518
Г 12
УДК 519.95

Сборник задач по дискретной математике, Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1977 г.

Сборник возник как пособие для практических занятий по курсу дискретной математики. Он содержит как упражнения, предназначенные для первоначального ознакомления с основными понятиями и фактами дискретной математики, так и задачи повышенной трудности, рассчитанные на такого читателя, который обладает достаточной математической культурой и специальной подготовкой.

Книга будет полезна студентам университетов и других вузов, в которых изучаются дискретная математика и математическая логика.

Гарий Петрович Гаврилов
Александр Антонович Сапоженко

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

М., 1977 г., 368 стр. с илл.

Редактор *Е. Ю. Ходан*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректор *Г. В. Подвольская*

Сдано в набор 12.07.1976 г. Подписано к печати 18.02.1977 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 11,5. Усл. печ. л. 19,32. Уч.-изд. л. 19,94. Тираж 27000 экз. Цена книги 84 коп. Заказ 1393

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

1-я типография издательства «Наука».
199034, Ленинград, В-34, 9-я линия, д. 12.

Отпечатано с готовых матриц в ордена Трудового Красного Знамени тип. им. Володарского Лениздата. 191023, Ленинград, Фонтанка, 57.

$Г \frac{20204-045}{053(02)-77}$ 6-76

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый читателю сборник задач задуман как пособие для упражнений по курсу дискретной математики и предназначен в основном для студентов младших курсов университетов. Сборник может быть полезен также студентам старших курсов и аспирантам, специализирующимся в области математической кибернетики. Преподаватели могут использовать эту книгу для подготовки упражнений и семинарских занятий.

Книга базируется на курсе дискретной математики, читавшемся в течение ряда лет сначала на механико-математическом факультете, а затем на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета.

Сборник состоит из восьми глав. Первые две главы посвящены алгебре логики. Раздел «Алгебра логики» является основополагающим при изучении дискретной математики. В лекционном курсе и на практических занятиях на факультете ВМиК МГУ ему отводится около четверти всего времени. На материале этого раздела учащийся получает первоначальные представления о таких понятиях, как дискретная функция, операция суперпозиции, функционально полная система; знакомится с различными способами задания дискретных функций (табличный способ, представление полиномами и нормальными формами, геометрическое пред-

По происхождению материал задачника весьма разнообразен. Значительная часть задач носит «фольклорный» характер. Такие задачи хорошо известны специалистам по дискретной математике, однако установить авторство задач подобного сорта почти невозможно. Основная часть задач была придумана авторами в процессе ведения упражнений и семинаров, приема экзаменов по дискретной математике, а также во время подготовки данного сборника. Некоторая часть задач возникла в результате обработки журнальных статей. Некоторые задачи заимствованы нами из других руководств. Ряд задач был сообщен нам сотрудниками кафедры математической кибернетики МГУ и другими нашими коллегами. Большой запас задач предоставил в распоряжение авторов О. Б. Лупанов. Отдельные задачи предложены С. В. Яблонским, В. Б. Алексеевым, А. А. Евдокимовым, В. К. Леонтьевым, Ал. А. Марковым. Всем им мы выражаем искреннюю благодарность.

Авторы весьма признательны С. В. Яблонскому за внимание к нашей работе над книгой. Его советы и рекомендации в значительной мере определили структуру и тематическую направленность сборника.

Авторы глубоко обязаны О. Б. Лупанову, прочитавшему всю рукопись и уделившему много времени для обсуждения с авторами ее содержания.

Мы искренне благодарны С. С. Марченкову, весьма тщательно прочитавшему главу «Элементы теории алгоритмов», В. И. Левенштейну, прочитавшему главу «Элементы теории кодирования» и сделавшему ряд ценных замечаний, а также рецензентам книги В. В. Глаголеву и Ал. А. Маркову за критические замечания и соображения по улучшению сборника.

Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко

Глава I

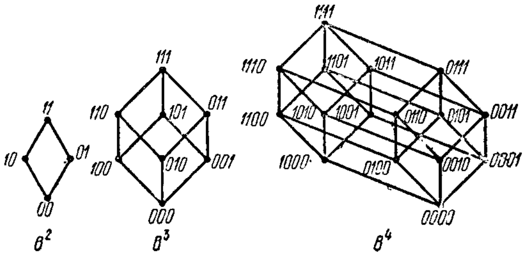
БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ, СПОСОБЫ ИХ ЗАДАНИЯ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

§ 1. Булевы векторы и единичный n-мерный куб[1]

Вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, координаты которого принимают значения из множества $\{0, 1\}$, называется *двоичным* или *булевым вектором* (*набором*). Для краткости такой вектор будем обозначать через $\tilde{\alpha}^n$ или $\tilde{\alpha}$. Число n называется *длиной вектора*. Множество всех булевых векторов длины n называется *единичным n-мерным кубом* и обозначается через B^n. Сами векторы $\tilde{\alpha}^n$ называются *вершинами куба* B^n. *Весом* $\|\tilde{\alpha}^n\|$ или *нормой вектора* $\tilde{\alpha}^n$ называется число его координат, равных единице, т. е. $\|\tilde{\alpha}^n\| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Множество всех вершин куба B^n, имеющих вес k, будем называть *k-м слоем куба* B^n и обозначать через B_k^n. Каждому булеву вектору $\tilde{\alpha}^n$ можно сопоставить число $\nu(\tilde{\alpha}^n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 2^{n-i}$, называемое *номером вектора* $\tilde{\alpha}^n$. Набор $\tilde{\alpha}^n$ является, очевидно, двоичным разложением числа $\nu(\tilde{\alpha}^n)$. *Расстоянием* (*Хэмминга*) *между вершинами* $\tilde{\alpha}$ *и* $\tilde{\beta}$ куба B^n называется число $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|$, равное числу координат, в которых они

[1] Этот параграф является вспомогательным. В дальнейшем используются лишь задачи 1.1—1.6; 1.11; 1.14; 1.15; 1,31; 1,34; 1.35; 1.44.

различаются. Расстояние Хэмминга является метрикой, а куб B^n — метрическим пространством. Наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ из B^n называются *соседними*, если $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 1$, и *противоположными*, если $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = n$. Неупорядоченная пара соседних вершин называется *ребром куба*. Множество $B_k^n(\tilde{\alpha}) = \{\tilde{\beta}: \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = k\}$ называется *сферой*, а множество $S_k^n(\tilde{\alpha}) = \{\tilde{\beta}: \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \leqslant k\}$ — *шаром радиуса* k *с центром* $\tilde{\alpha}$. Говорят, что набор $\tilde{\alpha}^n$ *предшествует* набору $\tilde{\beta}^n$ (обозначение: $\tilde{\alpha}^n \leqslant \tilde{\beta}^n$), если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для всех $i = \overline{1, n}$. Если при



B^2 B^3 B^4

Рис. 1.

этом $\tilde{\alpha}^n \neq \tilde{\beta}^n$, то говорят, что $\tilde{\alpha}^n$ *строго предшествует* $\tilde{\beta}^n$ (обозначение: $\tilde{\alpha}^n < \tilde{\beta}^n$). Если имеет место хотя бы одно из соотношений $\tilde{\alpha}^n \leqslant \tilde{\beta}^n$ или $\tilde{\beta}^n \leqslant \tilde{\alpha}^n$, то $\tilde{\alpha}^n$ и $\tilde{\beta}^n$ называются *сравнимыми*. В противном случае говорят, что $\tilde{\alpha}^n$ и $\tilde{\beta}^n$ *несравнимы*. Набор $\tilde{\alpha}^n$ *непосредственно предшествует* набору $\tilde{\beta}^n$, если $\tilde{\alpha}^n < \tilde{\beta}^n$ и $\rho(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n) = 1$. Отношение предшествования между наборами является отношением частичного порядка в B^n. На рис. 1 представлены диаграммы частично упорядоченных множеств B^2, B^3, B^4. Последовательность вершин куба $\{\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_k\}$ называется *цепью, соединяющей* $\tilde{\alpha}_0$ и $\tilde{\alpha}_k$ (обозначение: $[\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_k]$), если $\rho(\tilde{\alpha}_{i-1}\ \tilde{\alpha}_i) = 1$ $(i = \overline{1, k})$. Число k называется *длиной цепи* $[\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_k]$. Цепь $\{\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_k\}$ является *возрастающей*, если $\tilde{\alpha}_{i-1} < \tilde{\alpha}_i$ $(i = \overline{1, k})$. Цепь z вида $\{\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_k\}$ называется *циклом длины* k, если $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}_k$. Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — векторы из B^n. Через $\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}$ обозначим вектор $(\alpha_1 \oplus \beta_1, \alpha_2 \oplus \beta_2, \ldots, \alpha_n \oplus \beta_n)$, полученный покоординатным сложением по mod 2 векторов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$. Через $\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta}$ обозначим вектор, i-я координата которого равна 0 тогда и только тогда, когда $\alpha_i =$

$=\beta_i=0$. Через $\tilde{\alpha}\cap\tilde{\beta}$ обозначим вектор, i-я координата которого равна 1 тогда и только тогда, когда $\alpha_i=\beta_i=1$. Через $\bar{\tilde{\alpha}}$ обозначим вектор (*противоположный* к $\tilde{\alpha}$), i-я координата которого принимает значение 0, если $\alpha_i=1$, и значение 1, если $\alpha_i=0$. Если $\sigma\in\{0, 1\}$, то положим $\sigma\tilde{\alpha}=(\sigma\alpha_1, \sigma\alpha_2, \ldots, \sigma\alpha_n)$. Символом $\tilde{0}$ обозначим вектор $(0, 0, \ldots, 0)$, а символом $\tilde{1}$ — вектор $(1, 1, \ldots, 1)$.

Множество $B^{n,\, i_1, \ldots, i_k}_{\sigma_1 \ldots \sigma_k}$ всех наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из B^n, у которых $\alpha_{i_j}=\sigma_j$ $(j=\overline{1, k})$, называется *гранью* куба B^n. Множество $I=\{i_1, \ldots, i_k\}$ называется *направлением грани*, число k — *рангом грани*, а $n-k$ — *размерностью грани*.

1.1. 1) Найти число $|B^n_k|$ наборов $\tilde{\alpha}^n$ веса k.

2) Чему равно число всех вершин куба B^n?

1.2. 1) Найти номера наборов (1001), (01101), (110010).

2) Найти вектор длины 6, являющийся двоичным разложением числа 19.

1.3. Чему равно число наборов $\tilde{\alpha}\in B^n_k$, удовлетворяющих условию $2^{n-1}\leqslant\nu(\tilde{\alpha})<2^n$?

1.4. Показать, что для любых $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ из B^n справедливы соотношения:

1) $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma})\leqslant\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})+\rho(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$;

2) $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma})=\rho(\tilde{\alpha}\oplus\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}\oplus\tilde{\beta})$;

3) $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})=\|\tilde{\alpha}\|+\|\tilde{\beta}\|-2\|\tilde{\alpha}\cap\tilde{\beta}\|$;

4) $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})=\|\tilde{\alpha}\oplus\tilde{\beta}\|$.

1.5. 1) Найти число неупорядоченных пар соседних вершин B^n.

2) Найти число неупорядоченных пар наборов $(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n)$, таких, что $\rho(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n)=k$.

1.6. Пусть $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ — вершины куба B^n, $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})=m$. Найти число вершин $\tilde{\gamma}$, удовлетворяющих условию:

1) $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma})+\rho(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta})=\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$;

2) $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma})=k$, $\rho(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})=r$;

3) $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma})\leqslant k$, $\rho(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})=r$;

4) $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma})\leqslant k$, $\rho(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})\geqslant r$.

1.7. Доказать несовместность следующих систем соотношений для $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$ из B^n, $n\geqslant 2$:

1) $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})>2n/3$, $\rho(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})>2n/3$, $\rho(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha})>2n/3$;

2) $\nu(\tilde{\alpha})<\nu(\tilde{\beta}\oplus\tilde{\gamma})$, $\nu(\tilde{\beta})<\nu(\tilde{\gamma}\oplus\tilde{\alpha})$, $\nu(\tilde{\gamma})<\nu(\tilde{\alpha}\oplus\tilde{\beta})$;

3) $\|\tilde\alpha\| > \|\tilde\beta \oplus \tilde\gamma\|$, $\|\tilde\beta\| > \|\tilde\gamma \oplus \tilde\alpha\|$, $\|\tilde\gamma\| > \|\tilde\alpha \oplus \tilde\beta\|$,
$\|\tilde\alpha \cap (\tilde\beta \cap \tilde\gamma)\| = 0$;

4) $\|\tilde\alpha \oplus \tilde\beta \oplus \tilde\gamma\| = 0$, $\|\bar{\tilde\alpha} \oplus \bar{\tilde\beta} \oplus \bar{\tilde\gamma}\| = n - 1$.

1.8. Пусть $\tilde\alpha$, $\tilde\beta$, $\tilde\gamma$ — вершины из B^n. Показать, что:

1) $\tilde\alpha \leqslant \tilde\beta$ равносильно $\tilde\alpha \cap \bar{\tilde\beta} = \tilde 0$;

2) $\tilde\alpha \cup \tilde\beta = \tilde 1$ равносильно $\bar{\tilde\beta} \leqslant \tilde\alpha$;

3) $\tilde\alpha \cap (\tilde\alpha \cup \tilde\beta) = \tilde\alpha$;

4) $\tilde\alpha \cup (\tilde\alpha \cap \tilde\beta) = \tilde\alpha$;

5) $(\tilde\alpha \cup \tilde\beta) \cap (\tilde\beta \cup \tilde\gamma) = (\tilde\alpha \cap \tilde\gamma) \cup \tilde\beta$;

6) $((\tilde\alpha \cap \tilde\gamma) \cup \tilde\beta) \cap \tilde\gamma = (\tilde\alpha \cap \tilde\gamma) \cup (\tilde\beta \cap \tilde\gamma)$;

7) из $\tilde\alpha \leqslant \tilde\gamma$ вытекает, что $\tilde\alpha \cup (\tilde\beta \cap \tilde\gamma) = (\tilde\alpha \cup \tilde\beta) \cap \tilde\gamma$;

8) $\tilde\alpha \leqslant \tilde\gamma$ равносильно $\tilde\alpha \cup (\tilde\beta \cap \tilde\gamma) \leqslant (\tilde\alpha \cup \tilde\beta) \cap \tilde\gamma$;

9) $(\tilde\alpha \cap \tilde\beta) \cup (\tilde\beta \cap \tilde\gamma) \cup (\tilde\gamma \cap \tilde\alpha) = (\tilde\alpha \cup \tilde\beta) \cap (\tilde\beta \cup \tilde\gamma) \cap (\tilde\gamma \cup \tilde\alpha)$.

1.9. Каково число векторов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{12})$ из B_6^{12}, таких, что $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \alpha_i \leqslant m/2$ для всех $m = \overline{1, 12}$?

1.10. Найти число векторов $\tilde\alpha$ из B_k^n, таких, что между двумя единичными координатами существуют по крайней мере r нулевых.

1.11. 1) Показать, что в B^n существует множество, состоящее из $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ попарно несравнимых векторов.

2) Показать, что всякое подмножество, содержащее не менее $n + 2$ векторов, содержит пару несравнимых векторов.

1.12. Пусть $0 \leqslant l < k \leqslant n$ и $A(\tilde\alpha)$ — множество всех векторов из B^n, сравнимых с $\tilde\alpha$. Найти мощность множества C:

1) $C = A(\tilde\alpha) \cap B_k^n$, $\tilde\alpha \in B_l^n$;

2) $C = A(\tilde\alpha) \cap B_l^n$, $\tilde\alpha \in B_k^n$;

3) $C = A(\tilde\alpha)$, $\tilde\alpha \in B_k^n$.

1.13. Пусть $A \subseteq B_l^n$, а B — множество всех наборов из B_k^n, сравнимых хотя бы с одним набором из A. Доказать, что $\dfrac{|A|}{\binom{n}{l}} \leqslant \dfrac{|B|}{\binom{n}{k}}$.

1.14. 1) Показать, что в B^n существует $n!$ попарно различных возрастающих цепей длины n.

2) Показать, что число попарно различных возрастающих цепей длины n, содержащих фиксированную вершину $\tilde\alpha$ из B_k^n, равно $k!\,(n-k)!$.

1.15*. 1) Показать, что мощность любого подмножества попарно несравнимых наборов куба B^n не превосходит $\binom{n}{[n/2]}$.

2) Показать, что если подмножество $A \subseteq B^n$ состоит из попарно несравнимых наборов и $\|\tilde{\alpha}\| \leqslant k$ для всякого $\tilde{\alpha} \in A$, то $|A| \leqslant \binom{n}{k}$ при $k \leqslant \frac{n}{2}$.

1.16. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — попарно различные простые числа, а N — множество всех чисел, представимых в виде $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$. Пусть подмножество $A \subset N$ таково, что никакое число $a \in A$ не является делителем никакого числа $b \in A$, отличного от a. Доказать, что $|A| \leqslant \binom{n}{[n/2]}$.

1.17. Пусть $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ — такие вершины куба B^n, что $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$, $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = k$. Показать, что число наборов $\tilde{\gamma}$, таких, что $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\gamma} \leqslant \tilde{\beta}$, равно 2^k.

1.18*. Доказать, что куб B^n можно представить в виде объединения попарно непересекающихся возрастающих цепей, обладающих следующими свойствами:

1) число цепей длины $n - 2k$ равно $\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}$, $k = \overline{0, [n/2]}$, при этом минимальный набор каждой такой цепи имеет вес k, а максимальный — вес $n - k$;

2) если $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\alpha}_{i+1}$, $\tilde{\alpha}_{i+2}$ — три последовательные вершины возрастающей цепи, имеющей длину $n - 2k$, то вершина $\tilde{\beta}$, такая, что $\tilde{\alpha}_i < \tilde{\beta} < \tilde{\alpha}_{i+2}$, $\tilde{\beta} \neq \tilde{\alpha}_{i+1}$, принадлежит некоторой цепи длины $n - 2k - 2$.

1.19. Пусть $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ — такие вершины куба B^n, что $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = k$, а $C(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ — множество всех вершин $\tilde{\gamma}$, для которых существует цепь $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$ длины $k + 2r$, содержащая эту вершину. Чему равна мощность множества $C(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$?

1.20. Множество $A \subseteq B^n$ называется *полным в* B^n, если любой вектор $\tilde{\beta} \in B^n$ однозначно восстанавливается при условии, что для каждого $\tilde{\alpha} \in A$ известно расстояние $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. Полное в B^n множество называется *базисным*, если для любого вектора $\tilde{\alpha}$ из A множество $A \setminus \{\tilde{\alpha}\}$ не является полным.

1) Показать, что любая возрастающая цепь $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_{n-1}$ в B^n образует базисное множество.

2) Показать, что множества B_1^n и B_{n-1}^n являются полными в B^n при $n>2$. Указать такое $n>2$, что B_1^n не является базисным.

3) При каких n и k множество B_k^n не является полным в B^n?

4) Доказать, что всякое базисное множество A в B^n удовлетворяет условию $\frac{n}{\log_2(n+1)} \leqslant |A| \leqslant n$.

5) Доказать, что никакая грань размерности $n-2$ не является полным в B^n множеством.

6) Показать, что число Ψ_n базисных множеств в B^n удовлетворяет неравенствам $2\cdot(n!) \leqslant \Psi_n \leqslant \binom{2^n}{n}$.

1.21. Пусть φ — взаимно однозначное отображение B^n на себя. Говорят, что отображение φ *сохраняет расстояние между вершинами*, если $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \rho(\varphi(\tilde{\alpha}), \varphi(\tilde{\beta}))$ для всех $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ из B^n. Доказать, что отображение φ сохраняет расстояние тогда и только тогда, когда оно может быть получено с помощью:

1) некоторой перестановки координат одновременно во всех наборах из B^n;

2) заменой 0 на 1 и 1 на 0 в некоторых координатах всех векторов.

1.22. Отображение φ множества B^n в себя называется *монотонным*, если из $\nu(\tilde{\alpha}) \leqslant \nu(\tilde{\beta})$ вытекает, что $\nu(\varphi(\tilde{\alpha})) \leqslant \nu(\varphi(\tilde{\beta}))$. Найти число монотонных отображений куба B^n.

1.23. Пусть $\tilde{\alpha} \in B_k^n$. Множество $M_k^n(\tilde{\alpha}) = \{\tilde{\gamma}\colon \nu(\tilde{\gamma}) \leqslant \nu(\tilde{\alpha}),\ \tilde{\gamma} \in B_k^n\}$ называется *начальным отрезком слоя* B_k^n. Пусть $A \subseteq B^n$; обозначим через $Z_l^n(A)$ множество наборов $\tilde{\beta} \in B_l^n$, для которых существует такое $\tilde{\alpha} \in A$, что $\tilde{\beta} \leqslant \tilde{\alpha}$.

1) Пусть $\tilde{\alpha} \in B_k^n$ и $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n)$ — номера координат вектора $\tilde{\alpha}$, равных единице. Показать, что

$$|M_k^n(\tilde{\alpha})| = 1 + \binom{n-i_1}{k} + \binom{n-i_2}{k-1} + \ldots + \binom{n-i_k}{1}.$$

2) Показать, что если $l \leqslant k$ и A — начальный отрезок слоя B_k^n, то множество $Z_l^n(A)$ является начальным отрезком слоя B_l^n.

