R.H. FƏRƏCOV, H.V. ŞİMİYEV

DİSKRET RİYAZİYYAT

Azərbaycan Respublikası Təhsil
Nazirliyi tərəfindən dərs vəsaiti
kimi təsdiq edilmişdir

Bakı Universiteti nəşriyyatı
Bakı - 1998

UDK 519.95.

Elmi redaktor:

K.B. Mənsimov, M.Ə. Rəsulzadə adına BDU-nun "Riyazi modelləşdirmə və əməliyyatlar tədqiqi" kafedrasının əməkdaşı, fizika - riyaziyyat elmləri doktoru, professor.

Rə'y verənlər:

T.A. Əliyev, Azərbaycan Respublikası EA-nın Kibernetika İnstitutunun direktoru, AR EA-nın müxbir üzvü, texnika elmləri doktoru, professor.

V.Qasımov, M.Ə. Rəsulzadə adına BDU-nun "Cəbr və topologiya" kafedrasının müdiri, fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent.

R.H. Fərəcov, H.V. Şimiyev.

Diskret riyaziyyat. Dərs vəsaiti. - Bakı, BDU nəşriyyatı, 1998, 216 səh.

Dərs vəsaiti riyazi kibernetika və nəzəri informatikanın əsasını təşkil edən diskret riyaziyyatın məntiq cəbri və k-qiymətli məntiq funksiyaları və onların minimallaşması bölmələrini əhatə edir.

Kitab universitetlərin riyaziyyat, tətbiqi riyaziyyat, iqtisadi kibernetika, EHM-nin riyazi və proqram tə'minatı ixtisasları üzrə hazırlanan bakalavr pilləsi üçün dərs vəsaiti kimi nəzərdə tutulmuşdur. Ondan texniki universitetlərin hesablama texnikası və informatika, proseslərin avtomatlaşdırılması fakültələrinin bakalavr və magistrləri, tətbiqi riyaziyyat və kibernetika sahəsində çalışan aspirant, mühəndis və mütəxəssislər də istifadə edə bilərlər.

$Ф\frac{160205000-020}{658(07)-29}29-98$

Valideynlərimizin və müəllimlərimizin əziz xatirəsinə həsr olunur.

ÖN SÖZ

Diskret riyaziyyatda çox önəmli rolu olan funksional sistemlər nəzəriyyəsinin diskret riyaziyyatda oynadığı rolu, riyazi analizin kəsilməz riyaziyyatda oynadığı rolla müqayisə etmək olar.

Mə'lumdur ki, funksional sistemlər nəzəriyyəsi diskret çeviricilərin, daha doğrusu, müəyyən giriş və çıxışa malik qurğuların işini təsvir edən funksiyaların öyrənilməsi ilə məşğul olur. Bu funksiyalar siyahısına Bul funksiyalarını, k-qiymətli məntiq cəbri funksiyaları, məhdud-determinik (avtomat) funksiyaları və hesablanan funksiyaları aid etmək olar. Universitetlərin üçpilləli təhsil sisteminə keçməsi anına qədər diskret riyaziyyatın əsas bölmələri funksional sistemlər, kombinator analiz, qraflar və şəbəkələr, kodlaşdırma nəzəriyyəsi və s. bölmələrdən ibarət idi. 1997-ci ilin sentyabrında üçpilləli təhsil sisteminə keçilməsi ilə əlaqədar olaraq tədris proqramında müəyyən dəyişikliklər edildi. Məsələn, qraflar nəzəriyyəsi başqa bölməyə keçirildi.

Professor R.H. Fərəcov diskret riyaziyyatın yuxarıda sadalanan bütün bölmələrini əhatə edən kitab nəşr etdirməyi təklif edirdi. Mən isə təklif edirdim ki, bunu (müəyyən çətinlikləri - maddi vəziyyəti, nəşr çətinliyini, kitabın həcmcə böyük olmasını və s. nəzərə almaqla) iki kitab şəklində nəşr etdirək. Çoxlu müzakirələrdən sonra mənim təklif etdiyim variantın üzərində dayandıq. Və kitabın bu şəkildə - Bul funksiyaları və k - qiymətli məntiq funksiyaları və onların minimallaşması bölmələrini əhatə edən formada çap olunmasını qərara aldıq.

Rzabala müəllim kitabın tezliklə işıq üzü görməsini arzulayırdı. Çox təəssüf ki, sıralarımızdan vaxtsız gedən Rzabala müəllimə bunu görmək qismət olmadı. Amansız ölüm onu haqqın dərgahına qovuşdurdu. Altmış illik yubileyini 1997-ci ilin iyulunda qeyd etdiyimiz Rzabala müəllim Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin təməl daşını qoyanlardan biri olmaqla yanaşı, yüzə yaxın elmi məqalənin, üç monoqrafiyanın və dörd kitabın müəllifidir. Onun "Xətti ardıcıllıq maşınları" monoqrafiyası dünyada bu sahədə yazılmış ikinci kitabdır. (Birinci kitab Amerika alimi A. Qillə məxsusdur). O iyirmi nəfər alim (iki elmlər doktoru və on səkkiz elmlər namizədi) yetişdirmişdir.
Allah ona rəhmət eləsin !

Öz dəyərli məsləhətləri və qeydləri ilə kitabın daha məzmunlu olmasına köməklik göstərmiş Azərbaycan Respublikası EA-nın müxbir üzvü, t.e.d professor T.A. Əliyevə, kitabın elmi redaktoru fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor K.B. Mənsimova, "Cəbr və topologiya" kafedrasının müdiri, dosent V. Qasımova və kitabın işıq üzü görməsinə köməklik göstərən "Riyazi kibernetika" kafedrasının əməkdaşlarına təşəkkür edirəm. Kitabın kompüter yığımlarının yoxlanmasına və redaktə olunmasına böyük əmək sərf etmiş M.Ə. Rəsulzadə adına BDU-nin şərqşünaslıq və filologiya fakültələrinin tələbələri - qızlarım Aygün və Günaya xüsusi minnətdarlığımı bildirirəm.

Yanvar 1998 Həşim Şimiyev

GİRİŞ

Diskret riyaziyyat-riyaziyyatın bir hissəsi olmaqla yanaşı, xüsusi spesifikliyə-diskretliyə malikdir. Geniş mə'nada diskret riyaziyyat ədədlər nəzəriyyəsini, cəbri, riyazi məntiqi və bu əsrin ortalarında hesablama elektron maşınlarının tətbiqi sayəsində yaranmış bir çox nəzəriyyələri özündə cəmləşdirir. Dar mə'nada isə elmin bu sahəsi funksional sistemlər nəzəriyyəsi, qraflar və şəbəkələr nəzəriyyəsi, kodlaşdırma nəzəriyyəsi, kombinator analiz, tamqiymətli proqramlaşdırma və s. sahələri əhatə edir. İndiki mərhələdə diskret riyaziyyat riyazi kibernetikanın əsası olmaqla yanaşı, riyazi biliklərin ən vacib hissələrindən biri sayılır.

Təqdim olunan kitab M.Ə. Rəsulzadə adına BDU-nin "Riyazi kibernetika" kafedrasının əməkdaşları tərəfindən "Diskret riyaziyyat" kursu üzrə hazırlanan dərs vəsaitləri seriyasından birincidir və məntiq cəbri və k-qiymətli məntiqlə bağlı əsas faktları özündə əks etdirir. O, müəlliflərin uzun illər ərzində M.Ə. Rəsulzadə adına BDU-nin tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsində oxuduqları mühazirələr əsasında yazılmışdır.

Kitab iki hissədən və dörd fəsildən ibarətdir. Birinci hissə Bul və k-qiymətli məntiq funksiyaları nəzəriyyəsinə həsr olunmuşdur. Birinci fəsildə Bul funksiyaları haqqında ümumi mə'lumat, onların dəyişənlərə görə ayrılışları, Bul funksiyaları sisteminin tamlıqı və qapalılığı məsələləri şərh olunmuşdur. İkinci fəsil k-qiymətli məntiq funksiyalarının müxtəlif ayrılışlarını, tamlıq və qapalılıq məsələlərini əhatə etməklə yanaşı, praktik məsələlərdə geniş tətbiqi olan bir sıra tam sistemlərin öyrənilməsini də özündə əks etdirir. İkinci hissə Bul funksiyalarının və çoxqiymətli məntiq funksiyalarının minimallaşması məsələsinə həsr olunmuşdur. Üçüncü fəsildə Bul funksiyalarının, dördüncü fəsildə isə k-qiymətli məntiq funksiyalarının minimallaşması məsələlərinə baxılır.

Çoxqiymətli (k-qiymətli) məntiqlərə ikiqiymətli məntiqin ümumiləşdirmələri kimi baxmaq olar. Elə buna görə də k-qiymətli məntiqlə bağlı bə'zi tə'riflər, riyazi faktlar və onların isbat sxemləri məntiq cəbrinə (və ya Bul cəbrinə) analoji qaydada aparıla bilər. Bununla belə, k-qiymətli məntiqin özünəməxsus xüsusiyyətləri də vardır. Bə'zi məsələlərin həlli məntiq cəbrindən fərqli olaraq, dar xarakter daşıyır, bə'zilərinin isə həlli tapılmamışdır. Çoxqiymətli məntiqin nəzəri riyaziyyat baxımından yuxarıda qeyd edilmiş əhəmiyyəti ilə yanaşı, onun müasir hesablama texnikası və informatika, idarəedici sistemlərin rasional sintezi baxımından da böyük əhəmiyyəti vardır.

Belə məsələlərin ən vaciblərindən biri çoxqiymətli verilənlərin təsviri və işlənməsi ilə bağlıdır. Həmin problem texniki obyektlərin məntiqi idarəetmə sistemlərinin proyektləndirilməsində və yaradılmasında, təsvirlərin (obrazların) analiz və sintez edilməsində, ekspert sistemlərindəki verilənlərin analiz və klassifikasiyası zamanı nəzarət, diaqnostika və s. məsələlərinin həllində meydana çıxır.

Burada ən'ənəvi dərs vəsaitlərində şərh olunan çoxqiymətli məntiq cəbri funksiyalarının xassələri, ekvivalent çevrilmələr, qapalılıq və tamlıq, mükənməl normal ayrılışlarla yanaşı, adətən, belə dərs vəsaitlərində kifayət qədər yer verilməyən, ancaq tətbiq baxımından böyük əhəmiyyət kəsb edən bir sıra başqa məsələlər də geniş işıqlandırılmışdır. Beləlləri sırasında k-qiymətli müxtəlif tip modulyar və hesabi çoxhədlilər şəklində ayrılışları, k-qiymətli məntiq funksiyalarının minimallaşması və s. məsələləri göstərmək olar. Qeyd etmək lazımdır ki, çoxqiymətli məntiqlə bağlı yuxarıda adları sadalanan suallarla bağlı nəticələr hal-hazırda dövlət universitetlərinin riyaziyyat, tətbiqi riyaziyyat və kibernetika profilli fakültələrində tədris olunan "EHM və proqramlaşdırma","Əməliyyatlar tədqiqi", "Qərar qəbul etmə nəzəriyyəsi" və s. kursların öyrənilməsində də geniş istifadə edilir.

Baxılan riyazi faktların şərhi bütün kitab boyu uyğun misalların həlli ilə müşayiət olunur. Fəsillərin sonunda təqdim olunan çalışmaların həlli, müəlliflərin fikrincə, Bul və k-qiymətli məntiq funksiyaları nəzəriyyəsinin öyrənilməsində mühüm rol oynamalıdır.

Kitab ilk növbədə dövlət universitetlərinin riyaziyyat, tətbiqi riyaziyyat, iqtisadi kibernetika ixtisasları üzrə hazırlanan bakalavr və magistrlər üçün nəzərdə tutulsa da, ondan texniki institutların və universitetlərin hesablama texnikası və informatika, texniki kibernetika profilli fakültələrinin tələbələri də dərs vəsaiti kimi istifadə edə bilərlər.

Bakı, Oktyabr 1997	R.H. Fərəcov H.V. Şimiyev

I HİSSƏ. BUL VƏ k-QİYMƏTLİ MƏNTİQ FUNKSİYALARI NƏZƏRİYYƏSİNİN ƏSASLARI

I FƏSİL. BUL FUNKSİYALARI NƏZƏRİYYƏSİNİN ELEMENTLƏRİ

§1.1. Bul funksiyaları haqqında ümumi mə'lumat

Tutaq ki, $U = \{u_1,\ldots,u_m,\ldots\}$ - dəyişənlərin ilkin əlifbasıdır. Arqumentləri $E_2 = \{0,1\}$ çoxluğunda tə'yin olunmuş, $\alpha_i \in E_2 (i = 1,\ldots,n)$ olduqda $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in E_2$ şərtini ödəyən $f(u_{i_1},\ldots,u_{i_n})$ ($u_{i_j} \neq u_{i_k}$, $j \neq k$ olduqda) funksiyasına məntiq cəbri funksiyası və ya Bul funksiyası deyilir.

U əlifbasından olan simvolları işarə etmək üçün $x, y, z,\ldots, x_i, y_i, z_i,\ldots$ simvollarından istifadə edəcəyik. Məntiq cəbri funksiyalarını isə $f(x_1,\ldots,x_n)$ kimi işarə edəcəyik.

Hər bir $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyası 2^n sayda sonlu nöqtədə tə'yin olunduğu üçün onu aşağıdakı cədvəl 1.1 şəklində vermək olar:

CƏDVƏL 1.1

x_1 x_2 ... x_{n-1} x_n	$f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n)$
0 0 ... 0 0	f(0, 0, ..., 0, 0)
0 0 ... 0 1	f(0, 0, ..., 0, 1)
0 0 ... 1 0	f(0, 0, ..., 1, 0)
0 0 ... 1 1	f(0, 0, ..., 1, 1)
...	...
1 1 ... 1 1	f(1, 1, ..., 1, 1)

Bu cədvəldə sadəlik üçün yığımların standart yerləşməsindən istifadə olunur, yə'ni əgər yığıma tam

ədədin ikilik say sistemində yazılışı kimi baxsaq, onda bu yığımların yuxarıdan aşağıya doğru yerləşməsi $0,1,2,\ldots, 2^n-1$ ədədlərinin təbii surətdə ardıcıl yerləşməsinə uyğun olar.

$0,1$ sabitlərini də özündə saxlayan, U əlifbası üzərində verilmiş bütün məntiq cəbri funksiyalar çoxluğunu P_2 ilə işarə edək.

Əgər n sayda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dəyişənlərini qeyd etsək, onda müxtəlif məntiq cəbri funksiyalarına uyğun cədvəllər bir-birindən yalnız sağ tərəflərindəki qiymətlər sütunu ilə fərqlənmiş olarlar. Bu mühakimələrdən aşağıdakı teorem alınır:

Teorem 1.1. Tutaq ki, P_2-dən olan və n sayda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dəyişənlərindən asılı olan bütün məntiq cəbri funksiyalarının sayı $p_2(n)$ ilə işarə edilmişdir. Onda

$$p_2(n) = 2^{2^n}$$

Göründüyü kimi, arqumentlərin sayının artması ilə məntiq cəbri funksiyalarının sayı böyük sür'ətlə artır:

$$p_2(0) = 2,\ p_2(1) = 4,\ p_2(2) = 16, p_2(3) = 256,\ p_2(4) = 65536,\ldots$$

Ona görə də n-nin çox böyük olmayan qiymətlərində belə, (məsələn, $n = 10$) həmin funksiyaların cədvəl üsulu ilə verilməsi böyük çətinliklər törədir.

Tə'rif 1.1. Əgər $x_1,\ldots, x_{i-1}, x_{i+1},\ldots, x_n$ dəyişənlərinin uyğun olaraq elə $\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n$ qiymətləri varsa ki, $f(\alpha_1,\ldots, \alpha_{i-1}, 0,\alpha_{i+1},\ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1,\ldots, \alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)$, onda $f(x_1,\ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1},\ldots,x_n)$ funksiyasına x_i-dən əsaslı asılı olan funksiya deyilir.

Bu halda x_i dəyişəninə əsaslı dəyişən, əks halda isə fiktiv dəyişən deyilir.

Verilmiş $f(x_1, \ldots, x_n)$ funksiyasının təsvir cədvəlindən hər hansı x_i arqumentinin fiktiv olan funksiyasının cədvəlini aşağıdakı şəkildə almaq olar. $f(x_1, \ldots, x_n)$ funksiyası üçün olan cədvəli götürüb, bu cədvəldə $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)$ şəklində olan sətirləri və x_i arqumenti üçün olan sütunu pozuruq. Alınan cədvəl hər hansı $g(x_1,\ldots, x_{i-1}, x_{i+1},\ldots, x_n)$ funksiyasını tə'yin edəcəkdir. Bu halda, $g(x_1,\ldots, x_{i-1}, x_{i+1},\ldots, x_n)$ funksiyası $f(x_1, \ldots, x_n)$ funksiyasından x_i fiktiv dəyişənini atmaq və ya $f(x_1, \ldots, x_n)$ funksiyası $g(x_1,\ldots, x_{i-1}, x_{i+1},\ldots, x_n)$ funksiyasından x_i fiktiv dəyişənini əlavə etmək vasitəsilə alınmışdır deyilir.

Aşkardır ki, teorem 1.1-in köməyi ilə hesablanan bütün məntiq cəbri funksiyalarının sayına həm bütün arqumentlərindən əsaslı asılı olan funksiyalar, həm də bə'zi arqumentləri fiktiv olan funksiyalar daxildir. Bununla belə, özünün bütün arqumentlərindən əsaslı asılı olan funksiyaların sayını tə'yin etmək olar.

Teorem 1.2. Özünün bütün n arqumentlərindən əsaslı asılı olan məntiq cəbri funksiyalarının sayı aşağıdakı rekurent münasibətlə tə'yin olunur:

$$\widetilde{p}_2(n) = 2^{2^n} - C_n^{n-1} \cdot \widetilde{p}_2(n-1) - C_n^{n-2} \cdot \widetilde{p}_2(n-2) - \ldots - C_n^1 \cdot \widetilde{p}_2(1) - \widetilde{p}_2(0)$$

Burada $\widetilde{p}_2(i)$ ilə i arqumentindən əsaslı asılı olan məntiq cəbri funksiyalarının sayı göstərilmişdir, C_n^m isə n elementdən m üzrə təkrarlanmayan birləşmələrin sayıdır. Yuxarıdakı münasibətin sağ tərəfi, əslində bütün məntiq cəbri funksiyalarının sayı ilə özünün $i < n$ sayda arqumentlərindən əsaslı asılı olan funksiyalar sayının cəmi arasındakı fərqi göstərir. Bu münasibətin isbatı aşkardır.

Tə'rif 1.2. P_2-dən götürülmüş iki $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ və $f_2(x_1, \ldots, x_n)$ funksiyaları o zaman bərabər funksiyalar adlanır ki, onlardan biri o birisindən fiktiv dəyişənləri atmaq və ya əlavə etmək vasitəsi ilə alınsın.

Sonrakı araşdırmalarda, bir qayda olaraq, funksiyalara fiktiv dəyişən dəqiqliyi ilə baxılacaq. Yə'ni hər hansı f_1 funksiyası verilmişsə, bu həm də ona bərabər olan f_2 funksiyasının verilməsi deməkdir. Bu sözlər müəyyən xassələrə malik funksiyalar sinfinə də aid edilir.

Qeyd. Əgər P_2-dən götürülmüş $\{f_1, f_2,\ldots,f_m\}$, $m \geq 1$ sonlu funksiyalar sistemi verilmişsə, onda bütün bu funksiyaların eyni bir $x_1, \ldots, x_n$ arqumentlərindən asılı olduqlarını qəbul edə bilərik, yə'ni $f_1(x_1, \ldots, x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)$.

İndi isə riyazi məntiq və onun tətbiq sahələrində, kibernetika və informatikada geniş istifadə olunan və aşağıdakı cədvəllər vasitəsi ilə verilmiş məntiq cəbrinin elementar funksiyalarını nəzərdən keçirək:

CƏDVƏL 1.2

x	0	1	x	$\bar{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

x_1x_2	$x_1\&x_2$	$x_1\vee x_2$	x_1+x_2	$x_1\to x_2$	$x_1\sim x_2$	x_1/x_2	$x_1\downarrow x_2$
0 0	0	0	0	1	1	1	1
0 1	0	1	1	1	0	1	0
1 0	0	1	1	0	0	1	0
1 1	1	1	0	1	1	0	0

Bu funksiyalar aşağıdakı kimi adlanırlar:
1. 0 - 0 sabiti;
2. 1 - 1 sabiti;
3. x - eynilik funksiyası;
4. $\overline{x}$ - x -in inkarı və yaxud "x deyil";
5. $(x_1\&x_2) - x_1$ və x_2-nin konyuksiyası. "&" işarəsi əvəzinə "$\cdot$" işarəsi də işlədilir (məntiqi vurma);
6. $(x_1\vee x_2) - x_1$ və x_2-nin dizyunksiyası (məntiqi toplama);
7. (x_1+x_2) - mod 2 üzrə cəmləmə (və ya məntiqi toplamanın aradan çıxarılması);
8. $(x_1\to x_2)$ - x_1 və x_2-in implikasiyası (x_1-dən x_2 alınır);
9. $(x_1\sim x_2)$ - ekvivalentlik funksiyası;
10. (x_1/x_2) - Şeffer funksiyası;
11. $(x_1\downarrow x_2)$ - Vebb funksiyası (bə'zən ona Pirs oxu da deyilir).

Qeyd edək ki, $(x_1\&x_2) = \min(x_1,x_2) = (x_1\cdot x_2) = (x_1x_2)$, $(x_1\vee x_2) = \max(x_1,x_2)$

Misal. $n=1$ halına uyğun $p_2(1)=4$ müxtəlif məntiq cəbri funksiyaları cədvəl 1.2-də göstərilmişdir. Eyniliklə 0 və 1 olan $p_2(0)$ sayda məntiq cəbri funksiyalarını n=0 halına aid etmək olar.

Misal. Misal 1-dən alınır ki, $\tilde{p}(0)=0$, $\tilde{p}(1)=2$

Teorem 1.2.-ni tətbiq etsək, alarıq:

$$\tilde{p}_2(2)=2^{2^2}-C_2^1\cdot\tilde{p}_2(1)-\tilde{p}_2(0)=16-4-2=10;$$

$$\tilde{p}_2(3)=2^{2^3}-C_3^2\cdot\tilde{p}_2(2)-C_3^1\cdot\tilde{p}_2(1)-\tilde{p}_2(0)=256-30-6-2=218.$$

Cədvəl 1.2-dən görünür ki, ancaq f(x)=x və f(x)=$\overline{x}$ funksiyaları x arqumentindən əsaslı asılıdır: f(x)=0 və f(x)=1 funksiyaları üçün yeganə x arqumenti fiktivdir.

Elementar cəbrdə olduğu kimi, burada da elementar funksiyalardan təşkil olunmuş düsturlar qurmaq olar.

Tə'rif 1.3. (induktiv). Fərz edək ki, $\mathcal{D}$ P_2-dən olan funksiyaların hər hansı alt çoxluğudur (sonlu olması vacib deyil).

1. İnduksiya bazisi. $\mathcal{D}$-dən olan hər bir $f(x_1, \ldots, x_m)$ funksiyası $\mathcal{D}$ üzərində düstur adlanır.
2. İnduksiya keçidi. Tutaq ki, $f_0(x_1,\ldots,x_m)$ $\mathcal{D}$-dən olan funksiya, $A_1,\ldots,A_m$-lər isə ya $\mathcal{D}$ üzərində düstur, ya da U əlifbasından olan dəyişənlərdən ibarət ifadədir. Onda $f_0(A_1,\ldots,A_m)$ ifadəsi $\mathcal{D}$ üzərində düstur adlanır.

Misal. Tutaq ki, $\mathcal{D}$-elementar funksiyalar çoxluğudur. Onda aşağıdakı ifadələr $\mathcal{D}$ üzərində düsturdurlar:

1. $((x_1\cdot x_2)\vee(x_1+x_2))$;
2. $((x_1+x_2)\sim\overline{x}_3)$;
3. $\overline{(x_1\vee(x_2\to x_3))}$.

Adətən, düsturlar qotik əlifbasının böyük hərfləri və bu hərflərdən sonra kvadrat və ya dairəvi mö'tərizənin içərisində uyğun olaraq funksiyalar və dəyişənləri yaznaqla işarə olunurlar.

Məsələn, $\mathcal{N}[f_1,...,f_s]$ və $\mathcal{M}[x_1,...,x_n]$. Burada $\mathcal{N}$ düsturunun $f_1,..,f_s$ funksiyalarından, $\mathcal{M}$ düsturunun isə $x_1,...,x_n$ dəyişənlərindən təşkil olunduğu göstərilir.
$\mathcal{N}$ düsturunun qurulmasında istifadə olunan düsturlar $\mathcal{N}$ düsturunun alt düsturları adlanır.

Düsturun induktiv tə'rifinə əsaslanaraq, $\mathcal{D}$ üzərində hər bir $\mathcal{N}(x_1,...,x_n)$ düsturuna $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasını qarşı qoyaq.

Tə'rif 1.4. (induktiv).

1. İnduksiya bazisi. Əgər $\mathcal{N}(x_1,...,x_n)=f(x_1...,x_n)$, harada ki, $f\in\mathcal{N}$, onda $\mathcal{N}(x_1,...,x_n)$ düsturuna $f(x,...,x_n)$ funksiyası qarşı qoyulur.

2. İnduktiv keçid. Tutaq ki, $\mathcal{N}(x_1,...,x_n)=f_0\ (A_1,..,A_m)$, harada ki, A_i $(i=1,...,m)$ ya $\mathcal{D}$ üzərində düsturdur, ya da ki, $x_{j(i)}$ dəyişəninin simvoludur. Onda birinci halda induksiya fərziyyəsinə görə, A_i-yə P_2-dən olan f_i funksiyası qarşı qoyulur. İkinci halda isə A_i-yə $f_i=x_{j(i)}$ eynilik funksiyası qarşı qoyulur. $\mathcal{N}(x_1,...,x_n)$ düsturuna $f(x_1,...,x_n) = f_0(f_1,...,f_m)$ funksiyasını qarşı qoyaq.

Əgər f funksiyası $\mathcal{N}$ düsturuna uyğundursa, onda deyirlər ki, $\mathcal{N}$ düsturu f funksiyasını realizə edir. $\mathcal{N}$ düsturuna uyğun olan f funksiyasına $\mathcal{N}$-dən olan funksiyaların superpozisiyası deyilir. f funksiyasının $\mathcal{N}$-dən alınması prosesi isə superpozisiya əməliyyatı adlanır.

Misal. Tutaq ki, $f(x_1,x_2)$ funksiyası $\overline{(x_1.(x_1+x_2))}$ düsturu ilə realizə olunur. Bü düstur üç addımla qurulur, (x_1+x_2), $(x_1.(x_1+x_2))$, $\overline{(x_1.(x_1+x_2))}$. Elementar funksiyalar cədvəlindən istifadə etməklə aşağıdakıları alırıq:

CƏDVƏL 1.4

$x_1\ x_2$	(x_1+x_2)	$(x_1.(x_1+x_2))$	$\overline{(x_1.(x_1+x_2))}$
0 0	0	0	1
0 1	1	0	1
1 0	1	1	0
1 1	0	0	1

Deməli. $f(x_1,x_2)=x_1\rightarrow x_2$

Yuxarıda göstərilən məntiq düsturları müxtəlif şərtləri və ya təklifləri izah edən məntiq cəbri funksiyalarının təsviri üçün çox əlverişli vasitədir. Belə düsturlar kibernetika və hesablama texnikasında geniş istifadə edilən müxtəlif məntiqi elementlərin, sxemlərin və qurğuların işinin təsvirində böyük rol oynayırlar. Bu deyilənləri paralel prinsiplə işləyən və siqnalları ikilik say sistemində göstərilən n - ölçülü cəmləyici qurğunun misalında nümayiş etdirmək olar. Deyilən qurğu 2n sayda 0 və 1 ədədlərindən təşkil edilmiş $x_1,...,x_n$, $x'_1,...,x'_n$ giriş və (n+1) sayda $y_1,...,y_{n+1}$ çıxışlarına malikdir. Qurğunun girişinə $(x_1,...,x_n)$ və $(x'_1,...,x'_n)$ ikili ədədləri verildikdə, çıxışda həmin ədədlərin ikili cəmi olan $(y_{n+1}y_n...y_1)$ alınır.

Cəmləyici qurğunun işini məntiq cəbri funksiyaları vasitəsilə təsvir etmək üçün ədədlərin "sütunlarla cəmlənməsi" adlı mə'lum alqoritmindən istifadə edək:

$$\begin{array}{r}
x_n \ \ldots\ x_2 \ \ x_1\\
+\ \ x'_n \ \ldots\ x'_2 \ \ x'_1\\
\hline
y_{n+1}\ \ldots\ y_2 \ \ y_1
\end{array}$$

Cəmləmə zamanı i-ci bölgüdən (i+1)-ci bölgüyə göndərilmə şərtini xarakterizə edən $v_i(i=1,2,...,n)$ köməkçi dəyişənlərini qəbul edək. Onların köməyi ilə bölgülərin cəmi aşağıdakı şəkildə göstərilir:

$y_i = x_i + x'_i + v_{i-1}$ $(i=1,2,\ldots,n+1)$

Burada $v_0=0$, $x_{n+1}= x'_{n+1}=0$. Digər tərəfdən, „(i+1)-ci bölgüyə göndərilmə ancaq və ancaq o zaman mümkün olur ki, x_i, x'_i, v_{i-1} dəyişənlərindən ən azı ikisi 1 qiymət almış olsun". Bu təklifi daha təkmil şəkildə aşağıdakı kimi demək olar: "x_i və x'_i" və ya "x_i və v_{i-1}" və ya "x'_i və v_{i-1}".

Əgər "və", "və ya" rabitələrini & və ∨ simvolları ilə göstərsək, v_i dəyişəni üçün aşağıdakı düsturu alanq:

$$v_i=(((x_i \& x'_i) \vee (x_i \& v_{i-1})) \vee (x'_i \& v_{i-1})),\ (i=1,\ldots,n).$$

Deməli, n-ölçülü ikili ədədlərin cəmləyici qurğusunun iş prinsipi məntiq düsturları vasitəsi ilə təsvir edilir.

Məntiq düsturlarının yuxarıda adları çəkilən elm və texnika sahəsindəki geniş tətbiqlərinə dair çoxlu misallar vardır. Beləliklə, məntiq düsturları dili Bul funksiyalarının cədvəl vasitəsilə verilmə üsulu ilə yanaşı böyük maraq kəsb edir.

Hər bir məntiq düsturuna müəyyən məntiq cəbri funksiyası uyğundur, həm də müxtəlif düsturlara eyni funksiyalar da qarşı qoyula bilər.

Tə'rif 1.5. $\mathcal{B}$ üzərində $\mathcal{N}$ və $\mathcal{M}$ düsturları o vaxt ekvivalent adlanırlar ki, onlara uyğun olan $f_{\mathcal{N}}$ və $f_{\mathcal{M}}$ funksiyaları bərabər olsunlar, yə'ni $f_{\mathcal{N}} = f_{\mathcal{M}}$. $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ yazılışı $\mathcal{N}$ və $\mathcal{M}$ düsturlarının ekvivalentliyini göstərir.

Misal.

1. $0=(x \cdot \overline{x})$;
2. $(x_1 \to x_2)=(\overline{x}_2 \to \overline{x}_1)$

Elementar funksiyaların bə'zi çoxluqlarının xassələrini xarakterizə edən ekvivalentlik (eynilik) münasibətlərinin siyahısını göstərək. $(x_1 \cdot x_2)$, $(x_1 \vee x_2)$, (x_1+x_2) funksiyalarının ixtiyari birini $(x_1 \circ x_2)$ vasitəsi ilə işarə edək.

1. $(x_1 \circ x_2)$ funksiyası assosiativlik xassəsinə malikdir:

$$((x_1 \circ x_2) \circ x_3) = (x_1 \circ (x_2 \circ x_3))$$

2. $(x_1 \circ x_2)$ funksiyası komutativlik xassəsinə malikdir:

$$(x_1 \circ x_2) = (x_2 \circ x_1)$$

3. & və ∨ üçün distributivlik xassələri ödənilir:

$$((x_1 \vee x_2) \cdot x_3) = ((x_1 \cdot x_3) \vee (x_2 \cdot x_3))$$
$$((x_1 \cdot x_2) \vee x_3) = ((x_1 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_3))$$

4. İnkar, & və ∨ arasında aşağıdakı münasibətlər var:

$\overline{\overline{x}} = x$ - ikiqat inkar qanunu,

$$\left.\begin{array}{l} \overline{(x_1 \cdot x_2)} = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \\ \overline{(x_1 \vee x_2)} = (\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2) \end{array}\right.$$ - De Morqan qanunları.

5. & və ∨ -nın aşağıdakı xassələri var:

$$(x \cdot x) = x, \quad (x \vee x) = x,$$
$$(x \cdot 0) = 0, \quad (x \vee 0) = x,$$
$$(x \cdot 1) = x, \quad (x \vee 1) = 1,$$
$$(x \cdot \overline{x}) = 0, \quad (x \vee \overline{x}) = 1.$$

Bu eyniliklərin doğruluğu asanlıqla yoxlanıla bilər.

Qeyd etmək lazımdır ki, yuxarıdakı eynilik münasibətlərində x, x_1, x_2, x_3 dəyişənlərinin yerinə istənilən düsturlar da yazmaq olar.

Düsturların yazılışını sadələşdirmək üçün şərtləşək ki, & əməliyyatı $\vee$ əməliyyatından güclüdür, yə'ni əgər mö'tərizə yoxdursa, onda əvvəlcə & əməliyyatı, sonra isə $\vee$ əməliyyatı yerinə yetirilir.

Bundan əlavə,

$$(x_1 \circ x_2)$$

üçün olan assosiativlik qanununa əsasən, $((x_1 \circ x_2) \circ x_3)$, $(x_1 \circ (x_2 \circ x_3))$ düsturlarının əvəzinə $(x_1 \circ x_2 \circ x_3)$ ifadəsindən istifadə edəcəyik.

Xarici funksiyanın ya &, ya $\vee$, ya +(mod2), ya $\rightarrow$, ya /, ya $\downarrow$, ya ~ olduğu düsturlarda xarici mö'tərizələr atılır. Eyni sözü üzərində inkar işarəsi olan ifadələrdə mö'tərizələrin atılmasına da aid etmək lazımdır. Məsələn, $\overline{(x_1 \rightarrow x_2)}$ əvəzinə $\overline{x_1 \rightarrow x_2}$ yazılır.

Gələcəkdə biz düsturlardan yox, düsturlardan bə'zi yerlərində atılan mö'tərizələri ilə fərqlənən ifadələrdən istifadə edəcəyik. Bu ifadələri də həmçinin, düsturlar adlandıracağıq.

Aşağıdakı kimi işarələmələr qəbul edək:

$$\mathop{\&}_{i=1}^{s} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_s,$$

$$\bigvee_{i=1}^{t} x_i = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_t.$$

Aşağıdakı təklif aydındır.

Təklif. Tutaq ki, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{N}$-in alt düsturudur, onda $\mathcal{N}'$ alt düsturlarından ixtiyari birisini ona ekvivalent olan $\mathcal{M}'$ düsturu ilə əvəz etdikdə $\mathcal{N}$ düsturu özünə ekvivalent olan $\mathcal{M}$ düsturuna çevrilir.

Bu təklifin və elementar funksiyalar üçün olan eynilik münasibətlərinin birlikdə tətbiq edilməsi, müəyyən ekvivalent çevirmələr aparılmasına və beləliklə ilkin düsturların sadələşdirilməsinə - yeni eyniliklər alınmasına imkan yaradır.

Misal:

1. $x_1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot 1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot (1 \vee x_2) = x_1 \cdot 1 = x_1;$
2. $x_1 \cdot x_2 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2 = (x_1 \vee \overline{x}_1) \cdot x_2 = 1 \cdot x_2 = x_2$

Məntiq düsturlarının sadələşdirilməsi və eyniliklər alınmasının daha bir üsulu ikililik prinsipi adlı təklifə əsaslanır.

Tə'rif 1.6. Aşağıdakı şəkildə tə'yin olunan $f^*(x_1,\ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1,\ldots, \overline{x}_n)$ funksiyasına $f(x_1,\ldots, x_n)$-in ikili funksiyası deyilir.

Asanlıqla göstərmək olar ki, 0,1, x, $\overline{x}$, $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$, x_1/x_2, x_1+x_2, $x_1 \downarrow x_2$, $x_1 \sim x_2$ elementar funksiyaları içərisində 0 funksiyası 1-lə, 1 funksiyası 0-la, x funksiyası x-lə, $\overline{x}$ funksiyası $\overline{x}$-la, $x_1 \cdot x_2$ funksiyası $x_1 \vee x_2$ ilə, $x_1 \vee x_2$ funksiyası $x_1 \cdot x_2$-lə, x_1/x_2 funksiyası $x_1 \downarrow x_2$ və $x_1 \downarrow x_2$ funksiyası isə x_1/x_2-lə ikilidir.

Qeyd edək ki, $(f^*)^* = f^{**} = f$, yə'ni f f^* üçün ikili funksiyadır.

Tutaq ki, $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyası $\mathcal{N}$ düsturu ilə ifadə olunub. $f^*(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyasını realizə edən $\mathcal{M}$ düsturunu qurmaq olarmı?

$(x_{11},\ldots,x_{1p_1}),\ldots,(x_{m1},\ldots,x_{mp_m})$ yığımları vasitəsi ilə verilən dəyişənlərin müxtəlif simvollarını $x_1,\ldots,x_n$ dəyişənləri ilə ifadə edək.

Teorem 1.3. Əgər

$$\Phi(x_1,\ldots,x_n) = f(f_1(x_{11},\ldots,x_{1p_1}),\ldots,f_m(x_{m1},\ldots,x_{mp_m}))$$

olarsa, onda

$$\Phi^*(x_1,\dots,x_n)=f^*(f_1^*(x_{11},\dots,x_{1p_1}),\dots,f_m^*(x_{m1},\dots,x_{mp_m}))\text{ olur.}$$

İsbatı.

$$\Phi^*(x_1,\dots,x_n)=$$

$$=\overline{\Phi}(\overline{x}_1,\dots\overline{x}_n)=\overline{f}(f_1(\overline{x}_{11},\dots,\overline{x}_{1p_1}),\dots,f_m(\overline{x}_{m1},\dots,\overline{x}_{mp_m}))=$$

$$=\overline{f}(\overline{\overline{f}}_1(\overline{x}_{11},\dots,\overline{x}_{1p_1}),\dots,\overline{\overline{f}}_m(\overline{x}_{m1},\dots,\overline{x}_{mp_m}))=\overline{f}(\overline{f}_1^*(x_{11},\dots,x_{1p_1}),\dots,\overline{f}_m^*$$

$$(x_{m1},\dots,x_{mp_m}))=f^*(f_1^*(x_{11},\dots,x_{1p_1}),\dots,f_m^*(x_{m1},\dots,x_{mp_m})).$$

Teorem isbat olundu.

Tə'rif 1.7. Tutaq ki, $\mathcal{M}$ $[g_1,\dots,g_s]$ düsturu $\mathcal{N}$ düsturundan $f_1,\dots,f_s$ funksiyalarını uyğun olaraq $g_1,\dots,g_s$ funksiyaları ilə əvəz etməklə alınır. Onda deyirlər ki, $\mathcal{N}$ və $\mathcal{M}$ düsturları eyni quruluşludurlar.

$\mathcal{N}$ düsturunun quruluşunu C ilə işarə edək. Onda $\mathcal{N}$ düsturu özünün quruluşu və nizamlanmış $\{f_1,\dots,f_s\}$ çoxluğu ilə birqiymətli tə'yin edilir. Ona görə də yaza bilərik ki, $\mathcal{N}=C[f_1,\dots,f_s]$.

Misal. $\mathcal{N}=x_1\cdot\overline{x_2\cdot x_3}$ və $\mathcal{M}=x_1\to\overline{x_2\to x_3}$ düsturlarını nəzərdən keçirək. Bu düsturlar eyni quruluşludurlar.

İKİLİLİK PRİNSİPİ

Əgər $\mathcal{N}=C[f_1,\dots,f_s]$ düsturu $f(x_1,\dots,x_n)$ funksiyasını realizə edirsə, onda $C[f_1^*,\dots,f_s^*]$ düsturu, yə'ni $\mathcal{N}$ düsturundan $f_1,\dots,f_s$ funksiyalarını uyğun olaraq $f_1^*,\dots,f_s^*$ funksiyaları ilə əvəz etməklə alınan düstur, $f^*(x_1,\dots,x_n)$ funksiyasını realizə edir.

$C[f_1^*,\dots,f_s^*]$ düsturuna $\mathcal{N}$-ə ikili olan düstur deyəcəyik və $\mathcal{N}^*$ ilə işarə edəcəyik. Beləliklə: $\mathcal{N}^*=C[f_1^*,\dots,f_s^*]$.

$\mathcal{N}=\{0,1,\overline{x},\ x_1\cdot x_2, x_1\vee x_2\}$ çoxluğu üzərində olan düsturlar üçün ikililik prinsipi aşağıdakı kimi göstərilir:

$\mathcal{N}$ düsturuna ikili olan $\mathcal{N}^*$ düsturunu almaq üçün $\mathcal{N}$ düsturunda hər yerdə 0-ı 1 ilə, 1-i 0-la, &-nı $\vee$ ilə və $\vee$-nı & ilə əvəz etmək lazımdır.

Misal.

1. $\mathcal{N}(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2,\quad \mathcal{N}^*(x_1,x_2)=x_1\vee x_2;$
2. $\mathcal{N}(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2\vee\overline{x}_1\cdot\overline{x}_2,\ \mathcal{N}^*(x_1,x_2)=(x_1\vee x_2)\cdot(\overline{x}_1\vee\overline{x}_2)$

İkililik prinsipindən çıxır ki, əgər $n(x_1,\dots,x_n)=m(x_1,\dots,x_n)$ olarsa, onda

$$n^*(x_1,\dots,x_n)=m^*(x_1,\dots,x_n)$$

olar.

Misal. $\overline{x_1\cdot x_2}=\overline{x_1}\vee\overline{x_2}$ eyniliyindən $\overline{x_1\vee x_2}=\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}$ eyniliyi alınır.

İkililik prinsipindən istifadə etməklə məntiq düsturlarının sadələşdirilməsində geniş tətbiq olunan bə'zi eyniliklərin ikili analoqlarını asanlıqla yazmaq olar.

Aşağıdakı sol sütunda ilkin eyniliklər, sağ sütunda isə onların ikili analoqları göstərilmişdir:

$$
\begin{array}{l|l}
x_1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1, & x_1 \cdot (x_1 \vee x_2) = x_1, \\
x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 = x_1, & (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1, \\
x_1 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 = x_1 \vee x_2, & x_1 \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2) = x_1 \cdot x_2, \\
x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \vee x_3) & (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3) = x_1 \vee x_2 \cdot x_3
\end{array}
$$

Burada 1-ci, 2-ci, 3-cü sətirlərdəki çevirmələr uyğun olaraq udma, yapışdırma və cızlama qaydaları adlanır. 4-cü sətirdəki çevirmələr isə əvvəlki iki qaydaların ümumiləşmiş formalarıdır.

§1.2. Bul funksiyalarının dəyişənlərə görə ayrılışları. Mükəmməl normal formalar

Tutaq ki, dəyişənləri və qiymətləri $E_2=\{0,1\}$ çoxluğundan olan $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ n dəyişənli funksiyası verilmişdir. Bu funksiyanı analitik şəkildə təsvir etmək tələb olunur. Aşağıdakı işarələməni daxil edək:

$$x^{\sigma} = x\sigma \vee \bar{x}\bar{\sigma},$$

harada ki, σ - 0, yaxud 1-ə bərabər olan parametrdir.
Aşkardır ki,

$$x^{\sigma} = \begin{cases} \bar{x}, & \text{əgər } \sigma = 0 \\ x, & \text{əgər } \sigma = 1 \end{cases}$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $x^{\sigma}=1$ ancaq və ancaq $x=\sigma$ olduqda doğrudur. Deməli, $x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$ konyuksiyası yalnız və yalnız o vaxt 1 qiyməti alır ki, $x_1=\sigma_1$, $x_2=\sigma_2,\ldots$, $x_n=\sigma_n$ olsun.

Teorem 1.4. İxtiyari $m(1 \le m \le n)$ üçün hər bir $f(x_1,\ldots,x_n)$ məntiq cəbri funksiyasını aşağıdakı şəkildə göstərmək olar:

$$f(x_1,\ldots,x_m, x_{m+1},\ldots,x_n)= \bigvee_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)} x_1^{\sigma_1}\cdot\ldots\cdot x_m^{\sigma_m} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_m,x_{m+1},\ldots x_n) \qquad (1.2.1)$$

Burada dizyunksiya əməli $x_1,\ldots,x_n$ dəyişənlərinin bütün mümkün yığımları üzrə götürülür.

Bu yazılış verilmiş funksiyanın $x_1,\ldots,x_m$ dəyişənlərinə görə ayrılışı adlanır.

İsbatı. Dəyişənlərin ixtiyari $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ yığımını götürək və $x_1=\alpha_1,\ldots,$ $x_n=\alpha_n$ olduqda, (1.2.1) münasibətinin sol və sağ tərəfinin eyni qiymət aldığını göstərək. Sol tərəf $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ olur.

Sağ tərəf də

$$\bigvee_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)} \alpha_1^{\sigma_1}\cdot\ldots\alpha_m^{\sigma_m}\cdot f(\sigma_1,\ldots,\sigma_m,\alpha_{m+1},\ldots,\alpha_n) = \alpha_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\alpha_m^{\alpha_m}\cdot$$
$$\cdot f(\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\ldots,\alpha_n) = f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

münasibətlərinə görə $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ funksiyasını verir.

Nəticə 1.1. (bir dəyişənə görə ayrılış).

Əgər m=1 olarsa, onda (1.2.1) münasibəti aşağıdakı şəklə düşür:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \cdot f(1,x_2,\ldots,x_n) \vee \bar{x}_1 \cdot f(0,x_2,\ldots,x_n)$$

Nəticə 1.2. (bütün dəyişənlərə görə ayrılış)

Əgər m=n olarsa, onda (1.2.1) münasibəti

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1}\cdot x_2^{\sigma_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\sigma_n} \qquad (1.2.2)$$

düsturu ilə verilir. Burada dizyunksiya dəyişənlərin elə $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ yığımları üzrə götürülür ki, $f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1$ olsun.

Bu ayrılış mükəmməl dizyunktiv normal forma - MDNF adlanır.

Teorem 1.5. Hər bir məntiq cəbri funksiyası inkar, & və $\vee$ - ya əməllərinin iştirak etdiyi düstur vasitəsi ilə ifadə edilə bilər.

İsbatı.

1. Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n)$ eynilik kimi sıfra bərabərdir, yə'ni $f(x_1,...,x_n)\equiv 0$. Onda aşkardır ki,

$$f(x_1,...,x_n)=x_1\cdot\overline{x}_1$$

2. Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n)\not\equiv 0$. Onda onu MDNF şəklində göstərmək olar:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1}\cdot x_2^{\sigma_2}\cdot\ldots x_n^{\sigma_n}$$

Beləliklə, hər iki halda $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası teoremin şərtlərini ödəyir.

Yuxarıdakı teorem konstruktiv xarakter daşıyır. Ona əsaslanaraq hər bir cədvəl üsulu ilə verilən funksiyanı realizə edən və MDNF şəklində olan düsturu qurmaq olar. Bunun üçün $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasına ($f\not\equiv 0$) uyğun cədvəldə $f(\sigma_1,...,\sigma_n)=1$ şərtini ödəyən bütün $(\sigma_1,...,\sigma_n)$ yığımlarını qeyd edirik. Hər bir belə yığım üçün $x_1^{\sigma_1}\cdot\ldots x_n^{\sigma_n}$ kimi hasilləri təşkil edib, alınan bütün konyuksiyaları V işarəsi ilə birləşdiririk.

Misal. $x_1\rightarrow x_2$ funksiyası üçün MDNF yazmalı.

Bu funksiya (0,0), (0,1) və (1,1) yığımlarında 1-ə bərabər qiymət alır. Ona görə :

$$x_1\rightarrow x_2=x_1^0\cdot x_2^0\vee x_1^0\cdot x_2^1\vee x_1^1\cdot x_2^1=\overline{x}_1\cdot\overline{x}_2\vee\overline{x}_1\cdot x_2\vee x_1$$

Məntiq cəbri funksiyaların MDNF şəklindəki ayrılışı əslində $\sum\prod$ tiplidir, yə'ni $x_i^{\sigma_i}$ hasillərinin məntiqi cəmidir. Bununla belə, Bul funksiyalarının $\prod\sum$ tipli ayrılışından da danışmaq olar.

Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n)\not\equiv 1$. Onda $f^*(x_1,...,x_n)\not\equiv 0$ və aşağıdakı MDNF doğrudur:

$$f^*(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\\ f^*(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\sigma_n} \qquad (1.2.3)$$

İkililik prinsipinə əsaslanan

$$f^{**}(x_1,\ldots,x_n)=\mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\\ f^*(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}}(x_1^{\sigma_1}\vee\ldots\vee x_n^{\sigma_n})$$

münasibətindən istifadə etsək, sol tərəfin $f(x_1,...,x_n)$-ə, sağ tərəfin isə

$$\mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\\ f^*(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}}(x_1^{\sigma_1}\vee\ldots\vee x_n^{\sigma_n})=\mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\\ f(\overline{\sigma}_1,\ldots,\overline{\sigma}_n)=0}}(x_1^{\sigma_1}\vee\ldots\vee x_n^{\sigma_n})=$$

$$=\mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=0}}(x_1^{\overline{\sigma}_1}\vee\ldots\vee x_n^{\overline{\sigma}_n})$$ olduğunu görərik.

Beləliklə, Bul funksiyası üçün

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=0}}(x_1^{\overline{\sigma}_1}\vee\ldots\vee x_n^{\overline{\sigma}_n})$$

aynılışını alırıq. Bu aynılışa mükəmməl konyuktiv normal forma - MKNF deyirlər.

Misal. $x_1 \to x_2$ funksiyası üçün MKNF yazmalı.

