki, P altmatrisi $(n-k)\times k$ ölçülü matrisdir. (4) şərtinə uyğun olaraq G matrisi üçün kanonik pilləvari şəkili tapaq. Aydındır ki, H^T matrisi aşağıdakı şəkildə olar

$$H^T=\begin{pmatrix}P^T\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ I_{(n-k)\times(n-k)}\end{pmatrix}.$$

Tutaq ki, G matrisi $G=(I_{k\times k}\vdots X)$ şəklində matrisdir, harada ki, X altmatrisi $k\times(n-k)$ - ölçülü matrisdir. (4) şərtinə görə alarıq:

$$G\cdot H^T=I_{k\times k}\cdot P^T+X\cdot I_{(n-k)\times(n-k)}=P^T+X=0.$$

Buradan da $X=-P^T$ alınır. Deməli, G matrisi $G=(I_{k\times k}\vdots -P^T)$ şəklində matris olar.

(n,k) - xətti blok kodlarının d^* minimal məsafəsi H matrisinin qurulmasından asılıdır: kod w-dən kiçik olmayan çəkiyə ancaq və ancaq o zaman malik olur ki, H matrisinin $w-1$ sütundan ibarət olan istənilən çoxluğunun elementləri xətti asılı olmasın. Buradan belə çıxır ki, (n,k) - kodu t sayda səhvi düzəldə bilməsi üçün onun $2t$ sayda istənilən sütunları sistemi xətti asılı olmamalıdır.

Deyilənləri nəzərə alaraq belə fikir yaranır: Əgər t sayda səhvi düzəldən (n,k)-xətti kodu yaratmaq istəyiriksə, belə ki, k informasiya mövqelərinin sayıdır, onda $GF(q)$ meydanının elementlərindən n sayda $(n-k)$ - ardıcıllıqlar düzəltmək lazımdır və bu n sayda ardıcıllıqların $2t$ saydasından ibarət olan istənilən bir altçoxluğun elementləri xətti asılı olmasın. Sonra bu $(n-k)$-ardıcıllıqlardan H matrisini düzəltmək lazımdır, H matrisini $(-P^T \vdots I)$ şəklinə gətirmək və bunun əsasında $G=(I \vdots P)$ əmələgətirici matrisini qurmaq lazımdır. Aydındır ki, k ədədi $n>k$ şərtini ödəməlidir. n-nin qiyməti deyilən şərtlər daxilində nə qədər kiçik olarsa, kodun artıqlığı (izafiliyi), yəni $n-k$ kəmiyyəti bir o qədər kiçik olar.

Xətti kodların dekodlaşdırılması üçün standart düzüm adlanan üsul yaxud da onun modifikasiyası istifadə olunur.

Yuxarıda adı çəkilən Xemminq kodu xətti blok kodlarının bir sinfidir. Məsələn (7,4)-Xemminq kodunun əmələgətirici və yoxlayıcı matrisləri aşağıdakı kimidir:

$$H=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Xətti blok kodlarının Rid-Maller kodları adlanan sinfi də mövcuddur və bu kodlar geniş istifadə olunurlar.

Dövri kodlar. Xətti kodların ən geniş yayılmış siniflərindən biri də dövrü kodlardır.

B xətti kodu hər biri $c=(c_0,c_1,...,c_{n-1})$ şəklində olan kod sözlərindən ibarətdir. Burada n kodun uzunluğu, yəni kod sözünün simvollarının sayıdır. $c_0,c_1,...,c_{n-1}$ isə uyğun olaraq birinci, ikinci ,…, n-ci simvollardır.

Əgər B xətti kodunda istənilən $c=(c_0,c_1,...,c_{n-1})$ kod sözü üçün $c'=(c_{n-1},c_0,c_1,...,c_{n-2})$ sözü də B xətti koduna aiddirsə, onda B xətti koduna dövrü kod deyilir. c' kod sözünə c kod sözünü bir mövqe sağa dövri sürüşdürməklə alınan kod sözü deyirlər. Dövri kodlara nümunə olaraq Xemminq kodlarını göstərmək olar.

Yuxarıda qeyd edildiyi kimi *GF(q)* üzərində hər bir n uzunluqlu xətti kodlar $GF^n(q)$ vektor fəzasının altfəzasıdır. Dövri kodlar isə altfəzanın xüsusi bir halıdır, belə ki, bu altfəzanın elementləri əlavə olaraq dövrilik xassəsinə malikdirlər.