3) Пусть $\tilde{\alpha} \in B_k^n$ и $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n)$ — номера координат вектора $\tilde{\alpha}$, равных единице. Пусть $A = M_k^n(\tilde{\alpha})$ и $l \leqslant k$. Показать, что

$$|Z_l^n(A)| = 1 + \binom{n-i_1}{l} + \binom{n-i_2}{l-1} + \ldots + \binom{n-i_l}{1}.$$

4*) Пусть $1 \leqslant m \leqslant \binom{n}{k}$. Доказать, что минимум величины $|Z_{k-1}^n(A)|$ по всем таким $A \subseteq B_k^n$, что $|A| = m$, достигается на начальном отрезке слоя B_k^n.

5) Пусть $1 \leqslant m \leqslant \binom{n}{k}$ и $l \leqslant k$. Доказать, что минимум величины $|Z_l^n(A)|$ по всем таким $A \subseteq B_k^n$, что $|A| = m$, достигается на начальном отрезке слоя B_k^n.

6) Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — заданные числа, для которых существует такое множество A попарно несравнимых наборов, что $|A \cap B_k^n| = a_k$ $(k = \overline{0, n})$. Тогда минимум величины $|Z_l^n(A)|$, взятый по всем таким множествам A, достигается в том случае, когда для любого $i > l$ множество $Z_i^n(A)$ является начальным отрезком слоя B_i^n.

1.24*. Пусть $A \subseteq B^n$ — такое множество наборов, что не существует наборов $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ из A, для которых $\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta} = \tilde{0}$, а $\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta} = \tilde{\gamma}$. Пусть $a_k = |A \cap B_k^n|$. Показать, что

$$a_{k+m} \Big/ \binom{n}{k+m} + a_k \Big/ \binom{n}{k} + a_m \Big/ \binom{n}{m} \leqslant 2$$

для любых натуральных k, m, не превосходящих n.

1.25. Множество $\Gamma(A) = \{\tilde{\alpha}\colon \tilde{\alpha} \in B^n \setminus A,\ \rho(\tilde{\alpha}, A) = 1\}$ называется *границей подмножества* $A \subset B^n$. Пусть $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$. Обозначим через $A_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ множество всех тех наборов из A, у которых координата с номером i_j равна σ_j $(j = \overline{1, k})$.

Центром множества A будем называть такой набор, у которого i-я координата равна 0, если $|A_0^i| \geqslant \frac{1}{2}|A|$, и равна 1 в противном случае. Обозначим через $\tilde{\alpha}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ набор, полученный из $\tilde{\alpha}$ заменой координат с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ на противоположные.

1) Показать, что для всякого $A \subseteq B^n$ существует $A' \subseteq B^n$, такое, что $|A'| = |A|$, $|\Gamma(A')| = |\Gamma(A)|$, и центром A' является вершина $\tilde{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

2) Будем говорить, что множество $A \subseteq B^n$ обладает свойством I, если для всякого $i = \overline{1, n}$ из $\tilde{\alpha} \in A_1^i$ вытекает, что $\tilde{\alpha}^i \in A$. Показать, что для всякого $A \subseteq B^n$ существует множество A' с центром $\tilde{0}$, такое, что $|A'| = |A|$, A' обладает свойством I и $|\Gamma(A')| \leqslant |\Gamma(A)|$.

3) Будем говорить, что множество $A \subseteq B^n$ обладает свойством II, если для любых i, j $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ из

$\tilde{\alpha} \in A_{10}^{i,j}$ вытекает, что $\tilde{\alpha}^{i,j} \in A$. Показать, что для всякого A с центром $\tilde{0}$, обладающего свойством I, существует A' с центром в $\tilde{0}$, обладающее свойствами I, II и такое, что $|A| = |A'|$, $|\Gamma(A')| \leqslant |\Gamma(A)|$.

4*) Показать, что $\min |\Gamma(A)|$ по всем $A \subseteq B^n$, таким, что $\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} < |A| \leqslant \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}$, достигается на множестве $A = S_{k-1}^n(\tilde{0}) \cup M_k^n(\tilde{\alpha})$, где $M_k^n(\tilde{\alpha})$ — некоторый начальный отрезок слоя B_k^n (см. задачу 1.23).

1.26. Пусть $\varphi(n)$ ($\varphi'(n)$) — максимальная мощность множества $A \subseteq B^n$, такого, что $\|\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}\| = 1$ (соответственно $\|\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}\| \geqslant 1$) для любых двух различных векторов из A. Показать, что:

1) $\varphi(n) = n$; 2) $\varphi'(n) = 2^{n-1}$.

1.27. Пусть $F(n, k)$ — семейство подмножеств A множества B^n, таких, что $\|\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}\| \geqslant k$ для любых $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ из A. Пусть $\varphi(n, k) = \max\limits_{A \in F(n, k)} |A|$. Доказать следующие утверждения:

1) $\varphi(n, k) \geqslant \sum\limits_{i =]\frac{n+k+1}{2}[}^{n} \binom{n}{i}$.

2) Пусть $A \subset F(n, k)$; тогда $|A \cap B_l^n| + |A \cap B_{n-l+k-1}^n| \leqslant \binom{n}{l}$.

3) При $l \geqslant \frac{n+k+1}{2}$ равенство $|A \cap B_l^n| + |A \cap B_{n-l+k-1}^n| = \binom{n}{l}$ достигается лишь в случае, когда $A \cap B_{n-l+k-1}^n = \varnothing$.

4) $\varphi(n, k) = \sum\limits_{i=\frac{n+k+1}{2}}^{n} \binom{n}{i}$ при нечетном $n+k$,

$$\varphi(n, k) = \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}-1} + \sum_{i=\frac{n+k}{2}+1}^{n} \binom{n}{i} \text{ при четном } n+k.$$

1.28. Пусть $F_r(n)$ — семейство подмножеств $A \subseteq B^n$, таких, что $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \leqslant 2r$ для любых $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ из A. Пусть $\varphi_r(n) = \max\limits_{A \in F_r(n)} |A|$.

1*) Показать, что максимум $|A|$ по всем $A \in F_r(n)$ достигается на множествах вида $S_r^n(\tilde{\alpha})$ и равен $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}$.

2) Для нечетного n и $r = \frac{n-1}{2}$ привести пример множества $A \in F_r(n)$, не являющегося шаром радиуса r, для которого $|A| = \varphi_r(n)$.

1.29*. Будем говорить, что подмножество $A \subseteq B^n$ обладает свойством I, если любые два вектора из A имеют общую единичную координату, обладает свойством II, если для любого $\tilde{\alpha} \in A$ противоположный вектор $\tilde{\bar{\alpha}}$ не лежит в A, и, наконец, обладает свойством III, если из $\tilde{\alpha} \in A$ и $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$ вытекает, что $\tilde{\beta} \in A$. Пусть $\psi(n)$ — число подмножеств $A \subseteq B^n$, обладающих одновременно свойствами I и II, а $\varphi(n)$ — число подмножеств $B \subseteq B^n$, обладающих свойством III. Показать, что:

1) $\psi(n) \geqslant 2^{\binom{n-1}{[(n-1)/2]}}$; 2) $\psi(n) \leqslant \varphi^2(n-1)$.

1.30. Пусть $A \subset B^n$, $R(A)$ — число таких ребер $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, что $\tilde{\alpha} \in A$, $\tilde{\beta} \in B^n \setminus A$. Показать, что $|R(A)| \geqslant \min\{|A|, 2^n - |A|\}$.

1.31. Доказать следующие утверждения:

1) Число различных граней фиксированного направления $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ равно 2^k.

2) Две различные грани одного направления не пересекаются.

3) Объединение всех граней куба B^n, имеющих заданное направление, дает весь куб.

4) Число всех граней ранга k куба B^n равно $\binom{n}{k} \cdot 2^k$.

5) Общее число граней куба B^n равно 3^n.

6) Число граней размерности k, содержащих заданную вершину $\tilde{\alpha}$, равно $\binom{n}{k}$.

7) Число граней размерности k, содержащих заданную грань размерности l, равно $\binom{n-l}{k-l}$.

8) Число k-мерных граней, пересекающихся с заданной l-мерной гранью куба B^n, равно $\sum_{j=0}^{\min(k,\,l)} \binom{l}{j} 2^{l-j} \binom{n-l}{k-j}$.

1.32. *Интервалом куба* B^n называется множество вида $\{\tilde{\gamma}: \tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\gamma} \leqslant \tilde{\beta}\}$, где $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ — некоторые такие вершины, что $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$. Число $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ называется *размерностью интервала*. Показать, что грань размерности k является интервалом размерности k.

1.33. Пусть g_1, g_2, g_3 — грани куба B^n. Показать, что из $g_1 \cap g_2 \neq \varnothing$, $g_2 \cap g_3 \neq \varnothing$, $g_3 \cap g_1 \neq \varnothing$ вытекает, что $(g_1 \cap g_2) \cap g_3 \neq \varnothing$.

1.34. Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_s$ — такие целые неотрицательные числа, что $\sum_{i=1}^{s} 2^{n_i} \leqslant 2^n$. Тогда в B^n существуют попарно непересекающиеся грани $g_1, g_2, \ldots, g_s$, размерности которых соответственно равны $n_1, n_2, \ldots, n_s$.

1.35. Грани g_1 и g_2 куба B^n называются *несравнимыми*, если не выполняется ни одно из включений $g_1 \subseteq g_2$, $g_2 \subseteq g_1$.

1) Показать, что существует множество граней куба B^n, состоящее из $\binom{n}{[n/3]}\binom{n-[n/3]}{[n/3]}$ попарно несравнимых граней.

2) Показать, что мощность всякого множества попарно несравнимых граней куба B^n не превосходит $\binom{n}{[n/3]} \times$ $\times \binom{n-[n/3]}{[n/3]}$.

1.36. Пусть $L(n, k)$ — минимальное число таких вершин из B^n, что в каждой k-мерной грани находится хотя бы одна из этих вершин. Доказать, что:

1) $L(n, 1) = 2^{n-1}$;

2) $L(n, n-1) = 2$;

3) $L(n, 2) \leqslant [2^n/3]$;

4*) $m \leqslant L(n, n-2) \leqslant m+2$, где m — наименьшее целое, для которого $\binom{m}{[m/2]} \geqslant n$;

5) $L(n, k) \leqslant \sum_{i=0}^{[n/k]} \binom{n}{ki}$;

6) $L(n, k) \geqslant 2^r L(r, k)$.

1.37. Показать, что наборы из B^n можно расположить в последовательность $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_{2^n}$, являющуюся циклом.

1.38. Показать, что в B^n нет циклов нечетной длины.

1.39. Двоичный вектор $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1})$ будем называть *n-универсальным*, если для всякого вектора $(\beta_0, \beta_1, \ldots$ $\ldots, \beta_{n-1})$ из B^n существует такой номер k, что $\beta_i = \alpha_{k \oplus i}$

($i=\overline{0,\ n-1}$), где $k\oplus i=k+i \pmod N$). Выяснить, является ли вектор $\tilde{\alpha}$ n-универсальным, если:

1) $\tilde{\alpha}=(0011)$, $n=2$;

2) $\tilde{\alpha}=(01011)$, $n=2$;

3) $\tilde{\alpha}=(00110)$, $n=2$;

4) $\tilde{\alpha}=(00011101)$, $n=3$.

1.40. Доказать, что для всякого натурального n существует n-универсальный вектор длины 2^n и не существует n-универсальных векторов длины, меньшей 2^n.

1.41. Цикл Z куба B^n называется $2d$-*циклом*, если $|Z\cap S_d^n(\tilde{\alpha})|=2d+1$ для всех $\tilde{\alpha}\in Z$, т. е. если для любой вершины $\tilde{\alpha}$ цикла Z множество вершин цикла, находящихся на расстоянии, не превосходящем d (по кубу), совпадает с множеством вершин, находящихся на расстоянии, не большем d «вдоль цикла».

1) Пусть $l(n)$ — максимальная длина 2-цикла в B^n. Найти $l(n)$ для $n=\overline{2,\ 5}$.

2) Пусть Z — цикл в B^n. Показать, что в любой грани размерности 4 имеется не более восьми вершин цикла Z.

3*) Показать, что максимальная длина цикла в B^n не превосходит 2^{n-1}, $n>3$.

1.42. Пара $(\tilde{\alpha}_i,\ \tilde{\alpha}_{i+1})$, составленная из двух последовательных вершин цикла Z куба B^n, называется *ребром цикла*. Показать, что в B^5 существует цикл длины 32, любые четыре последовательные ребра которого имеют попарно различные направления.

1.43. Пусть $a_1,\ \ldots,\ a_n$ — такие числа, что $a_i>2$ ($i=\overline{1,\ n}$). Показать, что число сумм $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{\sigma_i}a_i$, $\sigma_i\in\{0,\ 1\}$, $i=\overline{1,\ n}$, удовлетворяющих условию $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{\sigma_i}a_i\right|\leqslant 1$, не превосходит $\binom{n}{[n/2]}$.

1.44. Пусть $A\subseteq B^n$, $|A|>2^{n-1}$. Показать, что существует не менее n ребер куба, целиком содержащихся в A.

§ 2 Способы задания булевых функций. Элементарные функции. Формулы. Операция суперпозиции

Набор символов переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем обозначать через $\tilde{x}^n$ (или $\tilde{x}$), а множество тех же символов переменных — через X^n. Функция $f(\tilde{x}^n)$, определенная на множестве B^n и принимающая значения из множества $\{0, 1\}$, называется *функцией алгебры логики* или *булевой функцией*. Множество всех булевых функций от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будем обозначать через $P_2(X^n)$.

Булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно задать таблицей $T(f)$ (см. табл. 1). Здесь наборы $\tilde{\sigma}$ расположены в порядке возрастания их номеров. В дальнейшем, предполагая такое стандартное расположение наборов, будем задавать функцию $f(\tilde{x}^n)$ вектором $\tilde{\alpha}_f^{2^n} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1})$, в котором координата α_i представляет собой значение функции $f(\tilde{x}^n)$ на наборе $\tilde{\sigma}$ с номером i $(i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$.

ТАБЛИЦА 1

x_1	x_2	....	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0	0	...	0	0	$f(0, 0, \ldots, 0, 0)$
0	0	...	0	1	$f(0, 0, \ldots, 0, 1)$
0	0	...	1	0	$f(0, 0, \ldots, 1, 0)$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .
1	1	...	1	1	$f(1, 1, \ldots, 1, 1)$

Символом N_f будем обозначать множество $\{\tilde{\sigma}: (\tilde{\sigma} \in B^n) \,\&\, (f(\tilde{\sigma}) = 1)\}$.

Булева функция $f(\tilde{x}^n)$ может быть задана также прямоугольной таблицей $\Pi_{k,\, n-k}(f)$ (см. табл. 2), в которой значение $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ функции f помещается на пересечении «строки» $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$ и «столбца» $(\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, \ldots, \sigma_n)$, $1 \leqslant k < n$.

Булевы функции, заданные табл. 3, 4, будут считаться *элементарными*.

Приведем обозначения и названия этих функций.

1) Функции 0 и 1 называются соответственно *тождественным нулем* и *тождественной единицей*.

ТАБЛИЦА 2

	$0\ 0 \ldots \sigma_{k+1} \ldots 1$ $0\ 0 \ldots \sigma_{k+2} \ldots 1$ $\ldots\ldots\ldots\ldots$ $0\ 1 \ldots \sigma_n \ldots 1$	x_{k+1} x_{k+2} $\ldots$ x_n
$x_1\ x_2 \ldots x_k$		
$0\ 0 \ldots 0$ $0\ 0 \ldots 1$ $\ldots\ldots$ $\sigma_1\ \sigma_2 \ldots \sigma_k$ $\ldots\ldots$ $1\ 1 \ldots 1$	$f(\sigma)$	

2) Функция f_1 называется *тождественной функцией* и обозначается через x.

3) Функция f_2 называется *отрицанием* x, обозначается $\bar{x}$ или $\urcorner x$ и часто читается «*не* x».

ТАБЛИЦА 3

x	0	1	f_1	f_2
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

ТАБЛИЦА 4

x_1	x_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

4) Функция f_3 называется *конъюнкцией* x_1 *и* x_2, обозначается $x_1 \& x_2$ или $x_1 \cdot x_2$, или x_1x_2, или $\min(x_1, x_2)$ и часто читается «x_1 *и* x_2».

5) Функция f_4 называется *дизъюнкцией* x_1 *и* x_2, обозначается $x_1 \vee x_2$ или x_1+x_2, или $\max(x_1, x_2)$ и часто читается «x_1 *или* x_2».

6) Функция f_5 называется *суммой по модулю* 2 x_1 *и* x_2, обозначается $x_1 \oplus x_2$ и часто читается «x_1 *плюс* x_2».

7) Функция f_6 называется *эквивалентностью* x_1 *и* x_2, обозначается $x_1 \sim x_2$ или $x_1 \leftrightarrow x_2$, или $x_1 \equiv x_2$ и часто читается «x_1 *эквивалентно* x_2».

8) Функция f_7 называется *импликацией* x_1 *и* x_2, обозначается $x_1 \to x_2$ или $x_1 \supset x_2$ и часто читается «x_1 *имплицирует* x_2».

9) Функция f_8 называется *штрихом Шеффера* x_1 *и* x_2, обозначается $x_1 \mid x_2$ и часто читается «*не* x_1 *и* x_2».

10) Функция f_9 называется *стрелкой Пирса* x_1 *и* x_2, обозначается $x_1 \downarrow x_2$ и часто читается «*не* x_1 *или* x_2».

Иногда функции 0 и 1 рассматриваются как функции, зависящие от пустого множества переменных.

Символы $\neg$, &, $\vee$, $\oplus$, $\sim$ и т. д., участвующие в обозначениях элементарных функций, называются *логическими связками*.

Зафиксируем некоторый *алфавит переменных* X (конечный или счетно-бесконечный). Пусть $\Phi = \{f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \ldots\}$ — множество *функциональных символов*, где верхние индексы указывают *местность* (*арность*) символов. Иногда верхние индексы опускаются, но при этом арности функциональных символов предполагаются известными.

Определение 1. *Формулой над множеством* Φ называется всякое (и только такое) выражение вида:

1) f_k и $f_j(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$, где f'_k — нуль-местный, а f_j — n-местный функциональные символы и $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots$ $\ldots, x_{i_n}$ — переменные из множества X;

2) $f_m(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_s)$, где f_m — s-местный функциональный символ и $\mathfrak{A}_i$ — либо формула над Φ, либо переменная из X, $i = \overline{1, s}$.

Для акцентирования внимания на том, что в формуле $\mathfrak{A}$ используются *только переменные из* X (или *только функциональные символы из* Φ), будем писать $\mathfrak{A}(X)$ (соответственно $\mathfrak{A}[\Phi]$).

Иногда формулы вида $f(x, y)$ записывают либо как (xfy), либо как xfy, а формулу $f(x)$ — как (fx) или fx. При этом символы f называют *связками*.

Обычно в качестве связок употребляются символы из множества $\mathfrak{S} = \{\neg, \&, \vee, \oplus, \sim, \rightarrow, |, \downarrow\}$.

Определение 2. *Формулой над* $\mathfrak{S}$ называется всякое (и только такое) выражение вида:

1) x — любая переменная из множества X;

2) $(\neg\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} | \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \downarrow \mathfrak{B})$, где $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — формулы над $\mathfrak{S}$.

Обычно принимаются следующие соглашения для сокращения записи формул над множеством связок $\mathfrak{S}$:

а) внешние скобки у формул опускаются;

б) формула $(\neg\mathfrak{A})$ записывается в виде $\overline{\mathfrak{A}}$;

в) формула $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$ записывается в виде $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})$ или $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$;

г) считается, что связка $\neg$ *сильнее* любой двухместной связки из $\mathfrak{S}$;

д) связка $\&$ считается *сильнее*, чем любая из связок $\vee$, $\oplus$, $\sim$, $\rightarrow$, $|$, $\downarrow$.

Эти соглашения позволяют, например, формулу $((\neg x) \rightarrow ((x \& y) \vee z))$ записать в виде $\bar{x} \rightarrow (xy \vee z)$.

Употребляется и «*смешанная*» запись формул, например, $x \oplus f(y, z)$ или $x_1 f(x_2, 0, x_3) \vee \bar{x}_1 f(1, \bar{x}_2, x_3)$.

Пусть каждому функциональному символу $f_i^{(n_i)}$ из множества Φ сопоставлена некоторая функция $F_i: B^{n_i} \rightarrow B$. Понятие *функции* $\varphi_{\mathfrak{A}}$, *реализуемой формулой* $\mathfrak{A}$ *над множеством* Φ, определяется по индукции:

1) если $\mathfrak{A} = f_i^{(n_i)}(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n_i}})$, то для всякого набора $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_i})$ значений переменных $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n_i}}$ значение функции $\varphi_{\mathfrak{A}}$ равно $F_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_i})$;

2) если $\mathfrak{A} = f(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m)$, где $f \in \Phi$, $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}_k(y_{k1}, y_{k2}, \ldots, y_{ks_k})$ — формула над Φ или переменная из X и на всяком наборе $(\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{ks_k})$ значений переменных $y_{k1}, y_{k2}, \ldots, y_{ks_k}$ функция $\varphi_{\mathfrak{A}_k}$ равна β_k $(k = \overline{1, m})$, то

$$\varphi_{\mathfrak{A}}(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1s_1}, \ldots, \alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{ks_k}, \ldots \\ \ldots, \alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \ldots, \alpha_{ms_m}) = F(\beta_1, \ldots, \beta_k, \ldots, \beta_m)$$

(здесь F — функция, сопоставленная функциональному символу f).

Если $\mathfrak{A} = f_i^{(n_i)}(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n_i}})$, то $\varphi_{\mathfrak{A}}$ обозначается обычно через $F_i(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n_i}})$. Если же

$\mathfrak{A} = f(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m)$, то $\varphi_{\mathfrak{A}}$ обозначается через $F(\varphi_{\mathfrak{A}_1}(y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1s_1}), \ldots, \varphi_{\mathfrak{A}_m}(y_{m1}, y_{m2}, \ldots, y_{ms_m}))$.