Bu funksiya ancaq (1,0) yığımında 0 qiymət alır. Deməli,

$$x_1 \to x_2 = x_1^{\bar{1}} \vee x_2^{\bar{0}} = x_1^0 \vee x_2^1 = \bar{x}_1 \vee x_2$$

Bul funksiyalarının daha bir əhəmiyyətli aynılışı 0,1 sabitləri ilə birlikdə konyuksiya və mod 2-yə nəzərən cəmləmə əməllərinin tətbiqi vasitəsi ilə alınır.

Belə aynılışı əvvəlki hallara analoji olaraq $\Sigma\Pi$ tipinə aid etmək olar, yə'ni $x_i^{\sigma_i}$ hasillərin "$\oplus$" əməlinə nəzərən cəmidir.

mod 2-yə görə cəmləmə əməli komutativlik, assosiativlik və distributivlik xassələrinə malikdir. Assosiativlik xassəsinə əsaslanıb çoxyerli

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

əməlini tə'yin etmək olar. Bu cəmin qiyməti ancaq və ancaq o zaman 1 qiymət alır ki, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dəyişənlərinin yığımları içərisində tək sayda vahid olsun. Qeyd edək ki, bu şərt ödənmədikdə

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \bigvee_{i=1}^{n} x_i$$

olur.

İndi isə ixtiyari $f(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0$ funksiyasını götürüb, onun MDNF-in yazaq:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$$

Hər bir $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ yığımında MDNF-ya daxil olan $x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$ konyuksiyalardan ən çox biri 1 qiymət alır. Buna görə də axırıncı münasibətin sağ tərəfində xarici dizyunksiyanı mod 2-yə görə cəmlə əvəz etmək olar.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$$

Digər tərəfdən, $x^0 = \bar{x} = x \oplus 1$, $x^1 = x = x + 0$. Onda $x^\sigma = x \oplus \bar{\sigma}$, $x_i^{\sigma_i}$ yerinə $x_i \oplus \sigma_i$ ifadəsini qoysaq, alarıq:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1}} (x_1 \oplus \bar{\sigma}_1) \cdot \ldots \cdot (x_n \oplus \bar{\sigma}_n)$$

Bu aynılışa mükəmməl polinomial normal forma - MPNF demək olar. Axırıncı ifadədə mö'tərizələri açıb, oxşar hədləri A+A=0 qaydası ilə hesablasaq, bir sıra çətin olmayan riyazi çevirmələrdən sonra o mod 2-yə nəzərən çoxhədli şəklinə düşür:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(i_1, \ldots, i_s)} a_{i_1 \ldots i_s} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_s}$$

Bu çoxhədli Jeqalkin çoxhədlisi adlanır.

Teorem 1.6. P_2-dən götürülmüş hər bir funksiya yeganə şəkildə Jeqalkin çoxhədlisi vasitəsi ilə təsvir oluna bilər.

Misal. $x_1 \vee x_2$ funksiyasını Jeqalkin çoxhədlisi şəklində göstərməli.

Bu funksiya (0,1), (1,0), (1,1) yığımlarında vahid qiymət aldığından:

$$x_1 \vee x_2 = (x_1 \oplus \bar{0}) \cdot (x_2 \oplus \bar{1}) \oplus (x_1 \oplus \bar{1}) \cdot (x_2 \oplus \bar{0}) \oplus (x_1 \oplus \bar{1})$$

$$\cdot (x_2 \oplus \bar{1}) = (x_1 \oplus 1) \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot (x_2 \oplus 1) \oplus x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot x_2 \oplus x_2$$

$$\oplus x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$$

Məntiq cəbri funksiyasını təsvir edən Jeqalkin çoxhədlisinin ifadəsini

$$P(x_1,\ldots,x_n)=c_0 \oplus c_1 \cdot x_1 \oplus \ldots \oplus c_n x_n \oplus c_{n+1}\, x_1 \cdot x_2 \oplus \ldots \oplus c_{2^n-1} x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$$

şəklində yazmaq olar. Burada $c_i=0,1\,(i=0,1,\ldots,2^n-1)$; i nömrəsi isə $\tilde{\sigma}=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ ikili yığımına uyğun

$$i=\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \cdot 2^{n-j}$$

şəkildə tam ədəddir.

Yuxarıdakı ayrılışın sağ tərəfində iştirak edən konyuksiyalar üçün aşağıdakı kimi işarələmələr qəbul edək:

$$k_0 = 1,$$
$$k_1 = x_1,$$
$$\ldots$$
$$k_n = x_n,$$
$$k_{n+1} = x_1 \cdot x_n,$$
$$\ldots$$
$$k_{2^n-1} = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Onda həmin ayrılışı

$$P(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=0}^{2^n-1} c_i \cdot k_i$$

şəklində yazmaq olar. $c=(c_0,\ldots,c_{2^n-1})$ vektoruna $P(x_1,\ldots,x_n)$ çoxhədlisinin əmsallar vektoru deyilir.

Cədvəl və ya başqa bazislər üzərindəki məntiq düsturları vasitəsi ilə verilmiş hər bir $f(x_1,\ldots,x_n)$ məntiq cəbri funksiyasını realizə edən Jeqalkin çoxhədlisinin tapılması məsələsində çox vaxt qeyri-müəyyən əmsallar üsulundan istifadə olunur. Bu üsulun tətbiqi zamanı yuxarıda göstərilən $P(x_1,\ldots,x_n)$ çoxhədlisi götürülür və hər bir $\tilde{\sigma}=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ yığımı üçün

$$f(\tilde{\sigma})=P(\tilde{\sigma})$$

tənliyi tərtib olunur. Nəticədə $c=(c_0,\ldots,c_{2^n-1})$ namə'lum əmsallarına nəzərən xətti tənliklər sistemi alınır. Həmin tənliklərin həlli $P(x_1,\ldots,x_n)$ çoxhədlisinin axtarılan əmsallarını verir.

Misal. $f(x_1,x_2)=x_1/x_2$ Şeffer funksiyasına uyğun $P(x_1,x_2)$ çoxhədlisini tapmalı.

$$P(x_1,x_2)=c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus c_3 x_1 x_2,$$
$$f(0,0)=1= c_0 \oplus c_1 \cdot 0 \oplus c_2 \cdot 0 \oplus c_3 \cdot 0$$
$$f(0,1)=1= c_0 \oplus c_1 \cdot 0 \oplus c_2 \cdot 1 \oplus c_3 \cdot 0$$
$$f(1,0)=1= c_0 \oplus c_1 \cdot 1 \oplus c_2 \cdot 0 \oplus c_3 \cdot 0$$
$$f(1,1)=0= c_0 \oplus c_1 \cdot 1 \oplus c_2 \cdot 1 \oplus c_3 \cdot 1$$

Tənliklər sistemini həll edib tapırıq ki,

$$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 1.$$

Beləliklə: $x_1/x_2=1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2$

Bu üsulu tətbiq etməklə $x_1 \,\&\, x_2$, $x_1 \vee x_2$, $x_1 \to x_2$, $x_1 \sim x_2$, $x_1 \downarrow x_2$ elementar məntiq cəbri funksiyaları üçün aşağıdakı ifadələri tapmaq olar:

$$x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot x_2$$
$$x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2$$
$$x_1 \to x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 \cdot x_2$$
$$x_1 \sim x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2$$
$$x_1 \downarrow x_2 = 1 \oplus x_1 \cdot x_2$$

Bul funksiyalarının polinomial tipli ayrılışı həmin funksiyaların törəməsi anlayışı ilə bağlıdır.

Tutaq ki,

$$f_{x_i} = f(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n) \oplus f(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n) \qquad (1.2.5)$$

ilə işarə edilmişdir.

Tə'rif 1.8. Yuxarıdakı münasibətlə tə'yin olunan f_{x_i} ifadəsinə Bul funksiyasının x_i dəyişəninə nəzərən 1-ci tərtib törəməsi deyilir. Onu bə'zən $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ kimi də işarə edirlər.

Eyni qayda ilə həmin funksiyanın qarışıq törəməsi $\dfrac{\partial^k f}{\partial_{x_{i_1}}\partial_{x_{i_2}}\dots\partial_{x_{i_k}}}$ aşağıdakı şəkildə tə'yin olunan ifadəyə deyilir:

$$\frac{\partial^k f}{\partial_{x_{i_1}}\partial_{x_{i_2}}\dots\partial_{x_{i_k}}} = \frac{\partial}{\partial_{x_{i_1}}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial_{x_{i_2}}\dots\partial_{x_{i_k}}}\right)$$

Göründüyü kimi, k-cı tərtib qarışıq törəməni tapmaq üçün yuxarıdakı anlayışı $x_{i_1}, x_{i_2},\dots,x_{i_k}$ dəyişənlərini fiksə etməklə k dəfə tətbiq etmək lazımdır (dəyişənlərin fiksə edilmə tərtibinin əhəmiyyəti yoxdur).

Verilmiş $f(x_1,\dots,x_n)$ Bul funksiyasının $x_{i_1}, x_{i_2},\dots,x_{i_k}$ dəyişənlərə görə k-cı tərtib törəməsi olan $\dfrac{\partial^k f}{\partial(x_{i_1}\dots\partial x_{i_k})}$ həmin funksiyanın $x_{i_1},\dots,x_{i_n}$ dəyişənlərinin qiymətlərini eyni zamanda dəyişdikdə onun qiymətinin dəyişmə şərtini tə'yin edir. Buradan çıxır ki, funksiyanın k-cı tərtib törəməsi $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ dəyişənlərini fiksə etdikdə bütün 1-ci, 2-ci, ... k-cı tərtib qarışıq törəmələrin mod 2-yə görə alınan cəminə deyilir:

$$\frac{\partial^k f}{\partial(x_{i_1},\dots,x_{i_k})} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{\substack{i,j,s \\ i\neq j, i\neq s, j\neq s}} \frac{\partial^3 f}{\partial(x_i,x_j,x_s)} +$$
$$+ \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial_{i_k}}, i,j,s,\dots = i_1,i_2,\dots,i_k \qquad (1.2.6)$$

Misal. Tutaq ki, $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_3$ funksiyasının x_1 və x_2 dəyişənlərinə görə 2-ci tərtib törəməsini tapmaq tələb olunur. Yuxarıdakı düsturlardan alırıq:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \vee \bar{x}_3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 + x_1 \cdot \bar{x}_3 = x_1 \cdot (1+\bar{x}) = x_1 \cdot x_3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = 1 + \bar{x}_3 = x_3.$$

Onda funksiyanın tələb olunan 2-ci tərtib törəməsini verən ifadəni tapıb, onun üzərində bə'zi ekvivalent çevirmələr aparsaq, alarıq:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial(x_1,x_2)} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = x_2 \vee \overline{x}_3 + x_1 \cdot x_3 + x_3 =$$

$$= x_2 \vee \overline{x}_3 + x_3(x_1+1) = x_2 \vee \overline{x}_3 + x_3 \cdot \overline{x}_1 = (x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot$$

$$\cdot \overline{\overline{x}_1 \cdot x_3} \vee \overline{(x_2 \vee \overline{x}_3)} \cdot \overline{x}_1 \cdot x_3 = (x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_3) \vee$$

$$\vee \overline{x}_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x}_1 \cdot x_3 = x_1 \cdot x_2 \vee x_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_3 \vee \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_3 \vee$$

$$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 = x_1 \cdot x_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3$$

Aşkardır ki,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k} = 0, k \geq 2$$

Törəmənin tə'rifinə və funksional tam sistemlər arasındakı əlaqəyə əsaslanaraq onun aşağıdakı xassələrini isbat etmək olar:

1. $(\overline{f})_{x_i} = f_{x_i}$;
2. $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$;
3. $(f+g)_{x_i} = f_{x_i} + g_{x_i}$;
4. $(f \cdot g)_{x_i} = f_{x_i} \cdot g + f \cdot g_{x_i} + f_{x_i} \cdot g_{x_i}$;
5. $(f \vee g)_{x_i} = (f+g)_{x_i} + (f \cdot g)_{x_i}$;
6. $(f / g)_{x_i} = (f \cdot g)_{x_i}$;
7. $(f \sim g)_{x_i} = (f+g)_{x_i}$;
8. $(f \downarrow g)_{x_i} = (f \vee g)_{x_i}$.

Jeqalkin çoxhədlisi şəklində verilmiş Bul funksiyasının törəməsini tapmaq üçün formal olaraq, analitik funksiyaların törəmə ifadələrindən istifadə edib, nəticələri mod 2-yə görə alınan cəmi götürmək lazımdır.

Doğrudan da, istənilən f funksiyasını

$$f = Ax_i + B\overline{x}_i$$

şəklində göstərmək olar. Burada A və V $(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ dəyişənlərindən asılı çoxhədlilərdir. Onda törəmənin tə'rifindən alarıq:

$$f_{x_i} = A + B$$

f funksiyasının x_i arqumentindən asılı olmaması şərti $f_{x_i} = 0$ şəklində yazıla bilər.

Bul funksiyalarının törəmələri və onların yuxarıda göstərilən xassələrinə əsaslanaraq həmin funksiyalar üçün Makloren və Teylor sıralarının analoqları tipli ayrılışlar almaq olar. Doğrudan da, $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_2$ üçün Jeqalkin çoxhədlisinin

$$f(x_1,\ldots,x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i + \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1}}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \ldots +$$

$$+\sum_{\substack{i_1\neq i_2,\dots,i_{s-1}\neq i_s\\ i_1,\dots,i_s=1}}^{n} a_{i_1\dots i_s} x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_s}+\ldots+a_{1\dots n}x_1\cdot\ldots\cdot x_n \qquad (1.2.7)$$

(harada ki, $a_0, a_i, a_{ij}, \dots, a_{i_1\dots i_s}, \dots, a_{1\dots n}=0{,}1$) ifadəsindən ardıcıl olaraq $x_1,\dots,x_n$ dəyişənlərinə nəzərən törəmələr alıb, onların qiymətlərini n-ölçülü $(0,\dots,0)$ yığımında hesablasaq, alarıq:

$$a_0=f(0,\dots,0)$$
$$a_i=f_{x_i}(0,\dots,0),\ i=1,\dots,n$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$a_{ij}=f_{x_ix_j}(0,\dots,0),\ i\neq j=1,\dots,n$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$a_{i_1\dots i_s}=f_{x_{i_1}\dots x_{i_s}}(0,\dots,0),\ i_1\neq i_2,\dots,i_{s-1}\neq i_s=1,\dots,n$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$a_{1\dots n}=f_{x_1\dots x_n}(0,\dots,0)$$

Bu əmsalların qiymətlərini (1.2.7.) çoxhədlisində yerinə yazsaq, $f(x_1,\dots,x_n)$ funksiyasının Makloren sırasına oxşar ayrılışını alarıq.

Eyni qayda ilə Bul funksiyaları üçün Teylor sırasının analoqu olan ayrılış alına bilər. Doğrudan da, $f(x_1,\dots,x_n)\in P_2$ üçün ixtiyari $a=(a_1,\dots,a_n)$ ikili yığımında Jeqalkin çoxhədlisini aşağıdakı şəkildə axtaraq:

$$f(x_1,\dots,x_n)=a_0'+\sum_{i=1}^{n}a_i'\cdot(x_i+a_i)+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}a_{ij}'\cdot(x_i+a_i)\cdot(x_j+a_j)+$$
$$+\sum_{\substack{i_1,\dots,i_s=1\\ i_1\neq i_2,\dots,i_{s-1}\neq i_s}} a_{i_1\dots i_s}'\cdot(x_{i_1}+a_{i_1})\cdot\ldots\cdot(x_{i_s}+a_{i_s})+\ldots+a_{1\dots n}'\cdot(x_1+a_1)\cdot\ldots\cdot$$
$$\cdot(x_n+a_n), \qquad (1.2.8)$$

burada $a_0', a_i', a'_{ij}, \dots, a_{i_1\dots i_s}', \dots, a_{1\dots n}'=0{,}1$.

Yuxarıdakı hala uyğun şəkildə, axırıncı ifadənin hər tərəfindən $x_1,\dots,x_n$ dəyişənlərinə nəzərən ardıcıl törəmələr alıb, onların qiymətlərini $a=(a_1,\dots,a_n)$ ikili yığımında hesablasaq, (1.2.8) ayrılışındakı əmsallar üçün

$$a_0'=f(a_1,\dots,a_n)$$
$$a_i'=f_{x_i}(a_1,\dots,a_n),\ i=1,\dots,n$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$a_{ij}'=f_{x_ix_j}(a_1,\dots,a_n),\ i\neq j=1,\dots,n$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$a_{i_1\dots i_s}'=f_{x_{i_1}\dots x_{i_s}}(a_1,\dots,a_n),\ i_1\neq i_2,\dots,i_{s-1}\neq i_s=1,\dots,n$$

...

...

...

$$a'_{1...n} = f_{x_1...x_n}(a_1,\dots,a_n)$$

qiymətlərini tapmış olanq. Bu əmsalların qiymətlərini (1.2.8) çoxhədlisində yerinə yazsaq, $f(x_1,\dots,x_n) \in P_2$ funksiyasının Teylor sırasına oxşar ifadəsini alanq.

§1.3. Bul funksiyaları sisteminin tamlığı və qapalılığı

Əvvəlki paraqrafda biz gördük ki, hər bir məntiq cəbri funksiyasını

$$\{\ \bar{x},\ x_1\cdot x_2,\ x_1 \vee x_2\} \text{ və } \{0,1,\ x_1\cdot x_2,\ x_1+x_2\}$$

elementar funksiyalarından təşkil olunmuş mükəmməl normal formalar şəklində olan düsturlar vasitəsi ilə ifadə etmək olar. Bununla əlaqədar olaraq, ümumiyyətlə, həmin xassəyə malik digər elementar funksiyalar sisteminin olub-olmamasından da söhbət gedə bilər.

Tə'rif 1.9. P_2-dən olan $\{f_1,f_2,\dots,f_s,\dots\}$ funksiyalar sistemi o zaman tam sistem adlanır ki, ixtiyari məntiq cəbri funksiyasını bu sistemin funksiyaları vasitəsi ilə düstur şəklində ifadə etmək mümkün olsun.

Tam sistemlərə aid misallar.

1. $\mathfrak{N}_1=P_2$ sistemi - bütün məntiq cəbri funksiyaları çoxluğu - tamdır.
2. $\mathfrak{N}_2=\{\bar{x},\ x_1\cdot x_2,\ x_1 \vee x_2\}$-tam sistemdir.
3. $\mathfrak{N}_3=\{0,1,\ x_1\cdot x_2,\ x_1+x_2\}$-tam sistem təşkil edir.

Əlbəttə, tam olmayan sistemlər də vardır, məsələn, $\mathfrak{N}=\{0,1\}$.

Aşağıdakı teorem bir sistemin tamlıq məsələsini başqa sistemin tamlıq məsələsinə gətirir.

Teorem 1.7. Tutaq ki, P_2 -dən olan iki

$$\mathfrak{N}=\{f_1,f_2,\dots\} \qquad (1.3.1)$$

$$\mathfrak{M}=\{g_1,g_2,\dots\} \qquad (1.3.2)$$

funksiyalar sistemi verilmişdir. (1.3.1) sistemi tamdır və onun hər bir funksiyasını (1.3.2) sistemini təşkil edən funksiyalar vasitəsilə düstur şəklində ifadə etmək olar. Onda (1.3.2) sistemi də tamdır.

İsbatı. Tutaq ki, h P_2-dən olan ixtiyari funksiyadır. (1.3.1) sistemi tam olduğundan:

$$h=C\{f_1,f_2,\dots,f_s,\dots\}$$

olacaq. Teoremin şərtlərinə görə:

$$f_1=C_1\{g_1,g_2,\dots\},$$

$$f_2= C_2\{g_1,g_2,\dots\},$$

... ...

Onda bu nəticələri h düsturunda yerinə yazsaq, $C[g_1,g_2,\dots]= =C[C_1[g_1,g_2,\dots],\ C_2[g_1,g_2,\dots],\dots]$ alanq.

Axırıncı ifadə S′ quruluşu ilə $\mathfrak{M}$ üzərində düsturu tə'yin edir və aşağıdakını alınq:

$$C[C_1[g_1,g_2,\dots],\ C_2[g_1,g_2,\dots],\dots]= C'[g_1,g_2,\dots]$$

və yaxud

$$h= C'[g_1,g_2,\dots].$$

Beləliklə, biz h-ı $\mathfrak{M}$ üzərində düstur şəklində ifadə etdik. Teorem isbat olundu.

Bu teoremə əsaslanaraq bir neçə yeni sistemlərin tamlıq faktını isbat etmək olar.

4. $\mathcal{N}_4=\{\bar{x},\ x_1 \cdot x_2\}$ sistemi tamdır. İsbat üçün (1) sistemi əvəzinə $\mathcal{N}_2$ sistemini, (2) sistemi əvəzinə isə $\mathcal{N}_4$ sistemini götürüb,

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}$$

eyniliyindən istifadə edirik.

5. $\mathcal{N}_5=\{\bar{x},\ x_1 \vee x_2\}$ sistemi tamdır. Bu fakt ya əvvəlki hala analoji qaydada, ya da ikililik prinsipindən istifadə etməklə isbat olunur.

6. $\mathcal{N}_6=\{1, x_1 \cdot x_2, x_1+x_2\}$ sisteminin tamlığı faktı $\mathcal{N}_3$ sisteminin tamlığından və $0=1+1$ olduğundan çıxır. Bununla belə, $\mathcal{N}_6$-ya "yaxın" $\{0, x_1 \cdot x_2, x_1+x_2\}$ sistemi tam deyil.

7. $\mathcal{N}_7=\{x_1 / x_2\}$ Şeffer funksiyası tam sistem təşkil edir. İsbat üçün (1) sistemi əvəzinə $\mathcal{N}_4$ sistemini, (2) sistemi əvəzinə isə $\mathcal{N}_7$-ni götürmək lazımdır. Digər tərəfdən:

$$x_1 / x_1 = \bar{x}_1,$$

$$(x_1 / x_2) / (x_1 / x_2) = \overline{(x_1 / x_2)} = x_1 \cdot x_2$$

8. $\mathcal{N}_8=\{x_1 \downarrow x_2\}$ sistemi tamdır. İsbat üçün (1) sistemi əvəzinə $\mathcal{N}_5$ sistemini, (2) sistemi əvəzinə isə $\mathcal{N}_8$ sistemini götürmək lazımdır. Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$x_1 \downarrow x_1 = \bar{x}_1,$$

$$(x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2) = \overline{x_1 \downarrow x_2} = x_1 \vee x_2$$

Tə'rif 1.10. Tutaq ki, $\mathcal{M}$, P_2-dən olan funksiyaların hər hansı alt çoxluğudur. $\mathcal{M}$ çoxluğunun qapanması, P_2-dən olan elə funksiyalar çoxluğuna deyilir ki, onların hər birini $\mathcal{M}$-in

funksiyaları vasitəsi ilə düstur şəklində ifadə etmək mümkün olsun.

$\mathcal{M}$ çoxluğunun qapanması $[\mathcal{M}]$ kimi işarə edilir.

Misal.

1. $\mathcal{M} = P_2$. Aydındır ki, $[\mathcal{M}] = P_2$.
2. $\mathcal{N} = \{1, x_1+x_2\}$.

Bu çoxluğun qapanması bütün L xətti məntiq cəbri funksiyalar sinfini verir. Hər bir belə $f \in L$ funksiyası aşağıdakı şəkildə göstərilə bilər:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n,$$

harada ki, $c_i=0,1\ (i=0,\ldots,n)$.

Qapanmanın bə'zi xassələrini qeyd edək:

1. $\mathcal{M} \subseteq [\mathcal{M}]$,
2. $[[\mathcal{M}]] = [\mathcal{M}]$,
3. Əgər $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$ isə, onda $[\mathcal{M}_1] \subseteq [\mathcal{M}_2]$,
4. $[\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2] \supseteq [\mathcal{M}_1] \cup [\mathcal{M}_2]$.

Tə'rif 1.11. Əgər $\mathcal{M} = [\mathcal{M}]$ olarsa, onda $\mathcal{M}$ sinfi qapalı sinif adlanır.

Misal.

1. $\mathcal{M} = P_2$ sinfi qapalıdır.
2. $\mathcal{M} = \{1, x_1+x_2\}$ qapalı deyil.
3. L sinfi qapalıdır.

Qapanma və qapalı siniflərin xassələrindən istifadə etməklə (funksional) tamlıq üçün başqa tə'rif də vermək olar:

Əgər $[\mathcal{M}]=P_2$ -dirsə, onda $\mathcal{M}$ -tamdır.

T_0 ilə 0-ı özündə saxlayan bütün məntiq cəbri funksiyalar sinfini işarə edək. Yə'ni elə $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyalarını ki, onlar $f(0,\ldots,0)=0$ bərabərliyini ödəyirlər.

Aşkardır ki, 0, x, $x_1 \cdot x_2$, $x_1 v x_2$ elementar funksiyaları T_0 sinfinə daxildirlər; $1, \bar{x}$ isə T_0-a daxil deyildirlər.

Təklif 1.1. T_0 qapalı sinifdir.

İsbatı. T_0 eynilik funksiyasını özündə saxlayır. Ona görə də T_0-ın qapalılığını göstərmək üçün $f, f_1, \ldots, f_m$ funksiyalarının T_0 sinfinə daxil olmaları şərtindən

$$\Phi(x_1,\ldots,x_n) = f(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n))$$

funksiyasının da T_0-a daxil olması faktı çıxmalıdır. Bu isə aşağıdakı bərabərliklər hey'ətindən alınır:

$$\Phi(0,\ldots,0) = f(f_1(0,\ldots,0),\ldots,f_m(0,\ldots,0)) = 0$$

Təklif isbat olundu.

T_1 ilə 1-i özündə saxlayan bütün məntiq cəbri funksiyaları sinfini işarə edək. Yə'ni, elə $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyalarını ki, onlar $f(1,\ldots,1) = 1$ bərabərliyini ödəyirlər.

Aşkardır ki, 1, x, $x_1 \cdot x_2$, $x_1 v x_2$ elementar funksiyaları T_1 sinfinə daxildirlər; $0, \bar{x}$ isə T_1-ə daxil deyildirlər.

T_1 sinfinin funksiyalarının T_0 sinfinin funksiyalarına ikili olması faktından aşağıdakı təklifin doğruluğunu almaq olar.

Təklif 1.2. T_1 qapalı sinifdir.

T_0 və T_1 siniflərinin hər biri 2^{2^n-1} sayda funksiyalardan təşkil olunmuşdur.

S ilə özü-özünə ikili olan bütün funksiyalar sinfini işarə edək. Yə'ni istənilən $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyası üçün $f^*(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n)$ bərabərliyi ödənsin. Aydındır ki, x və $\bar{x}$ funksiyaları S sinfinə daxildir. Özü-özünə ikili olan funksiyalar üçün aşağıdakı münasibət ödənilir:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$$

Başqa sözlə desək, $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ və $(\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{\alpha}_n)$ əks yığımlarında özü-özünə ikili olan funksiya da uyğun olaraq əks qiymətlər alır.

Buradan alınır ki, hər bir $f \in S$ məntiq cəbri funksiyası bütünlüklə özünün aldığı qiymətlər cədvəlinin ancaq birinci yarısındakı sətirlərinə uyğun qiymətləri ilə tə'yin olunur. Buna görə də $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dəyişənlərindən asılı olan özü-özünə ikili funksiyaların sayı $2^{2^{n-1}}$ ədədinə bərabərdir.

Təklif 1.3. S qapalı sinifdir.

İsbatı. S sinfi eynilik funksiyasını özündə saxlayır. Əgər $f, f_1, \ldots, f_m$ funksiyaları özü-özünə ikilidirlərsə, onda təklifin isbatı üçün $\Phi = f(f_1,\ldots,f_m)$ superpozisiyasının özü-özünə ikili olduğunu göstərmək kifayətdir. Onu aşağıdakı kimi almaq olar:

$$\Phi^* = f^*(f_1^*,\ldots,f_m^*) = f(f_1,\ldots,f_m) = \Phi$$

Təklif isbat olundu.

İndi isə özü-özünə ikili olmayan funksiya haqqında lemmanı isbat edək.

Lemma 1.1. Tutaq ki, $f(x_1,\ldots,x_n) \notin S$. Onda x və $\bar{x}$ funksiyalarını əvəz etməklə həmin funksiyadan sabiti almaq olar.

İsbatı. Şərtə görə, $f(x_1,\ldots,x_n)$ özü-özünə ikili olmayan funksiyadır. Onda dəyişənlərin qiymətlərinin elə $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ yığımını tapmaq olar ki,

$$f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = f(\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{\alpha}_n).$$

$\varphi_i(x) = x^{\alpha_i}$ $(i = 1,\ldots,n)$ funksiyalarını daxil edək:

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\bar{x}, & \text{əgər} \quad \alpha_i=0\\ x, & \text{əgər} \quad \alpha_i=1\end{cases}$$

Aydındır ki, $\varphi_i(0)=\overline{\alpha}_i$ və $\varphi_i(1)=\alpha_i$. İndi isə $\varphi(x)=f(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x))$ funksiyasına baxaq.

Asanlıqla göstərmək olar ki, $\varphi(x)$ funksiyası $f(x_1,\dots,x_n)$-dən $\bar{x}$ və x funksiyalarını əvəz etməklə alınır. Ona görə də

$$\varphi(0)=f(\varphi_1(0),\dots,\varphi_n(0))=f(\overline{\alpha}_1,\dots,\overline{\alpha}_n)=f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=$$
$$=f(\varphi_1(1),\dots,\varphi_n(1))=\varphi(1)$$

Deməli, $\varphi(x)$ - sabitdir.

Lemma isbat olundu.

Biz burada yığımların $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\widetilde{\beta}=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ kimi vektor yazılışlarından istifadə edəcək və $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$- nı $f(\widetilde{\alpha})$ şəklində göstərəcəyik.

Tə'rif 1.12. İki $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ və $\widetilde{\beta}=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ yığımları üçün $\alpha_1\le\beta_1$, $\alpha_2\le\beta_2,\dots,\alpha_n\le\beta_n$ şərtləri ödənilirsə, onda $\widetilde{\alpha}$ yığımı $\widetilde{\beta}$ yığımını qabaqlayır deyirlər və bunu $\widetilde{\alpha}\le\widetilde{\beta}$ kimi işarə edirlər.

Məsələn, (0,1,0,1) $\le$(1,1,0,1)

Aydındır ki, əgər $\widetilde{\alpha}\le\widetilde{\beta}$ və $\widetilde{\beta}\le\widetilde{\gamma}$, onda $\widetilde{\alpha}\le\widetilde{\gamma}$. Qeyd etmək lazımdır ki, istənilən yığımlar cütü üçün qabaqlama münasibəti doğru deyil. Məsələn, (0,1,0,1) və (1,0,1,0) yığımları arasında belə münasibət yoxdur.

Beləliklə, uzunluqları n-ə bərabər olan bütün yığımlar çoxluğu $\le$ qabaqlama əməlinə nəzərən qismən nizamlanmış olur.

Tə'rif 1.13. $\widetilde{\alpha}$ və $\widetilde{\beta}$ yığımlarından biri digərini qabaqladıqda, onlar müqayisə olunandırlar deyilir.

Məsələn, (0,1) və (1,1) yığımları müqayisə olunan, (0,1) və (1,0) yığımları isə müqayisə olunmayandırlar.

Tə'rif 1.14. Əgər $\widetilde{\alpha}\le\widetilde{\beta}$ şərtini ödəyən ixtiyari iki $\widetilde{\alpha}$ və $\widetilde{\beta}$ yığımları üçün $f(\widetilde{\alpha})\le f(\widetilde{\beta})$ münasibəti ödənirsə, onda $f(x_1,\dots,x_n)$ monoton funksiya adlanır.

Aydındır ki, 0, 1, x, $x_1\cdot x_2$, $x_1\vee x_2$ monoton, $\bar{x}$ isə monoton olmayan funksiyalardır.

Bütün monoton funksiyalar çoxluğunu M ilə işarə edək.

Təklif 1.4. M qapalı sinifdir.

İsbatı. M çoxluğunun eynilik funksiyasını özündə saxlaması faktına əsasən göstərmək kifayətdir ki, əgər

$$f(x_1,\dots,x_n), f_1(x_1,\dots,x_n), f_2(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)$$

monotondursa, onda

$$\Phi(x_1,\dots,x_n)=f(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$$

funksiyası da monotondur.

$\widetilde{\alpha}\le\widetilde{\beta}$ şərtini ödəyən ixtiyari iki $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ və $\widetilde{\beta}=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ yığımlarına baxaq. Bu zaman :

$$f_i(\widetilde{\alpha})\le f_i(\widetilde{\beta}), i=1,\dots,m.$$

Ona görə

$$(f_1(\widetilde{\alpha}),f_2(\widetilde{\alpha}),\dots,f_m(\widetilde{\alpha}))\le(f_1(\widetilde{\beta}),f_2(\widetilde{\beta}),\dots,f_m(\widetilde{\beta}))$$

və deməli, $f(x_1,\dots,x_n)$ funksiyası monoton olduğuna görə

$$\Phi(\widetilde{\alpha}) = f(f_1(\widetilde{\alpha}),\ldots,f_m(\widetilde{\alpha})) \le f(f_1(\widetilde{\beta}),\ldots,f_m(\widetilde{\beta})) = \Phi(\widetilde{\beta}),$$

$$\Phi(\widetilde{\alpha}) \le \Phi(\widetilde{\beta}).$$

Təklif isbat olundu.

Tə'rif 1.15. İki $\widetilde{\alpha}$ və $\widetilde{\beta}$ yığımları o vaxt qonşu yığımlar (i-ci koordinata görə) adlanırlar ki,

$$\widetilde{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_i,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n),$$

$$\widetilde{\beta} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\overline{\alpha}_i,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)$$

Aydındır ki, qonşu yığımlar müqayisə oluna biləndirlər.

Lemma 1.2. $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyasının monoton olmaması üçün zəruri və kafi şərt $\widetilde{\alpha} \le \widetilde{\beta}$ və $f(\widetilde{\alpha}) > f(\widetilde{\beta})$ şərtlərini ödəyən qonşu $\widetilde{\alpha}$ və $\widetilde{\beta}$ cütlərinin olmasıdır.

İsbatı. Əvvəl zəruriliyi isbat edək. Tutaq ki, $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyası monoton deyil. Onda elə iki $\widetilde{\alpha}'$ və $\widetilde{\beta}'$ yığımları tapmaq olar ki, $\widetilde{\alpha}' \le \widetilde{\beta}'$ və $f(\widetilde{\alpha}') > f(\widetilde{\beta}')$ olsun. $\widetilde{\alpha}'$ və $\widetilde{\beta}'$ yığımları arasında elə aralıq yığım qoyuruq ki, aşağıdakı şərt ödənsin:

$$\widetilde{\alpha}' = \widetilde{\alpha}^{(1)} \le \widetilde{\alpha}^{(2)} \le \ldots \le \widetilde{\alpha}^{(t)} = \widetilde{\beta}'$$

və belə ki, $\widetilde{\alpha}^{(\nu)}$ və $\widetilde{\alpha}^{(\nu+1)}$ yığımlar cütü qonşu olsun.

Aydındır ki, $\widetilde{\alpha}'$ və $\widetilde{\beta}'$ müqayisə edilən olduqda bunu həmişə etmək olar.
Əgər hər bir yığımlar cütü üçün

$$f(\widetilde{\alpha}^{(\nu)}) \le f(\widetilde{\alpha}^{(\nu+1)})$$

şərti ödənərsə, onda

$$f(\widetilde{\alpha}') \le f(\widetilde{\beta}')$$

Nəticə e'tibarilə qonşu yığımların $\widetilde{\alpha} \le \widetilde{\beta}$ şərtini ödəyən elə cütləri tapılır ki, $f(\widetilde{\alpha}) > f(\widetilde{\beta})$ olsun. Beləliklə, zərurilik isbat olundu.

Kafiliyin isbatı isə aşkardır.
Lemma isbat olundu.

Bu lemmadan vacib nəticə alınır və bu nəticə monoton olmayan funksiya haqqında lemma adlanır.

Nəticə. Monoton olmayan funksiyada 0,1 sabitlərini və x dəyişənini əvəz etməklə $\overline{x}$ funksiyasını almaq olar.

İsbatı. Tutaq ki, $f(x_1,\ldots,x_n)$ monoton olmayan funksiyadır. Onda əvvəlki lemmaya görə hər hansı i koordinatı üzrə elə iki qonşu

$$\widetilde{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n),$$

$$\widetilde{\beta} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)$$

yığımlarını tapmaq olar ki, $f(\widetilde{\alpha}) = 1$, $f(\widetilde{\beta}) = 0$ şərtləri ödənsin.

Belə bir funksiyaya baxaq:

$$g(x) = f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},x,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)$$

Buradan alırıq ki,

$$g(0) = f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n) = f(\widetilde{\alpha}) = 1,$$

$$g(1)=f(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n)=f(\widetilde{\beta})=0,$$

yə'ni $g(x)=\overline{x}$

Nəticə isbat olundu.

L xətti funksiyalar sinfinə baxaq. Mə'lum olduğu kimi, bu funksiyalardan hər biri aşağıdakı şəkildə göstərilə bilər:

$$f(x_1,\dots,x_n)=c_0+c_1x_1+\dots+c_nx_n,c_i=0,1\ (i=0,1,\dots,n)$$

Aydındır ki, L sinfi qapalıdır. 0,1 sabitləri və $x,\overline{x},x_1+x_2$ funksiyaları L sinfinə daxildir; $x_1\cdot x_2, x_1\vee x_2$ funksiyaları isə L-ə daxil deyil.

Qeyri-xətti funksiya haqqında lemmanı isbat edək.

Lemma 1.3. Tutaq ki, $f(x_1,\dots,x_n)\notin L$. Onda 0,1 sabitlərini və $x,\overline{x}$ funksiyalarını əvəz etmək və f-in inkarını götürməklə, həmin funksiyadan iki dəyişənin konyuksiyasını almaq olar.

İsbatı. f funksiyası üçün Jeqalkin çoxhədlisinə baxaq:

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i_1,\dots,i_s}a_{i_1\dots i_s}\cdot x_{i_1}\cdot\ldots x_{i_s}$$

Çoxhədlinin qeyri-xəttiliyinə görə onun ikidən az olmayan vuruğu özündə saxlayan həddini tapmaq olar. Ümumiliyi pozmadan hesab etmək olar ki, bunlar x_1 və x_2-dir. Onda çoxhədlini aşağıdakı kimi göstərmək olar:

$$\sum_{i_1,\dots,i_s}a_{i_1\dots i_s}\cdot x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_s}=x_1\cdot x_2\cdot f_1(x_3,\dots,x_n)+x_1\cdot f_2(x_3,..,x_n)+$$

$$+x_2\cdot f_3(x_3,\dots,x_n)+f_4(x_3,..,x_n)$$

harada ki, çoxhədlinin yeganəliyinə görə $f_1(x_3,\dots,x_n)\not\equiv 0$.

Tutaq ki, $\alpha_3,\dots,\alpha_n$-lər elədirlər ki, $f_1(\alpha_3,\dots,\alpha_n)=1$

Onda

$$\varphi(x_1,x_2)=f(x_1,x_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)=x_1\cdot x_2+\alpha\cdot x_1+\beta\cdot x_2+\gamma,$$

burada $\alpha,\beta,\gamma-0-a$ və ya 1-ə bərabər olan sabitlərdir.

$\varphi(x_1,x_2)$ funksiyasından aşağıdakı kimi alınan $\Psi(x_1,x_2)$ funksiyasına baxaq:

$$\Psi(x_1,x_2)=\varphi(x_1+\beta,x_2+\alpha)+\alpha\beta+\gamma$$

Aydındır ki,

$$\varphi(x_1+\beta,x_2+\alpha)+\alpha\beta+\gamma=(x_1+\beta)(x_2+\alpha)+\alpha\cdot$$

$$\cdot(x_1+\beta)+\beta(x_2+\alpha)+\gamma+\alpha\beta+\gamma=x_1\cdot x_2+$$

$$+\alpha\cdot x_1+\beta\cdot x_2+\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot x_1+\alpha\cdot\beta+\beta\cdot$$

$$\cdot x_2+\alpha\cdot\beta+\gamma+\alpha\cdot\beta+\gamma=x_1\cdot x_2$$

Deməli, $\Psi(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2$

Lemma isbat olundu.

Yuxarıda deyilənlərə əsaslanaraq elementar məntiq cəbri funksiyalarının bu və ya digər əsas qapalı siniflərə daxil olmalarını aşağıdakı cədvəl 1.5 şəklində göstərmək olar:

CƏDVƏL 1.5

Elementar funksiya	T_0	T_1	S	M	L
0	+	–	–	+	+
1	–	+	–	+	+
$\bar{x}$	–	–	+	–	+
$x_1 \cdot x_2$	+	+	–	+	–
$x_1 \vee x_2$	+	+	–	+	–
$x_1 + x_2$	+	–	–	–	+
$x_1 \to x_2$	–	+	–	–	–
$x_1 \sim x_2$	–	+	–	–	+
x_1 / x_2	–	–	–	–	–
$x_1 \downarrow x_2$	–	–	–	–	–

Bu cədvəldə funksiyanın hər hansı sinfə daxil olması "+" işarəsi ilə, daxil olmaması isə "–" işarəsi ilə göstərilmişdir.
Qeyd edək ki, T_0, T_1, S, M, L sinifləri cüt-cüt müxtəlifdirlər.
Tutaq ki, $\mathcal{N} = \{f_1, f_2, \ldots\}$ P_2-dən olan ixtiyari funksiyalar sistemidir. Bu sistemin tamlığını necə müəyyən etməli?
Teorem 1.8. $\mathcal{N}$ funksiyalar sisteminin tam olması üçün zəruri və kafi şərt onun T_0, T_1, S, M, L qapalı siniflərindən heç birinə bütövlükdə daxil olmamasıdır.
İsbatı. Əvvəl zəruriliyi isbat edək. Tutaq ki, $\mathcal{N}$ tamdır, yə'ni $[\mathcal{N}]=P_2$ və T_0, T_1, S, M, L siniflərindən birinə daxildir. Onu $\mathcal{N}$ ilə işarə edək, yə'ni $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}$. Onda $\mathcal{N}$-in qapalılıq və qapanma xassələrinə görə $P_2=[\mathcal{N}]\subseteq[\mathcal{N}]=\mathcal{N}$

Deməli, $\mathcal{N}=P_2$ olur ki, bu da doğru deyil. Zərurilik isbat olundu.

İndi kafiliyi isbat edək. Tutaq ki, $\mathcal{N}$ bu 5 sinifdən heç birinə daxil deyil. Onda $\mathcal{N}$-dən 5 funksiyadan çox olmayan funksiyaları özündə saxlayan elə $\mathcal{N}'$ alt sistemi ayırmaq olar ki, bu 5 sinifdən heç birinə tamamilə daxil olmasın. Bunun üçün $\mathcal{N}$-dən $f_i, f_j, f_s, f_m, f_\ell$ funksiyalarını götürək, harada ki,

$f_i \notin T_0, f_j \notin T_1, f_s \notin S, f_m \notin M, f_l \notin L.$

$\mathcal{N}'=\{f_i, f_j, f_s, f_m, f_l\}$ qəbul edək.

Kafiliyin isbatı üç mərhələdən ibarətdir.

I. f_i, f_j, f_s funksiyalarının köməyi ilə 0,1 sabitlərinin qurulması.

$f_i (f_i \notin T_0)$ funksiyasına baxaq. Burada iki hal mümkündür:
1). $f_i(1,\ldots,1)=1$. Onda $\varphi(x)=f_i(x,\ldots,x)=1$ sabitdir, ona görə ki,

$$\varphi(0)=f_i(0,\ldots,0)=1,$$

$$\varphi(1)=f_i(1,\ldots,1)=1.$$

İkinci sabit f_j funksiyasından alınır:

$$f_j(1,\ldots,1)=0$$

2). $f_i(1,\ldots,1)=0$ Onda $\varphi(x)=f_i(x,\ldots,x)-\bar{x}$ -dir.

Ona görə ki,

$$\varphi(0)=f_i(0,\ldots,0)=1,$$

$$\varphi(1) = f_i(1,\dots,1) = 0$$

$f_s(f_s \notin S)$ funksiyasını götürək. $\bar{x}$-nın alınmasına görə və özü-özünə ikili olmayan funksiya haqqında olan lemmaya əsasən, f_s funksiyasından sabiti almaq olar. $\bar{x}$-ın alınmasına görə biz ikinci sabiti də ala bilərik. Beləliklə, hər iki halda biz 0,1 sabitlərini alırıq.

II. 0,1 sabitləri və f_m funksiyası vasitəsi ilə $\bar{x}$ funksiyasının qurulması. Bu isə monoton olmayan funksiya haqqında olan lemma vasitəsi ilə həyata keçirilir.

III. 0,1 sabitləri və $\bar{x}$, f_l funksiyaları vasitəsi ilə $x_1 \cdot x_2$ funksiyasının qurulması. Bu qeyri-xətti funksiya haqqında olan lemma vasitəsi ilə həyata keçirilir.

Beləliklə, $\mathfrak{N}'$ (və deməli $\mathfrak{N}$) üzərində düstur vasitəsi ilə $\bar{x}$ və $x_1 \cdot x_2$ funksiyalarını realizə edirik. Bununla kafilik isbat olunur.

Teorem isbat olundu.

Nəticə 1. P_2-dən olan və $\mathfrak{M} \neq P_2$ şərtini ödəyən hər hansı $\mathfrak{M}$ qapalı sinfi, T_0, T_1, S, M, L siniflərinin heç olmazsa birinə daxildir.

Tə'rif. P_2-dən olan $\mathfrak{N}$ funksiyalar sinfi o vaxt maksimal adlanır ki, $\mathfrak{N}$ tam olmasın, lakin ixtiyari $f(f \in P_2, f \notin \mathfrak{N})$ funksiyası üçün $\mathfrak{N} \cup \{f\}$ sinfi tam olsun.

Aydındır ki, hər bir maksimal sinif tamdır.

Nəticə 2. Məntiq cəbrində yalnız T_0, T_1, S, M, L maksimal sinfi mövcuddur.

Misal. Göstərək ki,

$$f_1 = x_1 \cdot x_2; f_2 = 0; f_3 = 1; f_4 = x_1 + x_2 + x_3$$

funksiyalar sistemi tamdır.

Aydındır ki, $f_3 \notin T_0, f_2 \notin T_1, f_4 \notin M, f_1 \notin L, f_2 \notin S.$

Digər tərəfdən funksiyalardan hər hansı birinin atılması tam olmayan sistemə gətirir.

$$\{f_2, f_3, f_4\} \subset L, \qquad \{f_1, f_3, f_4\} \subset T_1,$$
$$\{f_1, f_2, f_4\} \subset T_0, \qquad \{f_1, f_3, f_4\} \subset M.$$

Teorem 1.9. P_2-də tam olan hər bir $\mathfrak{N}$ funksiyalar sistemindən, 4-dən az olmayan funksiyanı özündə saxlayan, tam alt sistem ayırmaq olar.

İsbatı. Əvvəlki teoremə görə $\mathfrak{N}$ sistemindən özündə 5-dən çox olmayan funksiyanı saxlayan tam $\mathfrak{N}'$ alt sistemini ayırmaq olar. Amma $f_i \notin T_0$ funksiyası bundan əlavə, ya öz-özünə ikili deyil (1-ci hal), ona görə ki, $f_i(0,\dots,0) = f_i(1,\dots,1)$; ya da monoton deyil və 1-i özündə saxlamır (2-ci hal), ona görə ki,

$$f_i(0,\dots,0) > f_i(1,\dots,1)$$

Ona görə də ya $\{f_i, f_j, f_m, f_l\}$ sistemi tam olur, ya da $\{f_i, f_s, f_l\}$ sistemi.

Teorem isbat olundu.

ÇALIŞMALAR

1. Əks yığımlarda eyni qiymət alan n dəyişənlərdən asılı məntiq cəbri funksiyalarının sayını tapın.
2. Aşağıdakı düsturları inkar əməlinin ancaq arqumentlərin üzərində olan düstur şəklinə gətirin:

a) $\overline{x \cdot y \vee z}$

b) $x \cdot (x \cdot y \vee \overline{y \cdot z} \vee \overline{(y \vee \bar{t} \cdot z)})$

3. Aşağıdakı düsturlarla realizə edilən məntiq cəbri funksiyalarının cədvəlini qurun:

a) $(x \to y)+((y \to z)+(z \to x))$;

b) $\overline{(\bar{x} \vee y) \vee (x \cdot \bar{z})} \downarrow (x \sim y)$;

v) $(((x / y) \downarrow z) / y) \downarrow z$.

4. Verilən münasibətlərin doğruluğunu yoxlayın:

a) $x \to (y \sim z) = (x \to z) \sim (x \to z)$;

v) $x + (y \to z) = (x + y) \to (x + z)$.

5. Əsas ekvivalentliklərdən istifadə etməklə $\mathcal{N}$ və $\mathcal{B}$ düsturlarının ekvivalentliyini isbat edin:

a) $\mathcal{N} = (x \to y) \to ((x \cdot \bar{y}) + (x \sim \bar{y}))$, $\mathcal{B} = (x \vee y) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y})$;

b) $\mathcal{N} = x \to (y \cdot x) \to ((x \to y) \to y)z)$, $\mathcal{B} = y \to (x \to z)$

6. Aşağıdakı funksiyaları mükəmməl d.n. f. və k.n.f. şəklində göstərin:

a) $f(x,y,z) = (01101100)$;

b) $f(x,y,z) = (x \sim y) \cdot \overline{(z \to t)}$;

v) $f(x,y,z,t) = (x \to y \cdot z) \cdot (y \cdot t + z) \to (x \cdot \bar{t}) \vee \bar{x}$.

7. Qeyri-müəyyən əmsallar üsulu ilə aşağıdakı funksiyalar üçün Jeqalkin çoxhədlilərini tapın:

a) $f(x,y) = (1001)$;

b) $f(x,y,z) = (01101000)$.

8. Aşağıdakı funksiyaların əsaslı dəyişənlərini tapın:

a) $f(x,y,z) = (x \to (x \vee y)) \to z$;

b) $f(x,y) = (x \vee y) \to y$.