Verilmiş *GF(q)* meydanı üzərində n-uzunluqlu dövri kodlar bu meydan üzərində təyin olunmuş $(n-1)$-dən böyük olmayan dərəcəyə malik çoxhədlilərlə sıx bağlıdır. Dövri kodlar nəzəriyyəsi halqa yaxud meydan üzərində təyin olunmuş çoxhədlilər halqası nəzəriyyəsinə əsaslanır.

$GF^n(q)$ fəzasında hər bir vektoru x qeyri-müəyyən dəyişənindən asılı $n-1$ dərəcəli çoxhədli kimi təsvir etmək olar. Vektorun komponentləri bu çoxhədlinin əmsalları kimi götürülür. Çoxhədlilər çoxluğu $GF^n(q)$ vektor fəzası strukturuna identik olan struktura malikdir. Digər tərəfdən bu çoxhədlilər çoxluğu $GF(q)[x]/(x^n-1)$ halqasının strukturuna malikdir. Halqada olduğu kimi çoxhədlilər çoxluğunda da

$$p_1(x)\cdot p_2(x) = R_{x^n-1}[p_1(x)p_2(x)] \qquad (6)$$

kimi vurma əməliyyatı təyin olunub. (6) münasibətində sol tərəfdə vurma əməliyyatı $p_1(x)$ və $p_2(x)$ çoxhədlilərinin (x^n-1) moduluna görə vurulması əməliyyatı, sağ tərəfdə isə kvadrat mötərizə daxilində $p_1(x)$ və $p_2(x)$ çoxhədlilərinin adi vurulmasıdır. (6) münasibəti göstərir ki, dövri kodlara uyğun çoxhədlilər çoxluğunda $p_1(x)$ *və* $p_2(x)$ çoxhədlilərinin vurulmasının nəticəsi olaraq onların adi qaydada vurulmasından alınan hasilin x^n-1 çoxhədlisinə bölünməsindən alınan qalığı götürülür. c kod sözünün dövri sürüşməsi uyğun $c(x)$ çoxhədlisinin x qeyri-müəyyən dəyişəninə (x^n-1) modulu üzrə vurulması kimi yazıla bilər:

$$x\cdot c(x) = R_{x^n-1}[x\cdot c(x)].$$

Beləliklə, hər hansı bir kodun kod sözləri çoxhədli şəklində verilirsə, onda kod $GF(q)[x]/(x^n-1)$ halqasının altçoxluğudur. Belə kod o zaman dövri kod olur ki, o hər bir $c(x)$ ilə yanaşı $x \cdot c(x)$ çoxhədlisini də özündə saxlasın.

B kod çoxhədliləri çoxluğundan ən kiçik dərəcəli və sıfırdan fərqli olan çoxhədlini götürək və onun dərəcəsini $n-k$ ilə işarə edək (o dərəcə $(n-1)$-dən kiçik olmalıdır). Seçilmiş çoxhədlini meydan elementinə vuraq və, beləliklə, onu çevrilmiş şəklə salaq, yəni x^{n-k}-in əmsalı «1» olsun. B kodu xətti olduğundan alınan çoxhədli də B-yə daxil olacaq. B çoxluğunda yeganə sıfırdan fərqli ən kiçik dərəcəli çevrilmiş çoxhədli B kodunun əmələgətirici çoxhədlisi adlanır və $g(x)$ ilə işarə olunur.

Kodlaşdırma nəzəriyyəsində isbat olunur ki, dövri kod $g(x)$ əmələgətirici çoxhədlisinin k dərəcədən kiçik olan dərəcəli çoxhədlilərə hasilindən alınan çoxhədlilərdən ibarət olur. Kodlaşdırma nəzəriyyəsində həm də isbat olunur ki, $g(x)$ əmələgətirici çoxhədlili n uzunluqlu dövri kod ancaq və ancaq $g(x)$ çoxhədlisi $x^n - 1$ çoxhədlisini böldükdə mövcuddur. Buradan belə çıxır ki, dövri kodun $g(x)$ əmələgətirici çoxhədlisi üçün

$$x^n - 1 = g(x) \cdot h(x) \qquad (7)$$

bərabərliyi hər hansı bir $h(x)$ çoxhədlisi halında doğrudur.