Понятие *функции* $\varphi_{\mathfrak{A}}$, *реализуемой формулой* $\mathfrak{A}$ *над множеством связок* $\mathfrak{S}$, вводится следующим образом:

1) формуле $\mathfrak{A} = x$, где $x \in X$, сопоставляется тождественная функция $\varphi_{\mathfrak{A}}(x) = x$;

2) если $\mathfrak{A} = (\neg \mathfrak{B})$ (или $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{C})$, где $\circ \in \{\&, \vee, \oplus, \sim, \rightarrow, |, \downarrow\}$), то $\varphi_{\mathfrak{A}} = \bar{\varphi}_{\mathfrak{B}}$ (соответственно $\varphi_{\mathfrak{A}} = \varphi_{\mathfrak{B}} \circ \varphi_{\mathfrak{C}}$, где символ $\circ$ надо понимать уже́ как обозначение для соответствующей элементарной булевой функции; см. табл. 3, 4).

Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — множество тех переменных, которые встречаются хотя бы в одной из формул $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}$. Формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются *эквивалентными* (обозначение: $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ или $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), если на всяком наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значения функций $\varphi_{\mathfrak{A}}$ и $\varphi_{\mathfrak{B}}$, реализуемых соответственно формулами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, совпадают.

Пусть Φ — множество функциональных символов (или логических связок), а P — множество соответствующих им функций. *Суперпозицией над множеством* P называется всякая функция F, которую можно реализовать формулой над множеством Φ.

2.1. Каково число функций в $P_2(X^n)$, принимающих на противоположных наборах одинаковые значения?

2.2. Найти число функций в $P_2(X^n)$, которые на любой паре соседних наборов принимают противоположные значения.

2.3. Каково число функций в $P_2(X^n)$, принимающих значение 1 менее чем на k наборах из B^n?

2.4. По функциям $f(x_1, x_2)$ и $g(x_3, x_4)$, заданным векторно, построить векторное задание функции h:

1) $\tilde{\alpha}_f = (1011)$, $\tilde{\alpha}_g = (1001)$,
$$h(x_2, x_3, x_4) = f(g(x_3, x_4), x_2);$$
2) $\tilde{\alpha}_f = (1011)$, $\tilde{\alpha}_g = (1001)$,
$$h(\tilde{x}^4) = f(x_1, x_2) \vee g(x_3, x_4);$$
3) $\tilde{\alpha}_f = (1000)$, $\tilde{\alpha}_g = (0111)$,
$$h(\tilde{x}^4) = f(x_1, x_2) \,\&\, g(x_3, x_4).$$

2.5. Пусть ν_1 — число, двоичное разложение которого есть набор (x_1, x_2), а ν_2 — число, двоичное разложение которого есть (x_3, x_4). Пусть $f_i(\tilde{x}^4)$ — i-й разряд двоичного разложения числа $|\nu_1-\nu_2|$, $i=1, 2$. Построить прямоугольную таблицу $\Pi_{2,2}$ функций $f_1(\tilde{x}^4)$ и $f_2(\tilde{x}^4)$.

2.6. 1) Функция $f(\tilde{x}^3)$ определяется следующим образом: она равна 1 либо при $x_1=1$, либо если переменные x_2 и x_3 принимают разные значения, а значение переменной x_1 меньше значения переменной x_3; в противном случае функция обращается в нуль. Составить таблицы $T(f)$ и $\Pi_{1,2}(f)$ функции $f(\tilde{x}^3)$ и выписать наборы множества N_f.

2) Функция $f(\tilde{x}^4)$ задается так: она равна нулю только на таких наборах $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, для которых справедливо неравенство $\alpha_1+\alpha_2 > \alpha_3+2\alpha_4$. Построить таблицу $T(f)$ и выписать наборы множества N_f этой функции.

2.7. Функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *симметрической*, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ при любой подстановке $\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n\end{pmatrix}$.

1) Показать, что если $f(\tilde{x}^n)$ — симметрическая функция, то из равенства $\|\tilde{\alpha}^n\|=\|\tilde{\beta}^n\|$ следует равенство $f(\tilde{\alpha}^n)=f(\tilde{\beta}^n)$.

2) Найти число симметрических функций в $P_2(X^n)$.

2.8. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная функция алгебры логики ($n \geqslant 1$). Сопоставим ей симметрическую функцию $S(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, где $m=2^n-1$: $S(\tilde{\alpha}^m)=f(\tilde{\beta}^n)$, если $\|\tilde{\alpha}^m\|=\nu(\tilde{\beta}^n)$. Доказать, что

$$S(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{2^{n-1}\text{ раз}}, \underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{2^{n-2}\text{ раз}}, \ldots, \underbrace{x_i, \ldots, x_i}_{2^{n-i}\text{ раз}}, \ldots, \underbrace{x_{n-1}, x_{n-1}}_{2\text{ раза}}, x_n)=$$
$$=f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n).$$

2.9. Выяснить, какие из нижеперечисленных выражений являются формулами над множеством логических связок $\{\neg, \&, \vee, \rightarrow\}$:

1) $x \rightarrow y$; 5) $(x \rightarrow (y \& (\neg x)))$;
2) $(x \&) \neg y$; 6) $(x \& y) \neg z$;
3) $(x \leftarrow y)$; 7) $(\neg x \rightarrow z)$.
4) $(y \rightarrow (x))$;

2.10. Выяснить, сколькими способами можно расставить скобки в выражении A, чтобы всякий раз получалась формула над множеством логических связок $\{\neg, \&, \vee, \to\}$, если:

1) $A = \neg x \to y \& x$; 5

2) $A = x \& y \& \neg \neg z \vee x$; 9

3) $A = x \to \neg y \to z \& \neg x$. 7

2.11. *Сложностью формулы* над множеством логических связок $\mathfrak{S}$ назовем число связок в ней. Индукцией по сложности формулы доказать, что в формуле

1) ненулевой сложности содержится хотя бы одна пара скобок;

2) число левых скобок равно числу правых;

3) нет двух связок, стоящих рядом;

4) нет двух символов переменных, стоящих рядом.

2.12. *Индексом связки в формуле* будем называть разность между числом левых скобок, предшествующих рассматриваемой связке в данной формуле, и числом правых скобок, предшествующих этой связке. Доказать, что всякая формула ненулевой сложности над множеством $\{\neg, \&, \vee, \to\}$

1) содержит единственную связку индекса 1;

2) может быть единственным образом представлена в одном из следующих видов: $(\neg \mathfrak{A})$, $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$, где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы над множеством $\{\neg, \&, \vee, \to\}$.

2.13. Рассмотрим бесскобочную запись формул над множеством связок $\{\neg, \&, \vee, \to\}$, вместо $(\neg x)$, $(x \& y)$, $(x \vee y)$ и $(x \to y)$ будем писать $\neg x$, $\& xy$, $\vee xy$, $\to xy$. Например, формула $((\neg x) \to (y \vee (\neg z))$ будет иметь вид $\to \neg x \vee y \neg z$. Доказать, что если каждую из связок $\&$, $\vee$, $\to$ оценить числом $+1$, каждый символ переменной — числом -1, а связку $\neg$ — нулем, то в бесскобочной записи выражение A будет формулой тогда и только тогда, когда сумма оценок всех вхождений символов в A равна -1 и в каждом начальном отрезке выражения A эта сумма неотрицательна.

2.14. Выяснить, является ли выражение A формулой над множеством Φ, если:

1) $A = f^{(2)}(g^{(2)}(x, y), f^{(2)}(x))$, $\Phi = \{f^{(2)}, g^{(2)}, \varphi^{(1)}\}$;

2) $A =)x(\varphi^{(1)}$, $\Phi = \{g^{(1)}, \varphi^{(1)}\}$;

3) $A = \varphi^{(1)}(f^{(2)}(1, x))$, $\Phi = \{f^{(2)}, \varphi^{(1)}\}$;

4) $A = g^{(2)}(\varphi^{(1)}, f^{(3)}(x, y, \varphi^{(1)}))$, $\Phi = \{f^{(3)}, g^{(2)}, \varphi^{(1)}\}$;

5) $A = (\varphi^{(1)}(f^{(2)}(x, \varphi^{(1)}(x))))$, $\Phi = \{f^{(2)}, \varphi^{(1)}\}$.

2.15. Найти вектор $\tilde{\alpha}_\varphi$ функции φ, реализуемой формулой $\mathfrak{A}$ над множеством $\Phi = \{f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, g^{(2)}\}$, если функциональным символам $f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, g^{(2)}$ сопоставлены булевы функции, определяемые соответственно векторами (10), (1011) и (1000):

1) $\mathfrak{A} = f_2^{(2)}(f_1^{(1)}(g^{(2)}(x, f_1^{(1)}(y))), y)$;

2) $\mathfrak{A} = g^{(2)}(f_1^{(1)}(f_2^{(2)}(x, y)), g^{(2)}(x, f_1^{(1)}(y)))$;

3) $\mathfrak{A} = f_1^{(1)}(f_2^{(2)}(x, g^{(2)}(f_2^{(2)}(x, y), f_1^{(1)}(y))))$.

2.16. Построить таблицы функций, реализуемых следующими формулами (над множеством связок $\mathfrak{S}$):

1) $(x \to y) \oplus ((y \to z) \oplus (z \to x))$;

2) $\overline{(\bar{x} \vee y) \vee (x \cdot \bar{z})} \downarrow (x \sim y)$;

3) $x \to (\bar{z} \sim (y \oplus xz))$;

4) $(((x \mid y) \downarrow z) \mid y) \downarrow z$.

2.17. Формула над множеством $\mathfrak{S}$ называется *тождественно истинной* (*тождественно ложной*), если реализуемая ею функция равна 1 (соответственно нулю) на всяком наборе значений переменных. Выяснить, какие из нижеприводимых формул являются тождественно истинными или тождественно ложными:

1) $(x \to y) \to ((x \vee z) \to (y \vee z))$;

2) $((x \oplus y) \sim z)(x \to yz)$;

3) $((\bar{x} \vee \bar{y}) \downarrow (x \oplus \bar{y})) \oplus \overline{(x \to \bar{y}} \to (\bar{x} \vee y))$;

4) $((x \vee \bar{y}) z \to ((x \sim z) \oplus y))(x(yz))$.

2.18. Эквивалентны ли формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$?

1) $\mathfrak{A} = ((x \vee y) \vee z) \to ((x \vee y)(x \vee z))$, $\quad \mathfrak{B} = x \sim z$;

2) $\mathfrak{A} = (x \to y) \to z$, $\quad \mathfrak{B} = x \to (y \to z)$;

3) $\mathfrak{A} = ((x \oplus y) \to (x \vee y))((\bar{x} \to y) \to (x \oplus y))$, $\mathfrak{B} = x \mid y$;

4) $\mathfrak{A} = \overline{(x \to y) \vee ((x \to z) y)}$, $\quad \mathfrak{B} = (x\bar{y})(\bar{y} \to x\bar{z})$.

2.19. Найти все функции, зависящие только от переменных из множества $\{x, y\}$ и являющиеся суперпозициями над множеством P:

1) $P = \{u_1 \oplus u_2, 1\}$;

2) $P = \{u_1 u_2 \oplus (u_1 \vee u_2)\}$;

3) $P = \{f(u_1, u_2) = (1101), g(u_1, u_2, u_3) = (10010110)\}$ [1].

---

[1]) Здесь и в дальнейшем при векторном задании функций вместо записи $\tilde{\alpha}_f = \tilde{\beta}$ будет употребляться запись $f = \tilde{\beta}$.

2.20. *Глубина формулы* $\mathfrak{A}$ *над множеством* Φ (обозначение: $\operatorname{dep}_{\Phi}(\mathfrak{A})$) определяется по индукции:

(I) если $\mathfrak{A}$ — символ переменной или 0-местный функциональный символ, то $\operatorname{dep}_{\Phi}\mathfrak{A}=0$;

(II) если $\mathfrak{A}=f^{(n)}(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$, где $f^{(n)}\in\Phi$, то

$$\operatorname{dep}_{\Phi}(\mathfrak{A})=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\operatorname{dep}_{\Phi}(\mathfrak{A}_i)+1.$$

Найти формулу $\mathfrak{A}$ над множеством $\{\downarrow\}$, имеющую минимальную глубину и реализующую функцию:

1) $f=x\vee y$; 2) $f=x\oplus y$; 3) $f=xy$.

2.21. Выяснить, можно ли реализовать функцию f формулой $\mathfrak{A}$ глубины k над множеством связок S, когда:

1) $f=xy$, $k=2$, $S=\{|\}$;

2) $f=x\to y$, $k=3$, $S=\{\vee, \sim\}$;

3) $f=x\oplus y\oplus z$, $k=2$, $S=\{\to, \&\}$.

2.22. Доказать, что функцию f нельзя реализовать формулой над множеством связок S, когда:

1) $f=x\oplus y$, $S=\{\&\}$;

2) $f=x\cdot y$, $S=\{\to\}$;

3) $f=x\vee y$, $S=\{\sim\}$.

2.23. Можно ли реализовать функцию f формулой глубины $k+1$ над множеством S, если она реализуема формулой глубины k над тем же множеством S?

2.24. Функция f из P_2 реализуема формулой глубины k над множеством S. Показать, что функция f может быть реализована над тем же множеством S некоторой формулой, глубина которой больше k.

При оперировании с функциями алгебры логики часто бывают полезными следующие эквивалентности (которые в дальнейшем будут называться *основными эквивалентностями*):

$x\circ y=y\circ x$ (коммутативность связки $\circ$, где символ $\circ$ является общим обозначением для связок $\&$, $\vee$, $\oplus$, $\sim$, $|$, $\downarrow$);

$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$ (ассоциативность связки $\circ$, где $\circ$ — общее обозначение для $\&$, $\vee$, $\oplus$, $\sim$);

$\overline{x\,\&\,y}=\bar{x}\vee\bar{y}$ и $\overline{x\vee y}=\bar{x}\,\&\,\bar{y}$ (правила де Моргана);

$x\vee(x\,\&\,y)=x$ и $x\,\&\,(x\vee y)=x$ (правила поглощения);

$x\vee(\bar{x}\,\&\,y)=x\vee y$ и $x\,\&\,(\bar{x}\vee y)=x\,\&\,y$;

$x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z)$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции);

$x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции);

$x \& (y \oplus z) = (x \& y) \oplus (x \& z)$ (дистрибутивность конъюнкции относительно сложения по mod 2);

$$0 = x \& \bar{x} = x \& 0 = x \oplus x;$$

$$1 = x \vee \bar{x} = x \vee 1 = x \sim x;$$

$$x = \bar{\bar{x}} = x \vee x = x \& x = x \& 1 = x \vee 0;$$

$$\bar{x} = x \oplus 1, \quad x \sim y = (x \oplus y) \oplus 1;$$

$$x \oplus y = (x \& \bar{y}) \vee (\bar{x} \& y), \quad x \to y = ((x \& y) \oplus x) \oplus 1.$$

2.25. Проверить, справедливы ли следующие соотношения:

1) $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$;
2) $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$;
3) $x \& (y \sim z) = (x \& y) \sim (x \& z)$;
4) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;
5) $x \to (y \& z) = (x \to y) \& (x \to z)$;
6) $x \oplus (y \to z) = (x \oplus y) \to (x \oplus z)$;
7) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

2.26. Реализовать функцию f формулой над множеством связок S, если:

1) $f = x \to y$, $S = \{\neg, \vee\}$;
2) $f = x \vee y$, $S = \{\to\}$;
3) $f = x \sim y$, $S = \{\&, \to\}$;
4) $f = x \mid y$, $S = \{\downarrow\}$.

2.27. Используя основные эквивалентности, доказать эквивалентность формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, когда:

1) $\mathfrak{A} = (\bar{x} \& \bar{z}) \vee (x \& y) \vee (x \& \bar{z})$, $\mathfrak{B} = x \& \overline{y \& z} \vee \bar{x} \& z$;
2) $\mathfrak{A} = (x \to y) \to ((x \& \bar{y}) \oplus (x \sim \bar{y}))$,
$\mathfrak{B} = (x \vee y) \& (\bar{x} \vee \bar{y})$;
3) $\mathfrak{A} = x \to (x \& y \to ((x \to y) \to y) \& z)$,
$\mathfrak{B} = y \to (x \to z)$.

2.28. Показать, что формула $\mathfrak{A}$ эквивалентна формуле $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда тождественно истинна ровно одна из формул

$$(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \neg(\mathfrak{A} \to \mathfrak{A})).$$

2.29. Доказать, что формула $\mathfrak{A}$, содержащая только связку $\sim$, тождественно истинна тогда и только тогда, когда любая переменная, содержащаяся в формуле $\mathfrak{A}$, входит в нее четное число раз.

2.30. Через $S^x_{\mathfrak{C}}\mathfrak{A}|$ обозначается формула, получающаяся из формулы $\mathfrak{A}$ одновременной заменой каждого вхождения переменной x на формулу $\mathfrak{C}$. Если x не входит в формулу $\mathfrak{A}$, то (по определению) полагают $S^x_{\mathfrak{C}}\mathfrak{A}| = \mathfrak{A}$.

1) Доказать, что $\mathfrak{A}$ — тождественно истинная формула тогда и только тогда, когда тождественно истинна формула $S^x_{y_1 \to y_2}\mathfrak{A}|$, где y_1 и y_2 — какие-либо переменные, не входящие в формулу $\mathfrak{A}$.

2) Можно ли в 1) отбросить условие, что y_1 и y_2 не входят в формулу $\mathfrak{A}$?

2.31. 1) Пусть функция $f(x, y)$ из P_2 удовлетворяет соотношению

$$f(f(x, f(y, z)), f(f(x, y), f(x, z))) \equiv 1.$$

Доказать, что тогда справедливы следующие эквивалентности:

а) $f(x, x) \equiv 1$;

б) $f(x, f(y, x)) \equiv 1$;

в) $f(f(f(x, y), f(x, z)), f(x, f(y, z))) \equiv 1$;

г) $f(f(x, y), f(f(x, f(y, z)), f(x, z))) \equiv 1$;

д) $f(f(x, f(y, z)), f(y, f(x, z))) \equiv 1$.

2) Вытекают ли эквивалентности б), в) и г) из д)?

§ 3. Специальные виды формул. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Полиномы

Формула $x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2}^{\sigma_2} \& \ldots \& x_{i_r}^{\sigma_r}$ (формула $x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\sigma_r}$), где $\sigma_k \in \{0, 1\}$, $x_{i_k}^0 = \bar{x}_{i_k}$, $x_{i_k}^1 = x_{i_k}$, $i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ для всех $k = \overline{1, r}$, называется *конъюнкцией* (соответственно *дизъюнкцией*) *над множеством переменных* $X^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Конъюнкция (дизъюнкция) называется *элементарной* (сокращенно э. к. и э. д. соответственно), если $x_{i_j} \neq x_{i_k}$ при $j \neq k$. Символы $\&$ в э. к. будут для краткости опускаться. Выражения вида $x_{i_k}^{\sigma_k}$ будут называться *буквами*. Число букв в э. к. (в э. д.) называется *рангом* э. к. (э. д.). Константа 1 будет считаться э. к. нулевого ранга, а нуль — э. д. нулевого ранга.

Формула вида

$$\mathscr{D} = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_s \tag{1}$$

$\left(\text{краткая запись } \bigvee_{i=1}^{s} K_i\right)$, где K_i $(i=\overline{1, s})$ — конъюнкции, называется *дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно *д. н. ф.*).

Формула вида

$$\mathscr{K} = D_1 \,\&\, D_2 \,\&\, \ldots \,\&\, D_s \tag{2}$$

$\left(\text{краткая запись } \underset{i=1}{\overset{s}{\&}} D_i\right)$, где D_i $(i=\overline{1, s})$ — дизъюнкции, называется *конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно *к. н. ф.*). Число s называется *длиной д. н. ф.* (*длиной к. н. ф.*). Сумма рангов конъюнкций (дизъюнкций) называется *сложностью д. н. ф.* (*сложностью к. н. ф.*). Дизъюнктивная нормальная форма (конъюнктивная нормальная форма) над множеством переменных $X^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ называется *совершенной*, если она составлена из попарно различных элементарных конъюнкций (элементарных дизъюнкций) ранга n.

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — булева функция, и пусть $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$. Через $f_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}(\tilde{x}^n)$ или иногда через $S_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k} f(\tilde{x}^n) |$ будем обозначать функцию, полученную из $f(\tilde{x}^n)$ подстановкой на места переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ соответственно констант $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$. Функция $f_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}(\tilde{x}^n)$ называется $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k}$*-компонентой функции* $f(\tilde{x}^n)$ или *подфункцией* функции $f(\tilde{x}^n)$. Подфункция $f_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}(\tilde{x}^n)$ называется *собственной*, если $k \neq n$, $k \neq 0$. Подфункции функции $f(\tilde{x}^n)$ *различны*, если они отличаются как функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пусть $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, тогда справедливо представление

$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)} x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k} f_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}(\tilde{x}^n), \tag{3}$$

где дизъюнкция берется по всем векторам $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$

из B^k. При $k=n$ это представление имеет вид

$$f(\tilde{x}^n)=\bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n). \tag{4}$$

Представление (4) можно записать в виде

$$f(\tilde{x}^n)=\bigvee_{\tilde{\sigma}:\, f(\tilde{\sigma})=1} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_n^{\sigma_n}. \tag{5}$$

Правая часть формулы (5) представляет собой совершенную д. н. ф. функции $f(\tilde{x}^n)$. Аналогично, справедливы представления

$$f(\tilde{x}^n)=\mathop{\&}_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k)}\left(x_{i_1}^{\bar{\sigma}_1}\vee x_{i_2}^{\bar{\sigma}_2}\vee\ldots\vee x_{i_k}^{\bar{\sigma}_k}\vee f_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}^{i_1,i_2,\ldots,i_k}(\tilde{x}^n)\right), \tag{6}$$

$$f(\tilde{x}^n)=\mathop{\&}_{\tilde{\sigma}^n:\, f(\tilde{\sigma}^n)=0}\left(x_1^{\bar{\sigma}_1}\vee x_2^{\bar{\sigma}_2}\vee\ldots\vee x_n^{\bar{\sigma}_n}\right). \tag{7}$$

Элементарная конъюнкция называется *монотонной*, если она не содержит отрицаний переменных. Формула

$$P(\tilde{x}^n)=K_1\oplus K_2\oplus\ldots\oplus K_s, \tag{8}$$

где K_i $(i=\overline{1,\ s})$ — попарно различные монотонные элементарные конъюнкции над множеством X^n, называется *полиномом Жегалкина* или *полиномом по модулю* 2. Наибольший из рангов элементарных конъюнкций, входящих в полином, называется *степенью* этого *полинома*. Число s называется *длиной полинома* (8). При $s=0$ полагаем $P(\tilde{x}^n)=0$.