9. Verilən funksiyaları Jeqalkin çoxhədliləri şəklində göstərin:

a) əsas məntiq əməliyyatlarını;

b) $x \vee y \vee z$;

v) $x \cdot y \vee y \cdot z \vee x \cdot z$;

10. g funksiyası f funksiyasına ikilidirmi?

a) $f = x + y$, $g = x \sim y$;

b) $f = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z \vee x(y \sim z)$, $g(x,y,z) = (01101101)$;

v) $f = x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z$, $g = x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z$.

11. Aşağıdakı düsturlarla verilən f funksiyası özü-özünə ikilidirmi?

a) $f(x,y,z) = \overline{(x \to y) \to x \cdot z} \to (y \to z)$;

b) $f(x,y,z,t) = (\bar{x} \vee y \vee z) \cdot t \vee \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$.

12. Göstərilən funksiyalardan hansıları monotondur?

a) $x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z$, ğ) $x \cdot y + y \cdot z + x \cdot z + z$,

b) $x \to (x \to y)$, d) $\overline{x \vee y} \sim \bar{x} \cdot \bar{y}$,

v) $x \cdot y \cdot (x + y)$, e) $f(x,y,z) = (00110111)$,

q) $\overline{x \vee y} \sim \bar{x} \vee \bar{y}$, ə) $f(x,y,z) = (01100111)$.

13. Monoton funksiyaya ikili olan funksiyanın ikili olduğunu isbat edin.

14. f funksiyasını Jeqalkin çoxhədlisinə ayırmaqla onun xətti olub-olmadığını araşdırın:

a) $f(x,y,z) = (x \cdot y \vee \bar{x} \cdot \bar{y}) + z$;

b) $f(x,y,z) = x \cdot y \cdot (x + y)$;

v) $f(x,y,z) = (x \to y) \cdot (y \to x) \sim z$.

15. n dəyişəndən asılı neçə xətti funksiya vardır?

16. Tutaq ki, $f(x_1,\ldots,x_m)$ və $g(x_{m+1},\ldots,x_n)$ verilmiş funksiyalardır və bütün $j = 1,2,\ldots,k$ üçün $1 \le i_j \le m$. Bul funksiyalarının törəmələrinin xassələrindən istifadə etməklə aşağıdakı münasibətlərin doğruluğunu göstərin:

a) $$\frac{\partial(f+g)}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})} = \frac{\partial f}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})};$$

b) $$\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})} = g \cdot \frac{\partial f}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})};$$

v) $\dfrac{\partial(f \vee g)}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})} = \bar{g} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}$.

17. Aşağıdakı funksiyalar sisteminin tamlığını isbat edin:

a) $\{x \cdot y, \bar{x}\}$,

b) $\{x \vee y, \bar{x}\}$,

v) $\{x \cdot y, x + y, 1\}$,

q) $\{\overline{x \vee y}\}$,

ğ) $\{x + y, x \vee y, 1\}$,

d) $\{0, 1, x \cdot y, x + y + z\}$.

18. Tamlıq me'yarından istifadə etməklə, $\mathcal{N}$ sisteminin tam olub-olmadığını araşdırın:

a) $\mathcal{N} = \{x \to y, x \to \bar{y} \cdot z\}$,

b) $\mathcal{N} = \{x \to \bar{y}, \bar{x} \sim y \cdot z\}$,

v) $\mathcal{N} = \{0, 1, x \cdot (y \sim z) \vee \bar{x} \cdot (y + z)\}$,

q) $\mathcal{N} = \{(S \setminus M) \cup (L \setminus (T_0 \cup T_1))\}$.

§ 2.1. k - qiymətli məntiq funksiyaları və düsturları

Tutaq ki, $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$ müəyyən dəyişənlər (arqumentlər) əlifbasıdır. Arqumentləri $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ çoxluğunda tə'yin olunmuş elə $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ funksiyalarına baxaq ki, $\alpha_i \in E_k$ olduqda, bütün $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \underbrace{E_k \times \ldots \times E_k}_{n \text{ дефэ}} = E_k^n$ üçün $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_k$ olur. Məntiq cəbrində olduğu kimi, E_k çoxluğundan olan dəyişənlər üçün $x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots$ metaişarələrindən istifadə edəcək, funksiyaları isə sadəcə $f(x_1, \ldots, x_n)$ şəklində göstərəcəyik.

Tə'rif 2.1. Arqumentləri və qiymətləri E_k çoxluğunda dəyişən $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ funksiyasına k-qiymətli məntiq funksiyası deyilir.

Belə funksiyalar aşağıdakı kimi cədvəl üsulu ilə təsvir oluna bilərlər.

CƏDVƏL 2.1

x_1 ... x_{n-1} x_n	$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0 ... 0 0	f(0,..., 0, 0)
0 ... 0 1	f(0,..., 0, 1)
. . . .	. . . .
0 ... 1 0	f(0,..., 1, 0)
. . . .	. . . .
k-1 ... k-1 k-1	f(k-1,..., k-1, k-1)

Bu cədvəldə müəyyən qayda ilə (məs. tam $0, 1, 2, \ldots, k^n - 1$ ədədlərinin k əsaslı sistemdə ayrılışı kimi) uzunluğu n-ə bərabər olan bütün k-qiymətli yığımlar və onların hər birində funksiyanın aldığı qiymətlər göstərilmişdir.

X əlifbası üzərində bütün k-qiymətli məntiq funksiyalar və 0,1,...k-1 sabitlər çoxluğunu P_k ilə işarə edək. $x_1,\dots,x_n$ dəyişənlərinin n-ölçülü $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, harada ki, $\alpha_i \in E_k$, yığımlarının ümumi sayı k^n-ə bərabər olduğundan, aşağıdakı nəticəni alırıq.

Teorem 2.1. P_k çoxluğundan olan və n sayda dəyişənlərdən asılı bütün funksiyaların sayı $p_k(n)=k^{k^n}$ ədədinə bərabərdir.

Bu deyilənlərdən çıxır ki, $k \geq 3$ olduqda, P_k-dan olan funksiyaların cədvəl üsulu ilə təsvir edilməsi P_2 halındakına nisbətən çətinləşir və n sayda dəyişəndən asılı belə funksiyaların nəzərdən keçirilməsi prosesi effektiv olmur. Məsələn, $k=3, n=2$ olduqda, $p_3(2)=19683$ olur. Aydındır ki, bu qədər funksiyaları yuxarıdakı cədvəl vasitəsi ilə nəzərdən keçirmək təcrübə baxımından çox çətindir.

P_k-dan olan funksiyalar üçün (P_2 halında olduğu kimi) əsaslı və fiktiv dəyişənlərdən, funksiyaların bərabərliyindən danışmaq olar. Bu isə o deməkdir ki, P_k çoxluğundan götürülmüş funksiyalar fiktiv dəyişənlər dəqiqliyi ilə baxıla bilərlər.

İndi isə məntiq cəbrindən bizə mə'lum olan elementar funksiyaların bə'zi k-qiymətli analoqları barəsində mə'lumat verək.

1. Sabit funksiyalar, yə'ni bütün arqumentləri fiktiv olan funksiyalar: k-qiymətli məntiqdə k sayda sabit funksiyalar vardır: $f_i = i;\ i=0,1,\dots,k-1$.

2. Birdəyişənli funksiyalar içərisində əsas rol oynayan aşağıdakı elementar k-qiymətli məntiq funksiyaları vardır.

2.1. $\bar{x} = x+1 \pmod{k}$ inkar funksiyasının qiymətlərinin "dövrü" yerdəyişmə mə'nada ümumiləşməsidir: bu funksiyaya Post inkarı da deyilir.

2.2. $\tilde{x} = Nx = k-1-x$ inkar funksiyasının başqa bir ümumiləşməsi olub, qiymətlərin "güzgüvari" in'ikası mə'nasında başa düşülür.

Bu funksiyanı bə'zi ədəbiyyatda Lukaşeviç inkarı da adlandırırlar. İndi isə k-qiymətli məntiqin xarakteristik funksiyalarını daxil edək.

2.3. Birinci növ xarakteristik funksiya $I_i(x), i$ qiymətinin xarakteristik funksiyası olub,

$$I_i(x)=\begin{cases} k-1, & x=i \text{ olanda,} \\ 0, & x\neq i \text{ olanda} \end{cases} \quad (i=0,1,\dots,k-1)$$

şəklində tə'yin olunur: $i \neq k-1$ olduqda, inkar funksiyasını ümumiləşdirir.

2.4. İkinci növ xarakteristik funksiya $\chi_i(x)$ aşağıdakı şəkildə tə'yin olunur:

$$\chi_i(x)=\begin{cases} 1, & x=i \text{ olanda,} \\ 0, & x\neq i \text{ olanda.} \end{cases}$$

Aydındır ki, k=2 olduqda, $I_i(x)=\chi_i(x)$.

Misal. Cədvəl üsulundan istifadə edib, k=4 halı üçün bütün yuxarıda göstərilmiş elementar funksiyaları quraq.

Bu halda $n=1$ arqumentli dördqiymətli məntiq funksiyalarının cədvəli sətirdən təşkil olunur.

Sabit funksiyalar: $f_0=0,\ f_1=1,\ f_2=2,\ f_3=3$. Bir-dəyişənli dördqiymətli məntiq funksiyaları aşağıdakı cədvəldə verilmişdir.

CƏDVƏL 2.2

x	$\bar{x}$	Nx	$I_i(x)$	$\chi_i(x)$
0	1	3	$I_0(x)$	$\chi_0(x)$
1	2	2	$I_1(x)$	$\chi_1(x)$
2	3	1	$I_2(x)$	$\chi_2(x)$
3	0	0	$I_3(x)$	$\chi_3(x)$

3. İndi isə ikidəyişənli elementar funksiyaları daxil edək:

3.1. $\min(x_1,x_2)$ k-qiymətli konyuksiya funksiyası.

3.2. $x_1\cdot x_2 \pmod k$ - k moduluna görə vurma olub, konyuksiyanın başqa bir ümumiləşməsidir.

3.3. $\max(x_1,x_2)$ funksiyası k-qiymətli məntiq dizyunksiya əməlini tə'yin edir.

3.4. $x_1+x_2 \pmod k$ - k moduluna görə cəmləmə olub, $\bmod 2$-yə nəzərən cəmləmə əməlinin ümumiləşməsidir.

3.5. İkidəyişənli k-qiymətli məntiq funksiyaları içərisində məntiq cəbrindən bizə mə'lum olan Vebb funksiyasının da analoqundan danışmaq olar:

$$V_k(x_1,x_2)=\max(x_1,x_2)+1 \pmod k$$

k=2 olduqda, $V_2(x_1,x_2)$ Pirs oxu məntiq funksiyası ilə üst-üstə düşür:

$$V_2(x_1,x_2)=x_1\uparrow x_2=\overline{x_1\vee x_2}=(x_1\vee x_2)\oplus 1 \pmod 2=\bar{x}_1\wedge\bar{x}_2$$

3.6. Eyni qayda ilə k-qiymətli Şeffer məntiq funksiyasını da tə'yin etmək olar:

$$S_k(x_1,x_2)=\min(x_1,x_2)+1 \pmod k.$$

Mə'lum olduğu kimi, k=2 olduqda,

$$S_2(x_1,x_2)=\min(x_1,x_2)+1 \pmod 2=\overline{x_1\wedge x_2}=x_1|x_2$$

Bununla yanaşı, k-qiymətli məntiq funksiyaları üçün aşağıdakı elementar əməlləri də tə'yin etmək olar.

3.7. k moduluna görə fərq funksiyası:

$$x-y \pmod k=\begin{cases} x-y, & \text{əgər } 0\le y\le x\le k-1,\\ k-(y-x), & \text{əgər } 0\le x<y\le k-1.\end{cases}$$

3.8. k- qiymətli implikasiya funksiyası:

$$x\to y=\begin{cases} k-1, & \text{əgər } 0\le x<y<k-1,\\ k-1-x+y, & \text{əgər } 0\le y\le x\le k-1.\end{cases}$$

3.9. k- qiymətli kəsik fərq funksiyası

$$x\dot{-}y=\begin{cases} 0, & \text{əgər } 0\le x<y\le k-1,\\ x-y, & \text{əgər } 0\le y\le x\le k-1.\end{cases}$$

İkidəyişənli dördqiymətli elementar funksiyalar üçün aşağıdakı cədvəli yazmaq olar.

x_1x_2	$\min(x_1,x_2)$	$\max(x_1,x_2)$	$V_4(x_1,x_2)$	$x_1+x_2(\mathrm{mod}4)$	$x_1\cdot x_2(\mathrm{mod}4)$	$x_1 \to x_2$
00	0	0	1	0	0	3
01	0	1	2	1	0	3
02	0	2	3	2	0	3
03	0	3	0	3	0	3
10	0	1	2	1	0	2
11	1	1	2	2	1	3
12	1	2	3	3	2	3
13	1	3	0	0	3	3
20	0	2	3	2	0	1
21	1	2	3	3	2	2
22	2	2	3	0	0	3
23	2	3	0	1	2	3
30	0	3	0	3	0	0
31	1	3	0	0	3	1
32	2	3	0	1	2	2
33	3	3	0	2	1	3

Bu deyilənlərdən görünür ki, k-qiymətli məntiqdə (k>2) eyni bir məntiq cəbri funksiyasının bir neçə analoqu vardır və onlardan hər biri həmin funksiyaların uyğun xassələrini ümumiləşdirir. k-qiymətli məntiq funksiyalarından təşkil olunmuş düsturlardan da danışmaq olar. Belə düsturları məntiq cəbrində olduğu kimi, latın əlifbasının hərfləri ilə işarə edəcəyik:

$$U(x_1,\dots,x_n),\ U[f_1,\dots,f_m],$$

burada 1-ci halda düsturun dəyişəndən asılılığı, 2-ci halda isə düsturun təşkil olunduğu funksiyalar göstərilmişdir.

§2.2. k-qiymətli məntiq düsturlarının realizə edilməsi. Dizyunktiv və konyuktiv normal formalar

Hər bir $U(x_1,\dots,x_n)$ düsturuna qarşı P_k-dan müəyyən $f(x_1,\dots,x_n)$ (bunu əksər hallarda $f_U(x_1,\dots,x_n)$ ilə işarə edirlər) funksiyası qoyulduqda, U düsturu f funksiyasını realizə edir deyilir və aşağıdakı kimi yazılır:

$$U(x_1,\dots,x_n) \to f_U \in P_k$$

Məntiq cəbrində olduğu kimi, k-qiymətli superpozisiya əməli də (C-əməli) tə'yin edilə bilər. Məs. $f_1,\dots,f_m$ funksiyalarının superpozisiyalarını

$$C[f_1,\dots,f_m]=U$$

k-qiymətli məntiq düsturu şəklində göstərmək olar.

k-qiymətli məntiq funksiyalarının P_k çoxluğu ilə C əməlinin doğurduğu sistemə funksional sistem deyilir və (P_k, C) kimi işarə edilir.

Tə'rif 2.2. Tutaq ki, f_U və f_V funksiyaları U və V düsturlarını realizə edir. Əgər $f_U=f_V$ olarsa, onda U və V düsturlarına ekvivalent düsturlar deyilir.

Düsturların ekvivalentliyi anlayışına əsaslanaraq, k-qiymətli elementar məntiq funksiyaları üçün aşağıdakı əsas xassələrin doğruluğunu göstərmək olar:

Tutaq ki, $(x_1 \circ x_2)$ işarələməsi vasitəsi ilə

$$\min(x_1,x_2),\quad x_1x_2(\mathrm{mod}\,k),\quad \max(x_1,x_2),\quad x_1+x_2(\mathrm{mod}\,k)$$

funksiyalarından istənilən biri göstərilmişdir.

1. $(x_1 \circ x_2)$ funksiyası assosiativlik xassəsinə malikdir:

$$((x_1 \circ x_2) \circ x_3) = (x_1 \circ (x_2 \circ x_3)).$$

2. $(x_1 \circ x_2)$ funksiyası komutativlik xassəsinə malikdir:

$$(x_1 \circ x_2) = (x_2 \circ x_1).$$

Məntiq düsturlarının yazılması zamanı $\wedge$ əməlinin $\vee$ əməlindən əvvəl yerinə yetirilməsi qaydasını və assosiativlik xassəsini nəzərə alaraq k-qiymətli düstur ifadələrində mö'tərizə işarələrini atmaq olar.
İndi isə

$$\{0,1,\dots,k-1, I_0(x),\dots,I_{k-1}(x), \min(x_1,x_2), \max(x_1,x_2)\}.$$

elementar funksiyalar sisteminə aid bir neçə qrup eyniliklər (qaydaları) göstərək.

3. I simvolunun düsturun "dərinliyinə" endirilməsi xassəsi:

$$I_\sigma(c) = \begin{cases} k-1, & c=\sigma \\ 0, & c \neq \sigma \end{cases} \quad (\sigma, c = 0,1,\dots,k-1);$$

$$I_\sigma(I_\tau(x)) = \begin{cases} I_0(x)\vee\dots\vee I_{\tau-1}(x)\vee I_{\tau+1}(x)\vee\dots\vee I_{k-1}(x), & \sigma = 0, \\ 0, & 0<\sigma<k-1, \\ I_\tau(x), & \sigma = k-1; \end{cases}$$

$$I_\sigma(x_1x_2) = I_\sigma(x_1)(I_\sigma(x_2)\vee\dots\vee I_{k-1}(x_2)) \vee$$
$$\vee I_\sigma(x_2)(I_\sigma(x_1)\vee\dots\vee I_{k-1}(x_1));$$

$$I_\sigma(x_1 \vee x_2) = I_\sigma(x_1)(I_0(x_2)\vee\dots\vee I_\sigma(x_2)) \vee$$
$$\vee I_\sigma(x_2)(I_0(x_1)\vee\dots\vee I_\sigma(x_1)).$$

4. Distributivlik xassəsi:

$$(x_1 \vee x_2)x_3 = (x_1x_3) \vee (x_2x_3),$$
$$(x_1x_2) \vee x_3 = (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3).$$

5. Dəyişənlərin "təmiz" daxil olmalarının aradan çıxarılması xassəsi:

$$x = 1\cdot I_1(x) \vee 2\cdot I_2(x) \vee\dots\vee (k-1)I_{k-1}(x).$$

6. Dəyişənin daxil edilməsi qaydası:

$$x_1 = x_1(I_0(x_2)\vee\dots\vee I_{k-1}(x_2)).$$

7. Sadələşdirmə qaydası:

$$I_\sigma(x)I_\tau(x) = \begin{cases} I_\sigma(x), & \tau = \sigma, \\ 0, & \tau \neq \sigma; \end{cases}$$

$$\sigma\tau = \min(\sigma,\tau); \qquad \sigma \vee \tau = \max(\sigma,\tau);$$

$$(k-1)x = x, \qquad 0\cdot x = 0,$$
$$(k-1)\vee x = k-1, \qquad 0 \vee x = x.$$

Yuxarıda göstərilən 1-7 xassələrinə əsaslanaraq

$$\{0,1,\dots,k-1, I_0(x),\dots,I_{k-1}(x), \min(x_1,x_2), \max(x_1,x_2)\}$$

elementar funksiyalar sisteminin köməyi ilə başqa yeni eyniliklər almaq olar.

Elementar funksiyaların ödədiyi yuxarıdakı eyniliklərdən çıxır ki, Bul funksiyalarının bə'zi xassələri $k>2$ halında doğru deyil.

Misal.

1) $\sim(\sim x) = x$, lakin $\bar{\bar{x}} \neq x$ ($k \geq 3$ olduqda),

2) $\sim(\min(x_1,x_2)) = \max(\sim x_1, \sim x_2)$, lakin $k \geq 3$ olduqda, $\overline{\min(x_1,x_2)} \neq \max(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

Yuxarıda dediyimiz assosiativlik xassəsinə əsaslanaraq, n sayda arqumentlərin k-qiymətli dizyunksiyası və konyunksiyası funksiyalarını tə'yin etmək olar:

$$\bigvee_{i=1}^{n} x_i = x_1 \vee \ldots \vee x_n, \qquad (2.2.1)$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n. \qquad (2.2.2)$$

$I_i(x)$ xarakteristik funksiyaları vasitəsilə aşağıdakı kimi konyuktiv ifadə daxil edək:

$$\varphi_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}(x_1,\ldots,x_n) = \bigwedge_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} I_{\sigma_i}(x_i) \qquad (2.2.3)$$

Xarakteristik funksiyaların və konyuksiyanın xassəsindən çıxır ki, müəyyən $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ yığımında φ konyuksiyasının (k-1)-ə bərabər olması üçün zəruri və kafi şərt

$$x_1 = \sigma_1, \ldots, x_n = \sigma_n$$

bərabərliklər sisteminin ödənməsidir. Arqumentlərin başqa yığım qiymətlərində xarakteristik konyuksiya 0 qiymət alır. Beləliklə, φ xarakteristik konyuksiyasının k-qiymətli məntiqdəki rolu, məntiq cəbrində vahidin xarakteristik funksiyasının rolu ilə eynidir.

Teorem 2.2. İstənilən $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_k$ funksiyası aşağıdakı şəkildə təsvir oluna bilər:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} I_{\sigma_1}(x_1) \wedge \ldots \wedge$$

$$\wedge I_{\sigma_n}(x_n) \wedge f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \qquad (2.2.4)$$

Birbaşa yoxlamaqla bu münasibətin doğruluğunu göstərmək olar.

k-qiymətli məntiq funksiyasının bu ayrılışı məntiq cəbrindəki mükəmməl d.n.f-nin ümumiləşməsidir.

İndi isə

$$\Psi_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}(x_1,\ldots,x_n) = \bigwedge_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} (I_{\bar{\sigma}_i}(x_1) \vee \ldots \vee I_{\bar{\sigma}_n}(x_n)) \qquad (2.2.5)$$

şəklində k-qiymətli xarakteristik dizyunksiya tə'yin edək.

İnversiya və dizyunksiyanın xassələrindən alınır ki, bütün $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ yığımları çoxluğunda heç olmazsa, σ-nın bir qiyməti üçün $x_i \neq \sigma_i$ olarsa, onda $\Psi_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}(x_1,\ldots,x_n) = k-1$ olur. Digər tərəfdən

$$x_i = \sigma_i \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

münasibətlərinin eyni zamanda ödənildiyi yığımlarda xarakteristik dizyunksiya sıfra çevrilir. Beləliklə, xarakteristik dizyunksiya Ψ, məntiq cəbrindəki sıfırın xarakteristik funksiyası rolunu oynayır. Bu mühakimələrdən aşağıdakı ayrılış alınır.

Teorem 2.3. İstənilən $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_k$ funksiyası aşağıdakı şəkildə təsvir oluna bilər:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigwedge_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} I_{\bar{\sigma}_1}(x_1) \vee \ldots \vee$$

$$\vee I_{\bar{\sigma}_n}(x_n) \vee f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \qquad (2.2.6)$$

Bu ayrılış k- qiymətli mükəmməl k.n.f. adlanır.

§ 2.3. k-qiymətli məntiq funksiyalarının modulyar çoxhədlilərə nəzərən ayrılışları

Yuxarıda göstərilmiş k-qiymətli d.n.f. və k.n.f. ilə yanaşı, k-qiymətli məntiq funksiyalarının elə ayrılışlarından da söhbət gedə bilər ki, orada dizyunksiya və konyuksiya əməllərinin yerinə modula görə cəmləmə və modula görə vurma əməlləri istifadə edilmiş olsun. Modul əməllərinin istifadə edildiyi bu tipli ayrılış k-qiymətli məntiq funksiyasının aşağıdakı teoremlə verilən təsvirinə əsaslanır.

Teorem 2.4. İstənilən $f(x_1,\dots,x_n)\in P_k$ funksiyası aşağıdakı şəkildə təsvir oluna bilər:

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)}\chi_{\sigma_1}(x_1)\dots$$

$$\chi_{\sigma_n}(x_n)\cdot f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)(\mathrm{mod}\,k) \qquad (2.3.1)$$

Bu ayrılışda istifadə edilən cəbri əməllər k moduluna görə cəmləmə və k moduluna görə vurma əməlləri olub, uyğun olaraq +(mod k) və · (mod k) simvolları ilə işarə edilmişdir.

Bərabərliyin sağ tərəfindəki cəm işarəsi altında olan

$$\chi_{\sigma_1\dots\sigma_n}(x_1,\dots,x_n)=\chi_{\sigma_1}(x_1)\dots\chi_{\sigma_n}(x_n)(\mathrm{mod}\,k)$$

ifadəsini əvvəlki hallara analoji qaydada k-qiymətli xarakteristik modulyar hasil adlandırmaq olar. Göründüyü kimi, müəyyən $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ yığımında $\chi_{\sigma_1\dots\sigma_n}(x_1,\dots,x_n)$ xarakteristik modulyar hasilinin vahidə bərabər olması üçün zəruri və kafi şərt

$$x_1=\sigma_1,\dots,x_n=\sigma_n$$

bərabərliklər sisteminin ödənməsidir.

$x_1,x_2,\dots,x_n$ dəyişənlərinin k moduluna görə $Q(x_1,x_2,\dots,x_n)$ çoxhədlisi dedikdə, aşağıdakı ifadə başa düşülür:

$$a_0+a_1x_1+\dots+a_mx_m \ (\mathrm{mod}\,k)$$

burada a_i əmsalları E_K çoxluğuna daxildirlər; x_j isə $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ çoxluğundan götürülmüş hər hansı dəyişən, ya da həmin çoxluqdan götürülmüş dəyişənlərin mod k-ya nəzərən hasilidir.

Tə'rif 2.3. Əgər hər hansı $f(x_1,x_2,\dots,x_n)\in P_k$ funksiyası üçün k moduluna nəzərən təşkil olunmuş elə $Q(x_1,x_2,\dots,x_n)$ çoxhədlisi varsa ki,

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=Q(x_1,x_2,\dots,x_n) \qquad (2.3.2)$$

münasibəti doğrudur, onda həmin funksiya çoxhədli ilə təsvir olunandır (realizə olunandır) deyilir.

P_k çoxluğuna daxil olan funksiyalar üçün Jeqalkin teoreminin aşağıdakı kimi analoqu doğrudur.

Teorem 2.5. Tutaq ki k=p-sadə ədəddir. Onda istənilən p qiymətli $f(x_1,\dots,x_n)$ funksiyası p moduluna görə təşkil olunmuş çoxhədli şəklində təsvir oluna bilər.

İsbatı. Doğrudan da teorem 2.4.-ə görə P_p-dən götürülmüş istənilən $f(x_1,\dots,x_n)$ funksiyası üçün aşağıdakı yazılış doğrudur:

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)}\chi_{\sigma_1}(x_1)\dots$$

$$\chi_{\sigma_n}(x_n)f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)(\mathrm{mod}\,p) \qquad (2.3.3)$$

burada cəmləmə və vurma əməlləri p moduluna görə aparılır.
Eyni zamanda

$$\Psi_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\chi_{\sigma_1}(x_1)\ldots\chi_{\sigma_n}(x_n)\ (\mathrm{mod}\ p)$$

olur.
Deməli, f funksiyasının mod p-yə nəzərən polinom şəklində göstərilməsi məsələsi $\chi_0(x),\ldots,\chi_{p-1}(x)$ xarakteristik funksiyaların polinomlarla təsvir edilməsinə gətirilmiş olur.
Digər tərəfdən həmişə

$$\chi_\sigma(x)=\chi_0(x\ominus\sigma)\quad(\mathrm{mod}\ p)(\sigma=0,1,\ldots,p-1)$$

münasibəti doğrudur. Bu isə o deməkdir ki, f funksiyasının polinom şəklində təsvir edilməsi məsələsi χ_0 funksiyasının p-yə nəzərən polinom şəklində göstərilməsi məsələsinə gətirilmiş olur.

Mə'lum olduğu kimi, kiçik Ferma teoreminə görə, (a,p)=1 şərtini ödəyən istənilən a ədədi üçün həmişə

$$a^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)\quad(1\le a\le p-1)$$

münasibəti doğrudur. Digər tərəfdən p-sadə ədəd olduğundan, a=1,2,..,p-1 qiymətləri göstərilən şərti ödəyirlər. Deməli,

$$\chi_0(x)=1\ominus x^{p-1}(\mathrm{mod}\ p)=1\oplus(p-1)\otimes x^{p-1}\quad(\mathrm{mod}\ p)$$

burada

$0\le x\le p-1$ və $\chi_\sigma(x)=\chi_0(x\ominus\sigma)=\chi_0[x\oplus(p-1)\otimes\sigma]$

olduğunu nəzərə alsaq,

$$\chi_1(x)=1\ominus(x\ominus 1)^{p-1}\ (\mathrm{mod}\ p)=1\oplus(p-1)[x\oplus p-1)]^{p-1}\ (\mathrm{mod}\ p)$$

$$\chi_2(x)=1\ominus(x\ominus 2)^{p-1}\ (\mathrm{mod}\ p)=1\oplus(p-1)[x\oplus p-2)]^{p-1}\ (\mathrm{mod}\ p)$$

.
.
.

$$\chi_{p-1}(x)=1\ominus(x\ominus(p-1))^{p-1}\ (\mathrm{mod}\ p)=1\oplus(p-1)[x\oplus 1)]^{p-1}\ (\mathrm{mod}\ p)$$

$\chi_0(x),\chi_1(x),\ldots,\chi_{p-1}(x)$ funksiyalarının polinom şəklindəki bu ifadələrini $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyasının yuxarıdakı ayrılışında yerinə yazıb, həmin ayrılış üzərində bə'zi sadə çevirmələr aparsaq, alarıq:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=a_0\oplus a_1\otimes x_1\oplus\ldots\oplus a_n\otimes x_n\oplus a_{n+1}\otimes x_1^2+$$

$$\oplus a_{n+2}x_1\otimes x_2\oplus\ldots\oplus a_l\otimes x_1^{p-1}\oplus a_{l+1}x_1^{p-1}\otimes x_2\oplus\ldots\oplus$$

$$\oplus a_{p^n-1}\otimes x_1^{p-1}\otimes x_2^{p-1}\otimes\ldots\otimes x_n^{p-1}\quad(\mathrm{mod}\ p)$$

burada

$$a_i\in E_p=\{0,1,\ldots,p-1\},i=0,1,\ldots,p^n-1$$

Bu ifadənin sağ tərəfindəki elementar konyuksiyaları aşağıdakı kimi işarə edək.

$$R_0 = 1$$
$$R_i = x_i, \quad 1 \le i \le n$$
$$R_{n+1} = x_1^2$$
$$R_{n+2} = x_1 \otimes x_2, \quad (\mathrm{mod}\, p)$$
$$\vdots$$
$$R_{p^n-1} = x_1^{p-1} \otimes x_2^{p-1} \otimes \ldots \otimes x_n^{p-1}$$

Onda hər bir $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_p$ çoxhədlisini

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{p^n-1} a_i \otimes R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (\mathrm{mod}\, p)$$

şəklində yazmaq olar;

$$R = (R_0, R_1, \ldots, R_{p^n-1})^T$$

vektoruna Q(.) çoxhədlisinin əmsallar vektoru deyilir. $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_p$ funksiyasını realizə edən çoxhədlinin tapılması məntiq cəbrində olduğu kimi, qeyri-müəyyən əmsallar üsulu ilə aparıla bilər. Yuxarıdakı çoxhədlini götürüb, hər bir $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in (E_p)^n$ yığımı üçün

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}, \ldots, a_l, \ldots, a_{p^n-1})$$

əmsallarına nəzərən GF(p) meydanı üzərində $R(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \otimes a = Q(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ $(\mathrm{mod}\, p)$ kimi xətti tənliklər sistemi təşkil edirik. Həmin sistemin həlli Q çoxhədlisinin axtarılan əmsallarını verir.

Aşağıdakı cədvəldə k=3 halı üçün əsas məntiqi əməllərə uyğun (realizə edən) Q modulyar polinomlar göstərilmişdir.

f(x) k=3	Modulyar məntiqi polinom (Q-forma) Q(x)
$\bar{x}$	$2 \oplus 2 \odot x \oplus x^2 (\mathrm{mod}\, 3)$
$\hat{x}$	$1 \oplus x (\mathrm{mod}\, 3)$
$x \vee y$	$x \oplus y \oplus 2 \odot xy \oplus x \odot y^2 \oplus x^2 \odot y (\mathrm{mod}\, 3)$
$x \wedge y$	$xy \oplus 2xy^2 \oplus 2 \odot x^2 \odot y \oplus 2 \odot x^2 \odot y (\mathrm{mod}\, 3)$
$x \oplus y$	$x \oplus y (\mathrm{mod}\, 3)$
$x \cdot y$	$x \odot y (\mathrm{mod}\, 3)$
x / y	$1 \oplus x \oplus y \oplus 2 \odot xy \oplus x \odot y^2 \oplus x^2 \odot y \oplus x^2 \odot y^2 (\mathrm{mod}\, 3)$

Baxılan məsələnin həllinin başqa üsulu da təklif edilə bilər. Doğrudan da birdəyişənli g(x) funksiyasının polinom şəklində ayrılışını almaq üçün qeyri-müəyyən əmsallar üsuluna müraciət edək.

$$g(x) = a_0 \oplus a_1 \otimes x \oplus \ldots \oplus a_{p-1} x^{p-1} (\mathrm{mod}\, p)$$

Bu münasibətdə x=0,1,..,p-1 götürsək, $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ əmsallarına nəzərən aşağıdakı tənliklər sistemini alarıq:

$$a_0 \oplus a_1 \cdot 0^1 \oplus a_2 \cdot 0^2 \oplus \ldots \oplus a_{p-1} \cdot 0^{p-1} = g(0),$$

$$a_0 \oplus a_1 \otimes 1^1 \oplus a_2 \cdot 1^2 \oplus \ldots \oplus a_{p-1} \cdot 1^{p-1} = g(1),$$

$$a_0 \oplus a_1 \otimes 2^1 \oplus a_2 \cdot 2^2 \oplus \ldots \oplus a_{p-1} \cdot 2^{p-1} = g(2).$$

....

$$a_0 \oplus a_1 \otimes (p-1)^1 \oplus a_2 \otimes (p-1)^2 \oplus \ldots \oplus a_{p-1} \cdot (p-1)^{p-1} = g(p-1).$$

Alınan sistemin determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 1 & 1 & 1^2 & \dots\dots & 1^{p-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots\dots & 2^{p-1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & & \dots\dots \\ 1 & p-1 & (p-1)^2 & & (p-1)^{p-1} \end{vmatrix} \pmod p$$

məşhur Vandermond determinantıdır.
Mə'lumdur ki,

$$\Delta = \prod_{0 \le i < j \le p-1} (j-i) \pmod p$$

p-sadə ədəd olduğundan, $\Delta \not\equiv 0 \pmod p$. Onda xətti tənliklər sisteminin həllini verən Kramer düsturlarından istifadə etsək:

$$a_i \otimes \Delta \equiv \Delta_i \pmod p \quad (i = 0,1,\dots,p-1)$$

burada Δ_i, Δ determinantının uyğun minorudur:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & g(0) & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^{i-1} & g(1) & 1 & \dots & 1^{p-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{i-1} & g(2) & 2^{i+1} & \dots & 2^{p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & p-1 & (p-1)^2 & \dots & (p-1)^{i-1} & g(i) & (p-1)^{i+1} & \dots & (p-1)^{p-1} \end{vmatrix}$$

Beləliklə, baxılan xətti sistemin yeganə həllini almış oluruq. Bu isə ona uyğun g(x) funksiyasının polinomla yeganə ifadə olunduğu deməkdir.

Jeqalkin teoreminin analoqu olan bu teorem E_K çoxluğunun müəyyən additiv və multiplikativ əməllərə

nəzərən sonlu meydan və ya Qalua meydanı əmələ gətirdiyi hallarda da doğrudur. Cəbrdə göstərildiyi kimi, belə sonlu meydanın qurulması ancaq və ancaq o halda mümkün olur ki, $k=p^m$ olsun (m>0-tam ədəddir). Onda deyilən Qalua meydanı izomorfizm dəqiqliyi ilə birqiymətli tə'yin olunur və bir qayda olaraq, GF(p^m) ilə işarə olunur (burada GF - Galois Field ingilis sözlərinin baş hərflərindən təşkil olunur, p^m isə meydandakı elementlərin sayını göstərir).

Belə meydanın elementləri cəmləmə əməlinə nəzərən xarakteristikası p olan additiv Abel qrupu əmələ gətirir. Bu fakt istənilən $\alpha_i \in \mathrm{GF}(p^m)$ elementinin həm də

$$\alpha_i = \alpha_1^{(i)} \cdot 1 \oplus \alpha_2^{(i)} \varepsilon \oplus \dots \oplus \alpha_m^{(i)} \cdot \varepsilon^{m-1}$$

və ya $\varepsilon = p$ götürməklə

$$\alpha_i = \alpha_1^{(i)} \otimes 1 \oplus \alpha_2^{(i)} \otimes p \oplus \dots \oplus \alpha_m^{(i)} \otimes p^{m-1}$$

alınan ekvivalent təsvirlərindən çıxır.

İstənilən $\alpha \in E_p$ elementi üçün

$$\underbrace{\alpha \oplus \dots \oplus \alpha}_{p} = 0,$$

münasibəti ödənilir. Burada 0 ilə qrupun sıfırı, $\oplus$ ilə meydanın additiv əməli işarə edilmişdir. Bu qrupun ixtiyari α elementini p-əsaslı sistem üzrə $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ kimi p-qiymətli yığım şəklində də göstərmək olar. Onda GF(p^m) meydanında iki

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$$

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$$

elementlərinin cəmini aşağıdakı kimi tə'yin etmək olar:

$$\alpha \oplus \beta = (\alpha_1 \oplus \beta_1, \ldots, \alpha_m \oplus \beta_m)$$

Qalua meydanının bütün $\alpha \neq 0$ elementləri meydanın 2-ci əməlinə nəzərən dövrü qrup təşkil edir.

Misal. Tutaq ki, k=2^2. Onda GF(2^2) meydanının istənilən $\alpha \neq 1$ elementi

$$\alpha^3 = 1, \ \alpha^2 \oplus \alpha \oplus 1 = 0$$

münasibətlərini ödəyir.

Burada $\alpha = 2$ götürsək, alarıq:

$$\alpha^2 = \ominus(\alpha \oplus 1) = 3$$

Onda ixtiyari $\alpha = 0,1,2,3 \in GF(2^2)$ elementlərini $\alpha = \varepsilon_0 \oplus \varepsilon_1 \cdot 2 \leftrightarrow (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ və ya $\alpha \neq 0$ olduqda, $\alpha = 2^i$, burada $\varepsilon_0, \varepsilon_i \in \{0,1\}$, i=0,1,2 şəklində göstərmək olar. Buradan alarıq:

$$2 \cdot 2 = \alpha \otimes \alpha = 3,$$
$$2 \cdot 3 = \alpha \otimes \alpha^2 = \alpha^3 = 1,$$
$$3 \cdot 3 = \alpha^2 \otimes \alpha^2 = \alpha^4 = \alpha = 2.$$

Bu münasibətlərə əsaslanaraq, GF(2^2) meydanının additiv $\oplus$ və multiplikativ $\otimes$ əməllərini aşağıdakı cədvəllər şəklində vermək olar:

Cədvəl 2.5 (a)

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	0	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Cədvəl 2.5 (b)

$\otimes$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Teoremin isbat sxemini təkrar etməklə göstərmək olar ki, P_k çoxluğundan (harada ki, k=p^m) götürülmüş hər bir $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyası GF(p^m) meydanı üzərində tə'yin olunmuş çoxhədlilərlə tə'yin edilə bilər.

Yuxarıda göstərildiyi kimi, $\chi_i(x)$ xarakteristik funksiyaları GF(p^m) sonlu meydanı üzərində modul əməllərinə nəzərən çoxhədli şəklində təsvir edilə bilərlər. Həmin funksiyalar vasitəsilə istənilən p^m qiymətli

$$f(x_1,\ldots,x_n) \in P_{p^m}$$

(harada ki, $(x_1,\ldots,x_n) \in GF(p^m)$) funksiyasını GF($p^m$) sonlu meydanı üzərində

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{(\sigma_1 \ldots \sigma_n) \in E^n_{p^m}} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \otimes \chi_{\sigma_1}(x_1) \otimes \ldots$$
$$\otimes \chi_{\sigma_n}(x_n) GF(p^m)$$

polinomu şəklində göstərmək olar. Burada $\chi_i(x)$ funksiyaları ixtiyari $x \in GF(p^m)$ üçün özünəməxsus normallıq və ortoqonallıq şərtini ödəyirlər:

$$\sum_{i=0}^{p^m-1} \chi_i(x) = 1, \quad \chi_i(x) \odot \chi_j(x) = 0, \ i \neq j \quad GF(p^m)$$

Eyni zamanda, bu funksiyalar üçün

$$[\chi_{i^\circ}(x)]^{p^m} = \chi_i(x), \quad GF(p^m)$$

idempotentlik xassəsi də doğrudur. Belə xarakteristik funksiyalara ədəbiyyatda bə'zən Laqranjın interpolyasiya çoxhədliləri də deyilir və $L_i(x)$ ilə işarə edilir. Həmin çoxhədlilər vasitəsilə funksiyanın p^m sayda qiymətini bilməklə, axtarılan $f(x) \in P_{p^m}$ funksiyasını dəqiq interpolyasiya etmək mümkündür.

Həmin çoxhədlilərin tapılması yuxarıda deyildiyi kimi, k=p, m=1 halı üçün:

$$f(x) = \sum_{\sigma=0}^{p-1} f(\sigma) L_\sigma(x);$$

$$L_\sigma(x) = \chi_\sigma(x) = \chi_0(x \ominus \sigma) = 1 \ominus (x \ominus \sigma) =$$

$$= 1 \oplus (p-1)[x \oplus (p-1) \cdot \sigma]^{p-1}; \text{ (mod p)},$$

$$\sigma = 0, 1, \ldots, p-1$$

münasibətlərinə əsaslanır. Bu münasibətlərə əsaslanaraq, belə Laqranj çoxhədliləri p=2,3,5 halları üçün tapılmış və aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

CƏDVƏL 2.6

p=2	p=3	p=5
$L_0 = x \oplus 1$,	$L_0 = 2 \odot x^2 \oplus 1$,	$L_0 = 4 \odot x^4 \oplus 1$,
$L_1 = x$.	$L_1 = 2 \odot x^2 \oplus 2 \odot x$,	$L_1 = 4 \odot (x^4 \oplus x^3 \oplus x^2 \oplus x)$,
	$L_2 = 2 \odot x^2 \oplus x$.	$L_2 = 4 \odot x^4 \oplus 3 \odot x^3 \oplus x^2 \oplus 2 \odot x$,
		$L_3 = 4 \odot x^4 \oplus 2 \odot x^3 \oplus x^2 \oplus 3 \odot x$,
		$L_4 = 4 \odot x^4 \oplus x^3 \oplus 4 \odot x^2 \oplus x$.

Bu deyilənləri istənilən çoxdəyişənli

$$f(x_1, \ldots, x_n) \in P^n_{p^m}$$

harada ki,

$$(x_1, \ldots, x_n) \in [GF(p^m)]^n$$

funksiyasına da aid etmək olar. k-qiymətli məntiq funksiyalarının modul əməllərinə (sonlu modula nəzərən cəmləmə və vurma-buna modul cəbri də deyilir) görə təsviri göründüyü kimi, mə'lum cəbri riyazi aparatın (qrup, halqa, meydan və s.)sistemli şəkildə istifadə edilməsi imkanından doğur. Belə baxış n-dəyişənli k-qiymətli məntiq funksiyaları çoxluğunda klassik xətti cəbrin bə'zi əsas anlayış və təsvirlərinin də analoqlarını tapmağa imkan verir.

Tə'rif 2.4. Tutaq ki, P^n_k-də $\Psi(k,n) = \{\Psi_0, \ldots, \Psi_r\}$, (harada ki, $r = k^n - 1$) funksiyalar sistemi verilmişdir. Bu sistem ixtiyari $\lambda_0, \ldots, \lambda_r \in E_k$ sabitləri üçün

$$\lambda_0 \otimes \Psi_0 \oplus \ldots \oplus \lambda_r \otimes \Psi_r = 0$$

münasibətini ancaq və ancaq $\lambda_0 = \ldots = \lambda_r = 0$ olduqda ödəyirsə, onda həmin $\Psi(k,n)$ sistemi xətti asılı olmayan sistem adlanır.

P_k^n-dən götürülmüş ixtiyari $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_k^n$ funksiyası üçün

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=0}^{r} f_i \otimes \Psi_i(x_1,\ldots,x_n)(\bmod k)$$

burada $r = k^n - 1$, təsviri doğru olduqda, $\Psi(k,n)$ sistemi bazis adlanır.
Modul əməllərinə nəzərən skalyar hasili şərti olaraq,

$$(\Psi_i,\Psi_j) = \sum_{\sigma\in E_k^n} \Psi_i(\sigma) \odot \Psi_j(\sigma)(\bmod k)$$

ilə işarə etsək, onda $\Psi(k,n)$ sisteminin xətti asılı olmamazlıq şərtini

$$\Delta\Psi \equiv \begin{vmatrix} (\Psi_0,\Psi_0) & (\Psi_0,\Psi_1) & \ldots & (\Psi_0,\Psi_r) \\ (\Psi_1,\Psi_0) & (\Psi_1,\Psi_1) & \ldots & (\Psi_1,\Psi_r) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\Psi_r,\Psi_0) & (\Psi_r,\Psi_1) & \ldots & (\Psi_r,\Psi_r) \end{vmatrix} \neq 0(\bmod k)$$

şəklində göstərmək olar. n=1 halında bazisi almaq üçün x dəyişəninin müxtəlif dərəcələrini götürmək olar:

$$\Psi(k,1) = \{1, x, x^2, \ldots, x^{k-1}\}.$$

n>1 halı bir ölçülü bazislərin tenzor hasili kimi olur. Bu bazisin komponentləri

$$\Psi_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} = x_1^{\sigma_1} \otimes \ldots \otimes x_n^{\sigma_n}$$

Aşkardır ki, bu baxımdan yuxarıda deyilən $\chi_i(x)$ xarakteristik funksiyalar sistemi bazis təşkil edirlər.
Nümunə: k=3, n=2 halı üçün

$$\Psi_{00} = 1; \Psi_{10} = x_1; \Psi_{20} = x_1^2; \Psi_{01} = x_2;$$
$$\Psi_{11} = x_1 \otimes x_2; \Psi_{21} = x_1^2 \otimes x_2; \Psi_{02} = x_2^2;$$
$$\Psi_{12} = x_1 \otimes x_2^2; \Psi_{22} = x_1^2 \otimes x_2^2$$

sistemi bazis təşkil edir.

k=2, p=2 halında yuxarıda təsvir olunan bazis məşhur Jeqalkin cəbrinə gətirir. $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_k^n$ funksiyasının bazis təşkil edən sistem üzrə aynlışındakı f_i əmsalları xətti cəbrin mə'lum üsullarının köməyi ilə tapıla bilər. Belə üsullardan biri ortoqonallaşdırma metodudur. Bu zaman verilmiş $\Psi(k,n)$ bazisi və L xətti çevirməsilə bağlı olan köməkçi ortoqonal

$$\Psi'(k,n) = L \otimes \Psi(k,n)$$

bazisindən istifadə edilir. Həmin bazisdəki f_i əmsalları

$$f_i' = \frac{(f,\Psi_i)}{(\Psi_i,\Psi_j)}, \quad \Psi_i \in \Psi'(k,n)$$

münasibətləri ilə tə'yin edilirlər.
$\Psi'(k,n)$ bazisi üzrə $\Phi' = \{f_0',\ldots,f_r'\}$ əmsallar vektorundan $\Psi(k,n)$ üzrə aynlış vektoru $\Phi = \{f_0,\ldots,f_r\}$ üzrə keçid transponirə edilmiş matrisin köməyi ilə aparılır:

$$\Phi = L^T \otimes \Phi'$$

$\Psi'(k,n)$ ortoqonal bazis kimi $\chi_i(x)$ xarakteristik funksiyalar sistemindən istifadə edilməsi əlverişlidir. Bu halda

$$\Psi_i(\sigma)=\begin{cases}1, & i=\sigma;\\ 0, & i\neq\sigma.\end{cases} \qquad f'=f(\sigma=i)$$

L^T matrisinin elementlərinin hesablanması isə K^{2n} sayda tənliklərdən ibarət

$$\sum_{i=0}^{r} l_{ij}\otimes\psi_i(\sigma)=f_j'(\sigma) \qquad j,\sigma=0,1,\dots,r\,.$$

sistemin həllinə gətirilir.

Nümunə: n və k-nın bə'zi qiymətləri üçün L^T matrisi aşağıdakı şəkildə tə'yin olunur:

$$k=2,\ n=1:$$

$$L^T=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$k=2,\ n=2:$$

$$L^T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$k=3,\ n=1:$$

$$L^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\2&2&2\end{pmatrix}$$

$$k=3,\ n=2:$$

$$L^T=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&2&1&0&0&0&0&0&0\\2&2&2&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&2&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&2&0&2&1\\0&0&0&1&1&1&2&2&2\\2&0&0&2&0&0&2&0&0\\0&1&2&0&1&2&0&1&2\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

§ 2.4. Çoxqiymətli məntiq funksiyalarının məntiqi və hesabi çoxhədlilər vasitəsilə təsvir olunması alqoritmləri.

İxtiyari n dəyişənli k-qiymətli $f(\vec{x})=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ məntiq cəbri funksiyasını aşağıdakı qaydada məntiqi və hesabi çoxhədlilərin köməyi ilə təsvir etmək olar:

$$F(x)=\sum_{i=0}^{k^n-1} f^{(i)}\cdot x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{i_n}\,(\mathrm{mod}\,k), \qquad (2.4.1)$$

$$P(x)=\sum_{i=0}^{k^n-1} p^{(i)}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_n^{i_n} \qquad (2.4.2)$$

harada ki, $f^{(i)}\in\{0,1,2,\dots,k-1\}$ və $p^{(i)}\in R$ (R həqiqi ədədlər çoxluğudur) (2.4.1)-(2.4.2) çoxhədlilərinin əmsalları;

$$x_t^{i_t}=\begin{cases}x_t^{i_t}\,(\mathrm{mod}\,k), & i_t\neq 0,\\ 1 & i_t=0,\quad t=\overline{1,n}\end{cases}$$

(2.4.1)-in dəyişənləridir, (2.4.2)-də bütün əməllər hesabidir. k=2 olduqda, (2.4.1) çoxhədlisi Jeqalkin çoxhədlisinə çevrilir. Əsas məsələ $f^{(i)}$ və $p^{(i)}$ əmsallarının tapılmasıdır.