(7) münasibətində $h(x)$ çoxhədlisi k dərəcəli çoxhədli olub yoxlayıcı çoxhədli adlanır. Aydındır ki, hər bir $c(x)$ dövri kodu üçün

$$R_{x^n-1}[h(x) \cdot c(x)] = 0 \qquad (8)$$

şərti ödənir. (8) münasibəti qəbul edilən kodun düzgünlüyünü, yəni səhvsiz qəbul edilməsini yoxlamaq üçün istifadə oluna bilər.

Tutaq ki, υ(x) çoxhədlisi qəbul edilib. Əgər

$$R_{x^n-1}[h(x) \cdot \upsilon(x)] = 0$$

olarsa, onda υ(x) çoxhədlisi düzgün qəbul edilib. Əks halda υ(x) çoxhədlisi səhvdir.

Fərz edək ki, $c(x)$ kod çoxhədlisi ötürülüb və *υ(x)* çoxhədlisi qəbul edilib. Aşağıdakı kimi təyin olunan çoxhədliyə səhv çoxhədlisi deyilir:

$$e(x) = \upsilon(x) - c(x).$$

Əgər $e(x) = 0$ olarsa, onda kod düzgün qəbul edilmiş hesab olunur. $e(x)$-in sıfırdan fərqli əmsalları o mövqelərdə dayanır ki, o mövqelərdə səhvlər baş vermiş olsun. $e(x)$ çoxhədlisi $(n-1)$ dərəcəli çoxhədlidir.

$i(x)$ ilə informasiya çoxhədlisi işarə olunur. Bu çoxhədlinin dərəcəsi $(k-1)$-dir. Deməli, $c(x)$ kod çoxhədlisi

$$c(x) = g(x) \cdot i(x)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Yuxarıda adı çıkilən çoxhədlilərlə yanaşı sindrom çoxhədlisi kimi adlandırılan çoxhədli də istifadə olunur və bu aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$s(x) = R_{g(x)}[\upsilon(x)]. \tag{9}$$

Burada υ(x) qəbuledilən çoxhədlidir. Aydındır ki, əgər $\upsilon(x) = c(x)$ olarsa, yəni ötürmə zamanı heç bir səhv baş verməyibsə, onda (9) münasibətinə görə $s(x) = 0$ olar. Əks halda $s(x) \neq 0$ olar. $s(x)$ çoxhədlisi $(n-k-1)$ dərəcəli çoxhədlidir. Təyinə görə

$$s(x) = R_{g(x)}[\upsilon(x)] = R_{g(x)}[c(x) + e(x)] = R_{g(x)}[c(x)] + R_{g(x)}[e(x)] =$$
$$= R_{g(x)}[i(x) \cdot g(x)] + R_{g(x)}[e(x)] = R_{g(x)}[e(x)]. \tag{10}$$

Beləliklə, dövri kodlar üçün aşağıdakı çoxhədlilər istifadə olunur:

əmələgətirici çoxhədli - $g(x)$, deg $g(x) = n-k$,
yoxlayıcı çoxhədli - $h(x)$, deg $h(x) = k$,
informasiya çoxhədlisi - $i(x)$, deg $i(x) = k-1$,
kod çoxhədlisi - $c(x)$, deg $c(x) = n-1$,
səhv çoxhədlisi - $e(x)$, deg $e(x) = n-1$,
qəbuledilmiş çoxhədli - $\upsilon(x)$, deg $\upsilon(x) = n-1$,
sindrom çoxhədlisi - $s(x)$, deg $s(x) = n-k-1$.

(10) münasibəti qəbuledilən dövri kodların dekodlaşdırılması üçün böyük əhəmiyyətə malikdir.

Kodlaşdırma nəzəriyyəsində isbat olunur: Tutaq ki, d^* dövri kodun minimal məsafəsidir. Onda $d^*/2$-dən kiçik çəkiyə malik hər bir səhv çoxhədlisinə yeganə bir sindrom çoxhədlisi uyğundur.

Bu deyilən faktdan istifadə etməklə dövri kodların dekotlaşdırılması üçün müəyyən bir qayda yaratmaq olar. Belə ki, qəbuledilən $\upsilon(x)$ çoxhədlisinə görə (9) düsturu ilə $s(x)$ sindron çoxhədlisi hesablanır və alınan sindron çoxhədlisinə görə $e(x)$ səhv çoxhədlisi tapılır. $e(x)$ səhv çoxhədlisi tapıldıqdan sonra

$$c(x) = \upsilon(x) - e(x)$$

münasibətinə əsasən $c(x)$ kod çoxhədlisi hesablanır.