3.1. С помощью эквивалентных преобразований привести к д. н. ф. формулу:

1) $F=(x_1\vee x_2\bar{x}_3)(x_1\vee x_3)$;

2) $F=((x_1\vee x_2\bar{x}_3x_4)((\bar{x}_2\vee x_4)\to x_1\bar{x}_3\bar{x}_4)\vee x_2x_3)\vee$
$\vee(\bar{x}_1\vee x_4)$;

3) $F=((x_1\to x_2x_3)(x_2x_4\oplus x_3)\to x_1\bar{x}_4)\vee\bar{x}_1$.

3.2. Представить в виде совершенной д. н. ф. следующие функции:

1) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\oplus x_2)\to x_2x_3$;

2) $f(\tilde{x}^3)=(01101100)$;

3) $f(\tilde{x}^3)=(10001110)$.

3.3. С помощью преобразований вида $A=Ax\vee A\bar{x}$, $A\vee A=A$ перейти от заданной д. н. ф. $D(\tilde{x}^3)$ к совершенной, если:

1) $D(\tilde{x}^3)=x_1\vee x_2x_3$;

2) $D(\tilde{x}^3) = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3$;

3) $D(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 x_3$.

3.4. С помощью соотношений вида $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$ преобразовать д. н. ф. из предыдущей задачи в к. н. ф.

3.5. Построить совершенную к. н. ф. для каждой из функций задачи 3.3.

3.6. Подсчитать число функций $f(\tilde{x}^n)$, для которых совершенная к. н. ф. является одновременно и д. н. ф.

3.7. Найти длину совершенной д. н. ф. функции $f(\tilde{x}^n)$:

1) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;

2) $f(\tilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee \bar{x}_n)$;

3) $f(\tilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \oplus$

$\oplus x_4 \oplus x_5 \oplus \ldots \oplus x_n$.

3.8. Пусть множества $X^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $Y^m = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ не пересекаются. Пусть совершенные д. н. ф. функций $f(\tilde{x}^n)$ и $g(\tilde{y}^m)$ имеют соответственно k и l слагаемых. Найти длину совершенной д. н. ф. следующих функций:

1) $f(\tilde{x}^n) \,\&\, g(\tilde{y}^m)$; 2) $f(\tilde{x}^n) \vee g(\tilde{y}^m)$; 3) $f(\tilde{x}^n) \oplus g(\tilde{y}^m)$.

3.9. Выразить x_1-, $\bar{x}_2$- и $\bar{x}_1 x_3$-компоненты функции $f(\tilde{x}^3)$ с помощью д. н. ф. минимальной сложности для:

1) $f(\tilde{x}^3) = (01101101)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to x_2) \oplus x_2\bar{x}_3$;

3) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to x_2\bar{x}_3) \oplus x_2$.

3.10. Среди функций, зависящих от переменных x_1 и x_2, найти те, которые имеют наибольшее число попарно различных подфункций.

3.11. Подсчитать число булевых функций $f(\tilde{x}^n)$, которые переходят в себя после перестановки x_1 и x_2.

3.12. Две функции $f(\tilde{x}^n)$, $g(\tilde{x}^n)$ *перестановочно эквивалентны*, если существует перестановка π чисел $1, \ldots, n$, такая, что $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$. Найти число классов перестановочно эквивалентных функций из $P_2(X^2)$.

3.13*. Функция $f_n(\tilde{x}^n)$ определяется рекуррентно следующими соотношениями:

$$f_4(\tilde{x}^n) = \bar{x}_1 x_2 (x_3 \vee x_4) \vee \bar{x}_2 (\bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_4) \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4,$$

$$f_{n+1}(\tilde{x}^{n+1}) = f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)\,\bar{x}_{n+1} \vee x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1} \quad (n \geqslant 4).$$

Для каждой функции из последовательности $\{f_n\}$ найти число различных подфункций вида $f_\sigma^i(\tilde{x}^n)$, $i = \overline{1, n}$, $\sigma \in \{0, 1\}$, никакие две из которых не являются перестановочно эквивалентными.

3.14. Доказать, что число различных функций $f(\tilde{x}^n)$, для которых данная функция $g(\tilde{x}^k)$ является подфункцией, не меньше $2^{2^n} - (2^{2^k} - 1)^{2^{n-k}}$ $(k \leqslant n)$.

3.15. Пусть $f_0^i(\tilde{x}^n) = f_1^i(\tilde{x}^n)$ для всякого $i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$. Доказать, что $f(\tilde{x}^n)$ — константа.

3.16. Найти число таких функций $f(\tilde{x}^n)$, что $f_{00}^{i,j}(\tilde{x}^n) = f_{11}^{i,j}(\tilde{x}^n)$ для всех $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

3.17. Пусть $h(\tilde{x}^n) = f(g_1(\tilde{x}^n), \ldots, g_{i-1}(\tilde{x}^n), g_i(\tilde{x}^n), g_{i+1}(\tilde{x}^n), \ldots, g_n(\tilde{x}^n))$, $n \geqslant 2$, и при всяком $i = 1, 2, \ldots, n$ и $\sigma \in \{0, 1\}$ выполняется соотношение

$$S_\sigma^i h(\tilde{x}^n)| = f(S_{\bar\sigma}^i g_1(\tilde{x}^n)|, \ldots, S_{\bar\sigma}^i g_{i-1}(\tilde{x}^n)|, \bar\sigma, S_{\bar\sigma}^i g_{i+1}(\tilde{x}^n)|, \ldots$$
$$\ldots, S_{\bar\sigma}^i g_n(\tilde{x}^n)|),$$

т. е. что x_i^σ-компонента суперпозиции функций $f, g_1, \ldots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, \ldots, g_n$ равна суперпозиции $x_i^{\bar\sigma}$-компонент функций $f, g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_n$. Пусть, кроме того, для всех j, k $(1 \leqslant j < k \leqslant n)$ и любых σ_j, σ_k из $\{0, 1\}$ $x_j^{\sigma_j} x_k^{\sigma_k}$-компонента функции $g_i(\tilde{x}^n)$ совпадает с $x_j^{\bar\sigma_j} x_k^{\bar\sigma_k}$-компонентой той же самой функции $g_i(\tilde{x}^n)$, $i = \overline{1, n}$. Показать, что $h(\tilde{x}^n)$ — константа.

3.18. Найти число монотонных элементарных конъюнкций ранга r над множеством X^n.

3.19. Найти число полиномов степени r над множеством переменных X^n.

3.20. Найти число различных полиномов длины k над множеством X^n, обращающихся в нуль на наборах $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$. (Полиномы считаются различными, если они различаются составом э. к.)

Примем следующую нумерацию монотонных элементарных конъюнкций над множеством переменных $X^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Каждой монотонной э. к. K сопоставим вектор $\tilde\sigma(K) = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ из B^n, в котором $\sigma_i = 1$ тогда и только тогда, когда x_i входит в K. Номером э. к. K будем называть число $\nu(\tilde\sigma(K)) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i 2^{n-i}$. Константа 1 будет иметь в этой нумерации номер нуль. Таким образом, каждый полином $P(\tilde{x}^n)$ можно записать в виде

$$P(\tilde{x}^n)=\beta_0\cdot 1\oplus\beta_1K_1\oplus\beta_2K_2\oplus\ldots\oplus\beta_{2^n-1}K_{2^n-1}, \qquad (9)$$

где K_i — э. к. с номером $i\,(i=\overline{0,\ 2^n-1})$. Вектор $\tilde{\beta}_P=(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{2^n-1})$ будем называть *вектором коэффициентов полинома* $P(\tilde{x}^n)$.

Метод неопределенных коэффициентов для построения полинома Жегалкина, реализующего функцию $f(\tilde{x}^n)$, состоит в следующем. Рассматривается полином в виде (9) и для каждого $\tilde{\alpha}\in B^n$ составляется уравнение $f(\tilde{\alpha})=P(\tilde{\alpha})$. Решение этих уравнений дает коэффициенты полинома $P(\tilde{x}^n)$.

Пример. $f(\tilde{x}^2)=x_1\to x_2$, $P(\tilde{x}^2)=\beta_0\oplus\beta_1x_2\oplus\beta_2x_1\oplus\beta_3x_1x_2$.

$$f(0,\ 0)=1=\beta_0\oplus\beta_1\cdot 0\oplus\beta_2\cdot 0\oplus\beta_3\cdot 0;$$
$$f(0,\ 1)=1=\beta_0\oplus\beta_1\cdot 1\oplus\beta_2\cdot 0\oplus\beta_3\cdot 0;$$
$$f(1,\ 0)=0=\beta_0\oplus\beta_1\cdot 0\oplus\beta_2\cdot 1\oplus\beta_3\cdot 0;$$
$$f(1,\ 1)=1=\beta_0\oplus\beta_1\cdot 1\oplus\beta_2\cdot 1\oplus\beta_3\cdot 1.$$

Находим $\beta_0=\beta_2=\beta_3=1$, $\beta_1=0$. Таким образом, $x_1\to x_2=1\oplus x_1\oplus x_1x_2$.

3.21. Методом неопределенных коэффициентов найти полиномы Жегалкина для функций:

1) $f(\tilde{x}^2)=(1001)$;

2) $f(\tilde{x}^3)=(01101000)$;

3) $f(\tilde{x}^3)=(11111000)$.

3.22. Введем операцию T над векторами из B^{2^n}. Если $n=1$ и $\tilde{\alpha}=(\alpha_0,\ \alpha_1)$, то $T(\tilde{\alpha})=(\alpha_0,\ \alpha_0\oplus\alpha_1)$. Пусть для каждого $\tilde{\sigma}\in B^{2^n}$ вектор $T(\tilde{\sigma})$ определен и вектор $\tilde{\alpha}$ из $B^{2^{n+1}}$ имеет вид $\tilde{\alpha}=(\beta_0,\ \beta_1,\ldots,\beta_{2^n-1},\ \gamma_0,\ \gamma_1,\ldots,\gamma_{2^n-1})$ и пусть

$$T(\beta_0,\ \beta_1,\ldots,\beta_{2^n-1})=(\delta_0,\ \delta_1,\ldots,\delta_{2^n-1}),$$
$$T(\gamma_0,\ \gamma_1,\ldots,\gamma_{2^n-1})=(\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2^n-1}).$$

Тогда $T(\tilde{\alpha})=(\delta_0,\ \delta_1,\ldots,\delta_{2^n-1},\ \delta_0\oplus\varepsilon_0,\ \delta_1\oplus\varepsilon_1,\ldots,\delta_{2^n-1}\oplus\varepsilon_{2^n-1})$. Например, если $\tilde{\alpha}=(1011)$, то $T(\tilde{\alpha})=(1101)$. Доказать, что вектор $\tilde{\alpha}_f$ значений функции $f(\tilde{x}^n)$ связан с вектором $\tilde{\beta}_P$ коэффициентов полинома $P(\tilde{x}^n)$, реализующего функцию $f(\tilde{x}^n)$, следующим образом: $\tilde{\alpha}_f=T(\tilde{\beta}_P)$, $\tilde{\beta}_P=T(\tilde{\alpha}_f)$.

3.23. Для такой функции $f(\tilde{x}^4)$, что $\tilde{\alpha}_f = (10110010\ 00101101)$, найти вектор $\tilde{\beta}_P$ коэффициентов полинома Жегалкина.

Один из способов построения полинома Жегалкина по формуле F состоит в следующем: сначала строят эквивалентную формулу над множеством связок $\{\&, -\}$, затем заменяют везде $\bar{x}$ на $x \oplus 1$, раскрывают скобки, пользуясь дистрибутивным законом $(x \oplus y)\, z = xz \oplus yz$, и приводят подобные члены.

Пример. $x \to x_2 = \overline{x_1 \bar{x}_2} = x_1 (x_2 \oplus 1) \oplus 1 = x_1 x_2 \oplus \oplus x_1 \oplus 1$.

3.24. Построить полиномы для функций:

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \mid x_2) \downarrow x_3$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to x_2)(x_2 \downarrow x_3)$;

3) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \to x_2) \vee x_3) \mid x_1$.

3.25. Всякую булеву функцию f можно записать в виде полинома, используя обычные арифметические операции умножения, сложения и вычитания. Для этого достаточно выразить f через конъюнкцию и отрицание, а затем заменить подформулы вида $\bar{A}$ на $1 - A$ и раскрыть скобки. Выразить с помощью арифметических операций следующие функции:

1) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \oplus x_2$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to x_2) \to x_3$;

3) $f(\tilde{x}^3) = (10000001)$.

3.26. Указать функцию $f(\tilde{x}^n)$, у которой длина полинома в 2^n раз превосходит длину ее совершенной д. н. ф.

3.27. Доказать справедливость следующей формулы разложения по k переменным:

$$f(\tilde{x}^n) = \sum_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k) \in B^k} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

3.28. Доказать, что:

1) $f(\tilde{x}^n) = x_1 (f_0^1(\tilde{x}^n) \oplus f_1^1(\tilde{x}^n)) \oplus f_0^1(\tilde{x}^n)$;

2) $f(\tilde{x}^n) = (x_1 \vee (f_0^1(\tilde{x}^n) \sim f_1^1(\tilde{x}^n))) \sim f_1^1(\tilde{x}^n)$.

3.29. Показать, что функция $f(\tilde{x}^n)$, реализуемая многочленом степени $k > 0$, обращается в 1 не менее чем на 2^{n-k} векторах из B^n.

3.30. На скольких наборах из B^n обращается в единицу полином $P(\tilde{x}^n)$:

1) $P(\tilde{x}^n) = x_1 \ldots x_k \oplus x_{k+1} \ldots x_n$;

2) $P(\tilde{x}^n) = 1 \oplus x_1 \oplus x_1x_2 \oplus \ldots \oplus x_1x_2 \ldots x_n$.

3.31. Показать, что для всякого l ($l \leqslant 2^n$) существует полином $P(\tilde{x}^n)$ длины, не большей, чем n, для которого $|N_{P(\tilde{x}^n)}| = l$.

3.32. Доказать, что всякая функция $f(\tilde{x}^n)$ может быть представлена в виде $f(\tilde{x}^n) = \sum\limits_{i=1}^{s} K_i$, где K_i $(i = \overline{1, s})$ — элементарные конъюнкции, содержащие не более одного отрицания переменной, а $s \leqslant 2^{n-1}$.

3.33. Показать, что если в совершенной д. н. ф. знак $\bigvee$ везде заменить на знак $\oplus$, то получится формула, эквивалентная исходной. Справедливо ли аналогичное утверждение для произвольной д. н. ф.?

Производной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ *по совокупности переменных* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ (или *булевой разностью*) называется функция

$$\frac{\partial f(\tilde{x}^n)}{\partial (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})} = f(x_1, \ldots, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, \ldots, x_n) \oplus \oplus f(x_1, \ldots, \bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_k}, \ldots, x_n).$$

(При $k = 1$ применяется обозначение $\frac{df(\tilde{x}^n)}{dx_{i_1}}$.)

3.34. Доказать следующие свойства производной:

1) $\frac{d}{dx_j}\left(\frac{df(\tilde{x}^n)}{dx_i}\right) = \frac{d}{dx_i}\left(\frac{df(\tilde{x}^n)}{dx_j}\right)$;

2) $\frac{\partial f(\tilde{x}^n)}{\partial (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})} = \frac{\partial \bar{f}(\tilde{x}^n)}{\partial (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}$;

3) $\frac{\partial (f(\tilde{x}^n) \oplus g(\tilde{x}^n))}{\partial (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})} = \frac{\partial f(\tilde{x}^n)}{\partial (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})} \oplus \frac{\partial g(\tilde{x}^n)}{\partial (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}$;

4) $\frac{d(f(\tilde{x}^n) \vee g(\tilde{x}^n))}{dx_i} = \bar{f}(\tilde{x}^n)\frac{dg(\tilde{x}^n)}{dx_i} \oplus \bar{g}(\tilde{x}^n)\frac{df(\tilde{x}^n)}{dx_i} \oplus \oplus \frac{df(\tilde{x}^n)}{dx_i}\frac{dg(\tilde{x}^n)}{dx_i}$;

5) $\frac{d(f(\tilde{x}^n)g(\tilde{x}^n))}{dx_i} = f(\tilde{x}^n)\frac{dg(\tilde{x}^n)}{dx_i} \oplus g(\tilde{x}^n)\frac{df(\tilde{x}^n)}{dx_i} \oplus \oplus \frac{df(\tilde{x}^n)}{dx_i}\frac{dg(\tilde{x}^n)}{dx_i}$;

6) $\frac{df(\tilde{x}^n)}{dx_i} = 0$ тогда и только тогда, когда x_i не входит явно в полином Жегалкина функции $f(\tilde{x}^n)$;

7) если $f(\tilde{x}^n) = x_1 g(x_2, x_3, \ldots, x_n) \oplus h(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, то $\frac{df(\tilde{x}^n)}{dx_1} = g(x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

3.35. Если $g(x_1, \ldots, x_m)$ и $h(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ — булевы функции и $1 \leqslant i_j \leqslant m$ для всех $j = \overline{1, k}$, то:

1) $\frac{\partial(g \oplus h)}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})} = \frac{\partial g}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}$;

2) $\frac{\partial(g \,\&\, h)}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})} = h \frac{\partial g}{\partial(x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_k})}$;

3) $\frac{\partial(g \vee h)}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})} = \bar{h} \frac{\partial g}{\partial(x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_k})}$.

§ 4. Минимизация булевых функций

Допустимой конъюнкцией или *импликантом* функции $f(\tilde{x}^n)$ называется такая элементарная конъюнкция K над множеством переменных $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, что $K \vee f(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n)$. Импликант K функции f называется *простым импликантом*, если после отбрасывания любой буквы из K получается элементарная конъюнкция, не являющаяся импликантом функции f. Дизъюнкция всех простых импликантов функции f называется *сокращенной д. н. ф.* функции f.

Дизъюнктивная нормальная форма называется:

минимальной, если она имеет наименьшее число букв среди всех эквивалентных ей д. н. ф.;

кратчайшей, если она имеет наименьшую длину среди всех эквивалентных ей д. н. ф.;

тупиковой, если отбрасывание любого слагаемого или буквы приводит к неэквивалентной д. н. ф.;

д. н. ф. функции f, если она реализует функцию f.

Если элементарная конъюнкция K является импликантом функции $f(\tilde{x}^n)$, то множество N_K таких векторов $\tilde{\alpha}$ из B^n, что $K(\tilde{\alpha}) = 1$, образует грань, содержащуюся в множестве N_f. Эта грань называется *интервалом функции* $f(\tilde{x}^n)$, *соответствующим импликанту* K. Интервал функции f, не содержащийся ни в каком другом интервале функции f, называется *максимальным интервалом*. Максимальные интервалы соответствуют простым импликантам функции f.

4.1. Из заданного множества элементарных конъюнкций $\mathscr{K}$ выделить простые импликанты функции $f(\tilde{x}^n)$, если:

1) $\mathscr{K}=\{x_1,\ \bar{x}_3,\ x_1x_2,\ x_2\bar{x}_3\}$, $f(\tilde{x}^3)=(00101111)$;

2) $\mathscr{K}=\{x_1\bar{x}_2,\ x_2\bar{x}_3,\ x_1,\ x_1x_2x_3\}$, $f(\tilde{x}^3)=(01111110)$;

3) $\mathscr{K}=\{x_1,\ x_4,\ x_2\bar{x}_3,\ x_1x_2x_3\}$,
$$f(\tilde{x}^4)=(1010111001011110).$$

Метод Блейка получения сокращенной д. н. ф. из произвольной д. н. ф. состоит в применении правил обобщенного склеивания $xK_1 \vee \bar{x}K_2=xK_1 \vee \bar{x}K_2 \vee K_1K_2$ и поглощения $K_1 \vee K_1K_2=K_1$. Подразумевается, что правила применяются слева направо. На первом этапе производятся операции обобщенного склеивания до тех пор, пока это возможно. На втором — операции поглощения.

Пример. Получить сокращенную д. н. ф. для $\mathscr{D}(\tilde{x}^3)=x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3$.

После первого этапа получим
$$\mathscr{D}_1=x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_3 \vee x_1x_3.$$
После второго —
$$\mathscr{D}_2=x_1x_2 \vee x_3.$$

4.2. С помощью метода Блейка построить сокращенную д. н. ф. по заданной д. н. ф. $\mathscr{D}$:

1) $\mathscr{D}=\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4$;

2) $\mathscr{D}=\bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee x_3x_4$;

3) $\mathscr{D}=x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4$.