Nümunə. Tutaq ki, çoxdəyişənli funksiya (k=3, n=2 olduqda) $\vec{x} = [000122120]^T$ vektoru kimi verilir.

k=3 (sadə) olduğundan (2.4.1)-in köməyi ilə $F(x)$ aşağıdakı kimi təsvir olunur:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{3^2-1} f^{(i)} \odot x_1^{i_1} x_2^{i_2} = f^{(0)} \odot x_1^0 x_2^0 \oplus f^{(1)} \odot x_1^0 x_2^1 \oplus$$

$$\oplus f^{(2)} \odot x_1^0 x_2^2 \oplus f^{(3)} \odot x_1^1 x_2^0 \oplus f^{(4)} \odot x_1^1 x_2^1 \oplus f^{(5)} \odot$$

$$\odot x_1^1 x_2^2 \oplus f^{(6)} \odot x_1^2 x_2^0 \oplus f^{(7)} \odot x_1^2 x_2^1 \oplus f^{(8)} \odot$$

$$\odot x_1^2 x_2^2 = f^{(0)} \oplus f^{(1)} \odot x_2 \oplus f^{(2)} \odot x_2^2 \oplus$$

$$\oplus f^{(3)} \odot x_1 \oplus f^{(4)} \odot x_1 x_2 \oplus f^{(5)} \odot x_1 x_2^2 \oplus f^{(6)} \odot x_1^2 \oplus$$

$$\oplus f^{(7)} \odot x_1^2 x_2 \oplus f^8 \odot x_1^2 x_2^2 \pmod 3.$$

$f^{(i)}, i = \overline{0,8}$ əmsalları tapıldıqdan sonra F(x)-i tamamilə tə'yin etmək olur. Bu əmsalların tapılması üçün müxtəlif üsullar mövcuddur. Aşağıda $f^{(i)}$ və $p^{(i)}$ əmsallarının Furye çevirməsinin köməyi ilə tapılması alqoritmi şərh olunur.

Nümunə. k=3 olduqda, $x \wedge y$ elementar funksiyasının məntiqi və hesabi çoxhədlilərlə təsviri aşağıdakı kimi verilir.

$$F(x) = xy \oplus 2 \odot xy^2 \oplus 2 \odot x^2 y \oplus 2 \odot x^2 y^2 \pmod 3)$$

$$P(x) = \frac{5}{2} xy - xy^2 - x^2 y + \frac{1}{2} x^2 y^2$$

Qeyd edək ki, çoxqiymətli funksiyanın məntiqi çoxhədli ilə təsviri zamanı müəyyən (k ilə bağlı) məhdudiyyətlər ortalığa çıxır. Hesabi çoxhədli ilə təsvir zamanı isə belə məhdudiyyətlər yoxdur.

Digər tərəfdən, nəzərə almaq lazımdır ki, çoxhədli formalarının sintezi aparatı və onların qarşılıqlı əlaqəsi diskret bazislərdə Furye çevirməsinə əsaslanır. Onun tətbiqi, bazislərin (diskret Furye çevirməsinin (DFÇ) çevirmə matrislərinin) formalaşmasından və verilmiş məntiq cəbri funksiyasının spektrini hesablamaq üçün vektor-matris hesablamalarının yerinə yetirilməsindən ibarətdir. Bundan sonra, məsələ spektral əmsalların analitik forma ilə əvəzlənməsinə gətirilir ki, o da DFÇ bazisi ilə tə'yin olunur.

Tutaq ki, DFÇ cütü məntiqi bazisdə aşağıdakı kimi tə'yin olunur:

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= R_{k^n} \otimes \vec{X} \\ \vec{X} &= R_{k^n}^{-1} \otimes \vec{F} \end{aligned}\right\} \pmod k, \qquad (2.4.3)$$

harada ki, $\vec{F} = [f^{(0)}, f^{(1)} \ldots f^{(k^n-1)}]^T - \vec{X}$ vektorunun spektri, yaxud F(x) məntiqi çoxhədlisinin əmsalları vektoru; R_{k^n}, $R_{k^n}^{-1}$ - konyuktiv (məntiqi) çevirmənin düz və tərs matrisləridir. Onlar aşağıdakı rekurent qaydalarla formalaşırlar:

$$\left.\begin{aligned} R_{k^t} &= R_k \otimes R_{k^{t-1}} \\ R_{k^t}^{-1} &= R_k^{-1} \otimes K_{k^{t-1}}^{-1} \end{aligned}\right\} \pmod k \; \forall t \in \overline{2,n} \qquad (2.4.4)$$

R_k və R_k^{-1} matrisləri çevirmənin nüvəsi adlanırlar. Aydındır ki, (2.4.3) çevirməsinin reallaşması R_k və R_k^{-1} nüvələrinin formalaşmasından asılıdır.

DFÇ nüvəsi R_k^{-1} matrisinin (l,i)-ci elementi $R_{l,i}^{-1}$-in formalaşması qaydası

$$R_{l,i}^{-1} = l^i (\mathrm{mod}\, k), l,i \in \overline{0,k-1} \qquad (2.4.5)$$

kimi tə'yin olunur. Matris forması isə, aşağıdakı kimi verilir.

$$R_k^{-1} = \begin{array}{c|c} l \backslash i & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & k-1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k-1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0^0 & 0^1 & 0^2 & \cdots & 0^{k-1} \\ 1^0 & 1^1 & 1^2 & \cdots & 1^{k-1} \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ (k-1)^0 & (k-1)^1 & (k-1)^2 & \cdots & (k-1)^{k-1} \end{bmatrix} (\mathrm{mod}\, k) \end{array}$$

R_k nüvəsinin formalaşması üçün $R_k^{-1} \odot R_k = I_k (\mathrm{mod}\, k)$ xassəsindən istifadə edək. Bu matris tənliyindən R_k nüvəsini tə'yin etmək olar. Tutaq ki, k=3. (2.4.5)-i nəzərə alsaq, R_3^{-1} tərs matrisi

$$R_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0^0 & 0^1 & 0^2 \\ 1^0 & 1^1 & 1^2 \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

şəklində olar. Onda aşağıdakı matris tənliyi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathrm{mod}\, 3)$$

$$\left.\begin{aligned} & k_{11} = 1 \\ & k_{11} \oplus k_{21} \oplus k_{31} = 0 \\ & k_{11} \oplus 2k_{21} \oplus k_{31} = 0 \\ & k_{12} = 0 \\ & k_{12} \oplus k_{22} \oplus k_{32} = 1 \\ & k_{12} \oplus 2k_{22} \oplus k_{32} = 0 \\ & k_{13} = 0 \\ & k_{13} \oplus k_{23} \oplus k_{33} = 0 \\ & k_{13} \oplus 2k_{23} \oplus k_{33} = 1 \end{aligned}\right\} (\mathrm{mod}\, 3)$$

məntiqi tənliklər sisteminə gətirilir. Bu sistemi həll edərək

$$\begin{matrix} k_{11} = 1 & k_{12} = 0 & k_{13} = 0 \\ k_{21} = 0 & k_{22} = 2 & k_{23} = 1 \\ k_{31} = 2 & k_{32} = 2 & k_{33} = 2 \end{matrix}$$ alırıq.

Deməli, axtarılan matris

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

şəklində olur.

Analoji qaydada, R_5^{-1} nüvəsi verildikdə, k=5 üçün K_5 matrisi aşağıdakı kimi qurulur:

$$R_5^{-1}=\begin{bmatrix}0^0 & 0^1 & 0^2 & 0^3 & 0^4\\ 1^0 & 1^1 & 1^2 & 1^3 & 1^4\\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4\\ 3^0 & 3^1 & 3^2 & 3^3 & 3^4\\ 4^0 & 4^1 & 4^2 & 4^3 & 4^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 1 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

(2.4.4) düsturlarına qayıdıb, k=3 və n=2 üçün K_{3^2} və $K_{3^2}^{-1}$ matrislərini formalaşdırınq.

$$R_{3^2}=\begin{bmatrix}K_3 & 0_3 & 0_3\\ 0_3 & 2K_3 & K_3\\ 2K_3 & 2K_3 & 2K_3\end{bmatrix} \qquad R_{3^2}^{-1}=\begin{bmatrix}K_3^{-1} & 0_3 & 0_3\\ K_3^{-1} & K_3^{-1} & K_3^{-1}\\ K_3^{-1} & 2K_3^{-1} & K_3^{-1}\end{bmatrix}$$

R_{3^2} və $R_{3^2}^{-1}$-matrisləri düz və tərs DFÇ konyuktiv (məntiqi) bazisdə axtarılan matrislərdir.

Onlar funksiyalar sistemi şəklində interpretasiya oluna bilərlər.

İndi isə məntiqi çoxhədlilərin formalaşmasına və onlara görə qiymətləri vektor şəklində verilən çoxqiymətli məntiq cəbri funksiyalarının - MCF qurulmasına baxaq. n dəyişənli MCF-nın qiymətlərini təsvir edən $\vec{X}$ vektoru üzərində (2.4.3) DFÇ aparılır. $f^{(i)}$ spektrinin elementləri $(i=\overline{0,k^n-1})$ (2.4.1) məntiqi çoxhədli formasının əmsallarıdırlar.

Nümunə. Tutaq ki, k=3 və n=2. Çoxdəyişənli funksiyanın qiymətləri $\vec{X}=[222111012]^T$ vektoru ilə verilir.

Tələb olunur ki, bunlar üçün F - formanı, d.d. məntiqi çoxhədli formasını yazaq.

$\vec{X}$ vektoru üçün konyuktiv (məntiqi) bazisdə DFÇ yerinə yetirək:

$$\vec{F}=R_{3^2}\vec{X}=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & 0_3 & & & 0_3 & \\ 2 & 2 & 2 & & & & & & \\ \hline & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ & 0_3 & & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1\\ & & & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2\\ \hline 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right]\begin{bmatrix}2\\2\\2\\1\\1\\1\\0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\0\\2\\1\\0\\0\\2\\0\end{bmatrix}(\bmod 3)$$

$\vec{F}$-in əmsallarına görə, axtarılan çoxhədlini quraq. Bunun üçün (2.4.1) münasibətindən istifadə edək:

$$F(x)=2\oplus 0x_2\oplus 0x_2^2\oplus 2\odot x_1\oplus 1\cdot x_1x_2\oplus 0x_1x_2^2\oplus 0x_1^2\oplus$$

$$\oplus 0x_1^2x_2+0x_1^2x_2^2=2\oplus 2\odot x_1\oplus x_1x_2\oplus 2\cdot x_1^2x_2(\bmod 3)$$

Nümunə. Tutaq ki, çoxqiymətli funksiya

$$F(x)=2\oplus 2\odot x_1\oplus x_1x_2\oplus 2\odot x_1^2x_2(\bmod 3)$$

məntiqi çoxhədlisi şəklində təsvir olunmuşdur. Tələb olunur ki, onu $\vec{X}$ vektorunun qiymətləri şəklində göstərməli. (2.4.3) münasibətindəki tərs DFÇ istifadə edək.

$$\vec{X}=K_{3^2}^{-1}\vec{F}=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 0_3 & & & 0_3 & \\ 1 & 2 & 1 & & & & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1\end{array}\right]\begin{bmatrix}2\\0\\0\\2\\1\\0\\0\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\\1\\1\\1\\0\\1\\2\end{bmatrix}(\bmod 3)$$

Qeyd etmək lazımdır ki, $\vec{F}$-in əmsallar vektorunun F(x) çoxhədlisi şəklində yazılması üçün (2.4.1)-ə uyğun olaraq hədləri ciddi nizamlamaq lazımdır.

İndi isə çoxqiymətli funksiyaların, sonradan məntiqi (inversiya) çoxhədli forması, yaxud G-forması adlanan başqa bir analitik təsvirinə baxaq.

DFÇ cütü konyuktiv (məntiqi, inversiya) bazisində

$$\left.\begin{aligned}\vec{G} &= G_{k^n} \otimes \vec{x} \\ \vec{X} &= G_{k^n}^{-1} \otimes \vec{G}\end{aligned}\right\}(\mathrm{mod}\, k), \qquad (2.4.6)$$

şəklindədir, harada ki, $\vec{G}=[g^{(0)}g^{(1)}\dots g^{(k^n-1)}]^T$ – k^n ölçülü vektordur, verilən bazisdə Furye spektri mə'nasını kəsb edir və elementləri G-formasının əmsallarından ibarətdir:

$$G(x)=\sum_{i=0}^{k^n-1} g^{(i)} \odot \bar{x}_1^{i_1}\bar{x}_2^{i_2}\dots\bar{x}_n^{i_n} \,(\mathrm{mod}\, k) \qquad (2.4.7)$$

G_{k^n} və $G_{k^n}^{-1}$-uyğun olaraq konyuktiv bazisdə DFÇ düz və tərs matrisləridir. Onların formalaşması üçün (2.4.4) rekurent qaydası qüvvədədir.

$G_{k^n}^{-1}$ matrisi hər bir elementinə nəzərən formalaşır, onun (l,i)-ci elementi isə

$$g^{-1}(l,i)=\bar{l}^{\,i}\,(\mathrm{mod}\, k), \forall l,i \in \overline{0,k-1} \qquad (2.4.8)$$

düsturu ilə tə'yin olunur və matris şəklində aşağıdakı kimi göstərilir:

$$G_{k^n}^{-1} = \begin{array}{c} {}_{\bar{l}}\diagdown^{i} \\ k-1 \\ k-2 \\ k-3 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & k-1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} (k-1)^0 & (k-1)^1 & (k-1)^2 & \dots & (k-1)^{k-1} \\ (k-2)^0 & (k-2)^1 & (k-2)^2 & \dots & (k-2)^{k-1} \\ (k-3)^0 & (k-3)^1 & (k-3)^2 & \dots & (k-3)^{k-1} \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 0^0 & 0^1 & 0^2 & \dots & 0^{k-1} \end{array}\right] \end{array} (\mathrm{mod}\, k)$$

G-formanın məxsusiliyini müzakirə edək. (2.4.7) və (2.4.1) ifadələrini müqayisə edək. G-forması F-formasından ancaq dəyişənlərin inversiyasına görə fərqlənir. Düz DFÇ G_k nüvəsi R_k nüvəsi üçün əvvəldə baxılan metodika üzrə aparılır. Belə ki, əgər k=3 üçün

$$G_3^{-1}=\begin{bmatrix} 2^0 & 2^1 & 2^2 \\ 1^0 & 1^1 & 1^2 \\ 0^0 & 0^1 & 0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{olarsa,}$$

onda məntiqi tənliklər sistemini həll edib,

$$G_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{alırıq.}$$

Analoji olaraq $G_5, k=5$ matrisi formalaşdırılır. Bunun üçün

$$G_5^{-1} = \begin{bmatrix} 4^0 & 4^1 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \\ 3^0 & 3^1 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 1^0 & 1^1 & 1^2 & 1^3 & 1^4 \\ 0^0 & 0^1 & 0^2 & 0^3 & 0^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2.4.4) rekurent qaydasına görə tələb olunan ölçüdə çevirmə matrisləri qurulur.

Misal üçün, n=2 üçün G_{3^2} və $G_{3^2}^{-1}$ matrisləri aşağıdakı kimi tə'yin olunur:

$$G_{3^2} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0_3 & 0_3 & G_3 \\ \hline G_3 & 2G_3 & 0_3 \\ \hline 2G_3 & 2G_3 & 2G_3 \end{array}\right], \quad G_{3^2}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c|c} G_3^{-1} & 2G_3^{-1} & G_3^{-1} \\ \hline G_3^{-1} & G_3^{-1} & G_3^{-1} \\ \hline G_3^{-1} & 0_3 & 0_3 \end{array}\right]$$

Deməli, G-formada bütün dəyişənlər məntiqi çoxhədliyə inversiya ilə daxil olur, çoxhədlinin əmsalları isə F-formada olduğu kimi, yalnız (k-1)-i aşmayan tam müsbət qiymətlər alır.

Çoxqiymətli elementar funksiyaları tə'yin edərkən onlar arasında elə funksiyalar meydana çıxır ki, onların Bul cəbrində analoqu yoxdur. Bu funksiyalardan biri də dövrü inkar, yaxud Post inkarıdır. İndi isə dəyişənləri Post inkarı vasitəsilə verilən funksiyaların analitik təsvirlərini verək. Bunu T-forma adlandıracağıq. T-forma aşağıdakı kimi verilir;

$$T(x) = \sum_{i=0}^{k^n-1} t^{(i)} \odot \hat{x}_1^{i_1} \hat{x}_2^{i_2} \ldots \hat{x}_n^{i_n} (\mathrm{mod}\, k), \qquad (2.4.9)$$

harada ki, $t^{(i)}, i = \overline{0, k^n - 1}$ çoxhədlinin əmsallarıdır və Post inkarlı konyuktiv (məntiqi) bazisdə DFÇ vasitəsilə hesablanır:

$$\vec{T} = T_{k^n} \odot \vec{X} (\mathrm{mod}\, k); \qquad (2.4.10)$$

$\vec{T} = \left[t^{(0)} t^{(1)} \ldots t^{(k^n-1)} \right]^T$. Həmçinin tərs DFÇ doğrudur:

$$\vec{X} = T_{k^n}^{-1} T (\mathrm{mod}\, k); \qquad (2.4.11)$$

T_k^{-1} matrisinin t_{ij}^{-1} elementləri

$t_{l,i}^{-1} = \hat{l}^{\,i} (\mathrm{mod}\, k), l, i \in \overline{0, k-1}$ qaydası ilə formalaşdırılır və matris şəklində aşağıdakı kimi göstərilir;

$$T_k^{-1} = \begin{array}{c} {}_{l}\backslash^{i} \\ 1 \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (k-1) \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \ldots & k-1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1^0 & 1^1 & 1^2 & \ldots & 1^{k-1} \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & \ldots & 2^{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ (k-1)^0 & (k-1)^1 & (k-1)^2 & \ldots & (k-1)^{k-1} \\ 0^0 & 0^1 & 0^2 & \ldots & 0^{k-1} \end{array}\right] \end{array}$$

Yuxarıda göstərilən üsullara görə:

$$T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad T_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

nüvələrini tapırıq.

k=3 və n=2 olduqda, bunlardan istifadə edərək (2.4.4) qaydasına əsasən alırıq:

$$
T_{3^2}=\left[\begin{array}{c|c|c} 0_3 & 0_3 & T_3 \\ \hline 2T_3 & T_3 & 0_3 \\ \hline 2T_3 & 2T_3 & 2T_3 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 & & & & & & 0 & 0 & 1 \\
 & 0_3 & & & 0_3 & & 2 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 2 & 2 & 2 \\ \hline
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & & & \\
1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & & 0_3 & \\
1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & & & \\ \hline
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
T_{3^2}^{-1}=\left[\begin{array}{c|c|c} T_3^{-1} & T_3^{-1} & T_3^{-1} \\ \hline T_3^{-1} & 2T_3^{-1} & T_3^{-1} \\ \hline T_3^{-1} & 0_3 & 0_3 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 1 & 1 & & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & 0_3 & & & 0_3 & \\
1 & 0 & 0 & & & & & &
\end{array}\right]
$$

Qeyd etmək lazımdır ki, çoxqiymətli məntiq funksiyalarının məntiqi çoxhədlilərlə (F-, G-, T-forma) təsviri zamanı k parametrinin sadə ədəd olması tələb olunur. Belə ki, k=4 olduqda, göstərilən məntiqi çoxhədliləri qurmaq mümkün olmur.

Biz yuxarıda çoxqiymətli məntiq funksiyalarının hesabi çoxhədlilərin (P-forma) köməyi ilə təsvir olunmasını (2.4.2) düsturu vasitəsilə vermişdik. İndi isə P formasının aşağıdakı modifikasiyasına baxaq: dəyişənlərin inversiya ilə yaxud Lukaşeviç inkarı ilə ($\widetilde{G}$ - forma); dəyişənlərin dövrü

inkarı ilə yaxud Post inkarı ilə (T - forma) əvəz edilməsi halları nəzərdə tutulur.

Tutaq ki, P-forma (2.4.2) düsturu vasitəsilə tə'yin olunur. Konyuktiv (hesabi) bazisdə DFÇ cütü

$$
\left.\begin{array}{l} \vec{P}=(\dfrac{1}{N})\widetilde{R}_{k^n}\vec{X} \\ \vec{X}=\widetilde{R}_n^{-1}P \end{array}\right\} \qquad (2.4.11)
$$

kimi tə'yin olunur.

$\widetilde{R}_{k^n}$ və $\widetilde{R}_{k^n}^{-1}$ çevirmə matrislərini tə'yin etmək üçün $\widetilde{R}_k$ və $\widetilde{R}_k^{-1}$ nüvələrini ayıraq. $\widetilde{R}_{k^n}^{-1}$ çevirməsinin nüvəsi hər bir elementinə görə hesablanır. Belə ki, $R_{l,i}^{-1}$-ci element aşağıdakı düsturla hesablanır;

$$
\widetilde{R}_{l,i}^{-1}=l^i, \qquad l,i\in\overline{0,k-1} \qquad (2.4.12)
$$

və matris şəkli aşağıdakı kimi olur:

$$
R_k^{-1}=\begin{array}{c} {}_{l}\diagdown^{i} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ . \\ . \\ . \\ (k-1) \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & k-1 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
0^0 & 0^1 & 0^2 & \cdots & 0^{k-1} \\
1^0 & 1^1 & 1^2 & \cdots & 1^{k-1} \\
2^0 & 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^{k-1} \\
. & . & . & \cdots & . \\
. & . & . & \cdots & . \\
. & . & . & \cdots & . \\
(k-1)^0 & (k-1)^1 & (k-1)^2 & \cdots & (k-1)^{k-1}
\end{array}\right] \end{array}
$$

Aydındır ki, R_k^{-1}-ın elementlərindən fərqli olaraq, $\widetilde{R}_k^{-1}$-in elementləri tam müsbət {0,1,..,k-1} ədədlər çoxluğuna daxil

olmur, çünki qüvvətə yüksəltmə əməli onları göstərilən qiymətlər oblastından kənara çıxarır.
(2.4.12) qaydasından və

$$\widetilde{R}_k R_k^{-1} = NI_k$$

asılılığından istifadə edərək, konkret k parametri üçün $\widetilde{R}_k$ və R_k^{-1} nüvələrini ala bilərik. Misal üçün, k=3 olduqda, onlar aşağıdakı kimi tə'yin olunurlar:

$$\widetilde{R}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{R}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Bu cəbri tənliklər sisteminin həll olunmasından alınır.
Analoji olaraq, k=4 üçün

$$\widetilde{R}_4 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & 18 & -9 & 2 \\ 6 & -15 & 12 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{R}_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}$$

alırıq.
$\widetilde{R}_{k^n}$ və $\widetilde{R}_{k^n}^{-1}$ matrislərinin formalaşması $n \geq 2$ üçün öz qüvvəsini saxlayır və (2.4.4) rekurent düsturu ilə hesablanır. Tutaq ki, k=3 olur. Nəticədə:

$$\widetilde{R}_{3^2} = \left[\begin{array}{c|c|c} 2\widetilde{R}_3 & 0_3 & 0_3 \\ \hline -3\widetilde{R}_3 & 4\widetilde{R}_3 & -\widetilde{R}_3 \\ \hline \widetilde{R}_3 & -2\widetilde{R}_3 & \widetilde{R}_3 \end{array}\right]$$

$$\widetilde{K}_{3^2}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c|c} \widetilde{K}_3^{-1} & 0_3 & 0_3 \\ \hline \widetilde{K}_3^{-1} & \widetilde{K}_3^{-1} & \widetilde{K}_3^{-1} \\ \hline \widetilde{K}_3^{-1} & 2\widetilde{K}_3^{-1} & 4\widetilde{K}_3^{-1} \end{array}\right]$$

alırıq.
Misal. Çoxqiymətli məntiq funksiyası (k=3, n=2)

$$\vec{X} = [2\ 2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2]^T$$

vektoru şəklində verilir. P-formasını tapmaq tələb olunur.
DFÇ-ni konyuktiv (hesabi) $\widetilde{K}_{k^n}$ (2.4.11) bazisində yazaq:

$$\vec{P} = \left(\frac{1}{4}\right) K_{3^2} \vec{X} = \frac{1}{4} \times \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & & & & & & \\ -6 & 8 & -2 & & 0_3 & & & 0_3 & \\ 2 & -4 & 2 & & & & & & \\ \hline -6 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 9 & -12 & 3 & -12 & 16 & -4 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & -3 & 4 & -8 & 4 & -1 & 2 & -1 \\ \hline 2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 6 & -8 & 2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 4 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2.4.2) düsturundan istifadə edək və P-formanı yazaq:

$$P(x) = \frac{1}{4}(8 + 0x_2 + 0x_2^2 - 4x_1 - 2x_1x_2 + 0x_1x_2^2 + 0x_1^2 +$$

$$+ 2x_1^2x_2 + 0x_1^2x_2^2) = \frac{1}{4}(8 - 4x_1 - 2x_1x_2 + 2x_1^2x_2)$$

Alınan sonuncu ifadəni cəbri tipə aid etmək lazımdır, baxmayaraq ki, o, birqiymətli şəkildə məntiqi funksiyanı təsvir edir. Buna inanmaq üçün dəyişənlərin ixtiyari yığımı üçün çoxhədlinin qiymətini hesablayıb, funksiyanın həmin yığımdakı qiyməti ilə müqayisə etmək kifayətdir. Misal üçün, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ olduqda,

$$P(x) = \frac{1}{4}(8 - 4x_1 - 2x_1x_2 + 2x_1^2x_2) = \frac{1}{4}(8 - 4\cdot 2 - 2\cdot 2\cdot 1 +$$

$$+2\cdot 2^2\cdot 1) = \frac{1}{4}(8 - 8 - 4 + 8) = 1$$

olur və bu qiymət çoxqiymətli funksiyanın (2,1) yığımındakı qiyməti ilə üst-üstə düşür. Tərs DFÇ köməyi ilə birqiymətli qaydada P-nin əmsalları vektoruna görə $\vec{X}$ vektoruna keçmək olar.

Nümunə. Verilmiş

$$P(x) = \frac{1}{4}(8 - 4x_1 - 2x_1x_2 + 2x_1^2x_2)$$

P-formasına görə $\vec{X}$ vektorunu tapmalı. (2.4.11) düsturuna uyğun olaraq, tərs DFÇ üçün alınq

$$\vec{X} = \vec{K}_{3^2}^{-1}\vec{P} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 0_3 & & & 0_3 & \\ 1 & 2 & 4 & & & & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & 8 & 4 & 8 & 16 \end{array}\right]\frac{1}{4}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Bu nümunələr çoxqiymətli funksiyanın qiymətləri vektorunun və onların hesabi çoxhədli formalarının qarşılıqlı birqiymətli çevrilmələrinin sadəliyini kifayət qədər aşkar şəkildə nümayiş etdirir.

Bir sıra elementar məntiq cəbri funksiyalarının hesabi çoxhədlilərlə təsviri cədvəl 2.7-də, məntiqi çoxhədlilərlə təsviri isə cədvəl 2.8-də verilmişdir. Elə buradaca qeyd etmək yerinə düşər ki, eyni çoxqiymətli funksiyanın P və F-formaları mürəkkəbliyinə görə bir-birindən fərqlənə bilərlər. Bunu cədvəlləri müqayisə etməklə də görmək olar.

CƏDVƏL 2.7

	f (x) funksiyası	P (x) hesabi çoxhədlisi
k=2	$\bar{x}$	$1-x$
	$x \wedge y$	xy
	$x \vee y$	$x+y-xy$
	$x \oplus y$	$x+y-2xy$
	$x \to y$	$1-x+xy$
	x / y	$1-xy$
	$x \uparrow y$	$1-y-x+xy$
k=3	$\bar{x}$	$2-x$
	$\hat{x}$	$1+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}x^2$
	$x \wedge y$	$\frac{5}{2}xy-xy^2-x^2y+\frac{1}{2}x^2y^2$
	$x+y$	$x+y+\frac{21}{4}xy-\frac{15}{4}xy^2-\frac{15}{4}x^2y+\frac{9}{4}x^2y^2$
	xy	$\frac{1}{4}xy+\frac{3}{4}xy^2+\frac{3}{4}x^2y-\frac{3}{4}x^2y^2$
	x / y	$1+\frac{5}{2}y-\frac{3}{2}y^2-\frac{5}{2}x-\frac{7}{4}xy+$ $+\frac{1}{4}xy^2-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}x^2y-\frac{1}{4}x^2y^2$
k=4	$\bar{x}$	$3-x$
	$\hat{x}$	$1-\frac{1}{3}x+2x^2-\frac{2}{3}x^3$
	$x \wedge y$	$\frac{29}{6}xy-\frac{15}{4}xy^2-\frac{15}{4}x^2y+\frac{3}{4}xy^3+\frac{3}{4}x^3y+$ $+\frac{7}{2}x^2y^2-\frac{3}{4}x^2y^3-\frac{3}{4}x^3y^3+\frac{1}{6}x^3y^3$
k=4	$x+y$	$x+y-\frac{121}{9}xy+\frac{49}{3}xy^2+\frac{49}{3}x^2y-\frac{38}{9}x^3y-$ $-19x^2y^2+\frac{14}{3}x^2y^3\frac{14}{3}x^3y^2-\frac{10}{9}x^3y^3$
	x / y	$1-\frac{1}{3}y+2y^2-\frac{3}{2}y^3-\frac{1}{3}x-\frac{79}{18}xy+\frac{37}{12}xy^2-$ $-\frac{19}{36}xy^3+2x^2+\frac{37}{12}x^2y-\frac{15}{6}x^2y^2+\frac{5}{12}x^2y^3-$ $-\frac{2}{3}x^3-\frac{19}{36}x^3y+\frac{5}{12}x^3y^2-\frac{1}{18}x^3y^3$

CƏDVƏL 2.8

f (x)	F(x) məntiqi çoxhədlisi (F - forma)
$\bar{x}$	$2+2x+x^2 \pmod 3$
$\hat{x}$	$1+x \pmod 3$
$x \vee y$	$y+x+2xy+xy^2+x^2y \pmod 3$
$x \wedge y$	$xy+2xy^2+2x^2y+2x^2y^2 \pmod 3$
$x+y$	$x+y \pmod 3$
xy	$xy \pmod 3$
x / y	$1+y+x+2xy+xy^2+x^2y+x^2y^2 \pmod 3$

İndi isə çoxdəyişənli funksiyanın inversiya dəyişənli esabi çoxhədlilərin köməyi ilə təsviri məsələsinə baxaq.

$\widetilde{G}$-forma, yaxud inversiya dəyişənlərinə malik hesabi çoxhədli forması aşağıdakı kimi təsvir olunur:

$$\widetilde{G}(x)=\sum_{i=0}^{k^n-1}\widetilde{g}^{(i)}\overline{x}_1^{\,i_1}\overline{x}_2^{\,i_2}\ldots\overline{x}_n^{\,i_n} \qquad (2.4.13)$$

harada ki, $\widetilde{g}^{(i)}$-hesabi çoxhədlinin əmsallarıdır. $\widetilde{g}^{(i)}$ əmsalları ilə çoxdəyişənli funksiyanın qiymətləri vektoru $\vec{X}$-in əlaqəsi konyuktiv (hesabi, inversiya) bazisində DFÇ vasitəsilə reallaşır:

$$\left.\begin{aligned}\vec{\widetilde{G}}&=\left(\frac{1}{N}\right)\widetilde{G}_{k^n}\vec{X}\\ \vec{X}&=\widetilde{G}_{k^n}^{-1}\vec{\widetilde{G}}\end{aligned}\right\} \qquad (2.4.14)$$

harada ki, $N=(k-1)^n;\ \vec{\widetilde{G}}=[\widetilde{g}^{(0)}\widetilde{g}^{(1)}\ldots\widetilde{g}^{(k^n-1)}]^T - G$-formasının əmsalları vektorudur. Çevirmənin $\widetilde{G}_k^{-1}$ nüvəsi hər bir elementinə görə formalaşır. $\widetilde{g}_{l,i}$-ci element

$$\widetilde{g}_{l,i}^{-1}=\bar{l}^{\,i} \qquad (2.4.15)$$

qaydasına uyğun hesablanır, harada ki, $\bar{l}-l$ sətrinin nömrəsinin inversiya qiymətidir:

$$\bar{l}=(k-1-l); \qquad l,i=\overline{0,k-1}.$$

$\widetilde{G}_k^{-1}$ matrisi aşağıdakı struktura malikdir:

$$\widetilde{G}_k^{-1}=\begin{array}{c|cccccc|}
\bar{l}\backslash i & 0 & 1 & 2 & \cdots & & k-1\\
\hline
k-1 & (k-1)^0 & (k-1)^1 & (k-1)^2 & \cdots & & (k-1)^{k-1}\\
k-2 & (k-2)^0 & (k-2)^1 & (k-2)^2 & \cdots & & (k-2)^{k-1}\\
k-3 & (k-3)^0 & (k-3)^1 & (k-3)^2 & \cdots & & (k-3)^{k-1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0
\end{array}$$

Formalaşma qaydasına uyğun olaraq, $\widetilde{G}_3^{-1}(k=3)$ və $\widetilde{G}_5^{-1}(k=5)$ matrislərinin nüvələri aşağıdakı kimi olur:

$$\widetilde{G}_3^{-1}=\begin{bmatrix}2^0 & 2^1 & 2^2\\ 1^0 & 1^1 & 1^2\\ 0^0 & 0^1 & 0^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{G}_5^{-1}=\begin{bmatrix}4^0 & 4^1 & 4^2 & 4^3 & 4^4\\ 3^0 & 3^1 & 3^2 & 3^3 & 3^4\\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4\\ 1^0 & 1^1 & 1^2 & 1^3 & 1^4\\ 0^0 & 0^1 & 0^2 & 0^3 & 0^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 16 & 64 & 256\\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81\\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Əvvəlki metodikaya uyğun olaraq, k=3 üçün

$$\widetilde{G}_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}, \qquad \widetilde{G}_3^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

nüvələrini alırıq.

$n \ge 2$ üçün matrislərin formalaşması qaydası saxlanılır. Ona uyğun olaraq aşağıdakıları alırıq:

$$\widetilde{G}_{3^2} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0_3 & 0_3 & 2\widetilde{G}_3 \\ \hline -\widetilde{G}_3 & 4\widetilde{G}_3 & -3\widetilde{G}_3 \\ \hline \widetilde{G}_3 & -2\widetilde{G}_3 & \widetilde{G}_3 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} & & & & & & 0 & 0 & 4 \\ & 0_3 & & & 0_3 & & -2 & 8 & -6 \\ & & & & & & 2 & -4 & 2 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & -4 & 3 & -4 & 16 & -12 & 3 & -12 & 9 \\ -1 & 2 & -1 & 4 & -8 & 4 & -3 & 6 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -3 & 2 & -8 & 6 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 4 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\widetilde{G}^{-1}_{3^2} = \left[\begin{array}{c|c|c} \widetilde{G}^{-1}_3 & 2\widetilde{G}^{-1}_3 & 4\widetilde{G}^{-1}_3 \\ \hline \widetilde{G}^{-1}_3 & \widetilde{G}^{-1}_3 & \widetilde{G}^{-1}_3 \\ \hline \widetilde{G}^{-1}_3 & 0_3 & 0_3 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 & 8 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 4 & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 0_3 & & & 0_3 & \\ 1 & 0 & 0 & & & & & & \end{array}\right]$$

Sonda qeyd edək ki, çoxdəyişənli funksiyanın T-forması, yaxud dövrü inkara malik hesabi çoxhədli şəklində göstərilməsi

$$\widetilde{T}(x) = \sum_{i=0}^{k^n-1} \widetilde{t}^{(i)} \hat{x}_1^{i_1} \hat{x}_2^{i_2} \ldots \hat{x}_n^{i_n} \qquad (2.4.16)$$

düsturu ilə verilir.

Cədvəl 2.9-da yuxarıda baxılan bütün çoxhədli formaları, cədvəl 2.10-da isə istifadə olunan bazislərin nüvələri göstərilir.

CƏDVƏL 2.9

Forma	Yazılışın analitik forması
Məntiqi polinomial (F-forma)	$F(X) = \sum_{i=0}^{k^n-1} f^{(i)} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} \pmod k$
Məntiqi polinomial inversiya (G-forma)	$G(X) = \sum_{i=0}^{k^n-1} g^{(i)} x_1^{-i_1} x_2^{-i_2} \ldots x_n^{-i_n} \pmod k$
Məntiqi polinomial dövrü inkarlı (T-forma)	$T(X) = \sum_{i=0}^{k^n-1} t^{(i)} \hat{x}_1^{i_1} \hat{x}_2^{i_2} \ldots \hat{x}_n^{i_n} \pmod k$
Hesabi polinomial (P-forma)	$P(X) = \sum_{i=0}^{k^n-1} p^{(i)} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$
Hesabi polinomial inversiya dəyişənli ($\widetilde{G}$-forma)	$\widetilde{G}(X) = \sum_{i=0}^{k^n-1} \widetilde{g}^{(i)} x_1^{-i_1} x_2^{-i_2} \ldots x_n^{-i_n}$
Hesabi polinomial dəyişənlərin dövrü inkarlı ($\widetilde{T}$-forma)	$\widetilde{T}(X) = \sum_{i=0}^{k^n-1} \widetilde{t}^{(i)} \hat{x}_1^{i_1} \hat{x}_2^{i_2} \ldots \hat{x}_n^{i_n}$

CƏDVƏL 2.10

DFÇ konyuktiv bazisi	Bazisin nüvəsi	Elementlərin formalaşması qaydası
$K_{R^n}(K^{-1}_{R^n})$ məntiqi	$\mathbf{K}_{3^1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\2&2&2\end{bmatrix},\mathbf{K}^{-1}_{3^1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&1\end{bmatrix}$	$k^{-1}_{l,i}=l^i(\mathrm{mod}\,k)$
$G_{R^n}(G^{-1}_{R^n})$ məntiqi inversiya	$\mathbf{G}_{3^1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&2&0\\2&2&2\end{bmatrix},\mathbf{G}^{-1}_{3^1}=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$	$g^{-1}_{l,i}=\bar{l}^i(\mathrm{mod}\,k)$
$T_{R^n}(T^{-1}_{R^n})$ məntiqi Post inkarlı	$\mathbf{T}_{3^1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\2&1&0\\2&2&2\end{bmatrix},\mathbf{T}^{-1}_{3^1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&0&0\end{bmatrix}$	$t^{-1}_{l,i}=\hat{l}^i(\mathrm{mod}\,k)$
$\widetilde{K}_{R^n}(\widetilde{K}^{-1}_{R^n})$ hesabi	$\widetilde{\mathbf{K}}_{3^1}=\begin{bmatrix}2&0&0\\-3&4&-1\\1&-2&1\end{bmatrix},\widetilde{\mathbf{K}}^{-1}_{3^1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\end{bmatrix}$	$\widetilde{k}^{-1}_{l,i}=l^i$
$\widetilde{G}_{R^n}(\widetilde{G}^{-1}_{R^n})$ hesabi inversiya	$\widetilde{\mathbf{G}}_{3^1}=\begin{bmatrix}0&0&2\\-1&4&-3\\1&-2&1\end{bmatrix},\widetilde{\mathbf{G}}^{-1}_{3^2}=\begin{bmatrix}1&2&4\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$	$\widetilde{g}^{-1}_{l,i}=\bar{l}^i$
$\widetilde{T}_{R^n}(\widetilde{T}^{-1}_{R^n})$ hesabi Post inkarlı	$\widetilde{\mathbf{T}}_{3^1}=\begin{bmatrix}0&0&2\\4&-1&-3\\-2&1&1\end{bmatrix},\widetilde{\mathbf{T}}^{-1}_{3^1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&0&0\end{bmatrix}$	$\widetilde{t}^{-1}_{l,i}=\hat{l}^i$

§2.5. k-qiymətli məntiq funksiyalarının tam və qapalı sistemləri

k-qiymətli məntiq funksiyalarının P_k çoxluğunda tamlığının tə'rifi k=2 halına oxşar şəkildə verilə bilər.

Tə'rif 2.5. Tutaq ki, P_k-dan götürülmüş hər hansı $R=\{f_1,f_2,\ldots,f_s,\ldots\}$ funksiyalar sistemi verilmişdir. Əgər istənilən k-qiymətli məntiq funksiyasını bu sistemin funksiyaları vasitəsilə düstur şəklində göstərmək mümkündürsə, onda R sistemi (funksional) tamdır deyirlər.

İndi isə bə'zi tam sistemlərlə tanış olaq. Bu zaman k=2 halından bizə mə'lum olan prinsipdən istifadə edəcəyik. Baxılan sistemin tamlıq məsələsini başqa sistemin (tamlığı öyrənilmiş) tamlıq məsələsinə gətirəcəyik. Həmin prinsip aşağıdakı fakta əsaslanır.

Teorem 2.6. Tutaq ki, P_k-dan olan iki

$$R=\{f_1,f_2,\ldots,f_s\ldots\} \qquad (2.5.1)$$

$$\mathrm{Q}=\{g_1,g_2,\ldots,g_r\ldots\} \qquad (2.5.2)$$

funksiyalar sistemi verilmişdir. R sistemi tamdır və onun hər bir funksiyasını Q sistemini təşkil edən funksiyalar vasitəsilə düstur şəklində ifadə etmək olar. Onda Q - sistemi də tamdır.

İsbatı. Tutaq ki, h, P_k-dan olan ixtiyari funksiyadır. R sistemi tam olduğundan, h funksiyasını R sistemi üzrə düstur şəklində göstərmək olar. Onda

$$h=C[f_1,f_2\ldots f_s,\ldots]$$

olacaq. Teoremin şərtinə görə .

$$f_1=C_1[g_1,g_2,\ldots,g_r,\ldots],$$

$$f_2=C_2[g_1,g_2,\ldots,g_r,\ldots],$$

....

Onda bu nəticələri $C[f_1, f_2, \dots, f_s, ..]$ düsturunda yerinə yazsaq, alarıq:

$$C[f_1, f_2, \dots, f_s, ..] = C[C_1[g_1, g_2, \dots, g_r, ..], C_2[g_1, g_2, \dots, g_r, \dots], \dots]$$

Axırıncı ifadə C' quruluşu ilə Q üzərində düsturu tə'yin edir və aşağıdakını alırıq:

$$C[C_1[g_1, g_2, \dots, g_r, ..], C_2[g_1, g_2, \dots, g_r, \dots], \dots] = C'[g_1, g_2, \dots, g_r, \dots]$$

və yaxud

$$h = C'[g_1, g_2, \dots, g_r, ..]$$

Beləliklə, ixtiyari $h \in P_k$ funksiyasını Q üzərində k-qiymətli məntiq düsturu şəklində ifadə etdik. Bu isə Q sisteminin tamlığı deməkdir.

1. $R_1 = P_k$ sistemi tamdır. Bütün k-qiymətli məntiq funksiyalar sisteminin tamlığı birbaşa yuxarıdakı tə'rifdən alınır.

2. *Teorem 2.7.*

$$R_2 = \{0, 1, \dots, k-1, I_0(x), \dots, I_{k-1}(x), \min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)\} \quad (2.5.3)$$

sistemi P_k-da tamdır.

İsbatı. Tutaq ki, $f(x_1, \dots, x_n)$ P_k-dan götürülmüş ixtiyari funksiyadır. Onda §2.2.-dən mə'lum olduğu kimi, həmin funksiya üçün aşağıdakı ayrılış doğrudur:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} I_{\sigma 1}(x_1) \wedge \dots$$

$$\dots \wedge I_{\sigma_n}(x_n) \wedge f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (2.5.4)$$

Bu düstur (münasibətin sağ tərəfi), göründüyü kimi, baxılan R_2 sisteminə daxil olan funksiyalardan təşkil olunmuşdur. Bu isə R_2 sisteminin tamlığı deməkdir.

3. *Teorem 2.8.*

$$R_2 = \{\bar{x}, \max(x_1, x_2)\}$$

sistemi P_k-da tamdır.

İsbatı. a) Sabitlərin qurulması. $\bar{x} = x + 1(\mathrm{mod}\, k)$ funksiyası vasitəsilə aşağıdakı münasibətləri yazmaq olar:

$$x + 2 = (x+1) + 1(\mathrm{mod}\, k), \dots, x + k - 1 = (x + k - 2) + 1(\mathrm{mod}\, k),$$

$$x = x + k = (x + (k-1)) + 1(\mathrm{mod}\, k).$$

Asanlıqla görmək olar ki,

$$\max[x, x + 1(\mathrm{mod}\, k), \dots, x + k - 1(\mathrm{mod}\, k)] = k - 1,$$

buradan isə $\bar{x}$ funksiyasının köməyi ilə qalan sabitləri almaq olar.

b) Birdəyişənli funksiyaların qurulması.

Əvvəlcə $I_i(x)$ $(i = 0, 1, \dots, k-1)$ funksiyalarını quraq:

$$I_i(x) = (1 + \max_{\alpha \neq k-1-i} \{x + \alpha(\mathrm{mod}\, k)\})(\mathrm{mod}\, k).$$

Doğrudan da, bu münasibətdə əgər x=i götürsək, onda onun sol tərəfi (k-1)-ə, sağ tərəfi isə

$$(1 + \max_{\alpha \neq k-1-i} \{i + \alpha(\mathrm{mod}\, k\})(\mathrm{mod}\, k) = (1 + \max_{\alpha \neq k-1-i} \{i + \alpha(\mathrm{mod}\, k\}) \times$$

$$\times (\mathrm{mod}\, k) = 1 + k - 2 = k - 1$$

şəklinə düşər.

Əgər $x \neq i$ olarsa, onda ifadənin sol tərəfi 0, sağ tərəfi isə

$$(1+\max_{\alpha \neq k-1-i}\{x+\alpha(\mathrm{mod}\,k))(\mathrm{mod}\,k)=$$

$$=(1+(x+(k-1-x)=k=0(\mathrm{mod}\,k)$$

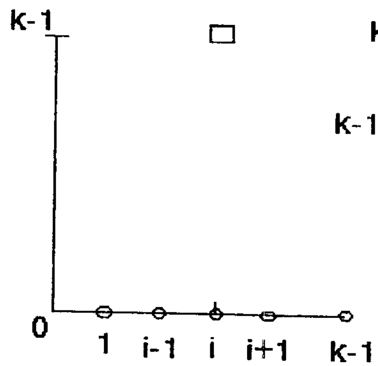
Aşağıdakı kimi funksiyalar daxil edək:

$$f_{s,i}(x)=\begin{cases} s, & x=i \text{ olduqda,} \\ 0, & x\neq i \text{ olduqda.} \end{cases}$$

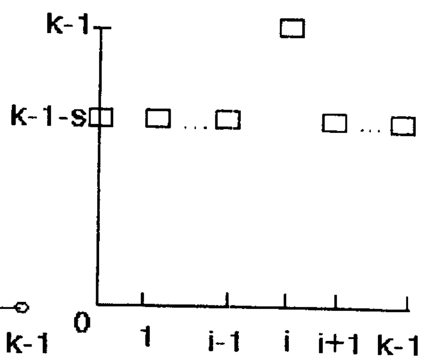
Göstərmək olar ki,

$$f_{s,i}(x)=(s+1+\max[I_i(x),k-1-s])(\mathrm{mod}\,k)$$

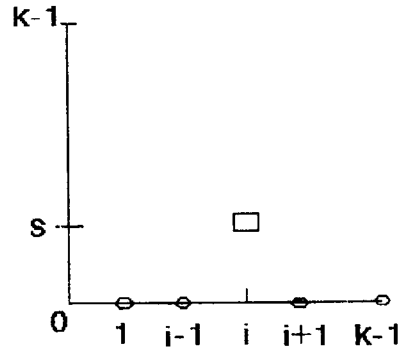
Bu münasibətin doğruluğu aşağıdakı şəkillərdən də görünür:



I$_i$ (x)



max[I$_i$(x),k-1-s]



s+1+max[I$_i$ (x),k-1-s]

Əgər $g(x)$ P_k-dan götürülmüş birdəyişənli ixtiyari funksiyadırsa, onda

$$g(x)=\max\{f_{g(0),0}(x),f_{g(1),1}(x),\ldots,f_{g(k-1),k-1}(x)\},$$

buradan isə xüsusi halda

$$\sim x=\max\{f_{k-1,0}(x),f_{k-2,1}(x),\ldots,f_{g(k-1),k-1}(x)\}$$

funksiyasını qurmaq olar.

v) $\min(x_1,x_2)$ funksiyasının qurulması.

Yuxarıda göstərildiyi kimi

$$\sim\min(x_1,x_2)=\max(\sim x_1,\sim x_2)$$

Buradan isə alarıq:

$$\min(x_1,x_2)=\sim\max(\sim x_1,\sim x_2)$$

Beləliklə, verilmiş sistemdən təşkil olunmuş düsturların köməyi ilə

$$\{0,1,\ldots,k-1,I_0(x),\ldots,I_{k-1}(x),\min(x_1,x_2),\max(x_1,x_2)\}$$

sistemina daxil olan istənilən funksiyanı təsvir etmək olar. Bu isə $\{\bar{x},\max(x_1,x_2)\}$ sisteminin tamlığı deməkdir.

4. Şeffer funksiyasının k-qiymətli analoqu kimi aşağıdakı şəkildə

$$\mathbf{V}_k(x_1,x_2)=1+\max(x_1,x_2)(\mathrm{mod}\,k)$$

Vebb funksiyasını tə'yin edək.

Teorem 2.9. $R_2=\{\mathbf{V}_k(x_1,x_2)\}$ sistemi P_k-da tamdır.

İsbatı: Verilmiş sistemin tamlığı məsələsi 3-cü bənddəki sistemin tamlığından alınır. k-qiymətli məntiq funksiyalar çoxluğunun tamlıq anlayışı ilə bağlı sistemin qapanması və qapalılığı anlayışlarını da vermək olar.

Tə'rif 2.6. Tutaq ki, $\mathcal{M}$ - P_k-dan götürülmüş ixtiyari alt çoxluqdur. Həmin çoxluğun qapanması $[\mathcal{M}]$ dedikdə, P_k-dan götürülmüş və $\mathcal{M}$-i təşkil edən funksiyaların düsturu şəklində təsvir edilən bütün funksiyalar çoxluğu başa düşülür.