Bu deyilən qayda ilə $c(x)$ kod çoxhədlisinin hesablanmasında ortaya çıxan çətinlik tapılmış $s(x)$ çoxhədlisinə görə $e(x)$ çoxhədlisinin müəyyənləşdirilməsidir. Bu çətinliyi aradan qaldırmaq üçün əvvəlcədən bütün mümkün olan səhvlər çoxhədlilərini və onlara uyğun $s(x)$ sindrom çoxhədlilərini hesablayıb bir cədvəldə saxlamaq lazımdır.

Yuxarıda deyilənlərdən göründüyü kimi $g(x)$ əmələgətirici çoxhədlisi məlum olarsa, dövri kodların yaradılması və bu kodlarda təhriflərin tapılması müasir rəqəm hesablama texnikasının tətbiqi ilə öz həllini tapa bilər.

Dövri kodların yaradılmasında əsas məsələlərdən biri, demək olar ki, ən əsası və çətini $g(x)$ əmələgətirici çoxhədlisinin qurulmasıdır.

Dövri kodların əmələgətirici çoxhədlilərinin qurulması üsulları əsasında müxtəlif sinifləri mövcuddur. Bunlara aşağıdakıları aid etmək olar:

-Xemminq kodları;
-Fayr kodları;
-İkilik Qoleya kodları;
-Kvadratik çıxıq-kodları;
-BÇX kodları;
-Rid-Solomon kodları;
-Yustesen kodları və i.a.

Yuxarıda qeyd etmişdik ki, $g(x)$ çoxhədlisi ancaq və ancaq $x^n - 1$ çoxhədlisinin böləni olduqda n uzunluqlu dövri kodlar üçün əmələgətirici çoxhədli ola bilər. Bu isə $g(x)$ çoxhədlisini verilən n üçün $x^n - 1$ çoxhədlisinin sadə vuruqlarının müəyyən saydasının hasili kimi götürməyə imkan verir. Yəni əgər

$$x^n - 1 = f_1(x) \cdot f_2(x), \ldots, f_s(x)$$

isə, harada ki, $f_\alpha(x), \alpha = 1, \ldots, s$ sadə çoxhədlilərdir, onda bu sadə çoxhədlilərin istənilən altçoxluğunun hasili $g(x)$ kimi götürülə bilər.

Dövri kodlar arasında pirimitiv uzunluqlu kod, yaxud primitiv kod daha geniş istifadə olunur. Kodun uzunluğu olan n kəmiyyəti hər hansı bir tam m ədədi üçün $n = q^m - 1$ şərtini ödəyərsə, onda n-ə primitiv uzunluq, dövri koda isə primitiv dövri kod deyilir.

Tutaq ki, $n = 15$. Aydındır ki, $x^{15} - 1$ çoxhədlisi aşağıdakı kimi sadə çoxhədlilərə ayrıla bilir:

$$\begin{aligned} x^{15} - 1 = (x+1)(x^2+x+1)(x^4+x+1) \times \\ \times (x^4+x^3+1)(x^4+x^3+x^2+x+1), \; GF(2). \end{aligned} \tag{11}$$

(11) münasibətində 5 sayda sadə çoxhədli iştirak edir. Bu sadə çoxhədlilərin 32 altçoxluğu mümkündür. Bunlardan ikisi tirival haldır, qalan 30-u isə tirival deyildir. Deməli 30 əmələgətirici çoxhədli qurmaq olar. Nümunə kimi sonuncu iki sadə çoxhədlini götürək və aşağıdakı əmələgətirici çoxhədliyə baxaq:

$$g(x) = (x^4+x^3+1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = x^8+x^4+x^2+x+1. \tag{12}$$

(12)-də $g(x)$ çoxhədlisinin dərəcəsi $n-k=8$-dir. Deməli $k=7$-dir. $g(x)$-in çəkisi 5-dir. Bu isə göstərir ki, (12) münasibəti ilə qurulan $g(x)$ əmələgətiricili dövri kod (15,7,5)- kodudur və bu kod iki səhvi düzəltməyə imkan verir.