Сокращенную д. н. ф. функции $f(\tilde{x}^n)$, заданной в виде к. н. ф., можно получить следующим образом. Сначала раскрыть скобки, пользуясь законом дистрибутивности, затем вычеркнуть из получившейся д. н. ф. буквы и слагаемые, используя правила $x\bar{x}=0$, $xx=x$, $x \vee x=x$, $K_1 \vee K_1K_2=K_1$.

Пример. Получить сокращенную д. н. ф. для
$$f(\tilde{x}^3)=(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

После раскрытия скобок имеем
$$\mathscr{D}_1=x_1\bar{x}_1 \vee x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_1 \vee x_2x_2 \vee x_2x_3.$$
Применяя указанные выше правила, получим
$$\mathscr{D}=x_1x_3 \vee x_2.$$

4.3. Построить сокращенную д. н. ф. по заданной к. н. ф.:

1) $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

2) $(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

3) $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$.

4.4. Пусть N_f — множество таких векторов $\tilde{\alpha} \in B^n$, что $f(\tilde{\alpha}) = 1$, а $l^c(f)$ — длина сокращенной д. н. ф. функции f. Показать, что $l^c(f) \leqslant \frac{1}{2}|N_f|(|N_f| + 1)$.

4.5. Найти длину сокращенной д. н. ф. следующих функций:

1) $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;

2) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus \ldots \oplus x_n$;

3) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_4 \oplus x_5 \oplus \ldots \oplus x_n)$;

4) $(x_1 \oplus \ldots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_n)$, $1 \leqslant k \leqslant n$;

5) $(x_1 \vee \ldots \vee x_n)(\bar{x}_1 \vee \ldots \vee \bar{x}_k \vee x_{k+1} \vee \ldots \vee x_n)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

4.6. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ такая, что $N_f = \{\tilde{\alpha} : k \leqslant \|\tilde{\alpha}\| \leqslant k + m\}$, и $k \leqslant l \leqslant k + m$, $\tilde{\alpha} \in B_l^n$.

1) Найти число слагаемых сокращенной д. н. ф. функции f, которые обращаются в единицу на наборе $\tilde{\alpha}$.

2) Показать, что длина сокращенной д. н. ф. функции $f(\tilde{x}^n)$ равна $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m}$.

4.7. Пусть функции $f(\tilde{x}^n)$ и $g(\tilde{y}^m)$ не имеют общих переменных, K — простой импликант функции f, а L — простой импликант функции g. Показать, что $K \& L$ — простой импликант функции $f \& g$.

Каждой элементарной конъюнкции над множеством переменных $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ взаимно однозначно соответствует грань куба B^n, составленная из тех вершин $\tilde{\alpha}$, на которых э. к. обращается в единицу. Это позволяет строить сокращенную д. н. ф., исходя из геометрического изображения булевой функции. На кубе B^n отмечаются вершины множества N_f функции f. Выписываются грани, содержащиеся в N_f и не содержащиеся в других гранях, составленных из вершин множества N_f. Каждой из полученных граней сопоставляется простой импликант.

П р и м е р. Пусть функция $f(\tilde{x}^3)$ задана вектором $\tilde{\alpha}_f=(11111000)$. Требуется найти ее сокращенную д. н. ф.

Р е ш е н и е. Множество N_f есть $\{(000), (001), (010), (011), (100)\}$. Грани имеют вид $g_1=\{(000), (001), (010), (011)\}$, $g_2=\{(000), (100)\}$. Грани g_1 соответствует э. к. $\bar{x}_1$, а грани g_2 — $\bar{x}_2\bar{x}_3$. Сокращенная д. н. ф. есть $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$ (см. рис. 2).

4.8. Построить сокращенную д. н. ф. функции $f(\tilde{x}^n)$:

1) $f(\tilde{x}^4)=(1111100001001100)$;

2) $f(\tilde{x}^4)=(0000001111111101)$;

3) $f(\tilde{x}^4)=(0001101111011011)$.

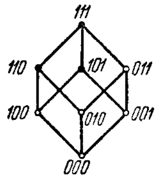


Рис. 2.

4.9. Подсчитать число функций $f(\tilde{x}^n)$, для которых данная элементарная конъюнкция ранга r является:

1) импликантом;

2) простым импликантом.

4.10. Пусть $i_r(f)$ — число импликантов ранга r функции $f(\tilde{x}^n)$, а $s_r(f)$ — число простых импликантов ранга r. Пусть P_n — множество булевых функций переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

$$\bar{i}_r(n)=\frac{1}{2^{2^n}}\sum_{f\in P_n} i_r(f);$$

$$\bar{s}_r(n)=\frac{1}{2^{2^n}}\sum_{f\in P_n} s_r(f).$$

Показать, что:

1) $\bar{i}_r(n)=\binom{n}{r}2^{r-2^{n-r}}$;

2) $\bar{s}_r(n)=\binom{n}{r}2^{r-2^{n-r}}(1-2^{-2^{n-r}})^r$.

Для небольших значений n сокращенную д. н. ф. функции $f(\tilde{x}^n)$ можно находить с помощью прямоугольной таблицы (*минимизирующей карты*). Например, пусть функция $f(\tilde{x}^4)$ задана с помощью табл. 5. Объединяя клетки, соответствующие единичным значениям функции f, в максимальные интервалы, как показано в табл. 5, и сопоставляя им э. к., получим сокращенную д. н. ф.

$$x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_3x_4 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4.$$

ТАБЛИЦА 5

x_1 x_2 \ x_3 x_4	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1	0	1
0 1	0	1	1	0
1 1	1	1	1	0
1 0	0	1	0	0

4.11. Построить сокращенные д. н. ф. для функций, заданных следующими таблицами:

1)

x_1 x_2 \ x_3 x_4	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1	1	0
0 1	0	1	1	1
1 1	1	0	1	1
1 0	1	1	0	1

2)

x_1 x_2 \ x_3 x_4	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1	0	0
0 1	1	1	1	0
1 1	0	1	1	1
1 0	1	0	1	1

3)

x_1 x_2 \ x_3 x_4	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	1	1	0
0 1	1	1	0	1
1 1	1	0	1	1
1 0	0	1	1	0

Простой импликант называется *ядровым*, если удаление его из сокращенной д. н. ф. приводит к д. н. ф., которая не эквивалентна исходной. Для каждого ядрового импликанта K существует такой набор значений переменных, который обращает K в единицу, а остальные слагаемые сокращенной д. н. ф. — в нуль. Такой набор называется *собственным набором* ядрового импликанта.

4.12. Выделить из сокращенных д. н. ф. ядровые импликанты:

1) $\bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_3x_4$;

2) $x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_4$;

3) $x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2x_4 \vee x_1x_4$.

4.13. Показать, что число ядровых импликантов произвольной функции $f(\tilde{x}^n)$ не превосходит 2^{n-1}.

4.14. Найти число ядровых импликантов у функций из задачи 4.5.

4.15. Найти число булевых функций $f(\tilde{x}^n)$, для которых э. к. $x_1 \ldots x_r$ является ядровым импликантом.

4.16. Пусть K, K_1, K_2 — конъюнкции из сокращенной д. н. ф., а r, r_1, r_2 — ранги этих конъюнкций. Пусть $K \vee K_1 \vee K_2 = K_1 \vee K_2$. Показать, что $r_1 + r_2 \geqslant r + 2$.

4.17. Построить все тупиковые д. н. ф. следующих функций:

1) $f(\tilde{x}^3) = (01111110)$;

2) $f(\tilde{x}^4) = (1110011000010101)$;

3) $f(\tilde{x}^4) = (0110101111011110)$.

4.18. Подсчитать число тупиковых и минимальных д. н. ф. у функций из задачи 4.5.

4.19. Показать, что число тупиковых д. н. ф. у произвольной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ не превосходит $\binom{3^n}{2^n}$.

4.20. Сколько тупиковых д. н. ф. у функции, имеющей 2^{n-1} ядровых импликантов?

4.21. Выяснить, являются ли тупиковыми, кратчайшими или минимальными следующие д. н. ф.:

1) $\mathscr{D} = x_1x_2 \vee \bar{x}_2$;

2) $\mathscr{D} = \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$;

3) $\mathscr{D} = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_2x_3$.

4.22. Пусть $L(f)$ — сложность минимальной, а $l(f)$ — длина кратчайшей д. н. ф. функции f. Показать, что $L(f(\tilde{x}^n)) \leqslant nl(f(\tilde{x}^n))$ для произвольной функции $f(\tilde{x}^n)$.

4.23. Показать, что $l(f(\tilde{x}^n)) \leqslant 2^{n-1}$, $L(f(\tilde{x}^n)) \leqslant n2^{n-1}$ для всякой функции $f(\tilde{x}^n)$.

4.24. Для скольких функций $f(\tilde{x}^n)$ справедливы соотношения:

1) $L(f(\tilde{x}^n)) = n2^{n-1}$;

2) $L(f(\tilde{x}^n)) = n2^{n-1} - n$?

4.25. Привести пример числа k $(0 < k \leqslant n2^n)$, такого, что не существует $f(\tilde{x}^n)$, имеющей минимальную д. н. ф. сложности k.

4.26. Для функций задачи 4.5 найти сложность минимальных и длину кратчайших д. н. ф.

4.27. Рассмотрим семейство поясковых функций, т. е. функций $f(\tilde{x}^n)$, для которых существуют числа k и m, такие, что

$$N_f = \{\tilde{\alpha}\colon\ k \leqslant \|\tilde{\alpha}\| \leqslant k+m\}.$$

1) Каково число ядровых импликантов у поясковой функции $f(\tilde{x}^n)$ при различных k и m?

2) На скольких поясковых функциях $f(\tilde{x}^n)$ достигается максимум числа ядровых импликантов?

4.28. Функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *цепной* (*циклической*), если множество N_f можно расположить в последовательность, являющуюся 2-цепью (соответственно 2-циклом).

1) Найти число тупиковых и минимальных д. н. ф. цепной функции $f(\tilde{x}^n)$, если $|N_f| = l$.

2) То же для циклической функции $f(\tilde{x}^n)$, такой, что $|N_f| = 2m$ $(m > 2)$.

§ 5. Существенные и фиктивные переменные

Переменная x_i функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *существенной*, если найдутся такие наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, что $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ и $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$. В противном случае переменная x_i называется *фиктивной* (*несущественной*) переменной функции $f(\tilde{x}^n)$. Две функции $f(\tilde{x}^n)$ и $g(\tilde{x}^n)$ называются *равными*, если множества их существенных переменных совпадают и на любых двух наборах, различающихся, быть может, только значениями несущественных переменных, значения функций одинаковы. Пусть $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$. Будем говорить, что функция $\varphi(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, x, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_2-1}, x_{i_2+1}, \ldots, x_{i_k-1}, x_{i_k+1}, \ldots, x_n)$ *получается из* $f(\tilde{x}^n)$ *путем отождествления переменных* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, если φ получается из f путем подстановки x на места переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$. В качестве x может быть взята любая переменная, не принадлежащая множеству $X^n / \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$.

5.1. Показать, что утверждение «x_i является существенной переменной функции $f(\tilde{x}^n)$» равносильно каждому из следующих утверждений:

1) $f_0^i(\tilde{x}^n) \neq f_1^i(\tilde{x}^n)$;

2) существуют переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ $(i_j \neq i,\ j = \overline{1, k})$ и константы $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, такие, что функция $f_{\sigma_1 \ldots \sigma_k}^{i_1, \ldots, i_k}(\tilde{x}^n)$ существенно зависит от x_i.

5.2. Перечислить существенные переменные следующих функций:

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to (x_1 \vee x_2)) \to x_3$;

2) $f(\tilde{x}^2) = (x_1 \vee x_2) \to x_2$;

3) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3)\, x_4$;

4) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \quad (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \quad (x_1 \vee x_2 \vee$ $\vee\, x_3 (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$.

5.3. Показать, что x_1 является фиктивной переменной функции f (выразив f формулой, в которую x_1 не входит явно):

1) $f(\tilde{x}^2) = (x_1 \oplus x_2)(x_1 \downarrow x_2)$;

2) $f(\tilde{x}^2) = (((x_3 \to x_2) \vee x_1)(x_2 \to x_1)\, x_3 x_1) \oplus x_3$;

3) $f(\tilde{x}^2) = ((x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3) \to (x_1 \to x_2 x_3))\, x_2$.

5.4. Указать фиктивные переменные функции f:

1) $f(\tilde{x}^3) = (11110000)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (00110011)$;

3) $f(\tilde{x}^3) = (00111100)$.

5.5. Пусть функция $f(\tilde{x}^n)$ задана вектором $\tilde{\alpha}_f = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n - 1})$. Доказать, что если x_k является фиктивной переменной, то $\alpha_i = \alpha_{2^{n-k}+i}$ для всех i из отрезка $[s2^{n-k+1}, (2s+1)\, 2^{n-k} - 1]$, $s = \overline{0, 2^{k-1} - 1}$.

5.6. Показать, что если среди переменных функции $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$, имеются фиктивные, то функция принимает значение 1 на четном числе наборов. Верно ли обратное утверждение?

5.7. Пусть функция $f(\tilde{x}^n)$ такова, что $|N_f| = 2^m(2l - 1)$. Каково максимально возможное число фиктивных переменных у функции f?

5.8. Опираясь на результаты задач 5.5 и 5.6, выяснить, от каких переменных функция f зависит существенно.

1) $f(\tilde{x}^4) = (1011100111001010)$;

2) $f(\tilde{x}^4) = (0011110011000011)$;

3) $f(\tilde{x}^4)=(0111011101110111)$;

4) $f(\tilde{x}^4)=(0101111100001010)$.

5.9. Для каждой функции из задачи 5.8 построить равную ей и зависящую существенно от всех своих переменных.

5.10. Выяснить, для каких n ($n \geqslant 2$) зависят существенно от всех своих переменных следующие функции:

1) $f(\tilde{x}^n)=(x_1 \vee x_2) \oplus (x_2 \vee x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} \vee x_n) \oplus$
$\oplus (x_n \vee x_1)$;

2) $f(\tilde{x}^n)=(x_1 \to x_2)(x_2 \to x_1) \oplus (x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2) \oplus \ldots$
$\ldots \oplus (x_n \to x_1)(x_1 \to x_n)$;

3) $f(\tilde{x}^n)=(\ldots((x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3) \downarrow \ldots \downarrow x_n) \to$
$\to (x_1 \mid (x_2 \mid (x_3 \mid \ldots \mid x_n) \ldots))$;

4) $f(\tilde{x}^n)=(x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3) \ldots (x_{n-1} \to x_n)(x_n \to x_1) \to$
$\to (x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1)$;

5) $f(\tilde{x}^n)=\left(\bigvee_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{[n/2]} \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{[n/2]}}\right) \&$
$\& \left(\bigvee_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{[n/2]} \leqslant n} \bar{x}_{i_1} \bar{x}_{i_2} \ldots \bar{x}_{i_{[n/2]}}\right) \to (x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n)$.

5.11. Пусть функции $f(\tilde{x}^n)$ и $g(\tilde{y}^m)$ существенно зависят от всех своих переменных, а переменные $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ попарно различны. Показать, что функция $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(y_1, \ldots, y_m))$ существенно зависит от всех своих переменных.

5.12. Пусть $P^c(X^n)$ — множество всех функций алгебры логики, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и притом существенно.

1) Перечислить все функции из $P^c(X^2)$.

2) Найти число $|P^c(X^3)|$.

3) Показать, что $|P^c(X^n)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}$.

4) Показать, что $\lim_{n \to \infty} 2^{-2^n} |P^c(X^n)| = 1$.

5.13. Пусть $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ — такие наборы из B^n, что $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta} \leqslant \tilde{\gamma}$, и пусть функция $f(\tilde{x}^n)$ такова, что $f(\tilde{\alpha}) =$ $= f(\tilde{\gamma}) \neq f(\tilde{\beta})$. Показать, что $f(\tilde{x}^n)$ зависит существенно не менее чем от двух переменных.

5.14*. Показать, что x_i является существенной переменной функции f тогда и только тогда, когда эта переменная явно входит в сокращенную д. н. ф. функции f.

5.15. Показать, что x_i является существенной переменной функции f тогда и только тогда, когда x_i явно входит в полином Жегалкина функции f.

5.16. Пусть $\frac{\partial f(\tilde{x}^n)}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_j)} = 0$ для любого непустого множества $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ переменных, отличных от x_j. Верно ли, что $f\{\tilde{x}^n\}$ фиктивно зависит от x_j?

5.17. Показать, что всякая симметрическая функция $f(\tilde{x}^n)$, отличная от константы, существенно зависит от всех своих переменных.

5.18. Пусть в вершинах цепи $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_{k-1}$, $\tilde{\gamma}$, соединяющей такие вершины $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\gamma}$ куба B^n, что $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) = k$, функция $f(\tilde{x}^n)$ изменяет свое значение m раз. Показать, что $f(\tilde{x}^n)$ существенно зависит не менее чем от m переменных.

5.19. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ существенно зависит не менее чем от двух переменных. Показать, что существуют три вершины $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ куба B^n, удовлетворяющие условиям

$$\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \rho(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = 1, \quad \tilde{\alpha} \neq \tilde{\gamma}, \quad f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\gamma}) \neq f(\tilde{\beta}).$$

5.20. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ существенно зависит от всех своих переменных. Доказать, что для любого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ найдется такое j, что при некоторой подстановке констант вместо переменных, отличных от x_i и x_j, получится функция, существенно зависящая от x_i и x_j.

5.21. Доказать, что для всякой функции $f(\tilde{x}^n)$, существенно зависящей от n переменных, найдется такая переменная x_i и такая константа α, что функция $f_\alpha^i(\tilde{x}^n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ существенно зависит от $n-1$ переменных.

5.22. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ существенно зависит от всех своих переменных. Справедливы ли следующие утверждения?

1) Существует такое i, что для всякого j найдутся константы, подставляя которые в $f(\tilde{x}^n)$ на места переменных, отличных от x_i и x_j, можно получить функцию, существенно зависящую от x_i и x_j.

2) Для любых двух переменных x_i и x_j существуют константы, подставляя которые в $f(\tilde{x}^n)$ на места переменных, отличных от x_i и x_j, можно получить функцию, существенно зависящую от x_i и x_j.

5.23. Перечислить функции из $P_2(X^2)$, которые могут быть получены отождествлением переменных из следующих функций:

1) $f(\tilde{x}^3) = (10010110)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (11111101)$;

3) $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$;

4) $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1 \oplus x_2 \oplus 1$.

5.24. Показать, что из функции $f(\tilde{x}^n)$ можно с помощью операции отождествления получить константу тогда и только тогда, когда $f(\tilde{0}) = f(\tilde{1})$.

5.25. Найти число функций $f(\tilde{x}^2)$, из которых отождествлением переменных нельзя получить функцию, существенно зависящую от одной переменной.

5.26. Можно ли из симметрической функции $f(\tilde{x}^n)$ с помощью операции отождествления получить функцию, существенно зависящую от всех своих переменных и не являющуюся симметрической?

5.27. Пусть $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ — три такие вершины из B^n, что $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta} \leqslant \tilde{\gamma}$, а $f(\tilde{x}^n)$ такая, что $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\gamma}) \neq f(\tilde{\beta})$. Показать, что можно отождествить некоторые переменные функции f так, что в результате получится функция, существенно зависящая не менее чем от двух и не более чем от трех переменных.

5.28*. Показать, что у функции $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 4$, реализуемой полиномом Жегалкина степени не ниже 2, можно найти две такие переменные, отождествление которых уменьшает число существенных переменных на единицу.

5.29. Перечислить все функции $f(\tilde{x}^3)$, существенно зависящие от трех переменных, такие, что отождествление любых двух переменных приводит к функции, существенно зависящей в точности от одной переменной.

5.30. Пусть функция $f(\tilde{x}^n)$ существенно зависит от всех своих переменных и $|N_f| > 2^{n-1}$. Показать, что при отождествлении любых двух ее переменных получается функция, не равная тождественно нулю.

5.31. Показать, что число функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, из которых путем отождествления переменных можно получить данную функцию $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при $n \to \infty$ асимптотически равно $n2^{2^n}$.

5.32. Показать, что если $f(\tilde{x}^n)$ фиктивно зависит от x_i, то отождествление этой переменной с любой другой приводит к функции, существенно зависящей от тех же переменных, что и $f(\tilde{x}^n)$.

5.33. Пусть $n \geqslant 1$ и функции $f(\tilde{x}^n)$ и $g(\tilde{x}^n)$ таковы, что $|N_{f \oplus g}| = 1$. Показать, что для всякого $i = \overline{1, n}$ по меньшей мере одна из функций f или g существенно зависит от x_i.

5.34. Показать, что если $\left|N_{f_{00}^{ij}(\tilde{x}^n) \& f_{11}^{ij}(\tilde{x}^n)}\right|$ нечетно, то функция φ, полученная из $f(\tilde{x}^n)$ отождествлением переменных x_i и x_j, существенно зависит от $n-1$ переменных.

5.35*. Пусть функция $f(\tilde{x}^n)$ существенно зависит от n переменных. Пусть $v_f(\tilde{\alpha})$ — число тех вершин $\tilde{\beta}$, для которых $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$ и $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 1$. Пусть $v(f) = \max\limits_{\tilde{\alpha} \in B^n} v_f(\tilde{\alpha})$.

1) Показать, что $]\sqrt{n}[\leqslant v(f) \leqslant n$.

2) Указать функции $g(\tilde{x}^n)$ и $h(\tilde{x}^n)$, такие, что $v(g) =]\sqrt{n}[$, $v(h) = n$.

$H(R(\tilde{x}))$, система $H(R(\tilde{x})) \cup \{g(x)\}$ полна в P_k, то класс $H(R(\tilde{x}))$ является предполным в P_k.