Tə'rif 2.7. $[\mathcal{M}]=\mathcal{M}$ olduqda $\mathcal{M}$ sinfi (çoxluğu) qapalı sinif adlanır.

Misal 1. $\mathcal{M}=P_k$ Aydındır ki, $\mathcal{M}=P_k$ sinfi qapalıdır.

2. $\mathcal{H}=\{1,x_1+x_2(\mathrm{mod}k)\}$ Bu çoxluğun qapanması bütün L xətti k-qiymətli məntiq funksiyalar sinfini verir. Hər bir belə $f\in L$ funksiyası aşağıdakı şəkildə göstərilə bilər.

$$f(x_1,\ldots,x_n)=c_0+c_1\cdot x_1+\ldots+c_n\cdot x_n(\mathrm{mod}\,k)$$

burada $c_i\in\{0,1,\ldots,k-1\}$ $(i=0,..,n)$, cəmləmə və vurma əməli isə k-moduluna nəzərən aparılır.

3. Göründüyü kimi, bu halda

$$[\mathrm{H}]=L\neq\mathcal{H}$$

Yə'ni $\mathcal{H}$ sinfi qapalı deyil.

4. L sinfi qapalıdır.

Qapanma anlayışı üçün P_2 halına analoji olan faktlar doğrudur. Bunlardan bə'zilərini qeyd edək:

1) $[\mathcal{M}]\supseteq\mathcal{M}$;
2) $[[\mathcal{M}]]=[\mathcal{M}]$;
3) Əgər $\mathcal{M}_1\subseteq\mathcal{M}_2$ isə, onda $[\mathcal{M}_1]\subseteq[\mathcal{M}_2]$;
4) $[\mathcal{M}_1\cup\mathcal{M}_2]\supseteq[\mathcal{M}_1]\cup[\mathcal{M}_2]$

Misal: Tutaq ki, $E\subset E_k$. Aşağıdakı kimi T_E sinfini tə'yin edək:

$$T_E=\{f(x_1,\ldots,x_n)\in P_k\,|\,f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in E,$$
$$\alpha_i\in E(i=1,\ldots,n)\}$$

Göründüyü kimi, T_E ilə P_k-da E çoxluğunu saxlayan bütün funksiyalar çoxluğu işarə edilmişdir. Bu faktı

$$f(E,E,\ldots,E)\subseteq E$$

şəklində yazmaq olar.

Aşkardır ki, M= T_E sinfi qapalıdır. Xüsusi halda $f(\cdot)$ funksiyası əvəzinə $\sim x,\max(x_1,x_2)$ və $E=\{0,k-1\}$ götürsək, görərik ki, hər iki funksiya E çoxluğunu özündə saxlayır. Qapanma anlayışından istifadə etməklə (funksional) tamlıq üçün ekvivalent tə'rif də vermək olar:

$$[\mathcal{M}]=P_k$$

olduqda $\mathcal{M}$ sinfi tamdır.

Misal. Tutaq ki, $R=\{\sim x,\max(x_1,x_2)\}$, $E=\{0,k-1\}$.

Yuxarıdakı mühakimələrdən alarıq:

$$[R] \subseteq T_E$$

k≥3 üçün $E \neq T_E$ olduğundan, T_E, 1 sabitini özündə saxlamır.

Buradan görünür ki, $\{\sim x, \max(x_1, x_2)\}$ sinfi Bul funksiyalarının tam olan $\{\bar{x}, x_1 \vee x_2\}$ sisteminin ümumiləşməsi olsa da, k≥3 olduqda tam sistem təşkil etmir.

5. §2.3. 3-dəki polinomial ayrılışlara əsaslanaraq, P_k çoxluğunda daha bir tam sinif tə'yin etmək olar.

Teorem 2.10. mod k-ya nəzərən polinomlar sinfi P_k çoxluğunda ancaq və ancaq o zaman tam sinif təşkil edir ki, k=p-sadə ədəd olsun.

İsbatı: Yuxarıda deyildiyi kimi, istənilən $f(x_1,\dots,x_n) \in P_k$ funksiyası üçün

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)} \chi_{\sigma_1}(x_1)\dots\chi_{\sigma_n}(x_n)\cdot f(\sigma_1,\dots,\sigma_n) (\mathrm{mod}\, k)$$

burada $\chi_0(x),\dots,\chi_{k-1}(x)$ mə'lum xarakteristik funksiyalardır. Digər tərəfdən

$$\chi_\sigma(x) = \chi_0(x-\sigma) (\mathrm{mod}\, k)$$

olduğundan, polinomlar sisteminin mod k-ya nəzərən tam sistem təşkil etməsi məsələsi $\chi_0(x)$ funksiyasının polinom şəklində təsvir edilməsi məsələsinə gətirilmiş olur. Belə təsvir isə kiçik Ferma teoreminə əsaslanır və k=p olduqda: $\chi_0(x) = 1 - x^{p-1} (\mathrm{mod}\, p)$.

Qeyd edək ki, $k \neq p$ olduqda, belə polinom şəklində təsvir forması mümkün deyil.

Əksini fərz edək. Tutaq ki, $k = k_1 k_2, 1 < k_1 < k$ və

$$\chi_0(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_l x^l (\mathrm{mod}\, k)$$

x=0 olduqda, $b_0 = 1$, $x = k_1$ olduqda isə.

$$0 = 1 + b_1 k_1 + \dots + b_l k_1^l (\mathrm{mod}\, k)$$

və ya

$$k - 1 = b_1 k_1 + \dots + b_l k_1^l (\mathrm{mod}\, k)$$

$$\frac{k-1}{k_1} = b_1 + b_2 k_2 + \dots + b_l k_1^{l-1} (\mathrm{mod}\, k)$$

alınq.

Bu ifadənin sağ tərəfi k_1-ə bölünür. Deməli, həm k, həm də k-1, k_1-ə qalıqsız bölünür. Bu isə ancaq $k_1=1$ olduqda mümkündür. Alınan ziddiyyət göstərir ki, $k \neq p$ olduqda, $\chi_0(x)$ funksiyası mod k-ya nəzərən polinom şəklində göstərilə bilməz. Deməli, mod p-yə nəzərən $\chi_0(x), \chi_1(x), \dots, \chi_{p-1}(x)$ polinomlar sistemi P_k-da k=p olduqda tam sistem təşkil edirlər. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, $GF(p^m)$ Qalua meydanının əməlinə nəzərən təşkil olunmuş polinomlar sistemi P_k-da $k = p^m$ olduqda tam sistem təşkil edirlər.

§2.6. Tamlığın tanınması məsələsi. Funksional tamlıq haqqında əsas teorem.

İndi isə ixtiyari R sisteminin funksional tamlıq məsələsinin müzakirəsinə keçək. Bu zaman bizi aşağıdakı

sual maraqlandıracaqdır: verilmiş R çoxluğunun tam sistem təşkil edib-etmədiyini necə tə'yin etmək olar?
Məsələnin həlli üçün iki üsul təklif ediləcəkdir.
Alqoritmik üsul. Bu üsul "ixtiyari R sistemi verilmişdir" ifadəsinin dəqiqləşdirilməsini tələb edir. Elə buna görə də məsələyə bir qədər dar mə'nada baxaq və R sistemini sonlu götürək:

$$R = \{f_1, f_2, \dots, f_s\}$$

Deməli, həmin sistem ya düsturlar şəklində, ya da cədvəllər şəklində verilə bilər. Belə qəbul etmək olar ki, R sisteminin hər bir funksiyası $x_1, x_2, \dots, x_n$ dəyişənlərindən asılıdır.

Baxılan məsələ belə şərh oluna bilər: hər bir sonlu R sistemi üçün elə bir alqoritm varmı ki, onun tam olub-olmadığını tə'yin etsin (tamlığın tanınması məsələsi)?

İxtiyari $r \geq 1$ üçün

$$g_i^r(x_1, \dots, x_r) = x_i$$

funksiyalarını daxil edək və $x_1, x_2, \dots, x_r$ dəyişənlərindən asılı olan və R-dən götürülmüş bütün funksiyalar çoxluğunu $\mathcal{M}_{x_1 \dots x_r}$ ilə işarə edək.

Teorem 2.11. Funksional tamlığın tanınması üçün alqoritm vardır.

İsbatı: İnduksiya qaydası ilə x_1, x_2 dəyişənlərindən asılı olan $R_0, R_1, \dots, R_r, \dots$ çoxluqlar ardıcıllığı quraq.

İnduksiya bazisi. Tutaq ki, $R_0 = \wedge$, burada $\wedge$-boş çoxluqdur.

İnduksiya keçidi. Tutaq ki, $R_0, R_1, \dots, R_r$ çoxluqları qurulmuşdur; R_{r+1} çoxluğunun necə qurulduğunu göstərək.

Bunun üçün $R_r (r \geq 0)$ çoxluğuna daxil olan funksiyaları yazaq:

$$R_r = \{h_1(x_1, x_2), \dots, h_{l_r}(x_1, x_2)\} \ (l_r = 0, r = 0 \text{ оланда})$$

və hər bir $i(i = 1, 2, \dots, r)$ üçün bütün mümkün olan

$$f_i(H_1(x_1, x_2), \dots, H_n(x_1, x_2))$$

şəkilli düsturlara baxaq;
burada $H_i(x_1, x_2)$ ya $h_j(x_1, x_2)$ $(j = 1, \dots, l_r)$, ya da $g_i^2(x_1, x_2)$ şəkilli funksiyalardır.

Beləliklə, $l(l_r + 2)^n$ sayda düsturlar nəzərdən keçirilir və bəlkə də, bunlardan elələri tapılır ki, onlar R_r çoxluğuna daxil olmurlar. Həmin funksiyaları

$$h_{l_r+1}(x_1, x_2), \dots, h_{l_{r+1}}(x_1, x_2)$$

ilə işarə edək.
Tutaq ki, $R_{r+1} = R_r \cup \{h_{l_r+1}(x_1, x_2), \dots, h_{l_{r+1}}(x_1, x_2)\}$
Aşkardır ki,

$$R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots \subseteq R_r \subseteq \dots$$

Bu qurmadan alınır ki, əgər $R_{r+1} = R_r$ olarsa, onda $R_r = R_{r+1} = \dots$ olur, yə'ni çoxluqlar zənciri stabilləşir. Belə stabilləşmənin başlandığı minimal nömrəli çoxluq R_{r^*} isə, onda

$$R_0 \subset R_1 \subset \dots \subset R_{r^*}$$

çoxluqlar zənciri ciddi artır.

R_i çoxluğunun gücü (elementlərinin sayı) k^{k^2} ədədindən çox olmadığından, $r^* \le k^{k^2}$.

Deməli, stabilləşmə anı məhdud sayda addımdan sonra müşahidə olunacaqdır. R_{r*} çoxluğuna baxaq. Burada iki hal mümkündür:

1) R_{r*} x_1, x_2-dən asılı bütün ikidəyişənli funksiyaları, həmçinin $V_k(x_1, x_2)$ funksiyasını da daxilində saxlayır. Deməli, verilmiş sistem tamdır.

2) R_{r*} bütün ikidəyişənli funksiyaları daxilində saxlamır. Bu halda, $[R]_{x_1x_2} = R_{r*}$ olduğundan, [R] çoxluğu x_1 və x_2-dən asılı bütün funksiyaları öz daxilində saxlamır. Deməli, R tam deyil.

Yuxarıdakı mühakimələrdən aşağıdakı alqoritm alınır: stabilləşmə anına qədər $R_0, R_1, \dots, R_{r^*}$ siniflərini qururuq və R_{r*} sinfinə baxırıq: həmin sinfin əsasında R-in tam olub-olmadığını tə'yin edirik. Teorem isbat olundu.

Teorem 2.12. P_k-da tam olan istənilən R sistemindən tam sonlu alt sistem ayırmaq olar.

İsbatı. Tutaq ki, $R = \{f_1, f_2, \dots, f_s, \dots\}$.

Tamlıq faktına görə, $V_k(x_1, x_2)$ funksiyası R sisteminin funksiyaları vasitəsi ilə

$$V_k(x_1, x_2) = U[f_{i_1}, \dots, f_{i_r}]$$

düsturu şəklində göstərilə bilər. Bu isə o deməkdir ki, $\{f_{i_1}, \dots, f_{i_r}\}$ sistemi axtarılan tam alt sistemdir.

Beləliklə, ciddi şəkildə sonsuz tam sistem olmur və ona görə də yuxarıda tamlığın tanınması məsələsində qəbul edilən məhdudiyyət ilk baxışda göründüyü kimi o qədər də güclü şərt deyil.

Yuxarıdakı faktlara əsaslanaraq, P_k-da funksional tamlıq haqqında zəruri və kafi şərt teoremini isbat etmək olar.

Teorem 2.13. P_k-da elə

$$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_s$$

qapalı siniflər sistemini qurmaq olar ki, sistemin hər bir sinfi yerdə qalanlardan heç birisini tamamilə öz daxilində saxlamır və P_k-dan götürülmüş sistem ancaq və ancaq o zaman tam olur ki, həmin sistem

$$\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_s$$

siniflərindən heç birində bütünlüklə yerləşmir.

İsbatı: $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_s$ siniflər sisteminin qurulması.

Tutaq ki, $R_1, R_2, \dots, R_l$ $(i = 1,2,..,l)$ ilə x_1, x_2 dəyişənlərindən asılı olan və aşağıdakı:

1) R_i sistemi $g_1(x_1, x_2) = x_1, g_2(x_1, x_2) = x_2$ funksiyalarının hər ikisini daxilində saxlayır.

2) $[R_i]_{x_1x_2} = R_i$

şərtlərini ödəyən, P_k-dan götürülmüş funksiyalar çoxluğunun məxsusi altçoxluqları işarə edilmişdir.

Həmin altçoxluqlar P_k-dan götürülmüş funksiyalar çoxluğunun bütün məxsusi altçoxluqlarını nəzərdən keçirməklə qurulur (belə altçoxluqların sayı $< 2^{k^{k^2}}$). Bu zaman altçoxluqlardan elələri saxlanılır ki, onlar hər iki g_1 və g_2 funksiyalarını öz daxilində saxlayır və sonra hər bir yerdə qalan altçoxluq üçün $[R]_{x_1x_2} = R$ şərtinin ödənilməsi yoxlanılır (bu isə tamlığın tanınması məsələsində olduğu kimi yoxlanıla bilər).

R_i altçoxluğunun saxlanılması sinfini R_i' ilə işarə edək. Bu sinif qapalıdır və

$$(R_i')_{x_1x_2} = R_i$$

Buradan çıxır ki, bütün $R_i'(i = 1,2,\ldots,l)$ sinifləri müxtəlifdirlər və tam deyildirlər. Sonra isə qalan siniflərdən hər hansı birisində bütünlüklə yerləşən sinifləri uzaqlaşdıraq. Nəticədə

$$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_s$$

sistemini alarıq.

Zərurilik. $\mathcal{M}_j(j = 1,\ldots,s)$ siniflərinin qapalılığından və tam olmamasından çıxır.

Kafilik. Tutaq ki, $\mathcal{M} \subseteq P_k$ ilə $\mathcal{M}_j(j = 1,\ldots,s)$ siniflərindən heç birində bütünlüklə yerləşməyən funksiyalar sistemi işarə edilmişdir. $\mathcal{M}$-in qapalı sinif təşkil etdiyini hesab etmək olar. R_i' ilə $[\mathcal{M} \cup \{g_1, g_2\}]$ sinfini işarə edək. Aşkardır ki, $\mathcal{M}$ və $\mathcal{M}'$ siniflərinin hər ikisi eyni zamanda ya tamdır, ya da tam deyildir, belə ki,

$$\mathcal{M}' = \mathcal{M} \cup [\{g_1, g_2\}]$$

və $V_k(x_1, x_2)$ funksiyası ya $\mathcal{M}$ və $\mathcal{M}'$-ə daxildir, ya da bu siniflərdən heç birinə daxil deyildir. $R' = \mathcal{M}'$ götürək. Göstərək ki, R', x_1 və x_2-dən asılı olan bütün funksiyaları öz daxilində saxlayır. Doğrudan da, əgər belə olmasaydı, onda

$$R' \equiv R \quad \text{və} \quad \mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}_i' \subseteq \mathcal{M}_j$$

$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ olduğundan, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_j$ alarıq, bu isə ziddiyyət törədir. Beləliklə, R' və deməli, $\mathcal{M}'$ sinfi $V_k(x_1, x_2)$ funksiyasını öz daxilində saxlayır. Bu isə $\mathcal{M}'$ və deməli, $\mathcal{M}$ sinfinin tamlığını göstərir. Teorem isbat olundu.

Göründüyü kimi, yuxarıdakı teorem R sisteminin tamlıq şərtini onun $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_S$ xüsusi siniflərinə daxil olması mümkünlüyü ilə bağlayır. Ancaq həmin siniflərin k-nın hətta o qədər də böyük olmayan qiymətlərində qurulması böyük hesablama çətinlikləri ilə bağlıdır. Buna görə də daha effektiv olan kriteriyaların axtarılması zərurəti meydana çıxır. Belə kriteriyalar isə verilmiş R sistemi haqqında əlavə informasiyaların əldə edilməsi hesabına olur. Belə faktlardan biri özünün ən azı iki dəyişənindən əhəmiyyətli şəkildə asılı olan $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_k$ funksiyaları üçündür. Belə funksiyalara, adətən, əhəmiyyətli funksiyalar deyilir.

Bu anlayış daxilində formulə edilmiş kriteriyalardan biri polyak riyaziyyatçısı C. Slupetskiyə məxsusdur.

Teorem 2.14. Tutaq ki, P_k-dan $(k \geq 3)$ götürülmüş R funksiyalar sistemi bütün birdəyişənli funksiyaları öz daxilində saxlayır. Onda R sisteminin tamlığı üçün zəruri və kafi şərt, onun bütün mümkün k qiymətlərini alan $f(x_1,\ldots,x_n)$ əsaslı funksiyasını öz daxilində saxlamasıdır.

Buradan göründüyü kimi, R sisteminin müəyyən birdəyişənli funksiyalar çoxluğunu saxlaması şərtinin həmin sistemin birdəyişənli funksiyalar çoxluğunu doğurması şərti ilə əvəz edilməsi hesablama prosesinin sadələşdirilməsi baxımından xeyli əlverişlidir.

İndi isə praktik məsələlərdə mühüm əhəmiyyət kəsb edən bir sıra sistemlərə baxaq.

§ 2.6.1. Rosser-Tyuket sistemi

Rosser-Tyuket sistemi $0,1,\ldots, k-1$ sabitlərindən və aşağıdakı məntiqi əməllərdən ibarətdir:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2) \\ x_1 x_2 = x_1 \wedge x_2 = \min(x_1, x_2) \\ J_s(x) = \begin{cases} k-1, & x = s \text{ olduqda,} \\ 0, & x \neq s \text{ olduqda } (s = 0,1,\ldots,k-1) \end{cases} \end{array}\right\} \quad (2.6.1)$$

k=3 olduqda belə sistemin funksiyaları aşağıdakı 2.11-2.15 cədvəlləri ilə verilir.

Cəd. 2.11

$x_1 \vee x_2$

x_1 \ x_2	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

Cəd. 2.12

$x_1 x_2$

x_1 \ x_2	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$J_0(x)$

x	
0	2
1	0
2	0

Cəd. 2.13

$J_1(x)$

x	
0	0
1	2
2	0

Cəd. 2.14

$J_2(x)$

x	
0	0
1	0
2	2

Cəd. 2.15

Bu sistem üçün səciyyəvi olan bə'zi eynilik münasibətlərinə baxaq.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1 \\ x_1 x_2 = x_2 x_1 \end{array}\right\} \quad (2.6.2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 \\ x_1 (x_2 x_3) = (x_1 x_2) x_3 \end{array}\right\} \quad (2.6.3)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \cdot (x_2 \vee x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \\ x_1 \vee x_2 x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3) \end{array}\right\} \quad (2.6.4)$$

$$J_0(x) \vee J_1(x) \vee \ldots \vee J_{k-1}(x) = k-1 \quad (2.6.5)$$

$$1J_1(x) \vee 2J_2(x) \vee \ldots \vee J_{k-1}(x) = x \quad (2.6.6)$$

$$x \vee (k-1) = k-1 \quad (2.6.7)$$

$$x(k-1) = x \quad (2.6.8)$$

$$x \vee 0 = x \quad (2.6.9)$$

$$x0 = 0 \quad (2.6.10)$$

Burada (2.6.2) - (2.6.4) münasibətləri $x_1 \vee x_2$ və $x_1 x_2$ əməlləri üçün komutativlik, assosiativlik və distributivlik xassələrini ifadə edirlər.

k=2 olduqda $x_1 \vee x_2$ və $x_1 x_2$ əməlləri Bul cəbrinin dizyunksiya və konyuksiya əməllərinə çevrilirlər. Bundan başqa k=2 olduqda

$$J_0(x) = \bar{x}, \qquad J_1(x) = x \qquad \text{olur,}$$

burada $\bar{x}$ -ikili inversiya əməlidir.

Mə'lum olduğu kimi, Bul cəbrində məntiq funksiyalarının $\{\bar{x}, x_1 \vee x_2, x_1 x_2\}$ sistemi üzrə ayrılış düsturlarına əsaslanan bir neçə üsul var ki, onların köməyi ilə n dəyişənli funksiyadan n-1 dəyişənli funksiyaya keçmək olar:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 f(1, x_2, \dots, x_n) \vee \bar{x}_1 f(0, x_2, \dots, x_n)$$

Rosser-Tyuket sistemində də belə ayrılışın analoqu vardır:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = J_0(x_1) f(0, x_2, \dots, x_n) \vee J_1(x_1) f(1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\vee \dots \vee J_{k-1}(x_1) f(k-1, x_2, \dots, x_n),$$

hansı ki, k=2 olduqda əvvəlki ayrılışı alırıq.

Rosser-Tyuket sisteminin əməllərinin Bul cəbrinin əməlləri ilə belə oxşarlığı ixtiyari k-qiymətli funksiyanın, ikili funksiyaların mükəmməl dizyunktiv normal formada təsvirinə analoji olan kanonik formada təsvirinin varlığı üçün fikir irəli sürməyə imkan verir. Göstərmək olar ki, bu, doğrudan da belədir.

Teorem 2.15. P_k çoxluğundan olan ixtiyari funksiyanı aşağıdakı kimi kanonik formada təsvir etmək olar

$$f(\vec{x}) = \bigvee_{\substack{\text{bütün } \vec{\alpha} \text{ -lara görə} \\ \text{harada ki, } f(\vec{\alpha}) \neq 0}} f(\vec{\alpha}) J_{\alpha_1}(x_2) \dots J_{\alpha_n}(x_n), \quad (2.6.11)$$

burada $f(\vec{\alpha}) - \vec{\alpha}$ yığımında $f(\vec{x})$ funksiyasının qiymətidir.

Sonradan (2.6.11)-i çoxqiymətli $f(\vec{x})$ funksiyasının mükəmməl dizyunktiv normal forması (MDNF) adlandıracağıq. Bu teoremin isbatı eyni zamanda Rosser-Tyuket sisteminin funksional tamlığı faktını da təsdiq edir.

İsbatı. Tutaq ki, arqumentlərin qeyd olunmuş $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ yığımı vardır.

$S = J_{\alpha_1}(\sigma_1) J_{\alpha_2}(\sigma_2) \dots J_{\alpha_n}(\sigma_n)$ hasilinə baxaq.

Yuxarıda göstərilən (2.6.8) və (2.6.10) münasibətlərini nəzərə alsaq, asanlıqla

$$J_s(x) J_r(x) = 0 \quad (s \neq r \text{ olduqda}) \qquad (2.6.12)$$

olduğunu görərik.

Ona görə də

$$S = \begin{cases} k-1 & \alpha_1 = \sigma_1, \alpha_2 = \sigma_2, \dots, \alpha_n = \sigma_n \text{ olduqda} \\ 0 & \text{bütün yerdə qalan yığımlarda.} \end{cases}$$

$f(\bar{\sigma}) = (k-1) f(\vec{\sigma})$ olduğundan (2.6.11)-in doğruluğu verilmiş $\bar{\sigma}$ yığımı üçün isbat olundu. Bu mülahizələri ixtiyari yığım üçün söyləmək olar. Bununla da teorem isbat olundu. Arqumentlərin hər hansı çoxluğundan hər bir arqument üçün bir dəfə olmaq şərtilə $J_s(x)$ funksiyalarının hasilini konstituent adlandırırlar. Cədvəl 2.16 ilə verilən funksiyanın mükəmməl dizyunktiv normal formada (MDNF) təsviri misalına baxaq.

$$f(x_1, x_2) = 2J_3(x_1)J_0(x_2) \vee 2J_1(x_1)J_1(x_2) \vee 1J_2(x_1)J_1(x_2) \vee$$
$$\vee J_2(x_1)J_2(x_2) \vee J_0(x_1)J_3(x_2) \vee 1J_1(x_1)J_3(x_2)$$

$x_1 \backslash x_2$	0	1	2	3
0	0	0	0	3
1	0	2	0	1
2	0	1	3	0
3	2	0	0	0

Cəd. 2.16

Funksiyanın sıfır qiymətlərinə uyğun dizyunktiv hədləri (2.6.12) münasibətinə nəzərən alındığından, burada iştirak etmirlər. Bundan başqa, bə'zi konstituentlərin qarşısında duran 3 əmsalları da (2.6.8) münasibətini nəzərə almaqla buraxılmışlar.

Qeyd edək ki, Rosser-Tyuket sistemində ayrılış düsturunun mükəmməl konyuktiv normal formasını (MKNF) da yaratmaq olar. Belə ki, həmin formanın hədləri

$$f(\vec{\alpha}) = J^*_{\alpha_1}(x_1) \vee J^*_{\alpha_2}(x_2) \vee \ldots \vee J^*_{\alpha_n}(x_n)$$

şəklində təsvir olunurlar, harada ki, dizyunktiv hədlər

$$J^*_{\alpha_i}(x_i) = \bigvee_{\substack{\text{bütün } \alpha_{i_m} \neq \alpha_i \\ \text{üçün}}} J_{\alpha_{i_m}}(x_i) = \begin{cases} 0 & x_i = \alpha_i \text{ olduqda,} \\ k-1 & x_i \neq \alpha_i \text{ olduqda.} \end{cases} \quad (2.6.13)$$

şəklindədirlər.

Nümunəyə baxaq. Tutaq ki, cədvəl 2.17 tam tə'yin olunmamış üçqiymətli məntiq funksiyasının doğruluq cədvəlidir.

x_1 \ x_2	0	1	2
0	0	-	-
1	-	1	2
2	0	-	-

Cəd. 2.17

Onu MKNF şəklində təsvir edək

$$f(x_1,x_2) = (0 \vee J_0^*(x_1) \vee J_0^*(x_2))(1 \vee J_1^*(x_1) \vee J_1^*(x_2)) \times$$
$$\times (2 \vee J_1^*(x_1) \vee J_2^*(x_2))(0 \vee J_2^*(x_1) \vee J_0^*(x_2))$$

(2.6.7) və (2.6.9) münasibətlərini nəzərə alaraq, axırıncı ifadəni aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$f(x_1,x_2) = 2(J_0^*(x_1) \vee J_0^*(x_2))(1 \vee J_1^*(x_1) \vee J_1^*(x_2))J_2^*(x_2) \vee$$
$$\vee J_0^*(x_2))$$

Hər bir $J_s^*(x)$ üçün (2.6.13) münasibətini nəzərə alsaq, onda

$$f(x_1,x_2) = 2(J_1(x_1) \vee J_2(x_1) \vee J_1(x_2) \vee J_2(x_2)) \times$$
$$\times (1 \vee J_0(x_1) \vee J_2(x_1) \vee J_0(x_2) \vee J_2(x_2))(J_0(x_1) \vee (J_1(x_1) \vee$$
$$\vee J_1(x_2) \vee J_2(x_1))$$

olur.

Buradan görünür ki, $f(x_1,x_2)$ funksiyası onun tə'yin olunmadığı yığımlarda (k-1)-ə bərabərdir.

§ 2.6.2. Nəzəri çoxluq əməllərinə nəzərən təsvir edilən sistemlər

Mə'lum olduğu kimi, $E_k = \{0,1,\ldots,k-1\}$, P_k-dan olan hər bir funksiyanın ala biləcəyi mümkün qiymətlər çoxluğudur. Elementləri E_k çoxluğunun bütün alt çoxluğundan ibarət olan M_k çoxluğunu təşkil edək: M_k çoxluğundan qiymətlər alan dəyişənləri böyük hərflərlə

$(X_1, X_2, \ldots), E_k$-çoxluğundan qiymətlər alan dəyişənləri isə kiçik hərflərlə $(x_1, x_2, \ldots)$ işarə edək. $x \in E_k$ olmasından alınır ki, $x \in M_k$, onda $X_1, X_2, \ldots \in M_k$ üçün doğru olan bütün münasibətlər $x_1, x_2, \ldots \in E_k$ üçün də doğru olacaq.

Çoxluqlar nəzəriyyəsində məşhur olan $X \vee Y = X \bigcup Y$ birləşmə və $XY = X \bigcap Y$ kəsişmə əməllərinə baxaq. Bu əməllər assosiativdir, komutativdir və öz aralarında distributiv qanunlarla bağlanıblar. Bundan başqa

$$X \vee \theta = X, X\theta = \theta,$$

harada ki, θ-boş çoxluqdur, münasibətləri də doğrudur.

M_k çoxluğunda tə'yin olunmuş

$$\varphi_i(x) = x^i = \begin{cases} i & x \neq \theta \quad \text{olarsa} \\ \theta & x = \theta \quad \text{olarsa,} \quad (i \in E_k) \end{cases} \qquad (2.6.14)$$

xarakteristik funksiyalarını daxil edək.

Teorem 2.16. Özündə sabitləri, xarakteristik funksiyaları, birləşmə və kəsişmə əməllərini saxlayan sistemdə P_k çoxluğundan olan ixtiyari funksiyanı aşağıdakı kimi kanonik formada təsvir etmək olar:

$$f(\vec{x}) = \underset{\text{bütün } \vec{\alpha}\text{-lara görə}}{\mathrm{V}} (\alpha_1 x_1)^{i_\alpha} (\alpha_2 x_2)^{i_\alpha} \ldots (\alpha_n x_n)^{i_\alpha} \qquad (2.6.15)$$

harada ki, $i_\alpha - \alpha$ yığımında funksiyanın qiymətidir.

İsbatı. $(\alpha_1 x_1)^{i_\alpha} (\alpha_2 x_2)^{i_\alpha} \ldots (\alpha_n x_n)^{i_\alpha}$ ifadəsinə baxaq.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$\alpha_j x_j = \begin{cases} \alpha_j & x_j = \alpha_j \quad \text{olarsa,} \\ \theta & x_j \neq \alpha_j \quad \text{olarsa,} \quad (j = 1,2,\ldots,n) \end{cases}$$

$$(\alpha_j x_j)^{i_\alpha} = \begin{cases} i_\alpha & x_j = \alpha_j \quad \text{olarsa,} \\ \theta & x_j \neq \alpha_j \quad \text{olarsa.} \end{cases}$$

Uyğun olaraq alırıq ki,

$$(\alpha_1 x_1)^{i_\alpha} (\alpha_2 x_2)^{i_\alpha} \ldots (\alpha_n x_n)^{i_\alpha} =$$

$$= \begin{cases} i_\alpha, x_1 = \alpha_1, \ x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n & \text{olduqda} \\ \theta, & \text{qalan hallarda} \end{cases}$$

Analoji mülahizələr $\vec{\alpha}$ üçün ixtiyari yığımda doğru olduğundan, onda alırıq ki, teorem isbat olundu.

Qeyd etmək lazımdır ki, k-qiymətli funksiyanın kanonik formada (2.6.15) təsvirinin alınması üçün kəsişmə əməli əvəzinə

$$x \sim y = \begin{cases} x & x = y \quad \text{olduqda} \\ \theta & x \neq y \quad \text{olduqda} \end{cases}$$

üst-üstə düşmə əməlini götürmək olar.

Çoxqiymətli funksiyaların baxılan kanonik formaya uyğun reallaşması çox çətin məsələdir.

Aşağıda göstərilən münasibətlərdən istifadə edərək funksiyaların təsvirinin daha sadə formasını almaq olar. (2.6.14)-dən bilavasitə alırıq

$$X^i \vee Y^i = (X \vee Y)^i \qquad (2.6.16)$$

$$(iX)^i = iX \qquad (2.6.17)$$

$$x^i = i, \text{ harada ki, } i \in E_k \qquad (2.6.18)$$

(2.6.16)-dan aşağıdakı münasibət alınır:

$$(XY)^i \vee (XW)^i = (X(Y \vee W))^i \qquad (2.6.18a)$$

(2.6.17) və (2.6.18)-dən alınır ki,

$$(iX)^i (jY)^i = X(jY)^i \text{ olur} \qquad (2.6.18b)$$

Əvvəlki münasibətlərdən istifadə etsək, göstərə bilərik ki, aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$(iX)^j (iY)^j = (iXY)^j$$

$$(0X)^i \vee (1X)^i \vee ... \vee ((k-1)X)^i = X^i \qquad (2.6.18v)$$

$$(0X)^0 \vee (1X)^1 \vee ... \vee ((k-1)X)^{k-1} =$$

$$= 0X \vee 1X \vee ... \vee (k-1)X = X \qquad (2.6.18q)$$

$$(Ax)^i (By)^i \vee (Bx)^i (Ay)^i = (A(x \vee y))^i (B(x \vee y))^i \qquad (2.6.19)$$

harada ki, $AB = \theta$ və $A, B \in M_k$

Doğrudan da, (2.6.19) -da sağ tərəfi açaraq alırıq:

$$(Ax \vee Ay)^i (Bx \vee By)^i = ((Ax)^i \vee (Ay)^i)((Bx)^i \vee (By)^i) =$$

$$= (Ax)^i (Bx)^i \vee (Ax)^i (By)^i \vee (Ay)^i (Bx)^i \vee (Ay)^i (By)^i =$$

$$= (ABx)^i \vee (Ax)^i (By)^i \vee (Ay)^i (Bx)^i \vee (ABy)^i =$$

$$= (Ax)^i (By)^i \vee (Ay)^i (Bx)^i$$

Nümunəyə baxaq. Tutaq ki, $f(x_1, x_2)$ 2.18 cədvəli ilə verilmişdir.

x_1 \ x_2	0	1	2	3
0	0	2	2	3
1	0	1	1	3
2	0	1	2	3
3	0	2	2	3

Cəd. 2.18

(2.6.15)-ə uyğun olaraq bu funksiyanı təsvir edək.

Burada Rosser-Tyuket sistemindən fərqli olaraq, $f(x_1, x_2)$ funksiyasının sıfra bərabər olduğu yığımları da nəzərə almaq zəruridir.

$$f(x_1,x_2) = (0x_1)^0(0x_2)^0 \vee (1x_1)^0(0x_2)^0 \vee (2x_1)^0(0x_2)^0 \vee$$

$$\vee (3x_1)^0(0x_2)^0 \vee (0x_1)^2(1x_2)^2 \vee (1x_1)^1(1x_2)^1 \vee (2x_1)^1(1x_2)^1 \vee$$

$$\vee (3x_1)^2(1x_2)^2 \vee (0x_1)^2(2x_2)^2 \vee (2x_1)^2(2x_2)^2 \vee (1x_1)^1(2x_2)^1 \vee$$

$$\vee (3x_1)^2(2x_2)^2 \vee (0x_1)^3(3x_2)^3 \vee (1x_1)^3(3x_2)^3 \vee (2x_1)^3(3x_2)^3 \vee$$

$$\vee (3x_1)^3(3x_2)^3.$$

Bu ifadənin hədlərini aşağıdakı qaydada qruplaşdıraq:

$$f(x_1,x_2) = ((0x_1)^0(0x_2)^0 \vee (1x_1)^0(0x_2)^0 \vee (2x_1)^0(0x_2)^0 \vee$$

$$\vee (3x_1)^0(0x_2)^0 \vee (0x_1)^3(3x_2)^3 \vee (1x_1)^3(3x_2)^3 \vee (2x_1)^3 \vee (3x_2)^3 \vee$$

$$\vee(3x_1)^3(3x_2)^3 \vee (0x_1)^0(0x_2)^0 \vee (1x_1)^1(1x_2)^1 \vee (2x_1)^2(2x_2)^2 \vee$$

$$\vee(3x_1)^3(3x_2)^3) \vee ((0x_1)^2(1x_2)^2 \vee (0x_1)^2(2x_2)^2 \vee (3x_1)^2(1x_2)^2 \vee$$

$$\vee(3x_1)^2(2x_2)^2) \vee ((2x_1)^1(1x_2)^1 \vee (1x_1)^1(2x_2)^1) = F_1 \vee F_2 \vee F_3$$

Birinci mö'tərizələrdə $(0x_1)^0\cdot(0x_2)^0$ və $(3x_1)^3\cdot(3x_2)^3$ hədləri iki dəfə təkrarlanır. Funksiyanın qiyməti isə $X \vee X = X$ olduğundan, dəyişmir. F_1, F_2, F_3 mö'tərizə-daxili ifadələrə ayrı-ayrılıqda baxaq. F_1-i aşağıdakı kimi yazaq:

$$F_1 = (0x_2)^0((0x_1)^0 \vee (1x_1)^0 \vee (2x_1)^0 \vee (3x_1)^0) \vee$$

$$\vee(3x_2)^3((0x_1)^3 \vee (1x_1)^3 \vee (2x_1)^3 \vee (3x_1)^3) \vee (0x_1)^0\cdot$$

$$\cdot(0x_2)^0 \vee (1x_1)^1\cdot(1x_2)^1 \vee (2x_1)^2(2x_2)^2 \vee (3x_1)^3(3x_2)^3$$

Buradan görünür ki, mö'tərizələrdəki birləşmələr (2.6.18b) münasibətini ödəyir. Bundan başqa, $(ix)^i$ hədlərinə (2.6.17) münasibəti tətbiq olunur.
Uyğun olaraq

$$F_1 = 0x_1{}^0x_2 \vee 3x_1{}^3x_2 \vee 0x_1 0x_2 \vee 1x_1 1x_2 \vee 2x_1 2x_2 \vee 3x_1 3x_2$$

alınır.
$XX = X$ olduğunu nəzərə alaraq, bu münasibətin birinci iki həddinə (2.6.18) münasibətini tətbiq etsək

$$F_1 = 0x_2 \vee 3x_2 \vee 0x_1x_2 \vee 1x_1x_2 \vee 2x_1x_2 \vee 3x_1x_2 =$$

$$= (0 \vee 3 \vee 0x_1 \vee 1x_1 \vee 2x_1 \vee 3x_1)x_2$$

alarıq.

(2.6.18q) münasibətindən alınır ki,

$$F_1 = (0 \vee 3 \vee x_1)x_2$$

F_2 üçün olan ifadədə ümumi hədləri mö'tərizə xaricinə çıxaraq.

$$F_2 = (0x_1)^2((1x_2)^2 \vee (2x_2)^2) \vee (3x_1)^2((1x_2)^2 \vee (2x_2)^2) =$$

$$= ((0x_1)^2 \vee (3x_1)^2)((1x_2)^2 \vee (2x_2)^2)$$

Burada mö'tərizələrdəki birləşmələr (2.6.18b) münasibətini ödəyir.
Ona görə

$$F_2 = (x_1(0 \vee 3))^2(x_2(1 \vee 2))^2$$

F_3 üçün olan ifadəyə (2.6.19) münasibətini tətbiq edək.
Onda

$$F_3 = (2x_1)^1(1x_2)^1 \vee (1x_1)^1(2x_2)^1 = (1(x_1 \vee x_2))^1(2(x_1 \vee x_2))^1$$

Axırıncı ifadə (2.6.18b) münasibətini ödədiyindən, uyğun olaraq $F_3 = (x_1 \vee x_2)(2(x_1 \vee x_2))^1$ alınır.

Beləliklə, $f(x_1, x_2)$ funksiyasının sadələşmiş təsviri aşağıdakı kimi olur:

$$f(x_1,x_2) = (0 \vee 3 \vee x_1)x_2 \vee (x_1(0 \vee 3))^2(x_2(1 \vee 2))^2 \vee$$

$$\vee(x_1 \vee x_2)(2(x_1 \vee x_2))^1$$

Baxılan sistemə (2.6.14) biryerli funksiyaları əvəzinə ikiyerli

$$X^{Y}=\begin{cases} Y & X\neq\theta \quad \text{olduqda,}\\ \theta & X=\theta \quad \text{olduqda.}\end{cases} \qquad (2.6.20)$$

funksiyalarını daxil edək.
Bu halda yuxarıda sadalananlardan başqa, aşağıdakı eynilik münasibətləri də doğru olur:

$$\begin{array}{lll}
\theta^{X}=\theta & (X^{Y})^{Z}=X^{Y^{Z}} & X\vee XY=X\\
i^{X}=X & X^{Y^{z}}=Y^{X^{Z}} & X^{YZ}=X^{Y}X^{Z}\\
X^{x}=X & X^{Y^{X}}=Y^{X} & X^{Y}X^{Z}=YX^{Z}\\
X^{Y}Z^{W}=X^{W}Z^{W} & XX^{Y}=XY & XY^{X}=Y^{X}\\
X^{Y}Z^{W}=X^{Z^{YW}} & (iX)^{Y}(iZ)^{W}=(iXZ)^{YW} & (XY)^{X}(XY)^{Y}=XY\\
X^{Y}Y^{X}=XY & X^{XY}=XY & X^{Y\vee Z}=X^{Y}\vee X^{Z}\\
X\vee Y^{X}=X & (X\vee Y)^{XY}=XY & \bigvee\limits_{i=0}^{k-1}(iX)^{Y}=X^{Y}
\end{array}$$

$$(ixy)^{Z}=(xy)^{Z}(i(x\vee y))^{Z}$$

$$(Ax)^{X}(By)^{Y}(Bx)^{X}(Ay)^{Y}=(A(x\vee y))^{X}(B(x\vee y))^{Y}$$

$$X^{Y}Z^{Y}=X^{Z^{Y}} \qquad (2.6.21)$$

$$X^{YZ}=YX^{Z} \qquad (2.6.22)$$

$$X^{Y}Z^{Y}=(X^{i}Z^{i})^{Y} \qquad (2.6.23)$$

$$(X\vee Y)^{Z}=X^{Z}\vee Y^{Z} \qquad (2.6.24)$$

harada ki, $A,B,X,Y,Z,W,\theta\in M_{k};AB=\theta;x,y,z,i\in E_{k}$.

Qeyd edək ki, (2.6.23)-də i dərəcəsi sərbəst seçilir. (2.6.14) funksiyası (2.6.20) funksiyasının xüsusi halıdır.

Teorem 2.17. P_k çoxluğundan olan ixtiyari çoxqiymətli funksiyanı

$$f(\vec{x})=\bigvee_{i=0}^{k-1}\left(\bigvee_{\substack{\text{bütün } \vec{\alpha}\text{ (i)-lərə}\\ \text{görə}}}(\alpha_{i_1}x_1)^{\gamma}(\alpha_{i_2}x_2)^{\gamma}\dots(\alpha_{i_n}x_n)^{\gamma}\right)^{i} \qquad (2.6.25)$$

şəklində göstərmək olar; harada ki,

$$\vec{\alpha}(i)=(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\dots,\alpha_{i_n})$$

$$i=f(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\dots,\alpha_{i_n});\ \alpha_{ij},\gamma\in E_k;(j=1,2,\dots,n);\gamma-$$

sərbəst seçilən tərtibdir.

İsbatı. (2.6.25)-in doğruluğunu (2.6.23) və (2.6.24) münasibətlərini (2.6.15) kanonik şəklinə tətbiq etməklə isbat etmək olar.

Teorem 2.18. P_k çoxluğundan olan ixtiyari funksiyanı aşağıdakı kimi kanonik şəkildə göstərmək olar:

$$f(\vec{x})=\bigvee_{\substack{\text{bütün } \vec{\alpha}\text{ (i)-lərə}\\ \text{görə}}}(\alpha_1x_1)^{(\alpha_2x_2)_{\dots}^{(\alpha_nx_n)^{i\alpha}}} \qquad (2.6.26)$$

(2.6.21) eynilik münasibətini (2.6.15)-ə tətbiq etsək, teoremin isbatı alınar.
(2.6.26) kanonik şəklindən istifadə etsək və (2.6.22) (2.6.24) eynilik münasibətlərini tətbiq etsək, çoxqiymətli funksiyaların təsvirinin daha iki müxtəlif şəklini ala bilərik.

$$f(\vec{x})=\bigvee_{i=0}^{k-1}\left(\bigvee_{\substack{\text{bütün } \vec{\alpha}\text{ (i)-lərə}\\ \text{görə}}}x_n(x_{n-1}(\dots(x_2(\alpha_{i_1}x_1)^{\alpha_{i_2}})\dots)^{\alpha_{i_n}})\right)^{i} \qquad (2.6.27)$$

$$f(\vec{x}) = \bigvee_{i=0}^{k-1}\left(\bigvee_{\substack{\text{bütün } \vec{\alpha}\text{(i)-lərə} \\ \text{görə}}} \alpha_{i_n}(\alpha_{i_{n-1}}(\ldots(\alpha_{i_2}(\alpha_{i_1}x_1)^{x_2})\ldots)^{x_n}\right)^i \quad (2.6.28)$$

§ 2.6.3. Dizyunktiv normal forma tipli kanonik şəkilli bə'zi sistemlər

$xy, x \vee y$ və x^1 əməllərini özündə əks etdirən və aşağıdakı qaydada tə'yin olunan sistemə baxaq:

$$xy = \begin{cases} x & y=1 \quad \text{olarsa,} \\ y & x=1 \quad \text{olarsa,} \\ 0 & x \neq 1, y \neq 1 \quad \text{olarsa.} \end{cases} \quad (2.6.29)$$

$$x \vee y = \begin{cases} x, & y=0 \quad \text{olarsa,} \\ y, & x=0 \quad \text{olarsa,} \\ \min(x,y), & x \neq 0, y \neq 0 \quad \text{olarsa,} \end{cases} \quad (2.6.30)$$

$$x^1 = x + 1 (\mathrm{mod}\, k), \quad (x, y \in E_k) \quad (2.6.31)$$

Bu sistemin ödədiyi əsas eynilik münasibətlərini göstərək:

$xy = yx$	$x \vee y = y \vee x$	$x1 = x$
$x \vee 0 = x$	$x0 = 0$	$x \vee 1 = 1$
$(xy)z = x(yz)$	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$	$xx\ldots x = xx$
$x \vee x = x$	$x \vee xy = x$	$(x \vee y)z = xz \vee yz$

Yuxarıdakı eyniliklərin doğruluğu xy və $x \vee y$ əməllərinin tə'rifindən alınır.

(2.6.31) əməliyyatının x dəyişəninə r dəfə tətbiq olunması üçün x^r işarələməsini daxil edək.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$x \vee x^1 \vee x^2 \vee \ldots \vee x^{k-1} = 1$$

$$(xx \vee yy)^1 = (xx)^1(yy)^1 \text{ olur}$$

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & x = i \quad \text{olduqda,} \\ 0 & x \neq i \quad \text{olduqda,} \ (i = 0,1,\ldots,k-1) \end{cases}$$

funksiyalarını *vahidin biryerli konstituenti* adlandıracağıq.

Lemma 2.1. (2.6.29)-(2.6.31) əməllər sistemində vahidin biryerli konstituentini,

$$f_i(x) = (x^{1-i})(x^{1-i}), \quad (2.6.32)$$

harada ki, 1-i=1-i (mod k) şəklində göstərmək olar.

İsbatı. x=i olduqda, (2.6.32)-nin sağ tərəfi $(i+1-i)(i+1-i)=1$ olur. $x = b \neq i$ olduqda isə $(b+1-i)(b+1-i)=0$ olur, belə ki, $b - i \neq 0$

Teorem 2.19. P_k çoxluğundan olan ixtiyari çoxqiymətli funksiyanı

$$f(\vec{x}) = \bigvee_{\substack{\text{bütün } \vec{\alpha}\text{-laragörə} \\ f(\vec{\alpha}) \neq 0}} f(\vec{\alpha})(x_1^{1-\alpha_1})(x_1^{1-\alpha_1})(x_2^{1-\alpha_2})(x_2^{1-\alpha_2})\ldots$$

$$\ldots(x_n^{1-\alpha_n})(x_n^{1-\alpha_n}) \quad (2.6.33)$$

şəklində göstərmək olar.

İsbatı. İxtiyari $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ yığımını qeyd edək. Funksiyanın (2.6.29) xassəsini və (2.6.32) münasibətlərini nəzərə alsaq, alarıq ki,

$$(x_1^{1-\alpha_1})(x_1^{1-\alpha_1})(x_2^{1-\alpha_2})(x_2^{1-\alpha_2})\ldots(x_n^{1-\alpha_n})(x_n^{1-\alpha_n}) \quad (2.6.34)$$

ifadəsi.

$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ olarsa, 1, qalan hallarda isə 0 qiymətini alır. İsbatın sonrakı gedişatı yuxarıda olduğu kimidir.

Nümunəyə baxaq. Tutaq ki, $f(x_1, x_2)$ funksiyası cədvəl 2.19 vasitəsilə verilmişdir.

$x_1 \backslash x_2$	0	1	2	3
0	0	2	3	0
1	0	0	0	1
2	0	0	3	0
3	1	1	0	0

Cəd. 2.19

Bu funksiyanı (2.6.33) şəklində göstərək:

$$f(x_1, x_2) = 1(x_1^{1-3})(x_1^{1-3})(x_2^{1-0})(x_2^{1-0}) \vee$$

$$\vee\, 2(x_1^{1-0})(x_1^{1-0})(x_2^{1-1})(x_2^{1-1}) \vee$$

$$\vee\, 1(x_1^{1-3})(x_1^{1-3})(x_2^{1-1})(x_2^{1-1}) \vee 3(x_1^{1-0}) \times$$

$$\times\, (x_1^{1-0})(x_2^{1-2})(x_2^{1-2}) \vee 3(x_1^{1-2})(x_1^{1-2})(x_2^{1-2})(x_2^{1-2}) \vee$$

$$\vee\, 1(x_1^{1-1})(x_1^{1-1})(x_2^{1-3})(x_2^{1-3}) = (x_1^{2})(x_1^{2})(x_2^{1})(x_2^{1}) \vee (x_1^{2})(x_1^{2})(x_2) \times$$

$$\times\, (x_2) \vee (x_1)(x_1)(x_2^{2})(x_2^{2}) \vee 2(x_1^{1})(x_1^{1})(x_2)(x_2) \vee 3(x_1^{1}) \times$$

$$(x_1^{1})(x_2^{3})(x_2^{3}) \vee 3(x_1^{3})(x_1^{3})(x_2^{3})(x_2^{3}).$$

$$f_{\vec{\alpha}}^{a}(\vec{x}) = \begin{cases} a, & x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n \text{ olduqda} \\ 0, & \text{qalan hallarda } (a \in E_k,\ a \neq 0) \end{cases}$$

funksiyasını a sabitinin konstituenti adlandıraq.