Sonlu meydanlar (Qalua meydanları) nəzəriyyəsindən məlum olduğu kimi $GF(q^m)$ meydanının hər bir sıfırdan fərqli elementi $x^{q^m-1} - 1$ çoxhədlisinin köküdür. Odur ki, genişlənmiş $GF(q^m)$ meydanında aşağıdakı doğrudur:

$$x^{q^m-1}-1=\prod_j (x-\beta_j)\,. \qquad (13)$$

Burada β_j elementi $GF(q^m)$ meydanın sıfırdan fərqli elementidir. (13) münasibətində vurma əməliyyatı $GF(q^m)$ meydanının bütün sıfırdan fərqli elemetləri üçün aparılır.

Digər tərəfdən, $x^{q^m-1}-1$ çoxhədlisi sadə vuruqlara yeganə qaydada ayrılır:

$$x^{q^m-1}-1=f_1(x)\ldots f_s(x)\,. \qquad (14)$$

(13), (14) –dən alınır ki, $f_1(x),\ldots,f_s(x)$ sadə çoxhədlilərindən hər biri (13) –ün şağ tərəfindən olan bəzi xətti çoxhədlilərə ayrılır, yəni β_j-lərdən bəziləri qeyd olunmuş ℓ üçün $f_\ell(x)$-ın köküdür (genişlənmiş meydanda). Bu o deməkdir ki, qeyd edilmiş j üçün β_j elementinin minimal çoxhədlisi $\{f_1(x),\ldots,f_s(x)\}$ çoxluğundan hər hansı bir çoxhədlidir və β_j elementi hansısa bir əmələgətirici çoxhədlinin köküdür.

Kodlaşdırma nəzəriyyəsində isbat olunur ki, $GF(q^m)$ meydanının $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$ elementləri $g(x)$ əmələgətirici çohdəlisinin kökü isə, onda $c(x)$ çoxhədlisi ancaq və ancaq o zaman dövri kod çoxhədlisi olur ki,

$$c(\beta_1)=c(\beta_2)=\ldots=c(\beta_r)=0$$

olsun.

Əgər kökləri $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$ olan (bu elementlər $GF(q^m)$ meydanının elementləridir) $g(x)$ əmələgətirici çoxhədlisini qurmaq istəsək onda bu elementlərin minimal çoxhədlilərini tapmalıyıq. Tutaq ki, bu çoxhədlilər $f_1(x),f_2(x),\ldots,f_r(x)$-dir. Onda $g(x)$ aşağıdakı kimi təyin oluna bilər:

$$g(x)=\text{ƏKOB}[f_1(x),f_2(x),\ldots,f_r(x)]\,. \qquad (15)$$

Qalua meydanları nəzəriyyəsində isbat olunur ki, əgər $f(x)$ çoxhədlisi $GF(q^m)$ meydanından olan β elementinin $GF(q)$

meydanı üzrə minimal çoxhədlisi isə, onda $f(x)$ həm də β^q elementinin də minimal çoxhədlisidir. β və β^q elementləri qoşma elementlər adlanır. $f(x)$ çoxhədlisinin r sayda qoşma elementi mövcud ola bilər və elementlər aşağıdakı çoxluqdandır:

$$\{\beta, \beta^q, \beta^{q^2}, ..., \beta^{q^{r-1}}\}.$$

Burada r ədədi $\beta^{q^r} = \beta$ şərtini ödəyən ən kiçik tam ədəddir. Aydındır ki, $\beta^{q^m} = \beta$ və odur ki, $r \leq m$. Deməli, β elementinin minimal çoxhədlisi olan $f(x)$ aşağıdakı kimi tapıla bilər:

$$f(x) = (x-\beta)(x-\beta^q)...(x-\beta^{q^{r-1}}). \tag{16}$$

Nümunə kimi $GF(256) = GF(2^8)$ meydanının primitiv α elementini götürək. Qoşma elementlər

$$\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4\ \alpha^{16}\ \alpha^{32}\ \ \alpha^{64}\ \ \alpha^{128}\}$$

çoxluğunun elementləri olacaq. Sonuncu element α^{128}-dir. Çünki $\alpha^{255} = 1$ və, beləliklə, $\alpha^{256} = \alpha$. Deməli, α elementinin minimal çoxhədlisi aşağıdakı kimidir:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^4)(x-\alpha^{16})\times \\ &\times (x-\alpha^{32})(x-\alpha^{64})(x-\alpha^{128}). \end{aligned} \tag{17}$$

(17) münasibətində mötərizələri açdıqdan sonra əmsallar hamısı GF(2) meydanının elemetləri olacaq.