3.21. Пусть $R_i(\tilde{x}^n)$, $1 \leqslant i \leqslant s$, — n-местные предикаты, определенные на множестве E_k. Положим $R(\tilde{x}^n) = R_1(\tilde{x}^n) \& \ldots \& R_s(\tilde{x}^n)$. Доказать, что $\bigcap_{i=1}^{s} H(R_i(\tilde{x}^n)) \subseteq H(R(\tilde{x}^n))$.

3.22*. Доказать, что в P_k при $k \geqslant 3$ множество всех замкнутых классов, каждый из которых содержит конечное число попарно неконгруентных функций, является счетно-бесконечным.

3.23*. Доказать, что каждый замкнутый класс в P_k имеет не более чем счетное множество предполных в нем классов.

3.24*. Привести пример замкнутого класса в P_k, содержащего бесконечно много попарно не конгруентных функций и не имеющего предполных в нем классов.

3.25*. Выделить базис из полной в P_k системы A.

1) $A = \{k-1,\ j_0(x),\ j_1(x),\ \ldots,\ j_{k-1}(x),\ x \cdot y,\ x \dot{-} y\}$;

2) $A = \{x-2,\ J_0(x),\ \max(x, y),\ x \dot{-} y^2,\ x^2 \cdot y\}$;

3) $A = \{\sim x,\ \min(x, y),\ x \cdot y,\ x + y\}$;

4) $A = \{k-1,\ x+2,\ \max(x, y),\ x \dot{-} y\}$;

5) $A = \{2,\ j_0(x),\ x + y^2,\ x^2 \dot{-} y,\ x \cdot y \cdot z\}$.

3.26. Доказать, что в любом базисе, выделенном из системы Россера—Туркетта, обязательно будет содержаться хотя бы одна из функций $J_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant k-2$, но не будет констант 0 и $k-1$.

Глава IV

ГРАФЫ И СЕТИ

§ 1. Основные понятия теории графов [1])

Пусть V — конечное непустое множество, X — некоторый набор пар элементов из V. В наборе X могут встречаться пары с одинаковыми элементами, а также одинаковые пары. Множество V и набор X определяют *граф с кратными ребрами и петлями* (или, короче, *псевдограф*) $G=(V, X)$. Элементы множества V называются *вершинами*, а элементы набора X — *ребрами* псевдографа. Ребра вида (v, v) $(v \in V)$ называются *петлями*. Псевдограф без петель называется *графом с кратными ребрами* (или, короче, *мультиграфом*). Если в наборе X ни одна пара не встречается более одного раза, то мультиграф $G=(V, X)$ называется *графом* [2]). Если пары в наборе X являются упорядоченными, то граф называется *ориентированным*. Ребра ориентированного графа часто называются *дугами*. Если пары в наборе X являются неупорядоченными, то граф называется *неориентированным графом* или просто *графом*. Если $x=(u, v)$ — ребро графа, то вершины u и v называются *концами ребра* x. Если вершина v является концом ребра x, то говорят, что v и x *инцидентны*. Вершины u и v графа G называются

[1]) Определения, даваемые ниже, совпадают или близки к тем, которые даны в разделе «Графы и сети» книги [10] или в книге [33].

[2]) Ниже все определения даются для графов. Как правило, эти определения очевидным образом переносятся на мультиграфы и псевдографы. В тех случаях, когда различия в определениях существенны, даются определения и для псевдографов.

смежными, если существует ребро графа G, соединяющее u и v. Два ребра называются *смежными*, если они имеют общую вершину. *Степенью вершины* v называется число $d(v)$ ребер графа, инцидентных вершине v. В псевдографе степень вершины v равна общему числу ребер, инцидентных этой вершине, сложенному с числом петель, инцидентных ей. Вершина графа, имеющая степень 0, называется *изолированной*, а вершина, имеющая степень 1, — *висячей*.

Последовательность

$$v_1 x_1 v_2 x_2 v_3 \ldots x_{n-1} v_n \qquad (n \geqslant 2), \tag{1}$$

в которой чередуются вершины и ребра и при этом для каждого $i = \overline{1, n-1}$ ребро x_i имеет вид (v_i, v_{i+1}), называется *маршрутом*, соединяющим вершины v_1, v_n. Число ребер в маршруте называется *длиной маршрута*. *Маршрутом длины* нуль называется последовательность, состоящая из единственной вершины. Маршрут, в котором все ребра попарно различны, называется *цепью*. Маршрут, в котором все вершины попарно различны, называется *простой цепью*. Маршрут (1) называется *замкнутым*, если $v_1 = v_n$. Замкнутый маршрут, в котором все ребра попарно различны, называется *циклом*. Цикл, в котором все вершины, кроме первой и последней, попарно различны, называется *простым циклом*. Граф называется *связным*, если для любых двух его вершин существует цепь, соединяющая эти вершины. *Расстоянием* между вершинами связного графа называется длина кратчайшей цепи, связывающей эти вершины. *Диаметром* связного графа называется расстояние между двумя наиболее удаленными друг от друга вершинами. Диаметр графа G будет обозначаться через $D(G)$. *Подграфом* графа G называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер графа G. Подграф называется *собственным*, если он отличен от самого графа. *Компонентой связности* графа G называется его связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа графа G. *Остовным* называется подграф, содержащий все вершины графа. *Подграфом* графа $G=(V, X)$, *порожденным подмножеством* $U \subseteq V$, называется граф $H=(U, Y)$, множество ребер которого состоит из тех и только тех ребер графа G, оба конца которых лежат в U. Графы (псевдографы) $G=(V, X)$ и $H=(U, Y)$ *изоморфны*, если существуют такие два взаимно однозначных соответствия φ: $V \leftrightarrow U$ и ψ: $X \leftrightarrow Y$, что для всякого ребра $x=(u, v)$ из X справедливо $\psi(x)=(\varphi(u), \varphi(v))$. В случае графов можно дать следующее определение. *Графы* $G=(V, X)$ и $H=(U, Y)$ *изоморфны*, если существует такое взаимно однозначное отображение φ: $V \leftrightarrow U$, что $(u, v) \in X$ тогда и только тогда, когда $(\varphi(u), \varphi(v)) \in Y$. Такое отображение φ называется *изоморфным*. *Автоморфизмом* называется изоморфное отображение графа на себя. Под *операцией удаления вершины* из графа G будет пониматься операция, заключающаяся в удалении некоторой вершины вместе с инцидентными ей ребрами. *Операция удаления ребра* из графа $G=(V, X)$ заключается в удалении соответствующей пары из X. При этом, если не оговорено противное, все вершины сохраняются. *Дополнение* $\bar{G}$ *графа* G — это граф, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они несмежны в G. *Операция подразбиения ребра* (u, v) в графе $G=(V, X)$ состоит в удалении из X ребра (u, v), добавлении к V новой вершины w и добавлении к $X \setminus \{(u, v)\}$ двух ребер (u, w) и (w, v). Граф G называется *подразбиением графа* H, если G может быть получен из H путем последовательного применения операции подразбиения ребер. Графы G и H *гомеоморфны*, если существуют такие их подразбиения, которые изоморфны. Пусть $G=(V, X)$ и $H=(U, Y)$ — два графа. Через $G \oplus H$ будет обозначаться граф, называемый *симметрической разностью графов* G и H с множеством вершин $W=V \cup U$ и множеством ребер $Z=X \oplus Y$, состоящим из тех и только тех ребер, которые входят ровно в одно из множеств X или Y. Через $G \times H$ будет обозначаться *декартово произведение графов* $G=(V, X)$ и $H=(U, Y)$, т. е. граф, вершинами которого являются пары вида (v, u) $(v \in V, u \in U)$ и в котором вершины (v_1, u_1) и (v_2, u_2) смежны тогда и только тогда, когда смежна хотя бы одна из пар v_1, v_2 (в графе G) или u_1, u_2 (в графе H). *Объединением графов* $G=(V, X)$ и $H=(U, Y)$ называется граф $E=(V \cup U, X \cup Y)$.

Деревом называется связный граф без циклов. Граф без циклов называется *лесом*. *Полным* называется граф, в котором каждые две различные вершины соединены ребром. Полный граф с n вершинами обозначается через K_n. *Пустым* (*вполне несвязным*) называется граф без ребер. Одновершинный граф без ребер называется *тривиальным*. *Двудольным* называется граф, множество вершин которого можно разбить на два подмножества (две доли) V_1 и V_2 таким образом, что каждое ребро графа соединяет вершины из разных долей. Двудольный граф с долями V_1 и V_2 и множеством ребер X будет обозначаться через (V_1, V_2, X). Если каждая вершина из V_1 соединена ребром с каждой вершиной из V_2, то граф называется *полным двудольным графом*. Полный двудольный граф (V_1, V_2, X), такой, что $|V_1| = n_1$, $|V_2| = n_2$, обозначается через K_{n_1, n_2}. Граф называется *k-связным*, если при удалении любых $k-1$ его вершин получается связный граф, отличный от тривиального. Вершина графа, удаление которой увеличивает число компонент связности, называется *разделяющей* или *точкой сочленения*. Граф называется *регулярным графом степени d*, если все его вершины имеют степень d. Регулярный граф степени 1 называется *паросочетанием*. Регулярный граф степени 3 называется *кубическим*. *k-фактором* графа называется его остовный регулярный подграф степени k. *Совершенным паросочетанием* называется 1-фактор. *Максимальным паросочетанием* графа G называется паросочетание, содержащее наибольшее число ребер. *Гамильтоновым циклом* графа называется простой цикл, содержащий все вершины графа. *Гамильтоновой цепью* называется простая цепь, содержащая все вершины графа. *Единичным n-мерным кубом* называется граф B^n, вершинами которого являются булевы векторы длины n, а ребрами — одномерные грани (см. гл. I, § 1).

1.1. Показать, что для произвольного графа $G = (V, X)$ справедливо равенство $2|X| = \sum_{v \in V} d(v)$.

1.2. Пусть $i_k(G)$ — число вершин степени k в графе G. Найти число попарно неизоморфных графов G, у которых:

1) $i_2(G) = i_3(G) = i_4(G) = 2$, $i_k(G) = 0$ при $k \neq 2, 3, 4$;
2) $i_2(G) = i_3(G) = i_4(G) = 3$, $i_k(G) = 0$ при $k \neq 2, 3, 4$.

1.3. Показать, что в любом графе, имеющем не менее двух вершин, найдутся две вершины с одинаковыми степенями.

1.4. Доказать, что для любого набора неотрицательных целых чисел $(k_0, k_1, \ldots)$, такого, что $\sum\limits_i k_i = 2m$, существует псевдограф с m ребрами, имеющий для каждого $i=0, 1, \ldots$ в точности k_i вершин степени i.

1.5. Пусть $d_0(G)$ — минимальная из степеней вершин графа G, имеющего n вершин.

1) Доказать, что если $d_0(G) \geqslant \frac{n-1}{2}$, то граф связен.

2) Можно ли в предыдущем утверждении заменить $\frac{n-1}{2}$ на $\left[\frac{n-1}{2}\right]$?

1.6. Доказать, что всякий замкнутый маршрут нечетной длины содержит простой цикл. Верно ли аналогичное утверждение для маршрутов четной длины?

1.7. Показать, что связный граф с n вершинами содержит не менее $n-1$ ребер.

1.8. Показать, что в графе с n вершинами и c компонентами связности число ребер не более $\frac{1}{2}(n-c) \times$ $\times (n-c+1)$.

1.9. Доказать, что всякий нетривиальный связный граф содержит вершину, не являющуюся разделяющей.

1.10. Доказать, что в связном графе любые две простые цепи максимальной длины имеют по крайней мере одну общую вершину. Верно ли, что они всегда имеют общее ребро?

1.11. Доказать, что если из связного графа удалить произвольное ребро, содержащееся в некотором простом цикле, то граф останется связным.

1.12. Показать, что если в графе с n вершинами отсутствуют циклы нечетной длины и число ребер превышает $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$, то граф связен.

1.13. Найти число $p_k(n)$, при котором любой n-вершинный граф, имеющий $p_k(n)$ циклов длины k, связен.

1.14. Пусть графы G и H изоморфны. Показать, что:

1) для каждого $d \geqslant 0$ число вершин степени d в графах G и H одинаково;

2) для каждого l число простых циклов длины l в графах G и H одинаково.

1.15. Показать, что условия 1), 2) задачи 1.14 недостаточны для того, чтобы графы G и H были изоморфны.

1.16. Среди пар графов, представленных на рис. 3—6, указать пары изоморфных и пары неизоморфных графов. Ответ обосновать.

1.17. Пусть графы G и H двухсвязны, имеют шесть вершин и восемь ребер каждый. Граф G имеет ровно две вершины степени 2, а граф H имеет ровно четыре вершины степени 3. Можно ли утверждать, что графы G и H

1) изоморфны; 2) не изоморфны.

1.18. Графы G и H двухсвязны, имеют шесть вершин и десять ребер каждый. Одна вершина в каждом из графов имеет степень d $(1 \leqslant d \leqslant 5)$, а остальные имеют степень d_1 $(d_1 < d)$. Показать, что графы G и H изоморфны.

1.19. Показать, что в графе, не имеющем нетривиальных автоморфизмов,

1) расстояние между любыми двумя вершинами степени 1 больше двух;

2) существует вершина степени 3 или выше.

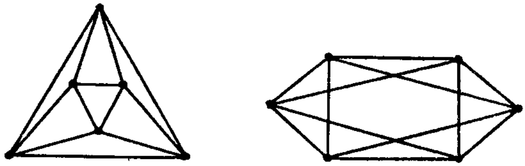
•**1.20.** Каково число автоморфизмов графа, являющегося циклом длины p?

1.21. Построить граф без циклов, не имеющий нетривиальных автоморфизмов и содержащий минимально возможное число ребер.

1.22. Какое наименьшее число n $(n>1)$ вершин может быть у графа, не имеющего нетривиальных автоморфизмов?

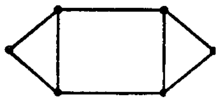
1.23. Пусть в двухсвязном графе с шестью вершинами и девятью ребрами степени всех вершин одинаковы, а число простых циклов длины 3 равно двум. Восстановить граф. Найти число его автоморфизмов.

1.24. Пусть $O(v)$ — множество всех вершин, смежных с v, а $O'(v)=O(v) \cup \{v\}$. Пусть R_n — множество всех графов G с n вершинами, обладающих следующими свойствами: для любых двух несмежных вершин u и v либо $O(v) \subseteq O(u)$, либо $O(u) \subseteq O(v)$, а для любых смежных вершин u и v либо $O'(v) \subseteq O'(u)$, либо $O'(u) \subseteq O'(v)$. Доказать следующие утверждения:



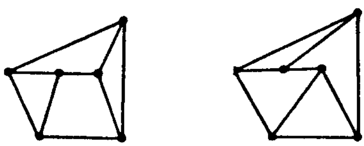
а) *б)*

Рис. 3.



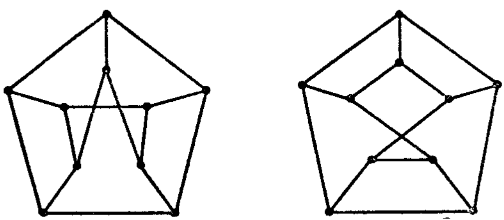
а) *б)*

Рис. 4.



а) *б)*

Рис. 5.



а) *б)*

Рис. 6.

1) В графе G из R_n вершины одной степени или все попарно смежны, или все попарно несмежны.

2) В графе G из R_n существует хотя бы одна вершина степени $n-1$.

3) Если для некоторого d вершины степени d попарно смежны в графе G из R_n, то и вершины степени, большей, чем d, также попарно смежны.

4) Граф G из R_n однозначно с точностью до изоморфизма определяется заданием степеней вершин.

5) Удаление вершины из графа $G \in R_n$ приводит к графу из R_{n-1}.

1.25. Пусть $n \geqslant 2$, и пусть задано семейство $F(G) = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ графов, в котором граф H_i получен из n-вершинного графа G удалением вершины с номером i ($i = \overline{1, n}$). Отметим, что в графах H_i вершины не помечены. Доказать, что по семейству $F(G)$ можно

1) найти число ребер графа G;

2) найти для каждого H_i степень той вершины, удалением которой из G получен граф H_i;

3) определить для произвольного графа L, имеющего не более $n-1$ вершин, является ли он подграфом графа G;

4) определить, является ли граф G связным;

5) восстановить граф G, если он не является связным.

1.26. Пусть $D(G)$ — диаметр графа G, а $\bar{G}$ — граф, дополнительный к G. Показать, что $D(\bar{G}) \leqslant 3$, если граф G несвязен или если $D(G) \geqslant 3$.

1.27. Граф G называется *самодополнительным*, если графы G и $\bar{G}$ изоморфны.

1) Найти самодополнительный граф с наименьшим числом вершин.

2) Показать, что самодополнительный граф связен.

3) Показать, что если G — самодополнительный граф, то $2 \leqslant D(G) \leqslant 3$.

1.28. Сколько существует попарно неизоморфных графов с 20 вершинами и 188 ребрами?

1.29. Показать, что если графы G и H гомеоморфны, то:

1) для каждого $d \neq 2$ число вершин степени d в обоих графах одинаково;

2) существует взаимно однозначное отображение множества простых циклов графа G на множество про-

стых циклов графа H, при котором число вершин степени d в соответствующих циклах одинаково для всех $d \neq 2$.

1.30. Установить, существуют ли в графах, изображенных на рис. 7, подграфы, гомеоморфные графу G.

1) $G=K_4$ (см. рис. 8, *а*);

2) $G=K_5$ (см. рис. 8, *б*);

3) $G=K_{3,3}$ (см. рис. 8, *в*).

1.31. *Операция надразбиения* заключается в замене двух смежных ребер (u, v) и (v, w), общая вершина v которых имеет степень 2, одним ребром (u, w). Применяя

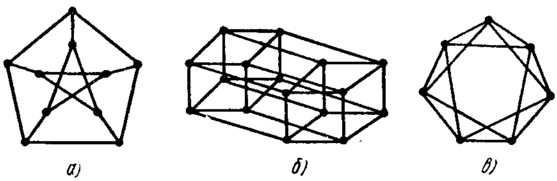


Рис. 7.

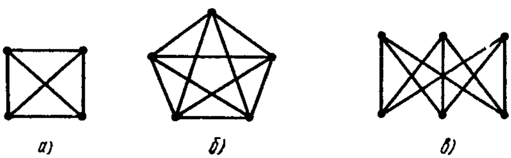


Рис. 8.

шаг за шагом операцию надразбиения, можно получить из произвольного графа G, содержащего вершины степени 2, псевдограф, не содержащий вершин степени 2. Этот псевдограф будет называться полным надразбиением графа G.

1) Показать, что полное надразбиение графа G не зависит от того, в каком порядке применялась операция надразбиения к парам смежных ребер графа G.

2) Показать, что графы G и H гомеоморфны тогда и только тогда, когда их полные надразбиения изоморфны (как псевдографы).

1.32. Доказать, что в графе Петерсена (рис. 7, *а*) нет гамильтонова цикла, но в графе, полученном из него удалением одной вершины, имеется гамильтонов цикл.

1.33. Доказать, что в каждом из графов K_n, $K_{n,n}$, B^n имеется гамильтонов цикл.

1.34. Пусть n нечетно, B_k^n — подмножество вершин куба B^n, состоящее из вершин веса k. Пусть G — подграф куба B^n, порожденный множеством $B^n_{\frac{n-1}{2}} \cup B^n_{\frac{n+1}{2}}$.

1) Существует ли в графе G совершенное паросочетание?

2) Существует ли в графе G гамильтонов цикл?

1.35. В графе G имеется гамильтонов цикл, а в графе H — гамильтонова цепь. Верно ли, что в графе $G \times H$ существует гамильтонов цикл?

1.36. Доказать, что если для любых двух вершин u и v связного n-вершинного графа выполняется $d(u) + d(v) \geqslant n$, то граф имеет гамильтонов цикл.

1.37. Показать, что любой граф с n вершинами, имеющий не менее $\binom{n-1}{2} + 2$ ребер, имеет гамильтонов цикл.

1.38. Показать, что граф, у которого имеются две несмежные вершины третьей степени, а остальные вершины имеют степень, не большую, чем 2, не обладает гамильтоновым циклом.

1.39. 1) Показать, что $D(G \times H) \leqslant D(G) + D(H)$.

2) Верно ли, что $D(G \times H) \leqslant \max\{D(G), D(H)\}$?

1.40*. Доказать, что каждый регулярный связный граф степени $2d$ представим в виде объединения непересекающихся 2-факторов.

1.41*. Показать, что граф K_{2n} представим в виде объединения некоторого 1-фактора и $n-1$ гамильтоновых циклов.

1.42. Показать, что граф K_{2n+1} можно представить в виде объединения n гамильтоновых циклов.

1.43. Показать, что в графе K_n с нумерованными вершинами имеется $\frac{(n-1)!}{2}$ различных гамильтоновых циклов.

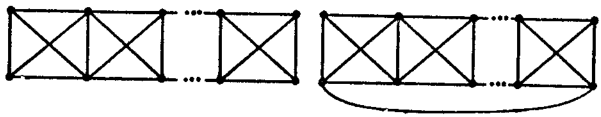
1.44. Показать, что число различных совершенных паросочетаний графа K_{2n} с нумерованными вершинами равно $\frac{(2n)!}{2^n n!}$.