Sabitin ixtiyari konstituentini (2.6.29) əməllərinin a sabiti üzərində yerinə yetirilməsindən və (2.6.34) ifadəsindən almaq olar. Beləliklə, alınır ki, (2.6.33) kanonik şəkli sabitin konstituentinin dizyunksiyası kimi təsvir olunur.

E_k çoxluğunun özünə qarşılıqlı birqiymətli in'ikasından istifadə edərək (2.6.29)-(2.6.31) əməllərinə izomorf in'ikas olan əməllərin tam sistemini tə'yin etmək olar. Belə sistemlərə aid nümunəyə [22]-də baxılır.

Hesablama qurğularının yaradılması zamanı bə'zən əsas əməllərdən biri olan mod k-ya görə toplama əməlindən istifadə etmək məqsədəuyğun sayılır.

Teorem 2.20. Vahidi, (x+y)mod k və xy əməllərini özündə saxlayan sistem P_k çoxluğunda funksional tamdır (xy əməli (2.6.29) ifadəsi ilə tə'yin olunur).

İsbatı. Vahidi y-lə əvəz etsək, $x' = x + 1(\mathrm{mod}\, k)$ alınq. Əvvəldə göstərildi ki, bütün sabitlərin konstituentini xy və x' funksiyalarının superpozisiyası şəklində göstərmək olar. Bundan istifadə edərək ixtiyari $f(\vec{x})$ funksiyasını bu konstituentlərdən hər hansı birinin cəmi şəklində təsvir etmək olar.

x+y(mod k) və xy əməlləri öz aralarında (x+y)(zz)= =x(zz)+y(zz) münasibəti ilə bağlıdırlar.

Axırıncının doğruluğu isə əvvəlcə z=1, sonra isə $z \neq 1$ götürməklə təsdiqlənir.

Bir sıra tam sistemlər də vardır ki, orada biryerli konstituentləri və sabitin konstituentlərini qurmaq mümkün olur. Bu zaman

$$xy = \begin{cases} x, \ x = y & \text{olduqda} \\ 0, \ x \neq y & \text{olduqda} \end{cases} \qquad (2.6.35)$$

əməlindən istifadə olunur.

Bunun üçün hər biri özündə (2.6.29), yaxud (2.6.35) şəklində konyuksiya, həmçinin dizyunktiv normal forma tipli kanonik formanı qurmağa imkan verən başqa əməllər saxlayan sistemlərdən təşkil olunmuş tam sistemlər sinfini ayırmaq məqsədəuyğundur. Belə kanonik formaların qurulması üçün zəruri şərt, dizyunksiya və konyuksiya tipli əməllərin aşağıdakı xassələrinin ödənilməsidir.

$$a \vee x = x \vee a = x$$
$$ax = xa = a, \quad (a \in E_k)$$

(baxılan nümunələrdə a=0). k=2 olduqda, bu əməllər Bul cəbrinin adi dizyunksiya və konyuksiya əməllərinə çevrilirlər.

§2.6.4. Əməllərin modulyar sistemi və çoxqiymətli funksiyaların çoxhədli şəklində göstərilməsi

Say sisteminin əsası $k \geq 2$ olan hesablama qurğuları sxemlərinin sintezi zamanı standart məntiqi elementlər arasında mod k-ya görə toplama və vurma əməllərini reallaşdıran elementlərin olması lazım gəlir. Bununla əlaqədar olaraq, çoxqiymətli məntiq funksiyaların elə təsvir formaları əhəmiyyət kəsb edir ki, orada dizyunksiya və konyuksiya əməlləri əvəzinə, modula görə toplama və vurma əməlləri istifadə edilir. Bu əməllərdən istifadə olunan təsvir formalarından biri SİQMA-Pİ forması adlanan formadır.

Əgər sabiti, x+y(mod k), x⋅y(mod k) əməllərini özündə saxlayan sistemə

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1 & x = j \quad \text{olarsa,} \\ 0 & x \neq j \quad \text{olarsa,} \quad (j = 0,1,\ldots,k-1) \end{cases} \qquad (2.6.36)$$

funksiyasını da əlavə etsək, onda aşağıdakı teoremi almış olarıq.

Teorem 2.21. P_k çoxluğundan olan ixtiyari funksiyanı $\sum - \prod$ forması şəklində vermək olar.

$$f(\vec{x}) = \sum_{\substack{\text{bütün } \vec{\alpha}\text{-ra} \\ \text{görə, } f(\vec{\alpha}) \neq 0}} f(\vec{\alpha}) \prod_{i=1}^{n} \varphi_{\alpha_i}(x_i) \qquad (2.6.37)$$

Əgər nəzərə alsaq ki, $\vec{\alpha}$ qeyd olunmuş yığımı üçün (2.6.37) ifadəsində $\sum$ işarəsindən sonra gələn hasil $f(\vec{\alpha})$ sabitinin konstituentidir, onda teoremin isbatı aşkardır.

Əgər k-sadə ədəddirsə, onda baxılan sistem (2.6.36) funksiyalarının iştirakı olmadan da funksional tamdır. Bu halda (2.6.36)-dan olan hər bir funksiyanı aşağıdakı kimi təsvir etmək olar:

$$\varphi_j(x) = (k-1)(x-j)^{k-1} + 1(\text{mod } k) \qquad (2.6.38)$$

Bu bərabərliyin doğruluğu bilavasitə yoxlama nəticəsində alınır. Əgər k-mürəkkəb ədəddirsə, onda, $\varphi_j(x)$ funksiyaları ilə mod k-ya görə toplama və vurma əməllərinin superpozisiyası arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq qurmaq mümkün olmur.

Nümunəyə baxaq. Mod 4-ə görə vurma üçün keçirmə funksiyasını (cəd.2.20-ilə verilən) (2.6.37) şəklində yazaq.

x_1 \ x_2	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	0	0	1	2

Cəd. 2.20

$$f(x_1,x_2)=1\varphi_2(x_1)\varphi_2(x_2)+1\varphi_2(x_1)\varphi_3(x_2)+$$

$$+1\varphi_3(x_1)\varphi_2(x_2)+2\varphi_3(x_1)\varphi_3(x_2)=$$

$$=\varphi_2(x_1)\varphi_2(x_2)+\varphi_2(x_1)\varphi_3(x_2)+\varphi_3(x_1)\cdot\varphi_2(x_2)+$$

$$+2\varphi_3(x_1)\varphi_3(x_2)$$

Çoxqiymətli funksiyanın təsvirinin daha ümumi şəkli polinomial (çoxhədli şəklində) təsvirdir -

$$aN_{j_1}(x_1)N_{j_2}(x_2)\ldots N_{j_n}(x_n), \qquad (2.6.39)$$

hasili şəklində verilmiş hər hansı sonlu çoxluğun mod k-ya görə cəmləri, belə ki, bu hasili təşkil edən hədlərdən bir neçəsi olmaya da bilər.

(2.6.39) ifadəsində a-sabit; $N_{j_i}(x_i)$ -birdəyişənli funksiyalardır: $(i=1,2,\ldots,n),(j=1,2,\ldots,k^k)$.

Birdəyişənli ixtiyari funksiyanın təsvirini aşağıdakı çoxhədli şəklində tapaq:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2N_2(x)+\ldots+a_{k-1}N_{k-1}(x), \qquad (2.6.40)$$

harada ki, a_j-sabitlər $(j=0,1,\ldots,k-1)$; $N_i(x)$ -birdəyişənli funksiyadır $(i=2,3,\ldots,k-1)$. Əgər ixtiyari birdəyişənli funksiyanın birqiymətli (2.6.40) təsviri varsa, onda (2.6.36) funksiyaları üçün də belə təsviri tapmaq olar. (2.6.36) funksiyalarını (2.6.37)-də nəzərə alıb, vurma əməliyyatını aparsaq, $x_i(i=1,2,\ldots,n)$ dəyişənlərinə və $N_2(x_i),N_3(x_i),\ldots,N_{k-1}(x_i)$ funksiyalarına nəzərən çoxhədli alırıq. Göstərmək olar ki, ixtiyari birdəyişənli funksiyanın (2.6.40) şəklində təsvirinin yeganəliyinin zəruri və kafi şərti

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & N_2(0) & \ldots & N_{k-1}(0) \\ 1 & 1 & N_2(1) & \ldots & N_{k-1}(1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 1 & k-1 & N_2(k-1) & \ldots & N_{k-1}(k-1) \end{vmatrix}.$$

determinantının vahidə bərabər olmasıdır.

Misal üçün, cədvəl 2.21-lə tə'yin olunmuş funksiyalar sisteminin bu şərti ödədiyini göstərmək olar.

x	$N_2(x)$	$N_3(x)$	$N_4(x)$	.....	$N_{k-2}(x)$	$N_{k-1}(x)$
0	0	0	0	.....	0	0
1	1	1	1	.....	1	1
2	1	2	2	.....	2	2
.	.	.	.	.....	.	.
.	.	.	.	.....	.	.
.	.	.	.	.....	.	.
k-3	1	2	3	.....	k-3	k-3
k-2	1	2	3	.....	k-3	k-2
k-1	1	2	3	.....	k-3	k-2

Bu funksiyalar sisteminin determinantı D, ixtiyari k üçün 1-ə bərabər olur. İxtiyari k-qiymətli funksiyanın (2.6.40) şəklində təsvirinin yeganəlik şərti, funksiyalar sisteminin $N_2(x), N_3(x), ..., N_{k-1}(x)$ biryerli funksiyalarının mod k-ya görə cəm və hasillərinin tam funksiyalar sisteminə qədər tamamlanmasından başqa bir şey deyil.

x+y (mod k) və $x \times y$ (mod k) ikiyerli əməllərini tam sistemə qədər tamamlayan biryerli funksiyaların sayının (k-2)-yə bərabər olması vacib deyil. k=4 olduqda, birdəyişənli funksiyanın təsvirini [16]-da olduğu kimi:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 N_2(x) + a_3 x N_2(x)$$

şəklində axtarmaq olar.

Cədvəl 2.21-lə tə'yin olunan $N_i(x), (i = 2,3,...,k-1)$ biryerli funksiyalarını $N_i(x) = \min(i-1, x)$ kimi göstərmək olar.

Buradan aşağıdakı teoremin doğruluğu alınır.

Teorem 2.22. P_k çoxluğundan olan ixtiyari funksiyanı çoxhədli şəklində göstərməyə imkan verən x+y(mod k), min(x,y), $x \times y$ (mod k) funksiyaları ixtiyari k üçün funksiyaların tam sistemini yaradır (təşkil edir).

Qeyd edək ki, çoxdəyişənli funksiyanın çoxhədli şəklində təsvirinin (2.6.40)-dan fərqli digər təsvirləri də var. Əgər k-sadə ədəd olarsa, onda belə təsvirlərdən biri (2.6.38) ifadəsi ola bilər. (2.6.38)-i nəzərə alaraq, (2.6.36)-nın hər bir funksiyasının təsvirini $\sum - \prod$ formada yerinə yazsaq, vurma və ixtisaretmə aparsaq, axtarılan çoxhədlini alarıq.

Nümunəyə baxaq. $\sum - \prod$ forması (k=4)

$$f(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_0(x_2) + 2\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) + 3\varphi_1(x_1)\varphi_3(x_2)$$

şəklində olan funksiyanı çoxhədli şəklində göstərək. (2.6.36) funksiyalarını bu hala uyğun olaraq,

$$\varphi_0(x) = 1 + 3N_2(x); \qquad \varphi_1(x) = 2N_2(x) + 3N_3(x);$$

$$\varphi_2(x) = 3x + 3N_2(x) + 2N_3(x); \qquad \varphi_3(x) = x + 3N_3(x)$$

kimi göstərmək olar. Onda

$$f(x_1, x_2) = (2N_2(x_1) + 3N_3(x_1))(1 + 3N_2(x_2) + 2N_2(x_2) + N_3(x_2) +$$
$$+ 2x_2 + 3x_2) = (2N_2(x_1) + 3N_3(x_1))(1 + N_2(x_2) + N_3(x_2) +$$
$$+ x_2) = 2N_2(x_1) + 3N_3(x_1) + 2N_2(x_1)N_2(x_2) + 3N_3(x_1) \cdot N_2(x_2) +$$
$$+ 2N_2(x_1)N_3(x_2) + 3N_3(x_1)N_3(x_2) + 2N_2(x_1)x_2 + 3N_3(x_1)x_2.$$

§2.6.5. Əməllərin digər tam sistemləri

Əvvəlcə baxılanlardan fərqli olaraq, əməllərin müəyyən nəzəri maraq kəsb edən digər tam sistemləri də mə'lumdur.

Teorem 2.23. $x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2), x^1 = x + 1(\mathrm{mod}\, k)$ funksiyalar sistemi (Post sistemi) P_k çoxluğunda tamdır.

İsbatı. Aşkardır ki,

$x \vee x^1 \vee x^2 \vee ... \vee x^{k-1} = k - 1$ doğrudur.

Buradan x^1-in köməkliyi ilə bütün sabitləri almaq olar. Asanlıqla göstərmək olar ki,

$$J_s(x) = \bigvee_{\substack{i=0 \\ i \neq k-1-s}}^{k-1} x^i = \begin{cases} k-1 & x = s \quad \text{olduqda,} \\ 0 & x \neq s \quad \text{olduqda.} \end{cases}$$

Sonra k-1-x funksiyalarını qururuq

$$k - 1 - x = \bigvee_{\substack{i=k-1 \\ j=0}}^{\substack{j=k-1 \\ i=0}} f_{ij}(x),$$

harada ki, $f_{ij}(x) = (J_j(x) \vee (k-1-i))^{i+1}$.

Buradan alırıq ki, $x_1 \cdot x_2 = \min(x_1, x_2)$,

$$x_1 x_2 = k - 1 - ((k - 1 - x_1) \vee (k - 1 - x_2))$$

bərabərlikləri doğrudur.

Beləliklə, $x_1 \vee x_2$ və x^1 funksiyalarından istifadə edərək, onların superpozisiyası yolu ilə Rosser-Tyuket tam sisteminin funksiyalarını qurduq. Buna uyğun olaraq axtarılan sistem də tamdır. Aşağıda şərh olunan faktları bu teoremin nəticəsi kimi qəbul etmək olar.

Teorem 2.24. Tutaq ki, $x^{-} = x + \alpha(\mathrm{mod}\, k)$. Əgər α və k qarşılıqlı sadə ədədlərdirsə, onda $x_1 \vee x_2$ və x^α funksiyalarının təşkil etdikləri sistem tamdır.

Teorem 2.25. $(x_1 \vee x_2)^1$ funksiyası (Vebb funksiyası) P_k çoxluğunda tam sistem təşkil edir. Vebb funksiyası ikili Şeffer funksiyasının k-qiymətli analoqudur. Göstərmək olar ki, $(k-2)$ sabitini, k-1-x və $x_1 \supset x_2 = \min(k-1, x_2 - x_1 + k - 1)$ funksiyalarını özündə saxlayan sistem tamdır. Bu zaman $x_2 - x_1 + k - 1$ ifadəsindəki toplama və çıxma əməlləri mod k-ya görə olmayıb, adi əməllərdir. İxtiyari çoxqiymətli funksiyanın mükəmməl dizyunktiv normal forma (MDNF) şəklində kanonik təsviri xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Tam sistemdə MDNF tipli kanonik formasının olması üçün bu sistemin əməllərinin ödəyəcəyi şərtlərin aydınlaşdırılması məqsədilə, bütün sabitləri və $x \vee y$, xy

$$J_s(x) = \begin{cases} a & x = s \quad \text{olarsa,} \\ b & x \neq s \quad \text{olarsa,} \end{cases} \quad (s = 1, 2, ..., k-1)$$

harada ki, $a \neq b$; $x, y, a, b \in E_k$ əməllərini özündə ifadə edən sistemə baxaq.

Teorem 2.26. Əgər $x \vee y$ və xy funksiyaları

$$\left.\begin{aligned} x \vee b = b \vee x = x \\ xb = bx = b \\ xa = ax = x \end{aligned}\right\} \qquad (2.6.41)$$

şərtlərini ödəyərsə, onda ixtiyari $f(\vec{x})$ funksiyasını

$$f(\vec{x}) = \bigvee_{\text{bütün } \alpha\text{-lara görə}} f(\vec{\alpha}) J_{\alpha_1}(x_1) J_{\alpha_2}(x_2), ..., J_{\alpha_n}(x_n) \quad (2.6.42)$$

şəklində göstərmək olar.

$x_1x_2...x_n$ və $x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n$ ifadələri uyğun olaraq

$$x_1x_2...x_n = (...((x_1x_2)x_3)...)x_n$$

$$x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n = (...((x_1 \vee x_2) \vee x_3) \vee ...) \vee x_n$$

olduğunu göstərir.

İsbatı. Tutaq ki, $\vec{x} = \vec{\alpha}$. Onda (2.6.42)-nin sol tərəfi $f(\vec{\alpha})$-ya bərabər olur.

Qeyd edək ki,

$$f(\vec{\alpha})J_{\alpha_1}(x_1)J_{\alpha_2}(x_2)...J_{\alpha_n}(x_n) = \begin{cases} f(\vec{\alpha}) & \vec{x} = \vec{\alpha} \quad \text{olarsa,} \\ b & \vec{x} \neq \vec{\alpha} \quad \text{olarsa.} \end{cases}$$

(2.6.42)-nin sağ tərəfini uyğun olaraq

$$\bigvee_{t=1}^{N-1} b \vee f(\vec{\alpha})J_{\alpha_1}(\alpha_1)J_{\alpha_2}(\alpha_2)...J_{\alpha_n}(\alpha_n) \vee \bigvee_{t=N+1}^{k^n} b$$

şəklində göstərmək olar.

Buradan ardıcıl olaraq

$$b \vee f(\vec{\alpha})J_{\alpha_1}(\alpha_1)J_{\alpha_2}(\alpha_2)...J_{\alpha_n}(\alpha_n) \vee b =$$

$$= f(\vec{\alpha})aa...a = f(\vec{\alpha}) \quad \text{alırıq.}$$

Analoji mülahizələr ixtiyari $\vec{\alpha}$ yığımı üçün doğru olduğundan, teorem isbat olundu. Baxılan sistem $x \vee y, xy$ və $J_s(x)$ funksiyalarının $\forall$ tə'yininə qədər tamdır. max(x,y), min(x,y), x+y(mod k), xy(mod k) və digər funksiyalar (2.6.41) şərtlərini ödəyirlər.

Deməli, elə tam sistemlər sinfi var ki, onların hər birində ixtiyari çoxqiymətli funksiyanın MDNF tipli kononik şəklindən danışmaq olar. Funksiyalar sisteminin bu sinfə daxil olması əlaməti (2.6.41) şərtləri ilə göstərilir.

§2.7. k-qiymətli məntiqin bə'zi xüsusiyyətləri

Əvvəlki paraqraflardakı materiallardan görünür ki, k-qiymətli məntiq cəbri əksər halda Bul cəbrinə bənzəyir və nəticələrin çoxu k=2 halından çoxqiymətli məntiq cəbrləri halına keçirilə bilər. Doğrudur, bu zaman k-nın artması həm isbat ediləcək nəticələrin deyilişinə, həm də onların isbatı prosesində istifadə edilən konstruktiv qurulmaların mürəkkəbləşməsinə tə'sir edir.

Ancaq indi elə faktlar da əldə edilmişdir ki, onlar bütünlükdə çoxqiymətli məntiqlərin özünəməxsus xüsusiyyətlərini nümayiş etdirirlər. Digər tərəfdən elə faktlar da var ki, $P_k(k \geq 3)$ halının P_2 halından əhəmiyyətli dərəcədə fərqləndiyini göstərir.

Bu fakt xüsusilə Post tərəfindən irəli sürülmüş və çoxqiymətli məntiqlərin Bul məntiqinə gətirilməsi imkanı ilə bağlı ideya baxımından xüsusi maraq doğurur. Postun ideyasına görə, hər bir $f(x_1,...,x_n) \in P_k$ funksiyasının yerinə elə

$$\{\varphi_1(x_{11},...,x_{1l},...,x_{n1},...,x_{nl}),...,$$

$$\varphi_\ell(x_{11},...,x_{1l},...,x_{n1},...,x_{nl})\} \qquad (2.7.1)$$

funksiyalar sistemi götürmək olar ki, $\ell =]\log_2 k[$ olsun və α_i qiymətləri $(\alpha_{i1},...,\alpha_{i\ell})(i = 1,...,n)$ ikilik koduna malikdirsə, onda $f(\alpha_1,...,\alpha_n)$-in də ikilik kodu

$$\varphi_1(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{1l},\ldots,\alpha_{n1},\ldots,\alpha_{nl}),\ldots,$$

$$\varphi_\ell(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{1l},\ldots,\alpha_{n1},\ldots,\alpha_{nl})$$

şəklində olmalıdır. Göründüyü kimi, bu halda P_k-dakı C (superpozisiya) əməlinə

$$\{\varphi_1,\ldots,\varphi_\ell\} \in P_2$$

funksiyalar sistemi üzərində xüsusi əməl uyğun olacaqdır.

Qeyd etmək lazımdır ki, P_k-dan götürülmüş funksiyaların P_2-dən olan funksiyalar vasitəsilə kodlaşdırılması məsələsi məntiqi məsələlərin EHM-da həll edilməsi imkanı baxımından əhəmiyyətli olsa da, çoxqiymətli məntiqlərin özlərinin tədqiq edilməsi üçün çox az şey verir.

$P_k(k \geq 3)$ halındakı özünəməxsus xüsusiyyətlər J.Slupetskinin, A.V.Kuznetsovun, S.V.Yablonskinin ilkin elmi işlərindən başlayaraq mə'lum olsa da, axır vaxtlarda aparılan tədqiqatlar $k \geq 3$ halının k=2 halından əhəmiyyətli dərəcədə fərqləndiyini göstərir.

Bu fərqlənmə istər P_k-da qapalı siniflər və onların funksional gücü, həmin siniflərdə bazislərin varlığı baxımından, istərsə də P_k-dan götürülmüş funksiyaların polinomların köməyi ilə təsvir edilməsi imkanı baxımından da müşahidə olunur.

E.Post və N.N.Jeqalkin teoremlərindən çıxan nəticələrə əsaslanaraq demək olar ki, məntiq cəbri halında yuxarıdakı suallara aşağıdakı kimi cavab verilməlidir:

1) P_2-də hər bir qapalı sinif sonlu bazisə malikdir.

2) P_2-də bütün qapalı siniflərin əmələ gətirdikləri çoxluğun gücü S_0-a bərabərdir.

3) P_2-dən götürülmüş hər bir Bul funksiyasını mod 2-yə nəzərən tərtib olunmuş polinom şəklində təsvir etmək olar.

$P_k(k \geq 3)$ halı üçün yuxarıdakı sualların cavabları Y.İ.Yanova və A.A.Muçnikə məxsus teoremlər vasitəsilə verilir.

Teorem 2.27. Hər hansı $k(k \geq 3)$ üçün P_k-da bazisi olmayan qapalı sinif vardır.

Teorem 2.28. Hər hansı $k(k \geq 3)$ üçün P_k-da hesabi bazisə malik qapalı sinif vardır.

Məzmun e'tibarilə bu teoremə yaxın olan aşağıdakı fakt da A.A.Muçnik tərəfindən isbat edilmişdir.

Teorem 2.29. Hər hansı $k(k \geq 3)$ üçün P_k-da kontinium sayda müxtəlif qapalı siniflər vardır.

Yuxarıdakı teoremlərin isbatı üçün, [1]-[5] kitablarına müraciət etmək kifayətdir.

Hər bir $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_k(k \geq 3)$ funksiyasının mod k-ya nəzərən çoxhədli şəklində təsvir edilməsi imkanına gəldikdə isə, həmin sualın cavabı teorem 2.5-də verilmişdir. Həmin teoremə görə, hər hansı $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_k$ funksiyasını ancaq və ancaq o zaman mod k-ya (və ya uyğun Qalua meydanı əməllərinə) nəzərən polinom şəklində göstərmək olar ki, k=p (və ya $k = p^m$) olsun, burada p-sadə ədəddir. Digər tərəfdən teorem 2.10-a əsasən funksiyanın tamlıq məsələsi $P_k(k \geq 3)$ üçün ancaq və ancaq k=p olduqda müsbət həll edilir.

Bu nəticələrin məntiq cəbri halındakı (k=2) cavablarla müqayisə edilməsi göstərir ki, ikiqiymətli və çoxqiymətli məntiqlər əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənə bilərlər. Bə'zi məsələlərin həlli isə k-ədədinin qiymətindən asılı olaraq müxtəlif şəkildə həll oluna bilər. Tutaq ki, k-ədədi ixtiyari ədəddir. Göstərmək olar ki, ümumi cəbrin müəyyən faktlarına əsaslanaraq çoxqiymətli məntiq funksiyasının sonlu G(k), harada ki,

$$k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$$

(p_i müxtəlif sadə ədədlərdir) halqası üzərində ayrılış məsələsini onun

$$GF(p_i^{\alpha_i}), \quad i=1,2,\dots,m$$

sonlu halqalar (meydanlar) üzərində ayrılışına gətirmək olar. Belə imkan cəbrin aşağıdakı faktına əsaslanır:

Təklif: $G(k)$ halqası $G(p_1^{\alpha_1})+G(p_2^{\alpha_2})+\dots+G(p_m^{\alpha_m})$ halqasına izomorfdur.

Bu halqanın elementləri k-ölçülü vektorlar, cəmləmə və vurma isə komponentlərə nəzərən aparılan əməldir.

İsbatı: Tutaq ki,

$$f: G(k) \to G(p_1^{\alpha_1})+\dots+G(p_m^{\alpha_m})$$

in'ikası aşağıdakı kimi tə'yin olunmuşdur:

$$f(x) = [x(\mathrm{mod}\, p_1^{\alpha_1}), x(\mathrm{mod}\, p_2^{\alpha_2}), \dots, x(\mathrm{mod}\, p_m^{\alpha_m})]$$

x dəyişəni ardıcıl olaraq $0,1,\dots,k-1$ qiymətlərini aldıqda, $x(\mathrm{mod}\, p_i^{\alpha_i})$ komponenti periodik olaraq $0,1,\dots,p_i^{\alpha_i}-1$ qiymətlərini alır, yə'ni $x(\mathrm{mod}\, p_i^{\alpha_i})$ komponentinin bir element kimi $G(p_i^{\alpha_i})$ halqası üzərində periodu $p_i^{\alpha_i}$-ədədinə bərabərdir.

Digər tərəfdən, $p_i^{\alpha_i}$-müxtəlif sadə ədədlərin dərəcələri olduğundan, heç bir $[x(\mathrm{mod}\, p_1^{\alpha_1}),\dots,x(\mathrm{mod}\, p_m^{\alpha_m})]$ vektoru iki dəfə təkrar oluna bilməz. Deməli, f in'ikası qarşılıqlı birqiymətlidir, yə'ni biyeksiyadır. Deməli, bütün $x \in G(k)$ və $y \in G(k)$ üçün

$$f(x \oplus y) = [(x \oplus y)\mathrm{mod}\, p_1^{\alpha_1}, \dots, (x \oplus y)\mathrm{mod}\, p_m^{\alpha_m}] =$$

$$= [x\,\mathrm{mod}\, p_1^{\alpha_1}, \dots, x\,\mathrm{mod}\, p_m^{\alpha_m}] + [y\,\mathrm{mod}\, p_1^{\alpha_1}, \dots, y(\mathrm{mod}\, p_m^{\alpha_m})] =$$

$$= f(x) \oplus f(y)$$

Analoji qaydada

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

olduğunu göstərmək olar. Beləliklə, $G(k)$ halqası

$$G(p_1^{\alpha_1}) \dot{+} \dots \dot{+} G(p_m^{\alpha_m})$$

halqasına izomorfdur.

Əgər $k = p_1 p_2 \dots p_m = \prod_{i=1}^{m} p_i$ isə, onda $G(k)$ halqası $GF(p_i)$ sonlu meydanların

$$GF(p_1) \dot{+} GF(p_2) \dot{+} \dots \dot{+} GF(p_m)$$

kimi düz cəminə izomorfdur:

$$G(k) \sim GF(p_1) \dot{+} GF(p_2) \dot{+} \dots \dot{+} GF(p_m)$$

Yuxarıdakı izomorfizmi

$$f: x \to (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

harada ki, $x_i \equiv x(\mathrm{mod}\, p_i)$, $i = 1,2,\dots,m$ kimi də göstərmək olar. Buradan tərs izomorfizm üçün

$$J\ :(x_1, x_2, .., x_m) \to x$$

ifadəsini alarıq, burada

$$x = k_1 k_1^{-1} x_1 \oplus \ldots \oplus x_m x_m^{-1} x_m$$

$$x_i = k / p_i ; k_i^{-1} = (k_i \bmod p_i)^{-1} \bmod p_i$$

İndi isə deyilən izomorfizmdən istifadə edərək k-qiymətli məntiq funksiyalarının qısaldılmış normal polinomial forma şəklində təsvir edilə bilinməsi imkanını göstərək.
Tutaq ki,

$$y = f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

harada ki, $y, z_i \in G(k), i = 1,2,\ldots,n$ k-qiymətli məntiq funksiyasının $G(k)$ sonlu halqası üzərində normal polinomial ayrılışı

$$y = \sum_{\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} C_\sigma (z_1)^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot (z_n)^{\sigma_n} (\bmod k)$$

$$\sigma_i \in G(k), \quad i = 1,2,\ldots,n$$

şəklində təsvir olunur.
Burada $\sum_\sigma$ işarəsi bütün mümkün σ yığımları üzrə mod k-ya görə cəmləməni, $\cdot$ işarəsi isə mod k-ya görə vurmanı göstərir; $G_\alpha \in G(p)$ - ayrılış əmsalları olub, struktur sabitlər də adlanır.
İndi isə k moduluna görə müqayisə operatorunu S_k x-ilə işarə edək, onda

$$S_k x = x - \gamma k = x'$$

harada ki, $\gamma, x' < k$ şərtini tə'min edən mənfi olmayan tam ədəddir. S_k operatoru ilə yuxarıdakı münasibətin hər tərəfinə tə'sir edək. Onda müqayisə operatorunun mə'lum xassələrindən istifadə etsək, alarıq:

$$S_{p_i} y = \sum_{\delta^i=(\delta_1^i,\ldots,\delta_n^i)} \hat{C}_{\sigma^i} \cdot [S_{p_i}(z_1)]^{\delta_1^i} \ldots [S_{p_i}(z_n)]^{\delta_n^i}, \ i = 1,2,\ldots,m, GF(p_i)$$

harada ki, n-ölçülü $\delta^i =< \delta_1^i, \delta_2^i, \ldots, \delta_n^i >$-korteji σ-ya uyğun olub, aşağıdakı düsturlarla tə'yin olunur:

$$\delta_\nu^i = 1 + S_{p_i-1}(\alpha_\nu - 1), \quad \nu = 1,2,\ldots,n$$

Axırıncı ayrılışda

$$\hat{C}_{\delta^i} = S_{p_i}(C_\sigma) \in GF(p_i)$$

kəmiyyətləri C_{σ_i} struktur sabitlərinin S_{p_i} operator vasitəsilə çevrilmiş obrazlarıdır. $\sum_i$ -müxtəlif δ^i yığımlarına uyğun p_i moduluna görə cəmləmədir.
S_{p_i} operatorunun tə'siri nəticəsində alınmış polinomial ayrılışın sağ tərəfində $GF(p_i)$ Qalua meydanlarına məxsus sadələşdirmələr apara bilərik. Daha sonra $GF(p_1) \dotplus \ldots \dotplus GF(p_m)$ çoxluğunun hər bir elementinə $G(k)$ çoxluğunun bir elementini qarşı qoyan S_k^{-1} operatoru daxil edək. Belə ki, istənilən ν üçün

$$S_k^{-1}(S_{p_1}\nu, S_{p_2}\nu, \ldots, S_{p_m}\nu) = \nu$$

olsun. Bu operatorla sadələşdirilmiş polinomial ayrılışın sağ və sol tərəfinə tə'sir etsək, verilmiş k-qiymətli məntiq funksiyasının qısaldılmış polinomial təsvir formasını almış olarıq.
Bütün bu deyilənləri

$$k = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$$

halına da aid etmək olar. Belə olduqda

$$G(k) \sim GF(p_1^{\alpha_1}) \dot{+} \dots \dot{+} GF(p_m^{\alpha_m})$$

və nəticədə k-qiymətli məntiq funksiyasının $GF(p_i^{\alpha_i})$, $i = 1,2,\dots,m$ Qalua meydanları ilə bağlı qısaldılmış polinomial ayrılışlarını almış olarıq.
Misal: Tutaq ki, G(6) halqası üzərində aşağıdakı kimi polinomial ifadələr verilmişdir:

$$y_1 = 2 \oplus z_1^3 \cdot z_2 \oplus 5 \cdot z_2 \pmod 6$$

$$y_2 = z_1 \oplus 4 \cdot z_2$$

Yuxarıdakı münasibətlərə əsaslanaraq $p_1 = 2$ və $p_2 = 3$ halı üçün

$$S_{p_i}(z_1) = z_1^{(i)}$$
$$S_{p_i}(z_2) = z_2^{(i)}$$
$$S_{p_i}(y_1) = y_1^{(i)}$$
$$S_{p_i}(y_2) = y_2^{(i)}$$
$$i = 1,2$$

işarələmələrindən istifadə etsək, alarıq:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(1)} &= z_1^{(1)} \cdot z_2^{(1)} \oplus z_2^{(1)} \\ y_2^{(1)} &= z_1^{(1)} \end{aligned}\right\} \pmod 2$$

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(2)} &= 2 \oplus z_1^{(2)} \cdot z_2^{(2)} \oplus 2z_2^{(2)} \\ y_2^{(2)} &= z_1^{(2)} \oplus z_2^{(2)} \end{aligned}\right\} \pmod 3$$

G(6) halqası üzərində y_1 və y_2 dəyişənlərini tə'yin edən ifadələrin sağ tərəfini uyğun olaraq f_1 və f_2 ilə işarə edək. Onda həmin 6-qiymətli məntiq funksiyalarına GF(2) və GF(3) meydanları üzərində tə'yin olunmuş

$$\left.\begin{aligned} f_1^{(1)} &= z_1^{(1)} \cdot z_2^{(1)} \oplus z_2^{(1)} \\ f_2^{(1)} &= z_1^{(1)} \end{aligned}\right\} \pmod 2$$

və

$$\left.\begin{aligned} f_1^{(2)} &= 2 \oplus z_1^{(2)} \cdot z_2^{(2)} \oplus 2z_2^{(2)} \\ f_2^{(2)} &= z_1^{(2)} \oplus z_2^{(2)} \end{aligned}\right\} \pmod 3$$

funksiyalarını qarşı qoymaq olar.
Belə olduqda, G(6) halqası üzərində tə'yin olunmuş f_1 funksiyasının qısaldılmış ayrılışı

$$f_{12} = S_6(3 \cdot f_1^{(1)} \oplus 4 \cdot f_1^{(2)}) = 2 \oplus z_1 z_2 \oplus 5 \cdot z_2, \pmod 6$$

şəklində olar.
Bu zaman

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= S_6(3 \cdot z_1^{(1)} \oplus 4 \cdot z_2^{(1)}) \\ z_2 &= S_6(3 \cdot z_1^{(2)} \oplus 4 \cdot z_2^{(2)}) \end{aligned}\right\} \pmod 6$$

$$S_6(3\cdot z_2^{(1)}\oplus 8\cdot z_2^{(2)})=5\cdot z_2(\text{mod}\,6)$$

olduğu nəzərə alınmışdır.

Eyni qayda ilə f_2 funksiyasına uyğun qısaldılmış ayrılış

$$f_{22}=z_1\oplus 4\cdot z_2(\text{mod}\,6)$$

şəklində olar. Nəticədə ilkin verilmiş polinomial ifadələrin qısaldılmış formalarının

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2\oplus z_1\cdot z_2\oplus 5\cdot z_2 \\ y_2 &= z_1\oplus 4\cdot z_2 \end{aligned}\right\}(\text{mod}\,6)$$

şəklində olduqlarını göstərmiş oluruq.

ÇALIŞMALAR

1. Aşağıdakı münasibətlərin doğruluğunu isbat etməli:

a) $-(\bar{x})=\sim x$; v) $\sim(\bar{x}\oplus y)=(\sim x)\oplus(\sim y)$

b) $x\dot{-}(x\dot{-}y)=\min(x,y)$; q) $(x\supset y)\supset y=\max(x,y)$

2. P_k-dan götürülmüş f funksiyasını mod k-ya görə çoxhədli şəklində göstərməli:

a) f=min(x,y), k=3; b) $f=x\dot{-}y^2,\ k=5$

3. Tutaq ki, s(x), P_k-dan götürülmüş müxtəlif qiymətlər alan (yə'ni bütün k-qiymətlərini alan) birdəyişənli funksiyadır. Onda $g(s(x))\equiv x$ (və ya $s(g(x))\equiv x$) münasibətini ödəyən $g(x)\in P_k$ funksiyasına s(x)-in tərsi deyilir və $s^{-1}(x)$ ilə işarə edilir.

$$f^{s(x)}(x_1,x_2,\dots,x_n)=s^{-1}(f(s(x_1),s(x_2),\dots,s(x_n)))$$

funksiyasına $f(x_1,x_2,\dots,x_n)\in P_k$ funksiyasının s(x)-ə nəzərən qoşması deyilir.

$$f^{s(x)}(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

olduqda, $f(x_1,\dots,x_n)$ funksiyası s(x)-ə nəzərən özü-özünə qoşmadır deyirlər.

Aşağıdakı funksiyalardan hansıları s(x)=-x-ə nəzərən özü-özünə qoşmadırlar:

a) $\bar{x}$; b) ~x; v) $x\oplus y$

4. s(x)-ə nəzərən özü-özünə qoşma funksiyalar çoxluğunu Z(s(x)) ilə işarə edək.

İsbat etməli:

a) Z(s(x))-qapalı sinifdir;

b) Z(s(x))=P_k ancaq və ancaq $s(x)\equiv x$ olduqda mümkündür.

5. Aşağıda göstərilən sistemlərin P_k-da tamlığının ancaq və ancaq k-əsli ədəd olduqda mümkünlüyünü isbat etməli:

$a)\{1,x\oplus y\oplus x\cdot z\}$; b) $\{x\ominus 1,x\oplus y,x^2\cdot y\}$.

6. Sonlu meydanlar üzərində bazislərlə bağlı ortoqanallaşdırma metodundakı L^T keçid matrisini n=2, k=3 halı üçün tapmalı.

7. İsbat etməli ki, P_k-çoxluğunda bütün birdəyişənli funksiyalar aşağıdakı üç funksiya vasitəsilə doğurula bilər:

$$f(x)=x-1(\text{mod}\,k)\qquad h(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le k-3\\ k-1, & x=k-2\\ k-2, & x=k-1\end{cases}$$

İsbat etməli ki, P_k-çoxluğunda bütün birdəyişənli funksiyalar aşağıdakı kimi k sayda funksiyalar vasitəsilə doğurula bilər:

$$\varphi(x)=\begin{cases} i & x=0, \\ 0 & x=i, \qquad (i=1,2,\ldots,k-1) \\ x & x\neq i,0. \end{cases}$$

8. $$f(x_1,x_2)=1\oplus x_1\oplus 2x_1^2\oplus 5x_1^5\oplus 2x_1^3x_2^2\oplus 3x_1^4\cdot x_2^2\oplus x_1^3x_2^3\oplus$$
$$\oplus 2x_1^3\cdot x_2^3\oplus 4x_1\cdot x_2^5\oplus 5\cdot x_1^2\cdot x_2^5\oplus x_1^4\cdot x_2^5 (\mathrm{mod}\, 6)$$

ayrılışını qısaldılmış polinomial forma şəklində təsvir etməli. Ortoqonallaşdırma metodundakı n=2, k=3 halı üçün L^T keçid matrisini tapmalı.

9. $f(x_1,x_2)=2\oplus 2\cdot x_1\oplus x_1\cdot x_2\oplus 2x_1\cdot x_2$ funksiyasının konyuktiv (məntiq) bazisində spektr əmsallarını tapmalı $f(x_1,x_2)=\frac{1}{4}(8-4x_1-2x_1x_2+2x_1^2x_2)$ çoxhədli funksiyasının konyuktiv (hesabi) bazisdə spektr əmsallarını tapın.

II HİSSƏ. BUL FUNKSİYALARININ VƏ ÇOXQİYMƏTLİ MƏNTİQ FUNKSİYALARININ MİNİMALLAŞMASI

III FƏSİL. BUL FUNKSİYALARININ MİNİMALLAŞDIRILMASI

§ 3.1. Məsələnin şərhi

Mə'lum olduğu kimi, hər bir 0-dan fərqli Bul funksiyası özünün mükəmməl dizyunktiv normal forması şəklində göstərilə bilər.

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1}\ldots x_n^{\sigma_n}, \text{ harada ki,}$$

$$x^{\sigma}=\begin{cases} x, \ \sigma=1 & \text{olanda,} \\ \bar{x}, \ \sigma=0 & \text{olanda.} \end{cases}$$

Mükəmməl dizyunktiv normal formalar isə, adətən, sadələşdirilə bilir və nəticədə yenə də f funksiyasını realizə edən, ancaq az simvollardan təşkil olunmuş düstur alınır.

Misal 1. Tutaq ki, $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyası cədvəl 3.1 ilə verilmişdir.

CƏDVƏL 3.1

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1

$f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyası üçün mükəmməl dizyunktiv normal forma belə olar:

$$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3.$$

Eyni zamanda, həmin $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyası D_1 və ya D_2 düsturları ilə də verilə bilər:

$$D_1 = \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2,$$

$$D_2 = \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3.$$

İndi isə Bul funksiyalarının dizyunktiv normal forma siniflərində sadələşmiş düsturlarla təsvir edilməsi məsələsinə baxaq. Məsələni dəqiqləşdirmək üçün bə'zi anlayışlar verək.

Tə'rif 3.1. Əgər $K = x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \ldots x_{i_r}^{\sigma_{i_r}}$ şəklindəki məntiqi hasildə bütün x_{ij} dəyişənləri müxtəlifdirsə, onda ona *elementar konyuksiya deyilir.* r ədədinə isə K *konyuksiyasının ranqı* deyilir. $r = 0$ olduqda, konyuksiya boş konyuksiya adlanır və 1-ə bərabər edilir.

Tə'rif 3.2. Əgər $D=K_1\vee\ldots\vee K_m$ dizyunksiyası müxtəlif K_j elementar konyuksiyalarından təşkil olunarsa, ona dizyunktiv normal forma deyilir. m ədədinə *dizyunktiv normal formanın uzunluğu* deyilir. $m=0$ olduqda, d.n.f boş d.n.f adlanır və 0-a bərabər edilir.

Tə'rif 3.3. $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyasının minimal d.n.f-si elə d.n.f-yə deyilir ki, o $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyasını realizə etsin və onu realizə edən bütün digər dizyunktiv normal formalarla müqayisədə ən az sayda simvollardan təşkil edilmiş olsun.

Məsələn, cədvəl 3.1-dəki $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyasını realizə edən D_1 və D_2 dizyunktiv normal formaları verilən funksiya üçün minimaldır.

Tə'rif 3.4. $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyasının qısaldılmış d.n.f-si elə d.n.f-yə deyilir ki, o, $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyasını realizə etsin və həmin funksiyanı realizə edən bütün digər d.n.f-lərlə müqayisədə ən az elementar konyuksiyalardan təşkil edilmiş olsun. $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyasını (cədvəl 3.1) realizə edən D_1 və D_2 minimal d.n.f-ləri həm də qısaldılmışdır.

Bizim məqsədimiz Bul funksiyalarının minimal və ən qısa formalarını tapmağa imkan verən üsullarla tanış olmaqdır. İxtiyari $f(x_1,\ldots,x_n)$ məntiq funksiyasının minimal (ən qısa) d.n.f-ni tapmaq üçün aşağıdakı kimi trivial alqoritm vardır: $x_1,\ldots,x_n$, $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$ dəyişənlərindən təşkil olunmuş bütün dizyunktiv normal formalar onlarda iştirak edən hərflərin (konyuksiyaların) sayına görə nizamlanır və hər bir D d.n.f-si üçün sıra ilə $D=f(x_1,\ldots,x_n)$ münasibəti yoxlanılır.

Sıra qaydası ilə bu münasibəti ödəyən birinci d.n.f $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyası üçün minimal (ən qısa) d.n.f olur.

Dəyişənlərin sayını göstərən n ədədinin o qədər də böyük olmayan qiymətlərində bu deyilən üsulla külli miqdarda d.n.f-ləri seçmək lazım gəlir və ona görə də təcrübi baxımdan əlverişli deyil. Həmin üsulun çətinliyini xarakterizə etmək üçün mümkün d.n.f-lərin sayını göstərən aşağıdakı fakta baxaq:

Teorem 3.1. $x_1,\ldots,x_n$ dəyişənlərindən təşkil olunmuş müxtəlif dizyunktiv normal formaların sayı 2^{3^n} ədədinə bərabərdir.

İsbatı. n sayda olan dəyişənlərin hər biri (məs: x_i) elementar konyuksiyaya ya tamam daxil olmur, ya $\bar{x}_i$ şəklində, ya da x_i şəklində daxil olur. Beləliklə, $x_1,\ldots,x_n$ dəyişənlərindən təşkil olunmuş müxtəlif elementar konyuksiyaların ümumi sayı 3^n olur. Bu isə o deməkdir ki, $x_1,\ldots,x_n$ dəyişənlərindən təşkil olunmuş d.n.f-lərin sayı 3^n

sayda elementdən təşkil olunmuş çoxluğun alt çoxluqlarının sayına, yə'ni 2^{3^n} ədədinə bərabərdir.

Göründüyü kimi, ekstremal (minimal və ya ən qısa d.n.f) xassəyə malik olan d.n.f 2^{3^n} sayda olan obyektlərin (d.n.f-lərin) içərisindən seçilməlidir. Həmin ədəd müəyyən mə'nada deyilən alqoritmin çətinlik həcmini xarakterizə edir. Məsələn, yuxarıdakı misalda $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyasını realizə edən qısaldılmış d.n.f-ni tapmaq üçün bütün ≤ 3 konyuksiyalardan tərtib edilmiş bütün d.n.f-ləri yoxlamaq lazımdır. Trivial alqoritmdə belə yoxlamaların sayı 380 olur. Belə yoxlamaların sayı $x_1 + x_2 + x_3$ (mod 2) xətti funksiyası üçün 3305-dən az deyil. D. n. f-lərin minimal (ən qısa) formalarını tapmaq üçün müxtəlif alqoritmlər vardır.

Bu alqoritmlərin əksəriyyətində bütün mümkün elementar konyuksiyalar çoxluğundan, çətin olmayan müəyyən üsullarla elələrini kənar edirlər ki, onlar d.n.f.-lərin minimal (ən qısa) formasına daxil deyildirlər. Bu isə d.n.f-lər çoxluğunun gücünün azalmasına, deməli, axtarışın daha effektiv aparılmasına gətirib çıxarır. İkinci qrup üsullar həmin çoxluqdan seçmə prosesində daha qənaətcil şəkildə istifadə etmək qaydasına əsaslanır.

§ 3.2. Məsələnin həndəsi şəkildə qoyuluşu.

Əyanilik xatirinə biz tez-tez həndəsi modeldən istifadə edəcəyik. $\sigma_i \in E_2 = \{0,1\}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ koordinatlarından təşkil olunmuş bütün $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ nöqtələr çoxluğunu $E_2^n = \underbrace{E_2 x \ldots x E_2}_{n}$ ilə işarə edək. Başqa sözlə, E_2^n - n ölçülü vahid kubun təpələr çoxluğudur.

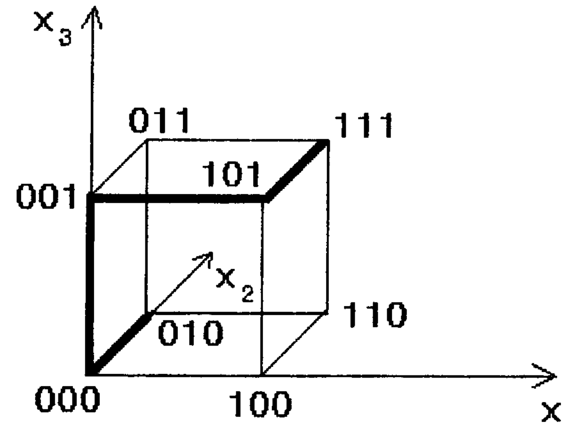
Tə'rif 3.5 Tutaq ki, $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r}$ $E_2 = \{0,1\}$ çoxluğuna daxil olan elə ədədlər sistemidir ki, onlar üçün $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n$

şərti ödənir. Onda E_2^n vahid kubunun $\sigma'_{i_1} = \sigma_{i_1}, \sigma'_{i_2} = \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma'_{i_r} = \sigma_{i_r}$ şərtlərini ödəyən bütün $(\sigma'_{i_1}, \sigma'_{i_2}, \ldots, \sigma'_{i_r})$ nöqtələr çoxluğu onun $(n-r)$ ölçülü üzünü təşkil edir. Aşkardır ki, $(n-r)$ ölçülü üz həm də E_2^n kubunun $(n-r)$ ölçülü alt kubudur.