Deyilənləri aşağıdakı kimi yuvarlaqlaşdırmaq olar. Əgər *GF(q)* meydanı üzərində n uzunluqda dövrü kodlar yaratmaq istəyiriksə, onda aşağıdakı kimi hərəkət etməliyik:

1. m dərəcəli primitiv çoxhədli götürüb $GF(q^m)$ meydanını qururuq;

2. $GF(q^m)$ meydanının istənilən bir sıfırdan fərqli elementlərini götürürük, məsələn: $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$;

3. istənilən $j = 1..., r$ üçün β_j elementinin qoşma elementlərini tapırıq və bu elementlərə əsasən (16) düsturuna analoji olaraq $f_j(x)$ minimal çoxhədlisini hesablayırıq;

4. (15) düsturu ilə $g(x)$ əmələgətrici çoxhədlisini hesablayırıq.

Dövri kodların bir sinfi BÇX kodlarıdır. Bu kodlar aşağıdakı kimi təyin olunur.

Tutaq ki, q və m verilib və β elementi $GF(q^m)$ meydanının istənilən n tərtibli elementidir. Onda istənilən müsbət t tam ədədi və istənilən j_0 tam ədədi üçün uyğyn BÇX kodu əmələgətirici çoxhədlisi

$$g(x) = \text{ƏKOB}\ [f_{j_0}(x), f_{j_0+1}(x), ..., f_{j_0+2t-1}(x)]$$

olan n uzunluqlu dövri koddur. Burada $f_j(x)$ çoxhədlisi β^j elementinin minimal çoxhədlisidir və $GF(q)$ meydanı üzərindədir.

Tez-tez $j_0 = 1$ seçilir. Bu da ən kiçik dərəcəli $g(x)$ çoxhədlisinə gətirib çıxarır. Adətən böyük uzunluqlu kodlar tələb olunur. Onda β elementi kimi meydanın ən böyük tərtibə malik elementi, yəni primitiv elementi götürülür.

BÇX kodlarının geniş istifadə olunan və əhəmiyyətli altçoxluğu Rid-Solomon kodlarıdır. Bu kodlarda kod sözünün simvolları əlifbasının multiplikativ tərtibi kodun uzunluğuna bölünür. Beləliklə, $m = 1$ və $GF(q)$ simvollar meydanı ilə səhvlər lokatoru meydanı $GF(q^m)$ üst-üstə düşür. α -nı primitiv element götürəcəyik. Onda

$$n = q^m - 1 = q - 1 .$$

$\beta \in GF(q)$ elementinin $GF(q)$ üzərində minimal çoxhədlisi aşağıdakına bərabərdir:

$$f_\beta(x) = x - \beta .$$

Belə ki, simvollar meydanı və səhvlər lokatorlarının meydanı üst-üstə düşür, bütün minimal çoxhədlilər xəttidir. t sayda səhvi düzəldən Rid-Solomon kodlarında adətən $j_0 = 1$ olduğu nəzərə alınır və ona görə əmələgətirici çoxhədli aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$g(x) = (x - a)(x - a^2)...(x - a^{2t}) .$$

Bu $g(x)$ çoxhədlisinin dərəcəsi həmişə $2t$ -yə bərabərdir və buradan da $n - k = 2t$ alınır.

Rid-Solomon kodlarında j_0 üçün başqa qiymətlər də götürmək olar. j_0-ın qiymətini ağlabatan seçməklə bəzən koderi sadələşdirmək olur. Beləliklə,

$$g(x) = (x - \alpha^{j_0})(x - \alpha^{j_0+1})...(x - \alpha^{j_0+2t-1}) .$$

BÇX kodlarının və o cümlədən, Rid-Solomon kodlarının dekodlaşdırılması üçün Piterson-Qorensteyn-Çirler alqoritmi, Berlekemp-Messi alqoritmi, Forni alqoritmi, çoxhədlilərin ən böyük ortaq böləninin tapılması üçün Evklid alqoritminə əsaslanan üsul və s. istifadə olunur.

Ağacvari kodlar. Müasir rabitə sistemlərində məlumatların çox böyük sürətlə ötürülməsini təşkil etmək lazım gəlir. Belə sistemlərdə ötürülən informasiyaların qorunmasına da tələbat böyük sürətlə artır. Blok kodlarından istifadə zamanı verilənlər axını hər birində k sayda informasiya simvolu olmaqla bloklara bölünür və hər blok n simvoldan ibarət kodlara çevrilir. k-simvolluq bloklar ardıcıllığı koderlə əlaqələndirilmir.