§ 2. Планарность, связность, числовые характеристики графов

Граф называется *планарным*, если он может быть нарисован на плоскости так, что дуги кривых, изображающие ребра, пересекаются лишь в точках, соответствующих вершинам графа; причем в любой точке пересечения сходятся только дуги, сопоставленные ребрам, инцидентным именно той вершине, которой соответствует данная точка. Такая геометрическая фигура, являющаяся изображением планарного графа, называется *плоским графом*. *Внутренней гранью* плоского связного графа называется конечная область плоскости, ограниченная замкнутым маршрутом и не содержащая внутри себя ни вершин, ни ребер графа. Маршрут, ограничивающий грань, называется *границей грани*. Часть плоскости, состоящая из точек, не принадлежащих ни графу и ни одной из его внутренних граней, называется *внешней гранью*. Для двухсвязных плоских графов (мультиграфов), имеющих n вершин, m ребер и r граней, выполняется *формула Эйлера* $n-m+r=2$. Справедлив следующий критерий планарности.

Теорема (Понтрягин—Куратовский). *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных графам K_5 и $K_{3,3}$* (рис. 8, *б*, *в*).

Толщиной графа G называется наименьшее число $t(G)$ его планарных подграфов, объединение которых равно G. Каждому нетривиальному связному плоскому псевдографу G можно сопоставить *двойственный псевдограф* G^* следующим образом. Внутри каждой грани псевдографа G выбирается по вершине графа G^*. Если x — ребро графа G, лежащее на границе граней g_1 и g_2, а v_1 и v_2 — вершины псевдографа G^*, взятые в этих гранях, то вершины v_1 и v_2 соединяются ребром в G^*. Плоский псевдограф (граф), изоморфный своему двойственному псевдографу, называется *самодвойственным*. Циклы $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ графа G называются *линейно зависимыми*, если для некоторых $i_1, i_2, \ldots, i_s$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant k)$ выполняется соотношение $Z_{i_1} \oplus Z_{i_2} \oplus \ldots \oplus Z_{i_s} = 0$, где 0 — граф без ребер, $Z \oplus Y$ — симметрическая разность графов Z и Y. В противном случае циклы $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ называются *линейно* *независимыми.* Наибольшее число $\xi(G)$ циклов в совокупности линейно независимых циклов графа G называется *цикломатическим числом графа* G. Раскраска вершин (ребер) графа называется *правильной*, если смежные вершины (ребра) окрашены в разные цвета. Наименьшее число $\chi(G)$, для которого существует правильная раскраска вершин графа G, называется *хроматическим числом графа* G. Наименьшее число $\chi'(G)$, для которого существует правильная раскраска ребер графа G, называется *реберным хроматическим числом графа* G. Подмножество U вершин (ребер) называется *покрытием множества вершин* (или ребер)



а) б)

Рис. 9.

графа G, если каждая вершина (каждое ребро) графа либо совпадает с некоторым элементом множества U, либо смежна с некоторым элементом из U (соответственно инцидентно некоторому элементу из U). Покрытие называется *тупиковым*, если после отбрасывания любого элемента оно перестает быть покрытием. Минимальная мощность такого подмножества U вершин графа G, что всякое ребро графа инцидентно хотя бы одной вершине из U, обозначается через $\alpha_0(G)$ и называется *числом вершинного покрытия*. Минимальная мощность подмножества Y ребер графа G, такого, что каждая вершина графа инцидентна хотя бы одному ребру из Y, обозначается через $\alpha_1(G)$ и называется *числом реберного покрытия графа* G. Множество вершин (ребер) графа G называется *независимым*, если никакие два его элемента несмежны. Через $\beta_0(G)$ (соответственно $\beta_1(G)$) обозначается максимальная мощность независимого множества вершин (ребер) графа G. Число $\beta_0(G)$ (число $\beta_1(G)$) называется *вершинным* (*реберным*) *числом независимости графа* G. Через $\alpha_{00}(G)$ обозначается минимальная мощность такого подмножества вершин U, что каждая вершина графа G, не входящая в U, смежна хотя бы с одной вершиной из U.

2.1. Являются ли плоскими графы, изображенные на рис. 6, *а*, *б*, 7, *а*, *б*, *в*?

2.2. При каких $n \geqslant 2$ графы, изображенные на рис. 9, *а*, *б*, являются плоскими?

2.3. Пусть $G_n = (V_1, V_2, X)$ — двудольный граф,

$$V_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

$$V_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\},$$

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n\},$$

где

$$x_i = (a_i, b_i), \quad i = \overline{1, n};$$

$$y_i = (a_i, b_{i+1}), \; i = \overline{1, n-1}, \quad y_n = (a_n, b_1);$$

$$z_i = (a_i, b_{i+2}), \; i = \overline{1, n-2},$$

$$z_{n-1} = (a_{n-1}, b_1), \quad z_n = (a_n, b_2).$$

Определить, при каких $n > 2$ граф G_n является плоским.

2.4. 1) Какое минимальное число ребер необходимо удалить из куба B^4, чтобы полученный граф был плоским?

2) Какое минимальное число вершин нужно удалить из B^4, чтобы полученный граф был плоским?

2.5*. Пусть G — двухсвязный плоский граф, обладающий не менее чем двумя внутренними гранями. Доказать, что существует такая простая цепь, принадлежащая границе внешней грани, удаление которой приводит к двухсвязному плоскому графу с меньшим числом граней.

Примечание. При удалении цепи удаляются все ее ребра и внутренние вершины, а концевые вершины цепи остаются в графе.

2.6. Используя результат задачи 2.5, доказать по индукции, что в плоском двухсвязном графе с n вершинами и m ребрами число внутренних граней равно $m-n+1$.

2.7. Доказать индукцией по числу ребер, что цикломатическое число $\xi(G)$ псевдографа с n вершинами, m ребрами и c компонентами связности равно $m-n+c$.

2.8. Для графов, изображенных на рис. 5, *а*, 6, *а*, 7, *а*, найти цикломатическое число $\xi(G)$ и выделить систему из $\xi(G)$ линейно независимых циклов.

2.9. Доказать, что в любом планарном графе существует вершина степени, не большей, чем 5.

2.10. Доказать, что в любом планарном графе, имеющем не менее четырех вершин, найдутся по меньшей мере четыре вершины степени не выше 5.

2.11. Доказать, что если у связного планарного графа с n вершинами и m ребрами каждый простой цикл содержит не менее k ребер, то $m \leqslant \frac{k(n-2)}{k-2}$.

2.12. Плоский связный граф, каждая грань которого, включая и внешнюю, ограничена циклом длины три, называется *триангуляцией*.

Показать, что всякая триангуляция с $n \geqslant 3$ вершинами имеет $3n$—6 ребер и $2n$—4 граней.

2.13. Пусть $t(G)$ — толщина графа G. Показать, что:

1) $t(K_n) \geqslant \left[\frac{n+7}{6}\right]$;

2) $t(K_{n,m}) \geqslant \left]\frac{n \cdot m}{2(n+m-2)}\right[$;

3) $t(B^n) \geqslant \left]\frac{n+1}{4}\right[$.

2.14*. Используя формулу Эйлера, доказать, что графы $K_{3,3}$ и K_5 не являются планарными.

2.15*. Доказать, что из двухсвязного графа с цикломатическим числом ξ ($\xi > 1$) путем удаления цепи можно получить двухсвязный граф с цикломатическим числом, равным ξ—1.

2.16. Построить граф, двойственный к графу, изображенному на рис. 5, *а*.

2.17. Показать, что псевдограф, двойственный к связному плоскому графу, является связным и плоским.

2.18. Показать, что цикломатическое число двойственного графа совпадает с цикломатическим числом исходного графа.

2.19. Показать, что если G имеет разделяющую вершину, то и G^* имеет разделяющую вершину.

2.20. Показать, что псевдограф G^*, двойственный к трехсвязному плоскому графу G, не имеет петель и кратных ребер.

2.21. Сколько существует попарно неизоморфных самодвойственных плоских двухсвязных графов с шестью вершинами?

2.22. Показать, что не существует шестисвязных планарных графов.

2.23. Показать, что граф, двойственный к n-вершинной ($n > 3$) триангуляции, является двухсвязным плоским кубическим графом.

2.24. 1) Показать, что плоский кубический граф, каждая грань которого имеет не менее пяти вершин, содержит не менее двенадцати вершин.

2) Показать, что если r_i — число граней плоского кубического графа, ограниченных i ребрами, то $\sum_i (6 - i) r_i = 12$.

2.25. Найти хроматические числа графов, представленных на рис. 4—8.

2.26. Найти реберные хроматические числа графов, представленных на рис. 3—7.

2.27. Найти хроматическое и реберное хроматическое число

1) графа K_n;

2) графа $K_{n,n}$;

3) графа B^n.

2.28. Сколько существует правильных раскрасок вершин куба B^n в минимальное число цветов?

2.29. Показать, что реберное хроматическое число графа Петерсена, представленного на рис. 7, *а*, равно четырем, но у любого его подграфа G с восемью вершинами $\chi'(G) \leqslant 3$. Верно ли неравенство $\chi'(G) \leqslant 3$ для произвольного собственного подграфа графа Петерсена, полученного после удаления одной вершины?

2.30. Показать, что для раскраски ребер всякого кубического псевдографа достаточно четырех цветов.

2.31. Показать, что ребра плоского кубического графа можно раскрасить в два цвета a и b так, что каждая вершина будет инцидентна одному ребру цвета a и двум ребрам цвета b.

2.32. Доказать, что вершины всякого плоского графа можно правильно окрасить в 6 цветов.

2.33. Доказать индукцией по числу вершин, что для плоского графа G справедливо неравенство $\chi(G) \leqslant 5$.

2.34. Построить плоский граф G с минимальным числом вершин, такой, что $\chi(G)=4$.

2.35. Вершины графа G пронумерованы в порядке возрастания их степеней. Доказать, что если k — наибольшее число, такое, что $k \leqslant d(v_k)+1$, то $\chi(G) \leqslant k$.

2.36. Операция стягивания заключается в удалении из графа двух его смежных вершин и добавлении новой вершины, которая смежна с теми из оставшихся вершин, с которыми была смежна хотя бы одна из удаленных вершин. Показать, что граф, получающийся в результате применения операции стягивания к планарному графу, является планарным.

2.37. Пусть l — длина самой длинной простой цепи в графе G. Показать, что $\chi(G) \leqslant l+1$.

2.38. Пусть d — максимальная степень вершины графа G. Показать, что:

1) $\chi(G) \leqslant d+1$;
2) $\chi'(G) \leqslant d+1$.

2.39. Пусть p — наибольшее число, для которого в графе G существует подграф, изоморфный графу K_p. Показать, что $\chi(G) \geqslant p$.

2.40. Показать, что для графа G с n вершинами

1) $\beta_0(G)\cdot\chi(G) \leqslant n$;
2) $\chi(G)\cdot\bar{\chi}(G) \geqslant n$.

2.41. Каково наименьшее n, при котором существует n-вершинный неплоский граф с неплоским дополнением.

2.42. Найти толщину графа K_8.

2.43. Доказать, что для произвольного связного графа G с n $(n>1)$ вершинами

$$\alpha_0(G)+\beta_0(G)=\alpha_1(G)+\beta_1(G)=n.$$

2.44. 1) Привести пример, опровергающий следующее утверждение: всякое вершинное покрытие содержит минимальное вершинное покрытие.

2) Доказать, что всякое вершинное покрытие содержит тупиковое вершинное покрытие.

2.45. Найти число тупиковых и минимальных реберных покрытий

1) цепи длины m;
2) цикла длины n;
3) графа Петерсена (рис. 7, *а*).

2.46. Доказать, что для любого графа G справедливы неравенства $\alpha_0(G) \geqslant \beta_1(G)$, $\alpha_1(G) \geqslant \beta_1(G)$.

2.47. Доказать, что для любого графа G выполняется неравенство $\alpha_{00}(G) \leqslant \alpha_0(G)$.

2.48. Доказать или опровергнуть неравенство $\beta_0(G) \leqslant \alpha_{00}(G)$.

2.49. Пусть $U \subseteq V$ — некоторое подмножество вершин графа $G=(V, X)$, а $\nu(U)$ — число тех вершин $v \in V \setminus U$, которые несмежны ни с одной вершиной из U. Пусть

$$\bar{\nu}_k(G) = \frac{1}{\binom{|V|}{k}} \sum_{U \subseteq V, |U|=k} \nu(U).$$

1) Показать, что $\alpha_{00}(G) \leqslant k + \bar{\nu}_k(G)$.

2) Пусть d_0 — минимальная из степеней вершин графа G. Показать, что

$$\bar{\nu}_k(G) \leqslant |V| \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{d_0}{|V| - i}\right).$$

3) Показать, что для регулярного графа G степени d, имеющего n вершин,

$$\frac{n}{d} \leqslant \alpha_{00}(G) \leqslant 1 + \frac{n}{d}(1 + \ln d).$$

2.50. Показать, что если d_0 — минимальная из степеней вершин графа G, то $\alpha_0(G) \geqslant d_0$.

2.51*. Если G — двудольный граф, а m — число его ребер, то $m \leqslant \alpha_0(G) \cdot \beta_0(G)$. Показать, что равенство достигается лишь для полных двудольных графов.

§ 3. Ориентированные графы

Ориентированный псевдограф $D = D(V, X)$ определяется заданием непустого (конечного) множества V и набора X упорядоченных пар элементов из V. Элементы множества V называются *вершинами*, а элементы набора X — *дугами* (или *ориентированными ребрами*) ориентированного псевдографа $D(V, X)$. В наборе X могут встречаться и пары вида (v, v), называемые *петлями*, и одинаковые пары, называемые *кратными* (или *параллельными*) *дугами*. Пары (u, v) и (v, u) считаются одинаковыми лишь в том случае, когда $u=v$. *Ориентированным мультиграфом* называется ориентированный псевдограф, не содержащий петель. Если в ориентированном псевдографе нет ни петель, ни кратных дуг, то он называется *ориентированным графом* (или, короче, *орграфом*). *Направленным графом* называется такой орграф, который не имеет симметричных пар ориентированных ребер, т. е. множество X не может содержать одновременно и дугу (u, v), и противоположно направленную дугу (v, u).

Пусть $x=(u, v)$ — дуга ориентированного псевдографа. Тогда вершина u называется *начальной вершиной* (или *началом*), а v — *конечной вершиной* (или *концом*) дуги x; в этом случае говорят также, что дуга x *исходит из* вершины u и *заходит в* вершину v. Если вершина v является началом или концом дуги x, то говорят, что v и x *инцидентны*. *Полустепенью исхода вершины* v (псевдографа D) называется число дуг псевдографа D, исходящих из вершины v. Полустепень исхода вершины v обозначается через $\mathrm{od}\,(v)$ или $d^+\,(v)$. Аналогично, *полустепенью захода вершины* v (обозначение: $\mathrm{id}\,(v)$ и $d^-\,(v)$) называется число дуг псевдографа, заходящих в вершину v.

Заменяя каждую упорядоченную пару (u, v) из набора X ориентированного псевдографа $D\,(V, X)$ неупорядоченной парой $\{u, v\}$, состоящей из тех же элементов u и v, получаем *ассоциированный с* $D\,(V, X)$ *псевдограф* $G=(V, X^0)$.

Ориентированные псевдографы $D_1\,(V_1, X_1)$ и $D_2\,(V_2, X_2)$ называются *изоморфными*, если существуют два таких взаимно однозначных соответствия φ: $V_1 \leftrightarrow V_2$ и ψ: $X_1 \leftrightarrow X_2$, что для всякой дуги $x=(u, v) \in X_1$ справедливо соотношение $\psi\,(x)=(\varphi\,(u),\ \varphi\,(v))$. *Изоморфное отображение* ориентированного псевдографа *на себя* называется *автоморфизмом псевдографа*. Совокупность всех автоморфизмов ориентированного псевдографа образует группу относительно операции умножения (последовательного выполнения) автоморфизмов. Эта группа называется *группой (автоморфизмов) ориентированного псевдографа*.

Операции удаления вершины и дуги, а также понятия подграфа, остовного подграфа и порожденного подграфа определяются для ориентированных псевдографов подобно тому, как это делалось в случае неориентированных псевдографов.

При определении *ориентированных маршрута, замкнутого маршрута, цепи, цикла, простой цепи и простого цикла* требуется (в отличие от определения соответствующих «неориентированных понятий»), чтобы последовательность (вершин и дуг) $v_1, x_1, v_2, x_2, \ldots, x_{n-2}, v_{n-1}, x_{n-1}, v_n$ $(n \geqslant 2)$ удовлетворяла условию: каждая дуга x_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ имеет вид (v_i, v_{i+1}), т. е. вершина v_i является началом дуги x_i, а вершина v_{i+1} — концом. Считается, что ориентированный $(u—v)$-маршрут ориентирован от своей первой вершины u к своей последней вершине v. *Длиной маршрута* называется число дуг в нем. *Расстоянием* $\rho(u, v)$ *от вершины и до вершины* v называется длина кратчайшего $(u—v)$-маршрута. Ориентированный маршрут часто называется *путем*, а ориентированный простой цикл — *контуром*.

Ориентированная простая остовная цепь называется *гамильтоновым путем* (*гамильтоновой цепью*). *Гамильтоновым контуром* называется остовный контур ориентированного псевдографа. Если ориентированный псевдограф содержит гамильтонов контур, то сам псевдограф тоже называется *гамильтоновым*.

Говорят, что вершина v ориентированного псевдографа *достижима из* вершины u, если в псевдографе существует $(u—v)$-путь, т. е. путь, исходящий из вершины u и заходящий в вершину v.

Ориентированный псевдограф называется *сильно связным* (или *сильным*), если любая вершина в нем достижима из всякой другой его вершины. Ориентированный псевдограф называется *односторонне связным* (или *односторонним*), если для любых двух вершин по крайней мере одна достижима из другой. Ориентированный псевдограф $D(V, X)$ называется *слабо связным* (или *слабым*), если ассоциированный с ним псевдограф (V, X^0) является связным. Если ориентированный псевдограф не является даже слабо связным, то он называется *несвязным*. *Тривиальный орграф*, состоящий лишь из одной вершины, считается (по определению) сильно связным.

Сильной компонентой орграфа D называется любой его ориентированный подграф, являющийся сильным орграфом и не содержащийся ни в каком другом сильно связном ориентированном подграфе орграфа D. Аналогично, *односторонняя компонента* представляет собой максимальный односторонний подграф орграфа D, а *слабая компонента* — максимальный слабый подграф. Понятия сильной, односторонней и слабой компонент естественным образом обобщаются и на случай ориентированного псевдографа.

Пусть $\gamma=\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ — множество всех сильных компонент орграфа D. *Конденсацией* D^* орграфа D называется такой орграф, у которого множеством вершин является γ, а дуга (S_i, S_j) имеется в орграфе D^* тогда и только тогда, когда в орграфе D существует хотя бы одна дуга, исходящая из некоторой вершины компоненты S_i и заходящая в какую-нибудь вершину компоненты S_j.

Если $D=D(V, X)$ — орграф, то обратный к нему орграф D' задается тем же множеством вершин V и таким множеством дуг X', что дуга (u, v) принадлежит X' тогда и только тогда, когда дуга (v, u) принадлежит X.

Вершина v орграфа D называется *источником*, если из нее достижима любая другая вершина орграфа D. *Стоком* орграфа D называется всякая его вершина v, являющаяся источником в обратном (к орграфу D) орграфе D'.

Пусть D — орграф, для которого ассоциированный с ним граф является деревом. Тогда орграф D называется *растущим деревом*, если он имеет источник. Ориентированный псевдограф называется *полным*, если в нем любые две различные вершины соединены хотя бы одной дугой.

Турниром называется полный направленный граф.

Пусть D—n-вершинный орграф и его множество вершин $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. *Матрицей смежности* орграфа D называется $(n\times n)$-матрица $A(D)=\|a_{ij}\|$, у которой $a_{ij}=1$, если дуга (v_i, v_j) принадлежит орграфу D, и $a_{ij}=0$ — в противном случае. Предположим еще, что множество всех дуг орграфа D тоже упорядочено: $X=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. *Матрицей инцидентности* (или *матрицей инциденций*) орграфа D называется $(n\times m)$-

матрица $B(D)=\|b_{ij}\|$, у которой

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ является концом дуги } x_j, \\ -1, & \text{если вершина } v_i \text{ является началом дуги } x_j, \\ 0, & \text{если вершина } v_i \text{ не инцидентна дуге } x_j. \end{cases}$$

3.1. Опровергнуть утверждение: если полустепени исхода и захода любой вершины орграфа—положительные и четные, то для каждой вершины орграфа найдется контур, содержащий ее.

3.2. Пусть орграф $D(V, X)$ является по крайней мере слабо связным, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $n \geqslant 2$, и $d^+(v_1)-d^-(v_1)=1$, $d^+(v_2)-d^-(v_2)=-1$, $d^+(v_j)=d^-(v_j)$ при $j=3, \ldots, n$. Доказать, что тогда в орграфе D существует ориентированная (v_1-v_2)-цепь, содержащая все дуги орграфа.

3.3. Доказать, что орграф сильно связен тогда и только тогда, когда в нем существует ориентированный остовный цикл.

3.4. Доказать, что слабый орграф является сильно связным тогда и только тогда, когда в нем существует ориентированный замкнутый маршрут, содержащий каждую дугу орграфа хотя бы один раз.

3.5. Пусть орграф D можно представить в виде объединения некоторых его ориентированных замкнутых маршрутов $D_1, D_2, \ldots, D_k$ $(k \geqslant 1)$, удовлетворяющих условию: каждые два соседних маршрута D_j и D_{j+1} $(1 \leqslant j \leqslant k-1)$ имеют хотя бы одну общую вершину. Доказать, что тогда орграф D сильно связен.

3.6. Доказать, что в любом турнире существует гамильтонов путь.