Tutaq ki, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ixtiyari məntiq cəbri funksiyasıdır. Həmin funksiyaya E_2^n kubunun aşağıdakı qaydada tə'yin olunmuş alt çoxluğunu qarşı qoyaq:

$$N_f = \{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in E_2^n | f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1\}$$

Göründüyü kimi, $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in N_f$ olması üçün zəruri və kafi şərt $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$ olmasıdır. Deməli, f funksiyası ilə N_f çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli münasibət vardır: $f \rightleftarrows N_f$



Şəkil 3.1.

Cədvəl 3.1-dəki $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyası üçün $N_f = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$ altçoxluğu üç ölçülü vahid E_2^3 kubunun 5 təpəsində təşkil olunur (şəkil 3.1).

Bu münasibət qarşılıqlı birqiymətlidir və aşağıdakı xassələrə malikdir. Tutaq ki, $f_1(x_1,\dots,x_n)$ və $f_2(x_1,\dots,x_n)$ ixtiyari məntiq funksiyalarıdır. Onda

1) $\bar{f}_1$ funksiyasına $E_2^n \setminus N_{f_1}$ altçoxluğu uyğundur,
2) $f_1 \wedge f_2$ funksiyasına $N_{f_1} \cap N_{f_2}$ altçoxluğu uyğundur,
3) $f_1 \vee f_2$ funksiyasına $N_{f_1} \cup N_{f_2}$ altçoxluğu uyğundur,
4) Əgər $f_1 \le f_2$ olarsa, onda $N_{f_1} \subseteq N_{f_2}$ və əksinə.

Tə'rif 3.6. r-ranqlı K konyuksiyasına uyğun $N_k \subseteq E_2^n$ altçoxluğuna r-ranqlı interval deyilir. Hər bir $K = x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \dots x_{i_r}^{\sigma_{i_r}}$ konyuksiyasına E_2^n vahid kubunun elə təpələrindən düzəlmiş N_K intervalı uyğundur ki, həmin təpələrin koordinatları aşağıdakı şəkildə tə'yin edilir: $x_{i_1} = \sigma_{i_1},\dots,x_{i_r} = \sigma_{i_r}$, qalan koordinatlar isə ixtiyaridir.

Beləliklə, E_2^n kubunun hər bir təpəsi n-ranqlı, bütün təpələr çoxluğu isə 0 ranqlı intervaldır. r-ranqlı interval isə həndəsi olaraq E_2^n vahid kubunun elə təpələr alt çoxluğudur ki, onlar həmin kubun $(n-r)$ ölçülü üzlərini doldurmuş olsunlar. Məsələn, 3-ölçülü E_2^3 kubunda $\bar{x}_1\bar{x}_2$ konyuksiyasına $N_{\bar{x}_1\bar{x}_2} = \{(0,0,0),(0,0,1)\}$ tili uyğundur ki, o da ranqı 2-yə bərabər olan interval təşkil edir.

$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiyasının hər bir $K_1 V \dots V K_m$ d.n.f. üçün $N_f = \bigcup_{j=1}^{m} N_{K_j}$ münasibəti ödənilir. Buna görə də f funksiyasının hər bir d.n.f-si ilə N_f altçoxluğunun elə $N_{K_1},\dots,N_{K_m}$ intervalları örtüyü bağlıdır ki, bu zaman $N_{K_j} \subseteq N_f$ olur.

Bunun tərsi də doğrudur: N_f altçoxluğunun, onun daxilində yerləşən intervallarla örtüyünə müəyyən $f(x_1,\dots,x_n)$ funksiyasının d.n.f-si uyğundur. N_{K_j} intervalının ranqını r_j ilə işarə edək. Onda

$$r = \sum_{g=1}^{m} r_j$$

d.n.f-də olan hərflərin sayı üst-üstə düşər.

Beləliklə, minimal d.n.f-nin qurulması məsələsi N_f altçoxluğunun $N_{K_j} \subseteq N_f$ intervalları ilə elə örtüyünün tapılmasına gətirilir ki, bu zaman $r = \sum_{j=1}^{m} r_j$ ifadəsi minimum qiymət almış olsun. Göründüyü kimi, ən qısa d.n.f-yə uyğun örtüyün qurulması zamanı örtükdə iştirak edən intervalların sayını minimallaşdırmaq lazım gəlir.

§ 3.3. Mümkün konyuksiyalar

Əvvəlki paraqrafın nəticələrindən belə çıxır ki, $f(x_1,\dots,x_n)$ funksiyasının minimal (ən qısa) d.n.f-sini qurmaq üçün elə N_K intervallarına baxılması kifayətdir ki, bu zaman $N_K \subseteq N_f$, yə'ni $N_K \cap (E_2^n \setminus N_f) = \varnothing$ olsun. Belə intervallar və onlara uyğun konyuksiyalar mümkün konyuksiyalar adlanır.

Trivial alqoritmin (tam seçmənin) işinin effektivliyini artırmaq üçün aşağıdakı üsul mövcuddur.

Bütün mümkün K_j konyuksiyaları ayırd edilir və $\{K_j\}$ çoxluğuna trivial alqoritm tətbiq edilir. Bu sadə üsul trivial alqoritmin effektivliyini əhəmiyyətli dərəcədə artırır.

Bütün mümkün konyuksiyalar çoxluğu 3^n sayda konyuksiyaların, necə deyərlər, "artıqlarını" atdıqdan sonra alına bilər. Qeyd edək ki, $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ təpəsində vahid qiymət alan konyuksiyalar $x_1^{\sigma_1},\dots,x_n^{\sigma_n}$ hərflərinin bə'zilərindən düzəldilmiş hasildir. Elə buna görə də əgər $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)\in E_2^n\setminus N_f$, onda 3^n sayda konyuksiyalar sırasından $\{x_1^{\sigma_1},\dots,x_n^{\sigma_n}\}$ çoxluğuna daxil olan vuruqlardan təşkil olunmuş 2^n sayda konyuksiyaları uzaqlaşdırmaq lazımdır.

Cədvəl 3.1-dəki $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyasına baxaq. Bu halda $E_2^3\setminus N_f(x_1,x_2,x_3)$ çoxluğu 3 təpədən ibarətdir: (0,1,1), (1,0,0), (1,1,0).

Aşağıdakı kimi cədvəl 3.2-ni tərtib edək:

CƏDVƏL 3.2

$E_2^3\setminus N_f$ çoxluğunun nöqtələri	$E_2^3\setminus N_f$ çoxluğundan olan nöqtələrdə vahidə çevrilən konyuksiyalar
(0,1,1)	$1;\bar{x}_1,x_2,x_3;\bar{x}_1x_2,\bar{x}_1x_3,x_2x_3;\bar{x}_1x_2x_3$
(1,0,0)	$1;x_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3;x_1\bar{x}_2,x_1\bar{x}_3,\bar{x}_2x_3;x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
(1,1,0)	$1;x_1,x_2,\bar{x}_3;x_1x_2,x_1\bar{x}_3,x_2\bar{x}_3;x_1x_2\bar{x}_3$

x_1,x_2,x_3 dəyişənlərindən təşkil olunmuş 27 sayda konyuksiyaların təşkil etdiyi çoxluqdan cədvəl 3.2-dəki bütün konyuksiyaları uzaqlaşdırsaq, həmin çoxluqda aşağıdakı konyuksiyalar qalar:

$$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3,\bar{x}_1\bar{x}_2x_3,\bar{x}_1x_2\bar{x}_3,x_1\bar{x}_2x_3,x_1x_2x_3,\bar{x}_1\bar{x}_2,\bar{x}_1\bar{x}_3,x_1x_3,\bar{x}_2x_3$$

Bu konyuksiyalara trivial alqoritm tətbiq etsək, ən qısa d.n.f-nin qurulması zamanı lazım olan addımların sayı ≤ 130 olar.

§ 3.4. İxtisar olunmuş d.n.f-lər

Minimal d.n.f-lərin qurulması zamanı mümkün konyuksiyalar sırasından bə'zi elələrini atmaq olar ki, onların

verilmiş funksiyanın minimal d.n.f-lərindən heç birinə daxil olmadığı aşkar olsun.

Tə'rif 3.7. N_K intervalı f üçün o zaman maksimal adlanır ki, aşağıdakı şərtlər ödənmiş olsun:

a) $N_K\subseteq N_f$

b) elə bir $N_{K'}$ intervalı yoxdur ki, onun üçün $N_K\subset N_{K'}\subseteq N_f$ münasibəti ödənmiş olsun.

$N_K\subset N_{K'}$ münasibətinin yoxlanılması zamanı nəzərə alınmalıdır ki, həmin münasibət ancaq və ancaq

$$K\le K' \text{ və } K\ne K'$$

olduqda yerinə yetirilir və ya K' konyuksiyası K konyuksiyasından boş çoxluq təşkil etməyən sayda vuruqların cızlanması nəticəsində alınır.

Misal. Tutaq ki, $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiyası cədvəl 3.1-lə verilir. Onda

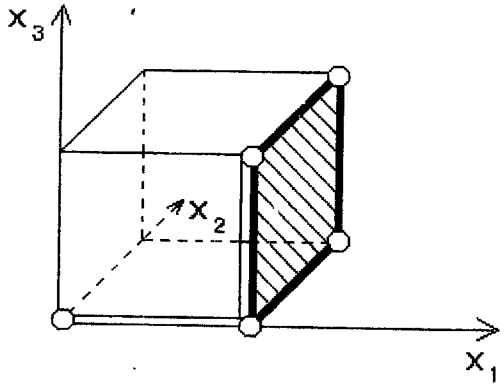
$K_1(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_2\wedge\bar{x}_3$
$K_2(x_1,x_2,x_3)=x_1\wedge\bar{x}_2$
$K_3(x_1,x_2,x_3)=x_1$

konyuksiyalarına

$N_{K_1}=\{(0,0,0),(1,0,0)\}$
$N_{K_2}=\{(1,0,0),(1,0,1)\}$
$N_{K_3}=\{(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

intervalları uyğundur.

Belə olduqda, N_{K_1} və N_{K_3} üzləri maksimaldır; N_{K_2} isə N_f üçün maksimal deyil, çünki $N_{K_2}\subset N_{K_3}$ və N_{K_3}-ün ölçüsü N_{K_2}-nin ölçüsündən çoxdur.



Şəkil 3.2.

Tə'rif 3.8. N_f çoxluğunun N_K maksimal üzünə uyğun K konyuksiyasına f funksiyasının sadə implikantı deyilir.

$N_K \subseteq N_{K'}$ şərti K'-in bütün vuruqlarının K-da yerləşməsi ilə ekvivalentdir. Buna görə də müəyyən mə'nada f-in K sadə implikantından heç bir vuruğu atmaq olmaz, əks halda elə K' konyuksiyası alarıq ki, onun üçün $N_{K'} \not\subseteq N_f$ olar.

Aşağıdakı fakt aşkardır:

Hər bir N_K üzü $(N_K \subseteq N_f)$ maksimal üzə qədər genişlənə bilər.

Tutaq ki, $N_{K_1^\circ}, \dots, N_{K_m^\circ}$ – N_f çoxluğunun bütün maksimal üzləridir. Onda

$$N_f = N_{K_1^\circ} \cup \dots \cup N_{K_m^\circ}$$

belə ki, $N_{K_i^\circ} \subseteq N_f$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ və N_f-in hər bir üzü hər hansı maksimal üzə daxildir. Axırıncı bərabərlik $f = K_1^\circ V K_2^\circ V \dots V K_m^\circ$ bərabərliyinə ekvivalentdir.

Tə'rif 3.9. f funksiyasının bütün sadə implikantlarının dizyunksiyasına bərabər olan d.n.f onun qısaldılmış d.n.f-si adlanır. Deməli,

$$D_c = K_1^\circ V \dots V K_m^\circ$$

Yuxarıdakı cədvəl 3.1-dəki $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyası üçün bütün maksimal üzlərdən təşkil olunmuş aşağıdakı örtük var:

$$N_f = N_{K_1} \cup N_{K_3}$$

Bu ayrılışa qısaldılmış $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \vee x_1$ d.n.f uyğundur.

Aşkardır ki, f funksiyasına görə qısaldılmış d.n.f birqiymətli tə'yin edilir. Belə d.n.f ümumiyyətlə nə minimal, nə də ki ən qısa d.n.f-dir. Məsələn, cədvəl 3.1-dəki $f(x_1, x_2, x_3)$ üçün qısaldılmış d.n.f $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3$, minimal d.n.f $\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2$ və $\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3$ şəklindədir.

Aşkardır ki, hər bir $N_K \subseteq N_f$ intervalı müəyyən $N_{K_j} \subseteq N_f$ maksimal intervalında saxlanılır. Buna görə də $\{N_{K_j}\}$, $j = 1, \dots, m$ kimi f üçün maksimal olan bütün intervallar hey'əti N_f altçoxluğu üçün örtük təşkil edir:

$$N_f = \bigcup_{j=1}^{m} N_{K_j}.$$

Tə'rif 3.10. $f(x_1, \dots, x_n)$ funksiyasını realizə edən və N_f altçoxluğunun f üçün maksimal olan bütün intervallarla örtüyünə uyğun $\bigvee_{j=1}^{m} K_j$ dizyunksiyasına f məntiq funksiyasının qısaldılmış d.n.f-si deyilir; f funksiyasına uyğun qısaldılmış d.n.f $D_s(f)$ ilə işarə edilir. İxtisar olunmuş d.n.f-nin başqa ekvivalent tə'rifini də vermək olar.

Minimal və qısaldılmış d.n.f-lər arasındakı münasibət aşağıdakı təkliflə tə'yin olunur.

Teorem 3.2. $f(x_1, \dots, x_n)$ funksiyasının minimal d.n.f-si onun qısaldılmış d.n.f-dən bə'zi elementar konyuksiyaların uzaqlaşdırılması nəticəsində alınır.

İsbatı. Əgər biz göstərsək ki, minimal d.n.f-yə uyğun N_f altçoxluğunun örtüyü ancaq maksimal intervallardan təşkil olunmuşdur, belə halda teorem isbat edilmiş olar. Bu isə aşkardır; belə ki, əgər örtük maksimal intervallardan təşkil olunmasaydı, onda onu həcmcə daha geniş olan intervalla əvəz etmək olardı. Nəticədə verilmiş örtüyün intervallar ranqının cəmi azalmış olardı ki, bu da d.n.f-nin minimallığı ilə ziddiyyət törədərdi.

Nəticə. Əgər K konyuksiyası f funksiyasının qısaldılmış d.n.f-nə daxil deyilsə, onda K həmin f-in heç bir minimal d.n.f-nə daxil ola bilməz.

Ən qısa d.n.f-lər üçün teorem 3.2-yə analoji fakt doğru deyil. Doğrudan da, $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ funksiyası üçün qısaldılmış d.n.f $x_1 \vee x_2$ və ən qısa d.n.f-lər isə $D_1 = x_1 \vee x_2$, $D_2 = x_1\bar{x}_2 \vee x_2$, $D_3 = x_1 \vee \bar{x}_1 x_2$ ifadələridir. D_2 və D_3 d.n.f-ləri qısaldılmış d.n.f-dən heç bir elementar konyuksiyanın atılması nəticəsində alına bilməz.

Ən qısa və qısaldılmış d.n.f-lər arasında münasibət aşağıdakı təkliflə yaradılır.

Teorem 3.3. Hər bir $f(x_1, \ldots, x_n)$ funksiyası üçün elə ən qısa d.n.f-lər var ki, o həmin funksiyanın ixtisar olunmuş d.n.f-dən bə'zi elementar konyuksiyaları atmaq hesabına alınır.

İsbatı. Tələb olunan ən qısa d.n.f-ni almaq üçün kifayətdir ki, $f(x_1, \ldots, x_n)$ funksiyasının ixtiyari qısaldılmış d.n.f-ni götürüb, ona uyğun örtükdə hər bir maksimal olmayan interval həcmcə geniş olan maksimal interval ilə əvəz edilsin. Yuxarıdakı teorem 3.2 və teorem 3.3-dən çıxır ki, minimal və ən qısa d.n.f-lərin qurulması prosesində bütün mümkün konyuksiyaların baxılmasına ehtiyac yoxdur. Bunun üçün ancaq qısaldılmış d.n.f-lərlə kifayətlənmək olar. Sonralar biz ancaq elə ən qısa d.n.f-lərə baxacağıq ki, onlar teorem 3.3-ün şərtlərini ödəmiş olsunlar.

Yuxarıdakı misalda göstərilmişdi ki, qısaldılmış d.n.f-nə minimal, nə də ən qısa şəkildə olmaya da bilər. Lakin elə Bul funksiyalar sinfi vardır ki, onlar üçün həmin anlayışlar üst-üstə düşür. Belə siniflərdən biri M-monoton Bul funksiyalar sinfidir.

§ 3.5. Monoton funksiya üçün müxtəsər d.n.f

Aşağıdakı teorem hər bir $f(x_1, \ldots, x_n) \in M$ funksiyası üçün müxtəsər d.n.f-nin onun yeganə minimal forması ilə üst-üstə düşdüyünü göstərir.

Teorem 3.4. Monoton $f(x_1, \ldots, x_n)$ funksiyasının müxtəsər d.n.f-sinə dəyişənlərin inkarı daxil deyildir və həmin forma funksiyanın yeganə minimal (ən qısa) d.n.f-sini təşkil edir.

İsbatı. Əvvəlcə teoremin 1-ci hissəsini isbat edək.

Tutaq ki, $N_K \subseteq N_f$, harada ki, $K = x_{i_1} \ldots x_{i_{r'}}, \bar{x}_{i_{r'+1}} \ldots \bar{x}_{i_r}$ və $r > r'$. Onda K konyuksiyası və onunla birlikdə f funksiyası E_2^n vahid kubunun $x_{i_1} = \ldots = x_{i_{r'}} = 1$, $x_{i_{r'+1}} = \ldots = x_{i_r} = 0$ şərtini ödəyən bütün təpələrində (yerdə qalan koordinatların qiyməti ixtiyaridir) vahid qiymət alır. Lakin belə olduqda, $f(x_1, \ldots, x_n) \in M$ funksiyası E_2^n kubunun $x_{i_1} = \ldots = x_{i_{r'}} = 1$ şərtini ödəyən bütün qalan təpələrində də vahid qiymət alar. Əgər $K' = x_{i_1} \ldots x_{i_{r'}}$ götürsək, alarıq:

$$N_K \subset N_{K'} \subseteq N_f$$

Beləliklə, əgər interval dəyişənlərin inkarını da özündə saxlayan konyuksiyaya uyğundursa, onda həmin interval f funksiyası üçün maksimal ola bilməz. Deməli, $f(x_1, \ldots, x_m) \in M$ funksiyasının müxtəsər şəkli dəyişənlərin inkarını özündə saxlaya bilməz.

İsbat edildiyinə görə, $f(x_1,\dots,x_m)\in M$ funksiyasının qısaldılmış d.n.f-sinə daxil olan istənilən konyuksiyası $K = x_{i_1}\dots x_{i_r}$ şəklindədir.

Göstərmək olar ki, K konyuksiyası f-in qısaldılmış d.n.f-sinə daxil olan və E_2^n kubunun $x_{i_1}=\dots=x_{i_r}=1$, $x_{i_{r+1}}=\dots=x_{i_n}=0$ təpəsində vahid qiymət alan yeganə konyuksiyadır.

Doğrudan da, əgər qısaldılmış d.n.f-nin ifadəsində həmin təpədə vahid qiymət alan başqa bir K' konyuksiyası varsa, onda həmin K' konyuksiyası nə $\bar{x}_{i_r},\dots,\bar{x}_{i_n}$, nə də $x_{i_{r+1}},\dots,x_{i_n}$ dəyişənlərini özündə saxlamazdı. Buna görə də K' konyuksiyasına ancaq $x_{i_1},\dots,x_{i_r}$ dəyişənləri (həm də hamısı yox) daxil olardı.
Onda $N_K \subset N_{K'} \subseteq N_f$.

Bu isə N_K intervalının maksimallıq şərti ilə ziddiyyət yaradardı. Beləliklə, istənilən N_K maksimal intervalı üçün E_2^n kubunun elə təpələri vardır ki, ancaq həmin maksimal interval vasitəsilə örtülür. Ona görə müxtəsər d.n.f-yə uyğun N_f altçoxluğunun örtüyündən heç bir intervalı atmaq olmaz.

Yuxarıdakı teorem 3.2 və 3.3-dən teorem 3.4-ün ikinci hissəsi alınır.

ÇALIŞMALAR

1. Verilmiş elementar konyuksiyalar çoxluğu K-dan $f(\tilde{x}^n)$ funksiyasının sadə implikantlarını ayırmalı:
a) $K=\{x_1,\bar{x}_3,x_1x_2,x_2\bar{x}_3\}, f(\tilde{x}^3)=(00101111)$;
b) $K=\{x_1\bar{x}_2,x_2x_3,x_1,x_1x_2x_3\}, f(\tilde{x}^3)=(01111110)$.
2. Bleyk metodunun köməyi ilə verilmiş D d.n.f-nin müxtəsər d.n.f-sini tapmalı:

a) $D=\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4$;
b) $D=x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3$;
v) $D=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee x_3x_4$.
3. Verilmiş $f(\tilde{x}^n)$ funksiyasının k.n.f-sına görə qısaldılmış d.n.f-ni tapmalı:
a) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\vee x_2)(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3)$;
b) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\vee x_2\vee\bar{x}_3)(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3)(\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)$;
v) $f(\tilde{x}^4)=(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)(\bar{x}_1\vee x_4)(x_2\vee x_3\vee\bar{x}_4)$.
4. Tutaq ki, $f(\tilde{x}^n)$ və $g(\tilde{y}^m)$ funksiyalarının ümumi dəyişənləri yoxdur. f funksiyasının sadə implikantı K, g funksiyasının sadə implikantı isə L-dir. $f\wedge g$ funksiyasının sadə implikantının $K\wedge L$ olduğunu göstərməli.
5. Müxtəsər d.n.f-lərdən nüvə implikantlarını ayırmalı:
a) $\bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_3x_4$;
b) $x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2x_4 \vee x_1x_4$.
6. Aşağıdakı funksiyaların dalan tipli d.n.f-sini tapmalı:
a) $f(\tilde{x}^3)=(01111110)$;
b) $f(\tilde{x}^4)=(1110011000010101)$.
7. Aşağıdakı d.n.f-lərin dalan, ən qısa və ya minimal d.n.f şəklində olduqlarını yoxlamalı:
a) $D=x_1x_2\vee\bar{x}_2$;
b) $D=\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$;
v) $D=x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_2x_3$.

IV FƏSİL. ÇOXQİYMƏTLİ MƏNTİQ FUNKSİYALARININ MİNİMALLAŞDIRILMASI

§ 4.1. Çoxqiymətli funksiyaların dizyunktiv normal forma sinfində minimallaşması

Bul cəbrində olduğu kimi, çoxqiymətli məntiq funksiyalarının minimallaşması, daha doğrusu bu funksiyaların verilən bazis sisteminə məxsus funksiyaların superpozisiyası şəklində daha sadə təsvir formalarının tapılması böyük əhəmiyyət kəsb edir.

Kanonik təsvirləri MDNF sinfinə daxil olan Rosser-Tyuket sisteminə daha ətraflı baxaq. Bunun üçün $a = k - 1$, $b = 0$. Əgər α yığımında $f_1(\vec{\alpha}) \geq f_2(\vec{\alpha})$ şərti ödənərsə, onda hesab edəcəyik ki, $f_1(\vec{x})$ funksiyası α yığımında $f_2(\vec{x})$ funksiyasını örtür. Əgər bütün yığımlarda $f_1(\vec{\alpha}) \geq f_2(\vec{\alpha})$ olarsa, onda $f_1(\vec{x})$ funksiyası $f_2(\vec{x})$ funksiyasını udur deyirlər [19].

Əgər $f_1(\vec{x})$ funksiyası $f_2(\vec{x}), f_3(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x})$ funksiyalarını udursa, onda o onların dizyunksiyalarını da udur. Bundan başqa, udma münasibəti tranzitivdir, daha doğrusu əgər $f_1(\vec{x})$ $f_2(\vec{x})$-i udursa, $f_2(\vec{x})$ isə $f_3(\vec{x})$-i udursa, onda $f_1(\vec{x})$ $f_3(\vec{x})$-i udur.

Verilən funksiyanı udan və heç olmazsa bir yığımda onu örtən $f(\vec{x})$ funksiyasını, Bul cəbrində qəbul edilmiş analoji anlayışlara uyğun olaraq, verilən funksiyanın implikantı adlandırırlar.

Sabitlərdən və öz aralarında cüt-cüt müxtəlif olan hərflərin (hərf dedikdə ixtiyari x dəyişənini, həmçinin $J_s(x)$ əməllərini başa düşürük) sonlu çoxluğundan ibarət ixtiyari konyuksiyanı elementar hasil adlandırırlar.

Elementar hasil - verilən funksiyanın implikantı - heç bir başqa hasil tərəfindən udulmayan, hansı ki, bu funksiyanın implikantıdır, verilən funksiyanın sadə implikantı adlanır.

Dizyunksiya işarələri ilə birləşən ixtiyari sonlu sayda elementar hasillər bu funksiyanın dizyunktiv normal forması adlanırlar (DNF).

Bütün sadə implikantların dizyunksiyasını müxtəsər DNF adlandırırlar.

Verilən çoxdəyişənli funksiyanın heç biri istisna olunmayan sadə implikantların dizyunksiyası şəklində təsviri dalanlı DNF adlanır.

(2.6.5) və (2.6.6)-nın əsasında alınan aşağıdakı eynilik münasibətlərinə baxaq:

$$PJ_0(x) \vee PJ_1(x) \vee \ldots \vee PJ_{k-1}(x) = P, \qquad (4.1.1)$$

$$1PJ_1(x) \vee 2PJ_2(x) \vee \ldots \vee (k-1)PJ_{k-1}(x) = Px, \qquad (4.1.2)$$

burada P - ixtiyari ifadədir.

(4.1.1) və (4.1.2) münasibətləri imkan verir ki, $f(\vec{x})$ funksiyasının ixtiyari dizyunktiv forması mükəmməl DNF şəklində göstərilsin.

Nümunəyə baxaq. $k = 4$ olduqda

$$f(x_1, x_2) = 2J_2(x_1) \vee 2J_2(x_2) \vee J_1(x_1)x_2 \vee x_1 \times$$

$$\times J_1(x_2) \vee 1J_3(x_1)J_0(x_2) \vee J_3(x_1)J_3(x_2)$$

şəklində verilən funksiyanın mükəmməl DNF-ni bərpa edək.

Bu ifadənin birinci və ikinci dizyunktiv hədlərinə (4.1.1)-i üçüncü və dördüncü hədlərinə (4.1.2)-ni tətbiq etsək, aşağıdakıları alarıq:

$$2J_2(x_1) = 2J_2(x_1)J_0(x_2) \vee 2J_2(x_1)J_1(x_2) \vee 2J_2(x_1) \times$$

$$\times J_2(x_2) \vee 2J_2(x_1)J_3(x_2),$$

$$2J_2(x_2) = 2J_0(x_1)J_2(x_2) \vee 2J_1(x_1)\times$$

$$\times J_2(x_2) \vee 2J_2(x_1)J_2(x_2) \vee 2J_3(x_1)J_2(x_2),$$

$$J_1(x_1)x_2 = 1J_1(x_1)J_1(x_2) \vee 2J_1(x_1)J_2(x_2) \vee J_1(x_1)J_3(x_2),$$

$$x_1J_1(x_2) = 1J_1(x_1)J_1(x_2) \vee 2J_2(x_1)J_1(x_2) \vee J_3(x_1)J_1(x_2).$$

Uyğun olaraq, baxılan funksiyanın mükəmməl DNF-si aşağıdakı şəkildə olar:

$$f(x_1,x_2) = 2J_2(x_1)J_0(x_2) \vee 2J_2(x_1)J_1(x_2) \vee 2J_2(x_1)J_2(x_2) \vee$$

$$\vee 2J_2(x_1)J_3(x_2) \vee 2J_0(x_1)J_2(x_2) \vee 2J_1(x_1)J_2(x_2) \vee 2J_3(x_1)\times$$

$$\times J_2(x_2) \vee 1J_1(x_1)J_1(x_2) \vee J_1(x_1)J_3(x_2) \vee J_3(x_1)J_1(x_2) \vee$$

$$\vee 1J_3(x_1)J_0(x_2) \vee J_3(x_1)J_3(x_2)$$

Sadə implikantların tapılması alqoritminə keçək. İxtiyari sadə implikant aRQ şəklində verilə bilər, burada a - sabit; $R = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_r}$, $Q = J_{a\ell_1}(x_{\ell_1}) \times J_{a\ell_2}(x_{\ell_2})\ldots J_{a\ell_q}(x_{\ell_q})$, $r+q \le n$ həmçinin, $i_s \ne \ell_s$, belə ki, əks halda uyğun x_{i_s} dəyişən kəmiyyəti sabitə çevrilir, misal üçün $x_3J_5(x_3) = 5J_5(x_3)$.

$$P_{\alpha_0}J_0(x) \vee P_{\alpha_1}J_1(x) \vee \ldots \vee P_{\alpha_{k-1}}J_{k-1}(x) \qquad (4.1.3)$$

ifadəsinə baxaq.

Bütün a_i-lər içərisindən ən kiçiyini - a_ℓ-i - seçirik və

$$P_{a_\ell}J_0(x) \vee P_{a_\ell}J_1(x) \vee \ldots \vee P_{a_\ell}J_{k-1}(x) \qquad (4.1.4)$$

yazırıq.

(4.1.4) ifadəsi (4.1.3) ifadəsi ilə udulur və (4.1.1) münasibətinə əsasən P_{a_ℓ}-lə bərabərdir. Ona görə də

$$P_{a_0}J_0(x) \vee P_{a_1}J_1(x) \vee \ldots \vee P_{a_{k-1}}J_{k-1}(x) =$$

$$= P_{a_0}J_0(x) \vee P_{a_1}J_1(x) \vee \ldots \vee P_{a_{k-1}}J_{k-1}(x) \vee P_{a_\ell} \qquad (4.1.5)$$

(4.1.2)-dən istifadə edərək, analoji qaydada alırıq:

$$Q_{a_1}J_1(x) \vee Q_{a_2}J_2(x) \vee \ldots \vee Q_{a_{k-1}}J_{k-1}(x) =$$

$$= Q_{a_1}J_1(x) \vee Q_{a_2}J_2(x) \vee \ldots \vee Q_{a_{k-1}}J_{k-1}(x) \vee Q_{a_\ell}(x), \qquad (4.1.6)$$

burada a_ℓ - a_i-lərdən ən kiçiyidir, hansı ki, özünün dizyunktiv həddinin J simvolunun yanındakı indeksdən kiçikdir.

(4.1.5) və (4.1.6) münasibətlərinə uyğun olaraq yerinə yetirilən əməlləri operatorlara və arqumentlərə [19] nəzərən bitişdirmə (yapışdırma) əməli adlandırırlar.

Nümunəyə baxaq. Mükəmməl DNF aşağıdakı kimi (k=4) verilən keçirmə (dəyişdirici) funksiyanın implikantlar çoxluğunu tə'yin edək:

$$f(x_1,x_2) = J_0(x_1)J_3(x_2) \vee 2J_1(x_1)J_0(x_2) \vee 1J_1(x_1)\times$$

$$\times J_1(x_2) \vee 1J_1(x_1)J_2(x_2) \vee 2J_1(x_1)J_3(x_2) \vee 1J_2(x_1)\times$$

$$\times J_1(x_2) \vee 2J_2(x_1)J_2(x_2) \vee 2J_2(x_1)J_3(x_2) \vee 1J_3(x_1)\times$$

$$\times J_1(x_2) \vee 2J_3(x_1)J_3(x_2)$$

Bu DNF-nin hədlərindən (4.1.5) və (4.1.6) münasibətlərini ödəyən bütün mümkün olan ifadələri yazaq:

$$F_1 = 2J_1(x_1)J_0(x_2) \vee 1J_1(x_1)J_1(x_2) \vee 1J_1(x_1) \times$$

$$\times J_2(x_2) \vee 2J_1(x_1)J_3(x_2),$$

$$F_2 = J_0(x_1)J_3(x_2) \vee 2J_1(x_1)J_3(x_2) \vee 2J_2(x_1) \times$$

$$\times J_3(x_2) \vee 2J_3(x_1)J_3(x_2),$$

$$F_3 = 1J_2(x_1)J_1(x_2) \vee 2J_2(x_1)J_2(x_2) \vee 2J_2(x_1)J_3(x_2),$$

$$F_4 = 1J_1(x_1)J_1(x_2) \vee 1J_2(x_2)J_1(x_2) \vee 1J_3(x_1)J_1(x_2).$$

F_1 üçün ifadədə $J_1(x_1)$ funksiyasını P kimi işarə etsək, aşağıdakını alarıq:

$$F_1 = P2J_0(x_2) \vee P1J_1(x_2) \vee P1J_2(x_2) \vee P2J_3(x_2).$$

Bu ifadənin axırıncı iki dizyunktiv həddində sabitlər $J_s(x_2)$ funksiyalarının yanındakı indekslərdən kiçikdirlər. Bu sabitlərdən ən kiçiyi vahiddir. Beləliklə, (4.1.5)-ə uyğun olaraq

$$F_1 = F_1 \vee P1 = F_1 \vee 1J_1(x_1)$$

yazmaq olar.

F_2,F_3 və F_4 üçün analoji olaraq alırıq:

$$F_2 = F_2 \vee 2J_3(x_2), \quad F_3 = F_3 \vee 2J_2(x_1)x_2, \quad F_4 = F_4 \vee 1x_1J_1(x_2).$$

Beləliklə, baxılan funksiyanın implikantları onun MDNF-nin hədlərindən və

$$1J_1(x_1),\ 2J_3(x_2),\ 2J_2(x_1)x_2,\ \ 1x_1J_1(x_2)\text{-dən}$$

ibarətdir.

Teorem 4.1. Operatorlara və arqumentlərə görə bitişdirmə (yapışdırma) əməlləri $f(\vec{x})$ çoxqiymətli funksiyasının bütün sadə implikantlarını tapmağa imkan verir, daha doğrusu bu funksiyanın müxtəsər DNF-ni almağa imkan verir.

İsbatı. $J_s(x)$-dən asılı olmayan implikant, $s = 1,2,\dots,k-1$ olduqda ancaq bir A qiymətini alır. $A \neq 0$ olduğundan $f(\vec{x})$ fuknksiyasının MDNF-ni təşkil edən elementar hasillər arasında (4.1.5) münasibətini ödəyən elementar hasillər də var. x_i arqumentinə və (4.1.6) münasibətinə nəzərən mülahizələr analoji olduğundan, alırıq ki, teorem isbat olundu.

Əgər mümkün olarsa, sonrakı sadələşmələr yeni alınmış implikantlarla analoji qaydada yerinə yetirilir. Bütün mümkün bitişdirmələri bir dəfə yerinə yetirmək zəruridir. Elementar hasillərin yalnız elələri bitişə bilərlər ki, o elementar hasillər, onların $J_s(x)$ funksiyaları ilə bitişdirilməsi nəticəsində alınmış olsunlar.

Sadə implikantların tapılması metodikasına baxaq.

MDNF tipli kanonik təsvir xarakterik olan, çoxqiymətli funksional tam sistemlər sinfi, Bul cəbrində olduğu kimi aşağıdakı qaydaya tabedir:

$$Px \vee P = P, \qquad (4.1.7)$$

belə ki, (2.6.4) və (2.6.7)-yə uyğun olaraq

$$Px \vee P = P(x \vee (k-1)) = P.$$

Deməli, hər hansı elementar hasilin ixtiyari məxsusi hissəsi onu udur.

Verilən hasildən bir və ya bir neçə vuruğu yox etməklə alınan hasilə məxsusi hissə deyilir. Misal üçün, $aJ_r(x_1)J_q(x_2)$ elementar hasili, $aJ_r(x_1)$, $aJ_q(x_2)$, $J_r(x_1)J_q(x_2)$, a, $J_r(x_1)$, $J_q(x_2)$ məxsusi hissələrə malikdir.

Göstərilən şərt, bir elementar hasilin digərini udması üçün kafi şərtdir, zəruri deyil. Həqiqətən, $5x$ elementar hasili $3J_5(x)$ elementar hasilini udur, ancaq onun məxsusi hissəsi deyil.

Teorem 4.2. P_1 elementar hasilinin P_2 elementar hasilini udması üçün zəruri və kafi şərt aşağıdakı şərtlərin ödənilməsidir:

1) $C_1 \geq C_2$; burada C_1 və C_2 - P_1 və P_2 elementar hasillərinin sabitləridir;

2) P_1 hasilinin tərkibinə daxil olan bütün $J_s(x)$ funksiyaları P_2-də də olmalıdırlar;

3) əgər P_1-in tərkibinə P_2-də olmayan x_i arqumenti daxildirsə, onda P_2-nin tərkibinə bu arqumentin $J_{s_i}(x_i)$, $s_i \geq C_2$ funksiyası daxil olmalıdır.

İsbatı. Birinci şərtin zəruriliyi aşkardır.

İkinci şərt də zəruridir, belə ki, P_1 elementar hasili $f(\vec{x})$ funksiyasını P_2-nin örtdüyü yığımlarda örtür. Deməli, əgər P_1 hər hansı $J_s(\vec{x})$ funksiyasından asılıdırsa, onda P_2 də ondan asılı olmalıdır.

Üçüncü şərtin zəruriliyi aşağıdakı mülahizələrdən alınır. Fərz edək ki, P_2 $J_{s_i}(\vec{x}_i)$ funksiyalarını özündə $f(\vec{x})$ funksiyasını P_1-in sıfra bərabər olduğu yığımlarda örtür. Bu isə mümkün deyil. Tutaq ki, $C_2 > s_i$. Onda P_2 C_2 qiymətini, $P_1 \leq s_i$ şərtini ödəyən yığımlarda ala bilər ki, bu da mümkün deyil.

Beləliklə, 1)-3) şərtlərinin zəruriliyi isbat olundu.

Bu şərtlərin kafiliyini isbat edək. Fərz edək ki, $C_1 = C_2$. P_1-i elə simvollara vuraq ki, P_1 və P_2 elementar hasilləri arasındakı fərq 3) bəndindəki şərtlərə çevrilsin. (4.1.7)-yə uyğun olaraq, P_1 elementar hasili, yeni alınmış P_1^* hasilini udacaq. P_1^* və P_2 ifadələri $P_1^* = C_1 P_{x_i}$ və $P_2 = C_2 P J_{s_i}(x_i)$ şəklində verilirlər. Aydındır ki, P_1^* $s_i \geq C_1$ şərtində P_2-ni udur.

İsbat olunan teoremdən alınır ki, ixtiyari elementar hasil ancaq o elementar hasilləri udur ki, onlar onun bitişdirilməsinin təşkil olunmasında iştirak etsinlər (əgər elementar hasillər - $f(\vec{x})$ funksiyasının implikantları olarsa.)

Göstərilən şərtlər sadə implikantları ayırmağa imkan verir. Minimal (dalanlı) DNF tapılmasının sonrakı prosesi k-dan asılı deyil və Bul cəbrində mə'lum olan yolla gedə bilər, belə ki, iki variant mümkündür: sadə implikant verilən hasili ya udur, ya udmur.

Nümunəyə baxaq. Bundan qabaqkı misalın funksiyası üçün bütün sadə implikantları tə'yin edək. Bunun üçün hər bir implikantın sağına bu implikantın udduğu bütün implikantları yazaq. Bundan başqa, udulan hər bir implikantdan sonra mö'tərizədə udulmanın baş vermə şərtini yazaq (D hərfi ilə udulmanın kafi şərtini işarə edək)

$$1J_1(x_1) - 1J_1(x_1)J_1(x_2),\ (D); \quad 1J_1(x_1)J_2(x_2), (D);$$

$$2J_3(x_2) - 2J_1(x_1)J_3(x_2),\ (D); \quad 2J_2(x_1)J_3(x_2),\ (D);$$

$$2J_3(x_2) - 2J_1(x_1)J_3(x_2), \quad (D); \quad 2J_2(x_1)J_3(x_2), \quad (D);$$

$$2J_3(x_1)J_3(x_2), \quad (D);$$

$$2J_2(x_1)x_2 - 1J_2(x_1)J_1(x_2), \quad (1,3); \quad 2J_2(x_1)J_2(x_2), \quad (1,3);$$

$$2J_2(x_1)J_3(x_2), \quad (1,3);$$

$$1x_1J_1(x_2) - 1J_1(x_1)J_1(x_2), \quad (1,3); \quad 1J_2(x_1), \quad (1,3);$$

$$1J_3(x_1)J_1(x_2), \quad (1,3).$$

Baxılan halda yoxlama ilə göstərmək olar ki, başqa udma əməlləri aparmaq olmaz.

Udulan implikantların göstərilən siyahısını funksiyanın MDNF ilə müqayisə edərək, əmin olmaq olar ki, udulmayan implikantlar yalnız $J_0(x_1)J_3(x_2)$ və $2J_1(x_1)J_0(x_2)$-dir. Beləliklə, baxılan funksiyanın sadə implikantları $1J_1(x_1), 2J_3(x_2), 2J_2(x_1)x_2, 1x_1J_1(x_2)$, $J_0(x_1)J_3(x_2), 2J_1(x_1)J_0(x_2)$-dən ibarətdir və onlar funksiyanın müxtəsər DNF-ni təşkil edirlər.

$$f(x_1, x_2) = 1J_1(x_1) \vee 2J_3(x_2) \vee 2J_2(x_1)x_2 \vee 1x_1J_1(x_2) \vee$$

$$\vee J_0(x_1)J_3(x_2) \vee 2J_1(x_1)J_0(x_2).$$

Bu funksiyanın minimal DNF-ni implikant matrisin köməyi ilə tapaq. Bu matris, sətirləri sadə implikantlardan, sütunları isə mükəmməl DNF-nin hədlərindən ibarət olan cədvəl kimi təsvir olunur. Yazılışı sadələşdirməkdən ötrü, hər bir sadə implikantı indeksi müxtəsər DNF-da onun tərtib nömrəsinə bərabər olan indeksli J hərfi ilə işarə edək (misal üçün, $J_4 = 1x_1J_1(x_2)$), mükəmməl DNF-nin hər bir həddini - yenə də indeksi onun tərtib nömrəsinə bərabər olan indeksi K ilə işarə edək (misal üçün, $K_5 = 2J_1(x_1)J_3(x_2)$).

Bu implikant matrisin sadə implikantlı sətirlərinin MDNF-nin hədlərini udan sütunlarla kəsişməsindən yaranan qəfəsləri (cəd. 4.1)çarpaz xətlərlə işarə edək.

CƏDVƏL 4.1

Sadə implikantlar	MDNF hədləri									
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}
J_1			x	x						
J_2					x			x		x
J_3						x	x	x		
J_4			x			x			x	
J_5	x									
J_6		x								

Bul cəbrində olduğu kimi, verilən funksiyanın minimal DNF tapmaq üçün implikant matrisinin bütün sütunlarını krestiklərlə birgə örtən sadə implikantların minimal sayını tapmaq kifayətdir. Cədvəl 4.1-dən görünür ki, bütün sadə implikantlar onun minimal formasına daxil olmalıdırlar, çünki yalnız bu halda implikant matrisinin sütunları krestiklərlə örtülürlər. Deməli, baxılan funksiyanın minimal DNF onun müxtəsər DNF ilə üst-üstə düşür.

§ 4.2. Çoxqiymətli funksiyanın minimal DNF-ni almaq üçün me'yarlar və üsullar

Minimal DNF seçilməsi me'yarlarına daha ətraflı baxaq. Mə'lum olduğu kimi, Bul cəbrində minimal DNF hərflərin minimal sayına görə, daha doğrusu, ikiyerli əməllərin miinimal sayına görə seçilir. MDNF tipli kanonik forma xarakterik olan ixtiyari çoxqiymətli tam sistemdə minimal DNF seçilməsi üçün aşağıdakı me'yarlardan istifadə etmək məqsədəuyğundur:

1) ikiyerli əməllərin minimal sayı;

2) $J_S(x)$ funksiyalarının minimal sayı;

3) superpozisiyaların minimal sayı.

Elə misal göstərmək olar ki, birinci yaxud ikinci me'yara görə seçilən minimal DNF, üçüncü me'yara görə minimal olmur. Eyni zamanda, praktik məqsədlər üçün ən uyğun olanı üçüncü me'yardır. Digər tərəfdən, $k^4 > 100$ olduqda (əgər k qeyd olunmursa, onda funksiyanın daha münasib xarakteristikası k^n olur, n yox) biryerli funksiyaların sayı ikiyerlilərin sayı ilə müqayisədə ümumi halda sayğısız kiçikdir.

Müxtəsər DNF-dan minimalın alınması zamanı, minimallıq me'yarının seçilməsi, seçilmə kəmiyyətinə əsaslı tə'sir göstərə bilər. Bu səpkidə birinci me'yar çox sadədir. Bundan başqa, birinci me'yardan praktikada ona görə istifadə olunmalıdır ki, adətən bir neçə $f(\tilde{x})$ funksiyasının reallaşması zərurəti yaranır və onların formalaşması zamanı eyni biryerli funksiyalardan istifadə oluna bilər. Ancaq qurma sxemlərinin bolluq (artıqlıq) bazislərində sintezi üçün bu yanaşma yaramır, çünki bu halda biryerli fuksiyaların sayı həddən çox ola bilər və onlara sayğısızlıq göstərmək olmaz.

Nümunəyə baxaq. Aşağıdakı kimi verilmiş $x_1 + x_2(\mathrm{mod}3)$ funksiyasının minimal formasını tapmaq tələb olunur.

$$x_1 + x_2(\mathrm{mod}3) = J_0(x_1)x_2 \vee 1J_1(x_1)J_0(x_2) \vee$$

$$\vee J_1(x_1)J_1(x_2) \vee J_2(x_1)J_0(x_2) \vee 1J_2(x_1)J_2(x_2).$$

Birinci dizyunktiv həddə (4.1.2) münasibətini tətbiq edərək bu funksiyanın MDNF bərpa edək

$$x_1 + x_2(\mathrm{mod}3) = 1J_0(x_1)J_1(x_2) \vee J_0(x_1)J_2(x_2) \vee$$

$$\vee 1J_1(x_1)J_0(x_2) \vee J_1(x_1)J_1(x_2) \vee J_2(x_1)J_0(x_2) \vee 1J_2(x_1)J_2(x_2).$$

Bu MDNF-nin hədlərindən (4.1.5) və (4.1.6) munasibətlərini ödəyən bütün mümkün ifadələri yaradaq

$$1J_0(x_1)J_1(x_2) \vee J_0(x_1)J_2(x_2) = 1J_0(x_1)J_1(x_2) \vee$$

$$\vee J_0(x_1)J_2(x_2) \vee J_0(x_1)x_2,$$

$$1J_1(x_1)J_0(x_2) \vee J_2(x_1)J_0(x_2) = 1J_1(x_1)J_0(x_2) \vee$$

$$\vee J_2(x_2)J_0(x_2) \vee x_1J_0(x_2).$$

Beləliklə, $x_1 + x_2(\mathrm{mod}3)$ funksiyasının implikantları onun MDNF-in hədlərindən və $J_0(x_1)x_2$ və $x_1J_0(x_2)$ elementar hasillərindən ibarətdir. § 4.1-də göstərilən şərtlərə uyğun olaraq, bütün mümkün olan udma əməllərini yerinə yetirib, bu funksiyanın müxtəsər DNF alırıq:

$$x_1 + x_2(\mathrm{mod}3) = J_0(x_1)x_2 \vee x_1 J_0(x_2) \vee J_1(x_1) \times$$

$$\times J_1(x_2) \vee 1 J_2(x_1) J_2(x_2).$$

Əvvəldə olduğu kimi, hər bir implikantı J hərfi, MDNF hər bir həddini K hərfi ilə işarə edək. J və K-nın indeksləri, müxtəsər və mükəmməl DNF-da onların tərtib nömrələrini göstərir. $x_1 + x_2(\mathrm{mod}3)$ funksiyası üçün implikant matrisini (cəd. 4.2) qurub, əmin oluruq ki, onun minimal DNF müxtəsər DNF ilə üst-üstə düşür.

CƏDVƏL 4.2

Sadə implikantlar	MDNF hədləri					
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
J_1	x	x				
J_2			x		x	
J_3				x		
J_4						x

Asanlıqla göstərmək olar ki, $x_1 + x_2(\mathrm{mod}3)$ funksiyasının tapılan minimal forması əvvəldə göstərilən bütün me'yarlara görə minimaldır. Təsvir olunmuş metodika, elementar hasillərin sayının çox olduğu halda böyük hesablamalarla bağlıdır. Karno metoduna analoji olan, daha inandırıcı (aşkar) olan başqa üsula baxaq. Funksiyanı, sətirləri və sütunları $J_{s_i}(x_i)$ funksiyaları ilə işarələnən cədvəl şəklində yazırlar. Sonra, funksiyanın (k-1)-ə bərabər olduğu yığımlarda onu örtən, birsimvollu (sabitlər, x_i dəyişənləri, $J_{s_i}(x_i)$ funksiyaları), ikisimvollu ($ax_i, aJ_{s_i}(x_i), x_r J_{s_i}(x_i), J_{s_r}(x_r) J_{s_i}(x_i)$) və s. sadə implikantları tapırlar. Bunun üçün, bu implikantın

örtdüyü başqa yığımları da qeyd edirlər. Sonra funksiyanın qiymətinin (k-2)-yə və s. bərabər olduğu örtülməmiş yığımları örtən sadə implikantları tapırlar və bunu o vaxta qədər davam etdirirlər ki, funksiya bütün yığımlarda örtülmüş olsun.

Tutaq ki, funksiya iki dəyişəndən asılıdır. Bu halda cədvəlin hər bir rəqəmi funksiyanın (α_i, α_j) yığımındakı qiymətinə, daha doğrusu $J_{\alpha_i}(x_1) J_{\alpha_j}(x_2)$ hasilinə uyğun gəlir. $J_{\alpha_r}(x_r)$ implikantı α_r sütununa (sətrinə) uyğun gəlir. Əgər $n \geq 3$ olarsa, uyğun yığımların tə'yini üçün hər hansı vərdiş zəruridir.

Nümunəyə baxaq. Tutaq ki, k=4 üçün $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyası cədvəl 4.3-lə verilmişdir.