Başqa kodlaşdırma sxemində verilənlər axını daha kiçik k_0 uzunluqda bloklara bölünür. Bu kiçik bloklar informasiya simvollarının kadrları adlanırlar. Bu kadrlara bir neçə informasiya simvolu daxil olur. İnformasiya simvolları kadrları n_0 uzunluqlu kod simvolları kadrlarına kodlaşırlar. Lakin hər bir informasiya simvolları kadrı ayrı kod simvolları kadrlarına kodlaşmaq əvəzinə kodlaşdırma prosesində əvvəlki m sayda informasiya simvolları kadrları da nəzərə alınır. Ona görə də kodlaşdırma prosedurası kod simvolları kadrlarını bir-biri ilə bağlayır.

Belə yolla alınan kodlar ağacvari kodlar adlanır. Ən əhəmiyyətli ağacvari kodlar bağlı kodlar adı ilə geniş yayılmışdır. Bağlı kodlar ağacvari kod olmaqla yanaşı onlar əlavə xəttilik və zamana görə sabitlik xassələrinə malikdirlər.

Ədəbiyyat

1. R.H.Fərəcov, H.V.Şimiyev. Diskret riyaziyyat. Bakı, Bakı Dövlət Universiteti nəşriyyatı, 1998, 216 s.
2. R.H.Fərəcov, R.M.Cavadov. Diskret riyaziyyat. Bakı, Bakı Dövlət Universiteti nəşriyyatı, 1992, 54 s.
3. Ə.U.Quliyev. Riyazi məntiq və alqorifmlər nəzəriyyəsi. Bakı, «Maarif» nəşriyyatı, 1996, 312 s.
4. K.B.Mənsimov. Diskret riyaziyyatdan mühazirələr. Bakı, BDU nəşriyyatı, 2008, 160 s.
5 Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т.Ы. Под общей редакцией С.В.Яблонского и О.Б.Лупанова. М.:Наука, 1974.
6. Н.И.Кондаков. Логический словарь – справочник. М.: Наука, 1975, 720 с.
7. В.Б.Кудрявцев, С.В.Алешин, А.С.Подколзин. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985, 320 с.
8. С.В.Яблонский. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
9. В.А.Горбатов. Основы дискретной математики. М.: Высшая школа, 1986, 311 с.
10. Р.Блейхут. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки. Пер.с англ. – М.: Мир, 1986, 576 с.
11. Бохмани Д., Постхоф Х. Двоичные динамические системы. М.: «Энергоатомиздат», 1986.
12. Дж.Хопкрафт, Р.Мотвани, Дж.Ульман. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2002, 528 с.
13. В.М.Фомичев. Дискретная математика и криптология. Курс лекции. М.: Диалог-МИФИ, 2003, 400 с.
14. Г.П.Гаврилов, А.А.Сапоженко. Сборник задач по дискретной математики. М.: Наука, 1977, 368 с.
15. С.К.Клини. Математическая логика. М.: Мир, 1973, 480 с.

ФИКРАТ ГЮЛАЛИ оглы ФЕЙЗИЕВ

Доктор физико-математических наук

НЕКОТОРЫЕ ГЛАВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

(Учебное пособие)

Fikrət Güləli oğlu Feyziyev 1956-cı ildə Cəlilabad rayonunun Tahirli kəndində anadan olmuşdur. 1973-cü ildə həmin rayonun Cəngan kənd orta məktəbini bitirmişdir.

1978-ci ildə BDU-nun «Tətbiqi riyaziyyat» fakültəsini bitirərək Sumqayıtda yerləşən «Neftkimyaavtomat» Elmi-tədqiqat və Layihə İnstitutunda işləməyə başlamışdır. 1992-ci ildən Sumqayıt Dövlət Universitetində (keçmiş Azərbaycan Sənaye İnstitutu) işləyir.

1990-cı ildə namizədlik dissertasiyası müdafiə etmişdir. 2003-cü ildə doktorluq dissertasiyası müdafiə edərək fizika-riyaziyyat elmləri doktoru alimlik dərəcəsi almışdır. 50-dən çox elmi əsəri, o cümlədən 3 monoqrafiyası, 2 dərs vəsaiti çap olunmuşdur.

Hal hazırda Sumqayıt Dövlət Universitetinin «Diferensial tənliklər və riyazi kibernetika» kafedrasının müdiri, professor vəzifəsində çalışır.