CƏDVƏL 4.3

x_2

	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
1	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	2	0
3	3	3	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0				1				2				3			

x_3

(3,0,0),(3,1,0),(3,2,0),(3,3,0) yığımlarında funksiya 3-ə bərabərdir. Aşkardır ki, funksiyanı bu yığımlarda birsimvollu implikantlar vasitəsilə örtmək olmaz. İkisimvollu implikantlara baxaq. $x_1 J_0(x_3)$ implikantı funksiyanı birinci dörd yığımda örtür. Bundan başqa, bu implikant

(2,0,0),(2,1,0),(2,2,0),2,3,0) yığımlarında funksiyanın 2 qiymətini örtür.

Cədvəl 4.3-də funksiyanın örtülən qiymətlərini qeyd edib, funksiyanın qiymətinin 2-yə bərabər olduğu yığımlara keçirik. $2J_1(x_1)J_0(x_3)$ implikantı funksiyanın 2 qiymətini (1,0,0), (1,1,0), (1,2,0) və (1,3,0) yığımlarında örtür. (2,2,2) və (2,2,3) yığımlarında isə funksiyanı $2\cdot J_2(x_1)J_2(x_2)x_3$ implikantı örtür. Bu implikant funksiyanın 1 qiymətini (2,2,1) yığımında örtür. Funksiyanın 1 qiyməti (0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),(0,1,3) yığımlarında həm də $1J_0(x_1)J_1(x_2)$ implikantı tərəfindən örtülür. Beləliklə cədvəl 4.3-lə verilən funksiyanın minimal DNF-si aşağıdakı kimi olur:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1J_0(x_3)\vee 2J_1(x_1)J_0(x_3)\vee 2J_2(x_1)J_2(x_2)x_3\vee$$

$$\vee 1J_0(x_1)J_1(x_2).$$

§ 4.3. Çoxqiymətli funksiyanın DNF-sının artıqlıq bazislərində minimallaşması

İnformasiyanın verilməsinin müəyyən prinsipləri sayəsində kifayət qədər sadə fiziki sxemlərin vasitəsilə çoxlu sayda çoxqiymətli məntiqi əməlləri reallaşdırmaq olar. Buna görə, çoxqiymətli funksiyaların kanonik təsvirinin alınması imkanlarının tədqiqi və onların belə əməlləri özündə saxlayan artıqlıq bazis sistemlərində minimallaşması böyük əhəmiyyət kəsb edir. Digər tərəfdən, artıqlıq bazis sistemlərinin tədqiqi DNF sinfindən olan, artıqlıq olmayan sistemlərdə pis minimallaşan funksiyaların varlığı ilə şərtləndirilir.

Tam sistemin tərkibinə yeni əməllərin daxil edilməsi bitişdirmənin əlavə münasibətlərini almağa imkan verir.

Bunun nəticəsində alınan sadə implikantlar verilən funksiyanın daha sadə təsvirinin tapılmasına imkan verir və deməli, onun daha sadə reallaşması imkanı yaranır.

Bütün sabitləri və aşağıdakı əməlləri özündə əks etdirən artıqlıq bazis sisteminə baxaq:

$$x_1\vee x_2=\max(x_1,x_2),$$

$$x_1x_2=\min(x_1,x_2),$$

$$x^i=x+i(\mathrm{mod}\,k),$$

$$\tilde{x}=k-1-x(\mathrm{mod}k),$$

$$J(x_1,x_2)=\begin{cases}k-1 & x_1=x_2\\ 0 & x_1\neq x_2\end{cases}\quad \text{olarsa.}$$

Qeyd edək ki, $x_1=s$ olduqda $J(x_1,x_2)$ funksiyası $J_s(x)$ funksiyasına çevrilir. Göstərilən əməllər sistemi özündə Rosser-Tyuket (həmçinin Post sistemini) tam sistemini əks etdirir. Deməli, sistemin özü tamdır.

Biryerli $J_s(x)$, $x^i,(\tilde{x})^i$ və ikiyerli $J(x_1^i,x_2)$, $J((\tilde{x}_1)^i,x_2)$ əməlləri yığımını D yığımı, göstərilən əməlləri isə D yığımından olan simvollar adlandıraq. D yığımından olan, sonlu sayda simvolların konyuksiya işarəsi ilə birləşməsini hasil adlandıraq.

D yığımından olan sonlu sayda cüt-cüt müxtəlif simvolların və sabitlərin hasili elementar hasil adlanır, həm də nəzərə almaq lazımdır ki,

1) hasilin bütün hədləri arasında D yığımından olan arqument üzərində biryerli əməllərin yalnız hər hansı bir simvolu iştirak edə bilər;

2) əgər hasildə $J((x_1)^i, x_2)$ və ya $J((\tilde{x}_1)^i, x_2)$ simvolu varsa, onda elementar hasildə x_1 və x_2 arqumentləri üzərində əməllərin simvolları arasında $x_l^i, (\tilde{x}_l)^i, l = 1,2$ 4 simvoldan yalnız biri ola bilər.

Aydındır ki, bu halda implikantların və sadə implikantların tə'yin olunması, onların udulması və örtülməsi dəyişməz qalır.

Aşağıdakı eynilik münasibətlərinin doğruluğunu asanlıqla yoxlamaq olar:

$$(k-1)J_0(x) \vee (k-2)J_1(x) \vee \ldots \vee 1J_{k-2}(x) = \tilde{x}$$

$$J_s(x) = J_{s+i}(x^i)$$

$$J_s(x) = J_{\tilde{s}}(\tilde{x})$$

Baxılan sistemdə operatorlara və arqumentlərə nəzərən bitişdirmə əməlindən başqa, (4.1.5) və (4.1.6) münasibətlərinə uyğun olaraq, aşağıdakı münasibətlərə əsasən, həmçinin, bitişdirmə əməlləri də doğrudur [20]:

$$P\bigvee_{\substack{i=0\\a_l=0}}^{k-1} a_i \cdot J_i(x) = P\bigvee_{\substack{i=0\\a_l=0}}^{k-1} a_i \cdot J_i(x) \vee P_{a_q} x^{k-l} \vee P_{a_s}(\tilde{x})^{l+1}, \qquad (4.3.1)$$

$$P\bigvee_{i=0}^{k-1} a_i J_i(x_1) J_{i+m}(x_2) =$$

$$= P\bigvee_{i=0}^{k-1} a_i \cdot J_i(x_1) J_{i+m}(x_2) \vee P_{a_p} J(x_1^m, x_2), \qquad (4.3.2)$$

$$P\bigvee_{\substack{i=0\\a_l=0}}^{k-1} a_i \cdot J_i(x_1) J_{i+m}(x_2) = P\bigvee_{\substack{i=0\\a_l=0}}^{k-1} a_i \cdot J_i(x_1) J_{i+m}(x_2) \vee$$

$$\vee Pa_q J(x_1^m, x_2) x_2^{k-m-\ell} \vee Pa_s J(x_1^m, x_2) x_1^{k-\ell} \vee$$

$$\vee Pa_s J(x_1^m, x_2)(\tilde{x}_2)^{m+l+1} \vee Pa_s J(x_1^m, x_2)(\tilde{x}_1)^{l+1}, \qquad (4.3.3)$$

$$P\bigvee_{i=0}^{k-1} a_i \cdot J_i(x_1) J_{m-i}(x_2) = P\bigvee_{i=0}^{k-1} a_i \cdot J_i(x_1) J_{m-i}(x_2) \vee$$

$$\vee Pa_p J((\tilde{x}_1)^{m+1}, x_2), \qquad (4.3.4)$$

$$P\bigvee_{\substack{i=0\\a_l=0}}^{k-1} a_i J_i(x_1) J_{m-i}(x_2) = P\bigvee_{\substack{i=0\\a_l=0}}^{k-1} a_i J_i(x_1) J_{m-i}(x_2) \vee$$

$$\vee Pa_q J((\tilde{x}_1)^{m+l}, x_2) x_1^{k-l} \vee Pa_q J((\tilde{x}_1)^{m+1}, x_2)(\tilde{x}_2)^{m-l-1} \vee$$

$$\vee Pa_s J((\tilde{x}_1)^{m+1}, x_2)(\tilde{x}_1)^{l+1} \vee Pa_s J((\tilde{x}_1)^{m+1}, x_2) x_2^{k-m+l}, \qquad (4.3.5)$$

burada

$$a_q = \min(a_i < i - l(\text{mod}k)); a_s = \min(a_i < \ell - i(\text{mod}k)),$$

$$a_p = \min\ a_i; \qquad i = 0,1,\ldots,k-1.$$

(4.1.5),(4.1.6),(4.3.1),(4.3.5)-ə uyğun olaraq, bütün mümkün olan bitişdirmə əməllərini yerinə yetirib, bütün sadə implikantları almaq olar.

Bu müddəa aşkardır, çünki ixtiyari sadə implikant elementar hasil kimi, özündə vuruq sifətilə yalnız göstərilən münasibətlərin köməyi ilə alınan, D yığımından olan simvolları saxlaya bilər. Ancaq böyük k və n üçün minimal DNF seçmək çox çətindir, çünki çoxlu sayda sadə implikantların seçilməsi zəruridir.

Bir elementar hasilin digərini udma qaydası aydındır və demək olar ki, §4.1-də yazılanları təkrar edir. P_1 elementar hasilinin P_2 elementar hasilini udması üçün aşağıdakı şərtlərin ödənməsi zəruri və kafidir:

1) $C_1 \ge C_2$, harada ki, C_1 və C_2 - P_1 və P_2 elementar hasillərinin sabitləridir;

2) P_1-ə daxil olan bütün $J_S(x)$ funksiyaları P_2-də yerləşirlər;

3) P_1 P_2-yə daxil olmayan x^l, yaxud $(\tilde{x})^h$ ifadələrini özündə əks etdirir, P_2-yə isə $J_S(x)$ funksiyası daxil olur, harada ki, $s+\ell \ge C_2$ birinci və $h-s-1 \ge C_2$ ikinci halda;

4) P_1-ə $J(x_1^r, x_2)$ yaxud $J((\tilde{x}_1)^q, x_2)$ funksiyası daxil olur, hansı ki, P_2-yə daxil olmur, P_2-yə isə $J_i(x_1)\cdot J_m(x_2)$ hasili, harada ki, m-i=r birinci halda və i+m+1=q - ikinci halda daxil olur.

Nümunəyə baxaq. $x_1+x_2(\mathrm{mod}10)$ funksiyası üçün minimal DNF tapaq. Əgər §4.2-nin birinci me'yarından istifadə etsək, onda aşağıdakı ifadə minimal olacaq.

$$x_1+x_2(\mathrm{mod}\ 10)=J_0(x_1)x_2VJ_1(x_1)x_2^1V\ldots VJ_9(x_1)x_2^9.$$

Üçüncü me'yara görə minimal DNF

$$x_1+x_2(\mathrm{mod}\ 10)=1J((\tilde{x}_1)^2,x_2)\vee 2J((\tilde{x}_1)^3,x_2)\vee\ldots$$

$$\vee 8J((\tilde{x}_1)^9,x_2)\vee J(\tilde{x}_1,x_2)$$

kimi olacaq.

Beləliklə, artıqlıq bazis sistemindən istifadə olunması minimallaşma alqoritminin mürəkkəbləşməsinə və minimal DNF alınması zamanı sadə implikantların sayının artması ilə əlaqədar olaraq, seçmənin artmasına (böyüməsinə) gətirib çıxarır. Bununla yanaşı, (4.3.1)-(4.3.5) münasibətlərinin qurulması zamanı, hətta biryerli funksiyalar arasında mümkün superpozisiyaların heç də hamısı nəzərə alınmayıb [20]. Buna görə də, minimallaşma alqoritminin hər hansı sadələşməsi üçün elementar hasilin tə'rifinə məhdudiyyət daxil edilir. Əlavə çətinliklər, həmçinin sadə implikantların və onların örtdüyü elementar hasillərin reallaşmalarının mürəkkəbliyinin müqayisə olunması zəruriliyindən yaranır.

Bütün bunlar, çoxqiymətli funksiyanın artıqlıq sistemlərində minimallaşmasını çox çətinləşdirir. Qeyd edək ki, Bul cəbrində də belə çətinliklər yaranır, ancaq orada onlar ikiyerli əməllərin hesabına bazisin genişlənməsi ilə əlaqədardır, belə ki, bütün biryerli funksiyalar həmişə bazis sisteminə daxil olurlar.

§4.4.Bütün biryerli əməllərə malik sistemdə çoxqiymətli funksiyaların minimallaşması.

MDNF tipli kanonik təsvir xarakterik olan, bütün birdəyişənli k-qiymətli funksiyaların daxil olduğu artıqlıq bazis sisteminə baxaq.

Bu halda ixtiyari biryerli funksiya üçün bitişdirmə münasibətlərini onun MDNF-dan alırlar.

Misal üçün, $\tilde{x}=k-1-x(\mathrm{mod}k)$ funksiyasının MDNF

$$\tilde{x}=\bigvee_{i=0}^{k-1}(k-1-i)J_i(x),$$

həmin funksiya üçün bitişdirmə münasibətləri isə

$$P\bigvee_{i=0}^{k-1}(k-1-i)J_i(x) = P\widetilde{x}$$

şəklində olur.

Baxılan sistemdə belə münasibətlər k^k sayda olacaq və onların hər birindən asanlıqla istifadə etmək olar. Sadə implikantların axtarılması alqoritmi çox sadədir, minimal DNF tapılması zamanı seçmə demək olar ki, yox olur (n=2,3).

Bütün biryerli funksiyaların bazis sisteminə daxil edilməsi zamanı minimallaşma alqoritmi nisbətən sadələşir və bunu aşağıdakı sadə misal təsdiq edir.

Tutaq ki, iki dəyişəndən asılı olan, doğruluq cədvəli ilə verilən k-qiymətli funksiya var. İxtiyari sütunun (sətrin) bütün yerlərinə uyğun olan hasillər üzərində bitişdirmə əməllərini yerinə yetirərək, bir sadə implikant alırıq.

Əgər funksiyalar sisteminə (misal üçün Rosser-Tyuket) ancaq biryerli $x^i = x + i(\mathrm{mod}\ k), i = 1,2,\dots,k-1$ funksiyalarını daxil etsək, onda belə əməllərin nəticəsində k+1 sadə implikant alınır [20]. Aşkardır ki, verilən funksiyanın minimal DNF tapmaq üçün seçim birinci halda kifayət qədər azdır.

Bitişdirilən hasilləri qruplaşdırıb, k^k sayda bitişdirmə münasibətlərindən lazım olanını asanlıqla seçmək olar.

Misal üçün, tutaq ki, 4.4 cədvəli ilə verilən funksiya üçün $x_1 = 2$ sətrinə uyğun olan hasillər üzərində bitişdirmə əməli yerinə yetirilir.

$$3J_2(x_1)J_0(x_2)\vee 2J_2(x_1)J_1(x_2)\vee 1J_2(x_1)J_2(x_2)\vee 2J_2(x_1)J_3(x_2)$$

$x_1 \backslash x_2$	0	1	2	3
0	1	0	1	0
1	2	3	0	1
2	3	2	1	2
3	0	1	3	1

Cəd. 4.4

$J_2(x_1)$ funksiyalarını mö'tərizə xaricinə çıxarıb, mötərizə daxilində hər hansı biryerli funksiyanın MDNF, daha doğrusu k^k bitişdirmə münasibətlərindən birini alırıq. Verilən halda

$$P(3J_0(x_2)V2J_1(x_2)V1J_2(x_2)V2J_3(x_2)) = Pf(x_2),$$

harada ki, $P = J_2(x_1)$, $f(x_2)$ isə $x_1 = 2$ sətri ilə tə'yin olunan biryerli funksiyadır. n=2,3 olduqda minimal DNF k=2 halında olduğu kimi, bilavasitə doğruluq matrisindən yazırlar. Baxılan minimallaşma üsulu § 2.6.2-də təsvir olunmuş əməllər sistemində də doğrudur. (2.6.26) ixtiyari çoxqiymətli funksiyanın kanonik formada təsvirinə, burada

$$\bigvee_{i=0}^{k-1} P^{(xi)^R} = P^R$$

bitişdirmə münasibəti uyğun gəlir.

İxtiyari biryerli funksiya üçün bitişdirmə münasibətini onun kanonik formasından alırlar. Misal üçün, $\tilde{x}$ funksiyası üçün o, aşağıdakı kimi verilir:

$$\bigvee_{i=0}^{k-1} P^{(xi)^{R^{k-1-i}}} = P^{R^{\tilde{x}}},$$

harada ki, $P, R \in M_k, M_k$ isə E_k çoxluğunun bütün alt çoxluqlarının çoxluğudur.

§ 4.5. Çoxqiymətli funksiyaların başqa tam sistemlərdə minimallaşması.

Çoxqiymətli funksiyaların bir çox tam əməllər sistemində minimallaşması, (4.1.5), (4.1.6) bitişdirmə və (4.1.7) udma münasibətlərinə oxşar olan münasibətlərin istifadə olunmasına əsaslanır.

Misal üçün, nəzəri-çoxluq əməllər sistemində (§2.6.2) bitişdirmə münasibətləri aşağıdakı şəkildə olur.

$$\bigvee_{i=0}^{k-1} P(ix)^a = \bigvee_{i=0}^{k-1} P(ix)^a \vee Pa, \qquad (4.5.1)$$

$$P(ix)^i = P(ix)^i \vee Pix, \qquad (4.5.2)$$

$$\bigvee_{i=0}^{k-1} Pix = \bigvee_{i=0}^{k-1} Pix \vee Px \qquad (4.5.3)$$

harada ki, R-elementar hasildir, $i, a \in E_k$

Bitişdirmə münasibətlərinin belə oxşarlığı onunla izah olunur ki, tam sistemin tərkibinə daxil olan ikiyerli əməllər, adətən, distributivlik, assosiativlik və komutativlik xassələri-

nə malikdirlər. Belə sistemlərdən hər biri üçün elementar hasillərin, implikant və sadə implikantların analoqları tə'yin oluna bilər. Bütün sadə implikantlardan keçirmə funksiyalarının minimal formasının yaradılması, qeyd olunduğu kimi K-dan asılı deyil və onu ixtiyari mə'lum olan üsullarla yerinə yetirmək olar, misal üçün implikant matrislərinin köməyi ilə.

Artıqlıqlığın funksional tam sistemlərə daxil edilməsi bitişdirmə münasibətlərinin sayının artmasına gətirib çıxarır və bunun nəticəsində minimallaşmanın əlavə imkanları yaranır. Bununla yanaşı, minimallaşma alqoritminin mürəkkəbləşməsi baş verir. Misal üçün, nəzəri çoxluq əməlləri sisteminə X^Y funksiyasının daxil edilməsi aşağıdakı münasibəti verir:

$$\bigvee_{i=0}^{k-1} PP_1^iP_2^i\ldots P_m^i(x) = \bigvee_{i=0}^{k-1} PP_1^iP_2^i\ldots P_m^i(x) \vee PP_1^xP_2^x\ldots P_m^x,$$

harada ki, $P_j = \alpha_j x_{r_j}$; $1 \le r_j \le n$; $j = 1,2,\ldots,m$; $0 \le m \le n$

Bu sistemə $\varphi(x)$ funksiyasının daxil edilməsilə, yuxarıda təsvir olunan münasibətlərə

$$\bigvee_{i=0}^{k-1} PP_1^{\varphi(i)}\ldots P_m^{\varphi(i)}(ix)^{\varphi(i)} = \bigvee_{i=0}^{k-1} PP_1^{\varphi(i)}\ldots P_m^{\varphi(i)}(ix)^{\varphi(i)} \vee$$

$$\vee PP_1^{\varphi(x)}\ldots P_m^{\varphi(x)}$$

yaxud m=0 olduqda

$$\bigvee_{i=0}^{k-1} P(ix)^{\varphi(i)} = \bigvee_{i=0}^{k-1} P(ix)^{\varphi(i)} \vee P\varphi(x),$$

münasibətləri əlavə olunur.

[16]-da ikiyerli $\min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)$ əməllərini və biryerli $f_1(x) = -x$, $f_2(x,s) = J_s(x)$ əməllərini özündə əks etdirən sistemdə minimallaşmanın mümkünlüyü müzakirə olunur.

Bunun üçün, arqumentlər və funksiyalar $E_3 = \{-1,0,1\}$ çoxluğundan qiymətlər alırlar. Hər bir n üçlü dəyişəninə n ölçülü fəzanın n oxlarından biri, arqumentlərin qiymətinin hər bir yığımına isə, n ölçülü şəbəkənin (n ölçülü hiperkub) kəsişmə nöqtəsi uyğun gəlir.

n-ölçülü hiperkubun bütün kəsişmə nöqtələri çoxluğu üç kəsişməyən altçoxluğa ayrılır: funksiyanın 0 qiymət aldığı N yığımları altçoxluğu; 1 qiyməti aldığı T yığımları altçoxluğu: -1 qiymətli F altçoxluğu. Minimallaşma bu halda N,T və F altçoxluqlarının elementlərinin maksimal örtüklərinin axtarılmasına gətirilir.

[18] işində üçqiymətli funksiyanın minimallaşması məsələsini ikiqiymətli funksiyanın minimallaşması məsələsinə gətirmək təklif olunur. Buna görə funksiyanın bütün qiymətlər çoxluğunu iki altçoxluğa elə bölürlər ki, onların hər birində, funksiya yalnız iki qiymət ala bilər və bu qiymətlərdən biri bütün altçoxluqlar üçün ümumi olur. Bunun üçün Bul funksiyalarının minimallaşmasının yaxşı öyrənilmiş üsullarından istifadə etmək olar.

Çoxqiymətli funksiyaların minimallaşması və çoxhədli şəklində təsviri məsələləri [16]-da şərh olunmuşdur.

§ 4.6. Çoxqiymətli simmetrik funksiyaların realizə olunması və minimallaşması.

Çoxqiymətli (k-qiymətli) simmetrik məntiq cəbri funksiyaları, Bul cəbrində olduğu kimi, xüsusi yerlərdən birini tutur. $f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ funksiyasının qiyməti, onun arqumentlərinin ixtiyari yerdəyişməsi zamanı dəyişməz

qalarsa, belə funksiyaya simmetrik funksiya deyilir. §2.6.5-də göstərilmiş tam sistemdə simmetrik funksiyaların reallaşması məsələsinə baxaq. Bu halda $x \vee y, x \cdot y$ və $J_s(x)$ tam sisteminin əməlləri

$$\left.\begin{aligned} x \vee b &= b \vee x = x \\ xb &= bx = b \\ xa &= ax = x \end{aligned}\right\} \qquad (4.6.1)$$

şərtlərini ödəyirlər.

Tutaq ki, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ - ixtiyari yığımdır. $\vec{\alpha}$ yığımından təşkil olunan və onun komponentlərinin bütün mümkün olan yerdəyişməsindən alınan bütün yığımlar çoxluğunu simmetrik yığımlar çoxluğu adlandıraq və $\{\vec{\alpha}\}$ ilə işarə edək.

Aşağıdakı işarələmələri daxil edək:

$$\left.\begin{aligned} A_{n1} &= x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n, \\ A_{n2} &= x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \ldots \vee x_{n-1}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{nn} &= x_1x_2\ldots x_n, \\ A^*_{n1} &= \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_n = \beta_1 \\ A^*_{n2} &= \alpha_1\alpha_2 \vee \alpha_1\alpha_3 \vee \ldots \vee \alpha_{n-1}\alpha_n = \beta_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^*_{nn} &= \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = \beta_n \end{aligned}\right\} \qquad (4.6.1a)$$

Teorem 4.3 Əgər $f(\vec{x})$ funksiyası hər hansı $\{\vec{\alpha}\}$-simmetrik yığımlar çoxluğunda eyni bir $f(\vec{s})$ qiymətini alırsa və $x \vee y$ və xy elə xassələrə malikdir ki,

$$A_{ni} = \beta_i, (i = 1,2,\ldots,n) \qquad (4.6.2)$$

tənliklər sisteminin ixtiyari $\vec{x} = \vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ həlli $\{\vec{\alpha}\}$ çoxluğuna daxil olur, onda aşağıdakı eynilik münasibəti doğrudur:

$$\underset{\text{bütün } \vec{s} \in \{\vec{\alpha}\}}{\mathrm{V}} f(\vec{s}) J_{s_1}(x_1) J_{s_2}(x_2) \ldots J_{s_n}(x_n) =$$

$$= f(\vec{s}) J_{\beta_1}(A_{n1}) J_{\beta_2}(A_{n2}) \ldots J_{\beta_n}(A_{nn}). \qquad (4.6.3)$$

İsbatı. Tutaq ki, $\vec{x} = \vec{\gamma}$ və $\vec{\gamma} \in \{\vec{\alpha}\}$ (4.6.3) ifadəsinin sol tərəfi $\{\vec{\alpha}\}$ çoxluğunun bütün yığımlarına uyğun konyuksiyaları özündə saxladığından, onda onlar arasında elə konyuksiya tapılacaq ki, $s_i = \gamma_i$ olsun. Beləliklə, (4.6.1) şərtləri nəzərə alınmaqla (4.6.3) ifadəsinin sol tərəfi $\vec{\gamma}$ yığımında $f(\vec{s})$ qiymətini alır. Öz növbəsində

$$A^*_{ni/\vec{x}=\vec{\gamma}} = \beta_i$$

olduğundan, (4.6.3)-ün sağ tərəfi də seçilən yığımda $f(\vec{s})$ qiymətini alır.

İndi fərz edək ki, $\vec{x} = \vec{\gamma}$ $\{\vec{\alpha}\}$çoxluğunun heç bir yığımı ilə üst-üstə düşmür. Onda (4.6.3) münasibətinin sol tərəfi b-yə bərabər olur. $\vec{\gamma} \,\overline{\in}\, \{\vec{\alpha}\}$ olduğundan, onda $\vec{\gamma}$ (4.6.2) tənliklər sisteminin həlli olmur. Ona görə elə i tapmaq olur ki,

$$A_{ni/\vec{x}=\vec{\gamma}} \neq \beta_i$$

münasibəti ödənir.

Deməli, (4.6.3)-ün sağ tərəfi də b-yə bərabər olur. $\vec{\gamma}$ yığımı ixtiyari seçildiyindən teorem isbat olundu.

Simmetrik funksiyanın tə'yin olunduğu bütün k^n yığımlar çoxluğunu, hər biri törədən (yaradıcı) yığımlardan təşkil olunan, qarşılıqlı kəsişməyən bir sıra simmetrik yığımlar çoxluğuna ayırmaq olar.

Yaradıcı yığımların sayını N(n,k) ilə işarə edək. N(n,k) və simmetrik yığımların müxtəlif çoxluqları sayı k elementdən n-ə görə təkrarlanan birləşmələrin sayına bərabərdir və

$$N(n,k) = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

münasibəti ilə tə'yin olunur.

Simmetrik funksiya $\{\vec{\alpha}\}$ çoxluğundan olan ixtiyari yığımda eyni bir $f(\vec{\alpha})$ qiymətini alır. Ona görə də simmetrik funksiyanın bütün N(n,k) çoxluqlarında qiymətlərini bilməklə onu tamamilə tə'yin etmək olar.

Deməli, müxtəlif simmetrik funksiyaların sayı $K^{N(n,k)}$-ya bərabərdir.

Aşağıdakı kimi tə'yin olunan funksiyanı baza simmetrik funksiyası adlandıraq

$$S_n(\vec{\alpha}, \vec{x}) = \begin{cases} a & \vec{x} = \vec{\alpha} \in \{\vec{\alpha}\} \\ b & \vec{x} = \vec{\alpha} \,\overline{\in}\, \{\vec{\alpha}\} \end{cases} \text{ olduqda}$$

Hər bir simmetrik yığımlar çoxluğuna bir baza simmetrik funksiyası uyğun olduğundan, alırıq ki, müxtəlif $S_n(\vec{\alpha}, \vec{x})$ funksiyalarının sayı N(n,k)-ya bərabərdir.

Onlardan ixtiyari biri

$$S_n(\vec{\alpha},\vec{x}) = \bigvee_{\text{bütün } \vec{\alpha}\in\{\vec{\alpha}\} \text{ görə}} J_{\alpha_1}(x_1)J_{\alpha_2}(x_2)\ldots J_{\alpha_n}(x_n)$$

şəklində göstərilə bilər.

Teorem 4.4 İxtiyari $f(\vec{x})$ çoxqiymətli məntiq funksiyasını

$$f(\vec{x}) = \bigvee_{i=1}^{N(n,k)} f(\vec{\alpha}_i)S_n(\vec{\alpha}_i,\vec{x}) \qquad (4.6.4)$$

münasibəti şəklində göstərmək olar. Burada $\vec{\alpha}_i = (\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_n}); i = 1,2,\ldots,N(n,k);\ \{\vec{\alpha}_i\} \neq \{\vec{\alpha}_j\}, i \neq j$ olduqda.

İsbatı. (4.6.4) bərabərliyində $S_n(\vec{\alpha}_i, x)$-in ifadəsini yerinə yazsaq, teorem isbat olunar. (4.6.3) münasibətindən alınır ki, ixtiyari $S_n(\vec{\alpha},\vec{x})$ baza funksiyasını aşağıdakı kimi göstərmək olar.

$$S_n(\vec{\alpha},\vec{x}) = J_{\beta_1}(A_{n1})J_{\beta_2}(A_{n2})\ldots J_{\beta_n}(A_{nn}). \qquad (4.6.5)$$

Teorem 4.5 İxtiyari simmetrik funksiyanı

$$f(\vec{x}) = \bigvee_{i=1}^{N(n,k)} f(\vec{\alpha}_i)J_{\beta_1}(A_{n1})J_{\beta_2}(A_{n2})\ldots J_{\beta_n}(A_{nn}). \qquad (4.6.6)$$

harada ki, $\beta_{ij} = A^*_{nj|\vec{x}=\alpha_i;\,j=1,2,\ldots,n}$ tipli kanonik şəkildə göstərmək olar.

Teoremin isbatı (4.6.4) və (4.6.5) münasibətlərindən alınır.

Nümunə. Tutaq ki, $x \vee y = \max(x,y)$, $xy = \min\ x\cdot y, a = k-1$, $b = 0$. $x \vee y$ və $x\cdot y$ əməllərinin belə tə'yin olunması (4.6.1)-in bütün şərtlərini ödəyir. n=2 olduqda (4.6.3) münasibəti

$$J_i(x) = J_j(y) \vee J_j(x)J_i(y) = J_i(x \vee y)J_j(xy), \quad (4.6.7)$$

şəklinə düşür. Burada $i \geq j; i,j \in E_k$. (4.6.7)-dən başqa baxılan sistemdə $A^*_{ni|\vec{x}=\vec{a}} = \alpha_i$, harada ki, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n, (i = 1,2,\ldots,n)$ eynilik münasibətləri də doğrudur.

Qeyd edək ki, $k = 2$, $i = 1$ və j=0 olduqda, (4.6.7) ifadəsi Bul cəbrində mod 2-yə görə mütləq minimal təsvirdir və

$$J_1(x)J_0(y) \vee J_0(x)J_1(y) = J_1(x \vee y)J_0(xy)$$

kimi göstərilir.

Aşağıdakı cədvəllə (k=4) verilən simmetrik funksiyanı (4.6.6)-nı nəzərə almaqla yazaq. Bu halda, müxtəlif simmetrik yığımlar çoxluğu əmələ gətirən yığımlar aşağıdakılardır:

(0,2),(0,3),(1,1),(1,3),(2,3)

$x_1 \backslash x_2$	0	1	2	3
0	0	0	2	1
1	0	1	0	3
2	2	0	0	2
3	1	3	2	0

Cəd. 4.5

Nəticədə

$$f(x,y) = 1J_1(A_1)J_1(A_2) \vee 2J_2(A_1)J_0(A_2) \vee 1J_3(A_1)J_0(A_2) \vee$$

$$J_3(A_1)J_1(A_2)V2J_3(A_1)J_2(A_2),$$

harada ki, $A_1 = x_1 \vee x_2$; $A_2 = x_1x_2$.

Əgər $x \vee y$ və xy əməllərinə x+y(mod k) və xxy(mod k) kimi baxsaq və a=1, b=0 olduğunu nəzərə alsaq, onda bütün yuxarıda göstərilən teoremlər k-nın sadə halı üçün doğru olur. Əgər k sadə ədəd deyilsə, onda (4.6.3) münasibətini tətbiq etmək olmaz. Misal üçün, k=6 və n=2 olduqda, $A_{n2} = xy = 4$ tənliklərinin həlli (1.4) və (4.4) yığımlarının əmələ gətirdiyi çoxluqlara daxil olurlar.

Beləliklə, (4.6.6) düsturuna əsasən alırıq ki, simmetrik funksiyanın təsviri

$$N(n,k) = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

sayda dizyunktiv həddən təşkil olunur. Onun MDNF isə k^n həddən ibarətdir.
İxtiyari $k \geq 2$ və $n \geq 2$ üçün

$$N(n,k) \leq k^n$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N(n,k)}{k^n} = 0$$

münasibətləri doğrudur.
Çoxqiymətli simmetrik funksiyaların minimallaşmasını iki üsulla həyata keçirmək olar. Birinci üsulla minimallaşma aşağıdakı mərhələlərdən ibarətdir: Əvvəlcə, verilmiş simmetrik funksiyanın mükəmməl dizyunktiv normal forması tapılır. Sonra isə yuxarıda göstərilmiş üsullarla MDNF minimallaşır və (4.6.6) düsturu nəzərə alınmaqla minimal

DNF-da x_i arqumentləri onların simmetrik analoqları ilə əvəz edilir.
II üsulun reallaşması zamanı elementar hasillərin, implikantların, həmçinin müxtəsər, dalanlı və minimal DNF-ın simmetrik analoqları anlayışını daxil etmək və arqumentlərin əvəzinə onların simmetrik analoqlarının daxil olunmasını əsas götürmək lazımdır.
Tə'rif: (4.6.6) düsturu ilə verilən ifadəyə mükəmməl DNF-in simmetrik analoqu deyirlər (4.6.1a) düsturu ilə tə'yin olunmuş A_{ni} funksiyalarını isə x_i arqumentlərinin simmetrik analoqları adlandırırlar.

Qeyd edək ki, I üsulun reallaşması zamanı bəzən, simmetrik funksiyanın minimal DNF-nın simmetrik analoqunu almaq mümkün olmur.
Misal

$$f(x,y) = 1J_1(x)J_3(y)V2J_2(x)J_3(y)V3J_3(x)J_3(y)V1J_3(x)\cdot$$

$$\cdot J_1(y)V2J_3(x)J_2(y)$$

funksiyasının mükəmməl DNF $k \geq 5$ olduqda onun minimal DNF ilə üst-üstə düşür. Bu funksiyanın DNF simmetrik analoqu isə

$$f(x,y) = 1J_3(A_{21})J_1(A_{22})V2J_3(A_{21})J_2(A_{22})V3J_3(A_{21})J_3(A_{22})$$

kimi tə'yin olunur. Onu sadələşdirib,

$$f(x,y) = A_{22}J_3(A_{21})$$

kimi də göstərmək olar.

Simmetrik funksiyaların II üsulla minimallaşmasına baxaq. Bizə sonradan lazım olan əsas münasibətləri yazaq:

$$J_{\alpha_i}(\bigvee_{s=\alpha_p}^{\alpha_i}\tilde{s}J_s(A_r)J_p(A_p)) = J_{\alpha_i}(A_i)J_{\alpha_p}(A_p)\tilde{A}_r, \qquad (4.6.9)$$

$$J_{\alpha_p}(A_p)(\bigvee_{s=\alpha_p}^{k-1}\tilde{s}J_s(A_r)) = J_{\alpha_p}(A_p)\tilde{A}_r, \qquad (4.6.10)$$

$$J_{\alpha_i}(A_i)(\sum_{s=0}^{\alpha_i}\tilde{s}J_s(A_r)) = J_{\alpha_i}(A_i)\tilde{A}_r, \qquad (4.6.11)$$

harada ki, $i < r < p, \alpha_i \geq \alpha_p$, ~ işarəsi göstərir ki, x ya x-ə, ya da k-1-ə bərabərdir, daha doğrusu, x uyğun ifadədə ola da bilər, olmaya da bilər. (4.6.9)-(4.6.11) münasibətləri DNF simmetrik analoquna nəzərən ixtiyari simmetrik funksiyanın mükəmməl DNF simmetrik analoqunu qurmağa imkan verirlər.

[19]-da olduğu kimi, tutaq ki, f_1 və f_2 funksiyaları verilmişdir. Əgər bütün yığımlarda $f_1 \geq f_2$ şərti ödənərsə, onda deyirlər ki, f_1 funksiyası f_2 funksiyasını udur.

Qeyd olunduğu kimi, simmetrik funksiyanın minimallaşması məsələsi, onun sadə implikantlarının (bu hal üçün onun simmetrik analoqlarının) tapılmasına gətirilir, belə ki, dalanlı və minimal DNF tapılması mə'lum üsullarla, misal üçün, implikant matrislərinin köməyi ilə həyata keçirilir.

Sadə implikant dedikdə, implikant olan elə elementar hasil başa düşülür ki, onu verilən funksiyanın implikantı olan başqa elementar hasil uda bilməsin. Əgər iki elementar hasil, bir-birinə bərabər olan və implikant olan heç bir üçüncü elementar hasil tərəfindən udula bilməyən implikantlardırsa, onda sadə implikant elə hasili hesab edirlər ki, o özündə ən az hərf saxlasın.

Misal. Əgər $J_1(A_1)J_1(A_3)$ və $J_1(A_1)J_1(A_2)J_1(A_3)$ simmetrik funksiyanın implikantlandırlarsa, onda onlardan birincisini sadə implikant hesab edirlər. Aşağıdakı ifadələrə baxaq:

$$J_{\alpha_i}(A_i)J_p(A_p)(\bigvee_{s=\alpha_p}^{\alpha_i} a_sJ_s(A_r)) = g_1, \qquad (4.6.12)$$

$$J_{\alpha_p}(A_p)(\bigvee_{s=\alpha_p}^{k-1} a_sJ_s(A_2)) = g_2, \qquad (4.6.13)$$

$$J_{\alpha_i}(A_i)(\bigvee_{s=0}^{\alpha_i} a_sJ_s(A_r)) = g_3. \qquad (4.6.14)$$

Tutaq ki, $a = \min a_s$. (4.6.12)-(4.6.14) münasibətlərinin hansına baxılmasından asılı olaraq, burada $\alpha_i \geq s \geq \alpha_p$, yaxud $k-1 \geq s \geq \alpha_p$ və yaxud $\alpha_i \geq s \geq 0$ olur.

İndi tutaq ki, $b = \min a_m$. a_m - (4.6.12)-(4.6.14) münasibətlərindəki $a_m < m$ şərtini ödəyən sabitlərdir. Aşağıdakı münasibətlərin doğruluğunu asanlıqla göstərmək olar.

$$g_1 = g_1 VaJ_{\alpha_i}(A_i)J_{\alpha_p}(A_p)VbJ_{\alpha_i}(A_i)J_{\alpha_p}(A_p)A_r, \qquad (4.6.15)$$

$$g_2 = g_2 VaJ_{\alpha_p}(A_p)VbJ_{\alpha_p}(A_p)A_r, \qquad (4.6.16)$$

$$g_3 = g_3 VaJ_{\alpha_i}(A_i)VbJ_{\alpha_i}(A_i)A_r \qquad (4.6.17)$$

(4.6.15)-(4.6.17) münasibətləri ilə tə'yin olunan əməlləri natamam yapışdırma əməlləri adlandıraq. Əgər funksiyanın mükəmməl DNF-da onun bütün hədləri üzərində və yeni alınmış implikantlar üzərində natamam yapışdırmanın bütün əməllərini aparsaq, onda aralarında bütün sadə implikantlar da olan elementar hasillər çoxluğunu alarıq. Onları ayırmaq üçün, udma me'yarına uyğun olaraq bütün udma əməllərini yerinə yetirmək zəruridir.

Aşağıdakı iki elementar hasilə baxaq:

$$U_1 = \tilde{a}_1 J_{\gamma_1}(A_{i_1}) J_{\gamma_2}(A_{i_2}) \dots J_{\gamma_{m-1}}(A_{i_{m-1}}) \tilde{A}_{i_m} J_{\gamma_{m+1}}(A_{i_{m+1}}) \dots$$

$$\dots J_{\gamma_{r-1}}(A_{i_{r-1}}) J_{\gamma_r}(A_{i_r}),$$

$$U_2 = \tilde{a}_2 J_{\beta_1}(A_{s_1}) J_{\beta_2}(A_{s_2}) \dots J_{\beta_{t-1}}(A_{s_{t-1}}) A_{s_t} J_{\beta_{t+1}}(A_{s_{t+1}}) \dots$$

$$\dots J_{\beta_{\nu-1}}(A_{s_{\nu-1}}) J_{\beta_\nu}(A_{s_\nu}),$$

harada ki,

$\gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \dots \ge \gamma_r$; $\beta_1 \ge \beta_2 \ge \dots \ge \beta_\nu$; $1 \le i_1 < i_2 < \dots i_r \le n$; $1 \le s_1 < s_2 < \dots < s_\nu \le n$; γ_Z və $\beta_y \in E_k$, $(z = 1,2,\dots,r)$, $(y = 1,2,\dots,\nu)$.

Bu elementar hasillərdə, $m = \max(i,s)$ olduqda, $A_i A_s = A_m$ olduğundan, J operatorunun işarəsi olmayan ikidən artıq A_i həmvuruğu ola bilməz. Bundan başqa, $\gamma_{m+1} \le a_1 \le \gamma_{m-1}$ və $\beta_{t+1} \le a_2 \le \beta_{t-1}$ münasibətləri doğrudur, əks halda sabit yaxud operatorun işarəsi olmayan arqument iştirak etmir.

Teorem 4.6 U_1 elementar hasilinin U_2 elementar hasilini udması üçün zəruri və kafi şərt:

1) U_1-ə daxil olan bütün $J_{\gamma_z}(A_{i_z})$-lərin U_2-yə daxil olması;

2) $\gamma_{m_1} \ge A_{i_m} \ge \gamma_{m+1}$ və $\beta_{t-1} \ge A_{s_t} \ge \beta_{t+1}$ olduqda $\tilde{a}_1 \tilde{A}_{i_m} \ge \tilde{a}_2 \tilde{A}_{s_t}$ bərabərsizliyinin ödənilməsidir.

İsbatı. Əvvəlcə birinci şərtin zəruriliyini isbat edək. Tutaq ki, $U_1 \ge U_2$ və $J_{\gamma_z}(A_{i_z})$ U_2-yə daxil deyillər.

Bu halda x_i arqumentlərinin qiymətlərini həmişə elə seçmək olar ki, onların simmetrik analoqları üçün $A_{s_y} = \beta_y$, $(y = 1,2,\dots,v)$ $A_{i_z} \ne \gamma_z$ şərtləri ödənsin. Onda $U_1 = 0$ və $U_2 \ne 0$, daha doğrusu $U_2 > U_1$. Bu isə ola bilməz. Deməli, bütün $J_{\gamma_z}(A_{i_z})$-lər U_2-yə daxildirlər.

Fərz edək ki, $U_1 \ge U_2$ və $\tilde{a}_1 \tilde{A}_{i_m} < \tilde{a}_2 \tilde{A}_{s_t}$. $A_{s_y} = \beta_y$, $(y = 1,2,\dots,\nu)$ qəbul edək. Onda U_1 və U_2 uyğun olaraq $a_1 A_{i_m}$ və $a_2 A_{s_t}$-yə bərabər olacaqlar. $\tilde{a}_1 \tilde{A}_{i_m} < \tilde{a}_2 \tilde{A}_{s_t}$ olduğundan, onda bu halda $U_1 < U_2$ olar. Bu isə mümkün deyil. Nəticədə alırıq ki, ikinci şərt də zəruridir.

Kafiliyi isbat edək. U_1 və U_2-nin qiymətlərinə $U_2 \ne 0$ yığımlarında baxaq. Bütün $J_{v_y}(A_{i_y})$ opera-torları U_2-yə daxil olduğundan, bu yığımlarda $U_1 = \tilde{a}_1 \tilde{A}_{i_m}$ və $U_2 = \tilde{a}_2 \tilde{A}_{s_t}$ olur. İkinci şərti nəzərə almaqla $\tilde{a}_1 \tilde{A}_{i_m} \ge \tilde{a} \tilde{A}_{s_t}$. Deməli, bu yığımlarda $U_1 \ge U_2$ olur. Qalan yığımlarda $U_2 = 0$ olur. Ona görə də ixtiyari yığımda $U_1 \ge U_2$ olur. Teorem isbat olundu.

Nümunə. Tutaq ki, $f(x,y,z)$ simmetrik funksiyasının DNF $(k = 4)$ aşağıdakı kimi verilir:

$$f(x,y,z) = J_3(x)yJ_0(z) \vee J_3(x)J_0(y)z \vee xJ_3(y)J_0(z) \vee xJ_0(y) \times$$

$$\times J_3(z) \vee J_0(x)J_3(y)z \vee J_0(x)yJ_3(z) \vee 1J_3(x)J_2(y)J_1(z) \vee$$

$$\vee 1J_2(x)J_1(y)J_2(z) \vee 1J_1(x)J_2(z) \vee 2J_2(x)J_2(y)J_2(z)$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu forma $f(x,y,z)$ funksiyasının minimal DNF-dir. Bu funksiyanın mükəmməl DNF 19 dizyunktiv həddə malikdir. Onun simmetrik analoqu isə yalnız beş həddə malikdir.

$$f(x,y,z) = 1J_3(A_1)J_1(A_2)J_0(A_3) \vee 2J_3(A_1)J_2(A_2) \times$$

$$\times J_0(A_3) \vee J_3(A_1)J_3(A_2)J_0(A_3) \vee 1J_2(A_1)J_2(A_2)J_1(A_3) \vee$$

$$\vee 2J_2(A_1)J_2(A_2)J_2(A_3)$$

CƏDVƏL 4.6

İmplikantlar	Mükəmməl DNF hədləri				
	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5
$J_3(A_2)J_0(A_3)$			×		
$2J_2(A_1)J_2(A_3)$					×
$J_2(A_1)J_2(A_2)A_3$				×	×
$J_3(A_1)A_2J_0(A_3)$	×	×	×		

$$1J_3(A_1)\,J_1(A_2)J_0(A_3) = H_1$$

$$2J_3(A_1)\,J_2(A_2)J_0(A_3) = H_2 \qquad J_3(A_1)\,J_3(A_2)J_0(A_3) = H_3$$

$$1J_2(A_1)\,J_2(A_2)J_1(A_3) = H_4 \qquad 2J_2(A_1)\,J_2(A_2)J_2(A_3) = H_5$$

Bütün mümkün olan yapışdırma və udma əməllərini (cədvəl 4.6) yerinə yetirərək funksiyanın minimal DNF-nin simmetrik analoqunu alırıq:

$$f(x,y,z) = J_3(A_1)\,A_2J_0(A_3) \vee J_2(A_1)\,J_2(A_2)A_3.$$

Axırıncı ifadə bu funksiyanın adi minimal DNF-dan xeyli sadədir.

Təsvir olunan (simmetrik funksiyanın sadələşdirilməsi) üsul həmişə mütləq minimal ifadəni vermir. Ancaq göstərmək olar ki, bir qayda olaraq minimal DNF simmetrik analoqları adi minimal DNF-dan xeyli sadədir və onlarda iştirak edən $J_s(x)$ operatorlarının sayı, adi minimal DNF-də olan operatorların sayından həmişə kiçikdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М. Наука, 1986.
2. Яблонский С.В. Функциональные построения в k-значной логике. В кн.: Труды МИАН СССР. Т-51. М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 5-142.
3. Fərəcov R.H., Cavadov R.M. Diskret riyaziyyat. Məntiq cəbri. Bakı. BDU, 1992.
4. Васильев Ю.Л., Ветухновский Ф.Я., Глаголев В.В., Журавлев Ю.Н., Левенштейн В.И., Яблонский С.В. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. том I. М.: Наука, 1974.
5. Янов Ю.И., Мучник А.А., О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса, ДАН СССР 127, №1, 1959, 44-46.
6. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971.
7. Кемени Д., Снелл, Томсон. Введение в конечную математику. М.: Мир, 1965.
8. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 1977.
9. Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. М.: Наука, 1972.
10. Фараджев Р.Г. Линейные последовательностные машины. М.: Сов. Радио, 1975.
11. Самофалов К.Г., Корнейчук В.И., Романкевич А.М., Тарасенко В.П. Цифровые многозначные элементы и структуры. Киев "Вища школа", 1974.
12. Кухарев Г.А., Шмерко В.П., Зайцева Е.Н. Алгоритмы и систолические процессоры для обработки многозначных данных. Минск.: "Наука и техника", 1990.
13. Раков М.А. и др. Специализированные многозначные анализаторы. Киев. "Наукова Думка", 1977.
14. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. Москва "Высшая школа", 1986.
15. Многозначные элементы и структуры. (Сборник статей). М., "Сов. Радио", 1967.
16. Поспелов Д.А. Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1974.
17. Поспелов Д.А. и др. Представления в многозначных логиках. - "Кибернетика", 1969, №2.
18. Рабинович З.Л. и др. Об одном классе канонических форм представления трехзначных функций. - Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1963, №5.
19. Романкевич А.М., Методы минимизации функций многозначной логики. - Кибернетика, 1965, №3.
20. Романкевич А.М. Вопросы минимизации функций в одной расширенной алгебре. - В сб.: Вопросы теории ЭЦВМ. Киев, "Наукова думка", 1966, вып 1.
21. Романкевич А.М. Минимизация многозначных функций в системе включающей все одноместные операции. - "Кибернетика", 1969, № 3.
22. Айзенберг Н.Н., Рабинович З.Л. Некоторые классы функционально полных систем операций и канонические формы представления функций многозначной логики. - "Кибернетика", 1965. №2.
23. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. Москва "Мир". 1976.
24. Бохманн Д., Постхоф Х. Двоичные динамические системы. Москва. "Энергоатомиздат", 1986.

KİTABIN İÇİNDƏKİLƏR

Мәтбәә кағызы №1. Кағыз форматы 60х84 Јүксәк чап усулу. Сифариш 37 Сајы 100-0

М.Ә.Рәсулзадә адына БДУ нәшријјаты
370148. Бакы З.Хәлилов күчәси, 23.
БДУ нәшријјатынын мәтбәәси.
370148. Бакы. З.Хәлилов күчәси, 23.