3.7. Доказать, что турнир T является сильным орграфом тогда и только тогда, когда T имеет остовный контур (т. е. является гамильтоновым турниром).

3.8. Пусть $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — множество вершин турнира. Доказать, что $\sum\limits_{i=1}^{n}(d^+(v_i))^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(n-d^+(v_i))^2$.

3.9. Пусть у вершины v турнира T полустепень исхода не меньше чем полустепень исхода каждой другой вершины турнира. Доказать, что расстояние от вершины v до любой вершины турнира не превосходит 2.

3.10*. Обозначим через S некоторое множество дуг турнира T. Дуги множества S называются *согласован-*

ными, если можно так перенумеровать вершины турнира T, что из принадлежности дуги (v_i, v_j) множеству S будет вытекать неравенство $i < j$. Пусть $f(n)$ есть такое наибольшее целое число, что каждый n-вершинный турнир ($n \geqslant 3$) содержит множество S, состоящее из $f(n)$ согласованных дуг. Доказать, что $f(n) \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

3.11*. Доказать, что число ориентированных циклов длины 3 в n-вершинном турнире не превосходит

$$t(n) = \begin{cases} \dfrac{n(n^2-1)}{24}, & \text{если } n \text{ — нечетное,} \\ \dfrac{n(n^2-4)}{24}, & \text{если } n \text{ — четное.} \end{cases}$$

3.12. Доказать, что группа автоморфизмов любого турнира имеет нечетный порядок (т. е. состоит из нечетного числа элементов).

3.13. Показать, что в конденсации D^* произвольного орграфа контуры отсутствуют.

3.14. Доказать, что орграф D является односторонним тогда и только тогда, когда его конденсация D^* имеет единственную ориентированную остовную цепь.

3.15. Орграф $D(V, X)$ называется *транзитивным*, если из принадлежности дуг (u, v) и (v, w) множеству X следует принадлежность множеству X дуги (u, w). Доказать, что конденсация всякого турнира является транзитивным турниром.

3.16. *Бесконтурным* орграфом называется орграф, не содержащий контуров. Доказать, что в бесконтурном орграфе существует вершина с нулевой полустепенью исхода.

3.17. Доказать, что орграф изоморфен своей конденсации тогда и только тогда, когда он бесконтурный.

3.18. Пусть орграф D — слабо связный, но не односторонний. Доказать, что в D не существует такой вершины, удаление которой дает сильный орграф.

3.19. Доказать, что слабый орграф является растущим деревом тогда и только тогда, когда лишь одна его вершина имеет нулевую полустепень захода, а полустепень захода любой из остальных вершин равна 1.

3.20. Пусть S_n — симметрическая группа подстановок, действующая на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geqslant 2$.

Рассмотрим произвольную совокупность T транспозиций из группы S_n. Множеству T сопоставим орграф $D(V, X_T)$, у которого $V=\{1, 2, \ldots, n\}$ и дуга (i, j) принадлежит X_T только в том случае, когда $i < j$ и транспозиция (ij) содержится в множестве T. Доказать, что множество T образует базис в S_n (или, другими словами, множество T есть *неприводимая система* образующих группы S_n) тогда и только тогда, когда орграф $D(V, X_T)$ является растущим деревом.

3.21. Доказать, что полный сильно связный орграф является гамильтоновым.

3.22. Показать, что в полном орграфе существует источник.

3.23. Убедиться в том, что любой транзитивный турнир имеет единственный гамильтонов путь.

3.24. Доказать, что в каждом турнире число всех различных гамильтоновых путей — нечетное.

3.25. Пусть полный сильно связный орграф имеет n вершин ($n \geqslant 3$). Доказать, что, каково бы ни было k ($3 \leqslant k \leqslant n$), для всякой вершины орграфа найдется контур длины k, содержащий эту вершину.

3.26. Пусть $D(V, X)$ — полный сильно связный орграф, у которого $|V| \geqslant 4$. Показать, что в орграфе D существуют две различные вершины v_1 и v_2, удовлетворяющие условию: орграфы D_1 и D_2, получающиеся из орграфа D после удаления вершин v_1 и v_2 (соответственно), являются сильно связными.

3.27. Через A^q обозначается q-я степень матрицы смежности $A(D)=\|a_{ij}\|$ орграфа D. Доказать, что (i, j)-й элемент $a_{ij}^{(q)}$ матрицы A^q равен числу всех $(v_i—v_j)$-маршрутов длины q (в орграфе D).

3.28. Пусть B — матрица инциденций орграфа $D(V, X)$. Показать, что подмножество X_1 дуг орграфа D ($X_1 \subseteq X$) порождает простой цикл (не обязательно ориентированный) тогда и только тогда, когда множество соответствующих этим дугам столбцов (в матрице B) является линейно зависимым, а всякое его собственное подмножество таким свойством не обладает.

3.29. Доказать, что определитель всякой квадратной подматрицы матрицы инциденций $B(D)$ орграфа D равен либо 0, либо $+1$, либо -1.

3.30. Пусть B — матрица инциденций слабо связного n-вершинного орграфа D и матрица $\bar{B}$ получена из B вычеркиванием любой (одной) строки. Доказать, что существует взаимно однозначное соответствие между различными[1]) ориентированными деревьями орграфа D (рассматриваемыми как ориентированные подграфы орграфа D) и невырожденными подматрицами порядка $n-1$ матрицы $\bar{B}$.

3.31. Пусть матрица $\bar{B}$ — подматрица матрицы инциденций B слабо связного орграфа D, описанная в предыдущей задаче. Через $\bar{B}'$ обозначается матрица, транспонированная к матрице $\bar{B}$. Доказать, что число различных ориентированных деревьев в орграфе D равно значению определителя матрицы $\bar{B}\cdot\bar{B}'$.

§ 4. Деревья и двухполюсные сети

Псевдограф $G=(V, X)$, в котором выделено k вершин, называемых *полюсами*, называется *k-полюсной сетью*. Псевдограф G будет называться *графом* соответствующей *k-полюсной сети*. Сеть Γ с множеством полюсов P и графом $G=(V, X)$ будет обозначаться через $(P; V, X)$. Две k-полюсные сети *изоморфны*, если их графы изоморфны и при этом полюсы одной сети взаимно

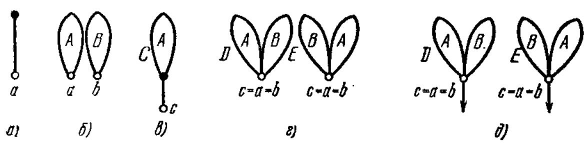


Рис. 10.

однозначно соответствуют полюсам другой. Однополюсная сеть, граф которой есть дерево, называется *корневым деревом*. Единственный полюс такой сети называется *корнем*. *Плоским корневым деревом* называется изображение графа на плоскости. Это понятие можно определить по индукции следующим образом. Сеть, представленная на рис. 10, *а*, есть плоское корневое дерево. Если A и B (см. рис. 10, *б*) — плоские корневые деревья, то фигуры C, D, E (рис. 10, *в*, *г*) также являются

[1]) Здесь считается, что два дерева *различны*, если они *неизоморфные* ориентированные деревья с *помеченными* (*занумерованными*) *вершинами*.

плоскими корневыми деревьями. Будем считать, что произвольное плоское корневое дерево изображается на плоскости с разрезом, представляющим собой полупрямую, исходящую из корня (см. рис. 10, *д*). При этом можно предполагать, что ребра, инцидентные корню, пронумерованы по часовой стрелке числами $1, \ldots, m$, где m — степень корня. Если удалить из такого плоского корневого дерева ребро с номером i, то получится граф с двумя компонентами связности. Ту из компонент, которая не содержит корня, назовем i-й *ветвью* исходного корневого дерева. Корнем i-й ветви будем считать вершину, инцидентную i-му ребру (в исходном дереве). Для произвольного корневого дерева A обозначим через $d_0(A)$ степень его корня. Плоские корневые деревья A и B называются *одинаковыми*, если либо $d_0(A)=$ $=d_0(B)=0$, либо $d_0(A)=d_0(B)=m>0$ и для всякого $i=\overline{1, m}$ i-е ветви деревьев A и B — одинаковые. Два дерева, не являющиеся одинаковыми, называются *различными*. Таким образом, деревья D и E (см. рис. 10, *г*) являются различными, если деревья A и B (см. рис. 10, *б*) различны. Каждому плоскому корневому дереву T с m ребрами можно однозначно сопоставить двоичный вектор длины $2m$, называемый *кодом дерева*. Дереву с одним ребром сопоставляется вектор 01. Если деревьям A и B (рис. 10, *б*) сопоставлены векторы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ соответственно, то дереву C (рис. 10, *в*) сопоставляется вектор $0\tilde{\alpha}1$, а деревьям D и E (рис. 10, *г*) — векторы $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ и $\tilde{\beta}\tilde{\alpha}$.

В дальнейшем, если не оговорено противное, под сетью понимается 2-полюсная сеть. Сеть $\Gamma(\{a, b\}; V, X)$ будет обозначаться кратко через $\Gamma(a, b)$. *Подграфом* такой сети будет называться подграф графа (V, X). Вершина подграфа G сети Γ называется *граничной*, если она либо является полюсом, либо инцидентна некоторому ребру сети, не принадлежащему подграфу G. Подграф сети называется *отростком*, если он обладает единственной граничной вершиной. *Подсетью* 2-полюсной сети называется ее подграф, имеющий ровно две граничные вершины. Эти вершины являются полюсами подсети. Сеть называется *связной*, если ее граф является связным. *Тривиальной* называется связная сеть (или подсеть), имеющая одно ребро. Связная сеть называется *сильно связной*, если через каждое ребро проходит простая цепь, соединяющая полюсы сети. Сильно связная сеть называется *разложимой*, если она обладает хотя бы одной нетривиальной подсетью. В противном случае она называется *неразложимой*. Пусть $\Gamma(a, b)$ — разложимая сеть, $G(c, d)$ — нетривиальная ее подсеть, а $\Gamma_1(a, b)$ — сеть, полученная из $\Gamma(a, b)$ заменой подсети $G(c, d)$ одним ребром (c, d). Тогда в свою очередь сеть $\Gamma(a, b)$ может быть получена подстановкой сети $G(c, d)$ вместо ребра (c, d) сети $\Gamma_1(a, b)$. Таким образом, разложимая сеть $\Gamma(a, b)$ может быть задана указанием сети $\Gamma_1(a, b)$, ребра (c, d) сети $\Gamma_1(a, b)$ и сети $G(a, b)$. Такое задание называется *разложением сети* $\Gamma(a, b)$. Сеть $\Gamma_1(a, b)$ называется *внешней*, а сеть $G(c, d)$ — *внутренней сетями разложения*. Сеть $\Gamma(a, b)$ называется *суперпозицией сетей* $\Gamma_1(a, b)$ и $G(c, d)$. Сеть, состоящая из m параллельных ребер, соединяющих полюсы a, b, обозначается через $\Gamma_m^p(a, b)$ или, короче, Γ_m^p. Сеть, граф которой есть простая цепь длины m, соединяющая полюсы a, b, обозначается через $\Gamma_m^s(a, b)$ или, короче, Γ_m^s. Сеть, которая может быть получена из сетей Γ_2^p и Γ_2^s применением конечного числа операций подстановки сети вместо ребра, называется *параллельно-последовательной сетью* или, короче, π-сетью. Нетривиальная неразложимая сеть $\Gamma(a, b)$, отличная от $\Gamma_2^p(a, b)$ и $\Gamma_2^s(a, b)$, называется *H-сетью*.

Разложимая сеть называется *p-разложимой* (соответственно *s-разложимой*), если некоторая внешняя сеть разложения имеет вид Γ_m^p (соответственно Γ_m^s), $m \geqslant 2$. Если некоторая внешняя сеть разложения сети Γ является H-сетью, то Γ называется *H-разложимой*. Справедливо утверждение о том, что всякая разложимая сеть является либо p-, либо s-, либо H-разложимой. *Каноническим p-разложением* сети называется p-разложение, при котором внутренние сети разложения отличны от сетей вида Γ_2^p и сетей, являющихся p-разложимыми. Аналогично определяется *каноническое s-разложение*. *Каноническим H-разложением* называется разложение, внешней сетью которого является H-сеть. Каждой π-сети Γ с $m \geqslant 1$ ребрами можно сопоставить плоское корневое дерево $T(\Gamma)$ с m висячими вершинами, такое, что а) каждая вершина дерева $T(\Gamma)$, отличная от висячей, помечена символом p или s; б) на каждой цепи, идущей от корня к висячей вершине, отметки p и s чередуются; в) вершины, отличные от корня, имеют степень, не равную 2. Висячие вершины дерева T (Г) не помечены. Дерево T (Г) определяется по индукции. Если Г имеет вид Γ_m^p (или Γ_m^s), то T (Г) есть дерево, корень которого помечен символом p (соответственно символом s), а остальные m вершин являются висячими, смежными с корнем, и не имеют пометок. Если сеть Г разложима и отлична от сетей указанного вида и внешняя сеть разложения имеет вид Γ_k^p (или Γ_k^s), а внутренние сети суть $G_1, G_2, \ldots, G_k$, то дерево T (Г) строится следующим образом. Пусть $T(G_1)$, $T(G_2)$, ..., $T(G_k)$ — деревья, соответствующие внутренним сетям разложения. Тогда в качестве корня T (Г) берется вершина

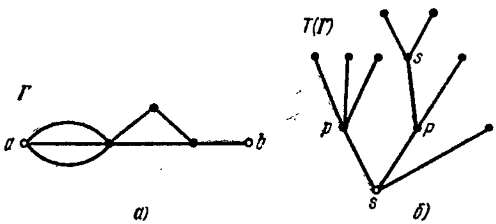


Рис. 11.

степени k, помеченная символом p (соответственно символом s). Вершины, смежные с корнем, помечаются символом s (соответственно символом p). Вершины v_1, $v_2, \ldots, v_k$, смежные с корнем, отождествляются с корнями деревьев $T(G_1)$, $T(G_2)$, ..., $T(G_k)$. Например, π-сети, изображенной на рис. 11, *а*, соответствует дерево, изображенное на рис. 11, *б*. Дерево T (Г) называется *диаграммой канонического разложения* π-сети Г. Отметим, что если внешняя сеть разложения сети Г имеет вид Γ_k^s (a, b), а внутренние сети G_1 (a, u_1), $G_2(u_1, u_2), \ldots, G_k(u_{k-1}, b)$ подставляются соответственно вместо ребер (a, u_1), (u_1, u_2), ..., (u_{k-1}, b), то в дереве T (Г) вершины $v_1, v_2, \ldots, v_k$, отождествляемые с корнями плоских корневых деревьев $T(G_1)$, $T(G_2)$, ..., $T(G_k)$, следуют друг за другом слева направо в порядке возрастания номеров. Таким образом, дерево $T(\Gamma')$, изображенное на рис. 12, *б*, является диаграммой канонического разложения сети Г′ (рис. 12, *а*), но не является диаграммой сети Г (см. рис. 11, *а*).

Вершина сети, отличная от полюса, называется *внутренней*. Вершина v зависит от вершины u, если всякая простая цепь, соединяющая полюсы и проходящая через v, проходит и через u. Вершины v и u *эквивалентны*, если v зависит от u и u зависит от v. Вершина v *слабее* вершины u, а вершина u *сильнее* вершины v, если v зависит от u, но не эквивалентна ей. Вершина v называется *минимальной*, если она не слабее никакой другой внутренней вершины сети. *Цепью сети* в дальнейшем будет называться простая цепь, соединяющая

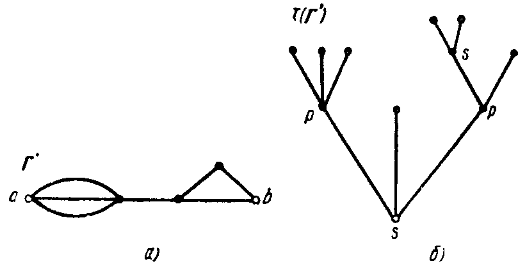


Рис. 12.

полюсы сети. Случаи, когда термин «цепь» употребляется в ином смысле, будут всякий раз оговариваться. Цепь сети называется *кратчайшей*, если она имеет минимально возможную длину. *Длиной* сети называется длина ее кратчайшей цепи. *Разрезом* называется множество ребер сети, удаление которых разрушает все цепи. Разрез называется *тупиковым*, если никакое его подмножество не является разрезом. Разрез называется *минимальным*, если он имеет минимально возможное число ребер. Число ребер в минимальном разрезе называется *шириной* сети.

4.1. Пусть G — граф с $n \geqslant 2$ вершинами. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

1) G — связный граф с $n—1$ ребрами.

2) G — связный граф, но после удаления любого ребра становится несвязным.

3) Любая пара различных вершин графа G соединена единственной цепью.

4) G — граф без циклов, но добавление ребра, соединяющего любые две вершины, приводит к появлению цикла.

4.2. Доказать, что в любом дереве с $n \geqslant 2$ вершинами имеется не менее двух висячих вершин.

4.3. Доказать, что если в графе G, имеющем не менее трех вершин, число висячих вершин равно числу ребер, то G либо не связен, либо является деревом.

4.4. Пусть $F(G)=\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ — семейство графов, в котором граф H_i получен из n-вершинного графа G удалением вершины с номером i $(i=\overline{1, n})$. Вершины в графах H_i не помечены. Доказать, что:

1) по семейству $F(G)$ можно выяснить, является ли граф G деревом;

2) если G — дерево, то по $F(G)$ можно однозначно (с точностью до изоморфизма) восстановить G.

4.5. *Пересечением* двух *графов* G и H называется граф $G \cap H$, все вершины и все ребра которого принадлежат как G так и H. Показать, что непустое пересечение двух поддеревьев одного дерева является деревом.

Пусть $\rho_G(v, u)$ — расстояние между вершинами v, u в графе $G=(V, X)$. Вершина u_0, для которой

$$\max_{v \in V} \rho_G(u_0, v)=\min_{u \in U} \max_{v \in V} \rho_G(u, v),$$

называется *центром графа*, а число $R(G)=\max\limits_{v \in V} \rho_G(u_0, v)$ называется *радиусом графа*.

4.6. 1) Найти число центров в графе

а) G (см. рис. 6, *а*);

б) G (см. рис. 6, *б*);

в) $G=K_{n_1, n_2}$.

2) Доказать, что в любом дереве имеется не более двух центров.

4.7. Доказать, что дерево обладает единственным центром в случае, когда его диаметр есть число четное, и обладает двумя центрами, когда диаметр есть число нечетное.

4.8. 1) Пусть $D(G)$ — диаметр, а $R(G)$ — радиус графа G. Показать, что $R(G) \leqslant D(G) \leqslant 2R(G)$.

2) Показать, что если G — дерево, то $R(G)=\left]\frac{D(G)}{2}\right[$.

3) Привести пример графа G, для которого $R(G)=D(G)$.

4.9*. Доказать, что дерево однозначно с точностью до изоморфизма восстанавливается, если заданы попарные расстояния между его висячими вершинами.

4.10. Показать, что в дереве с нечетным диаметром любые две простые цепи наибольшей длины имеют хотя бы одно общее ребро.

4.11. *Бесконечным деревом* будет называться граф со счетным множеством вершин, удовлетворяющий условию: для любых двух вершин u, v графа существует единственная простая $(u—v)$-цепь, причем длина этой цепи — конечная. Доказать, что если степень каждой вершины бесконечного дерева конечна, то для всякой вершины существует простая цепь бесконечной длины, содержащая эту вершину.

4.12. Пусть $P=\{v_1, v_2, \ldots\}$ — бесконечная простая цепь. Пусть $G=K_2\times P$. Какова мощность множества всех остовных деревьев графа G?

Пусть $G=(V, X)$ — мультиграф с множеством вершин $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, а $M(G)=\|a_{ij}\|$ — квадратная матрица порядка n, где

$$a_{ij}=\begin{cases} d(v_i) & \text{при} \quad i=j, \\ -1 & \text{при} \quad i\neq j, \ (v_i, v_j)\in X; \\ 0 & \text{при} \quad i\neq j, \ (v_i, v_j)\notin X. \end{cases}$$

Известно [33], что число попарно различных остовных деревьев графа равно минору любого из элементов главной диагонали матрицы $M(G)$.

4.13. Найти число остовных деревьев графов, изображенных на рис. 4, *а*, *б*, 8, *а*, *б*, предварительно пронумеровав вершины этих графов.

4.14. Каково хроматическое число дерева с $n\geqslant 2$ вершинами?

4.15. Верно ли, что если диаметр графа G равен k $(k>2)$, то существует остовное дерево, диаметр которого равен k?

4.16. Доказать, что при $n\geqslant 3$ число попарно неизоморфных корневых деревьев с n вершинами не менее чем в два раза превосходит число попарно неизоморфных деревьев с n вершинами, не имеющих корня.

4.17. Пусть корневое дерево с n $(n\geqslant 2)$ висячими вершинами не имеет вершин степени 2, отличных от корня. Показать, что общее число вершин дерева не превосходит $2n-1$.

4.18. Построить коды плоских корневых деревьев, изображенных на рис. 13, *а*, *б*.

4.19. По заданному коду $\tilde{\alpha}$ построить плоское корневое дерево.

1) $\tilde{\alpha}=(001010011011)$;

2) $\tilde{\alpha}=(0100011001101011)$;

3) $\tilde{\alpha}=(0001010110011011)$.

4.20. 1) Выяснить, сколько существует попарно неизоморфных корневых деревьев с четырьмя ребрами.

2) Сколько существует попарно различных плоских корневых деревьев с четырьмя ребрами?

4.21. Множество векторов $\{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_5\}$ разбить на классы эквивалентности так, чтобы векторы из одного класса являлись кодами попарно изоморфных деревьев:

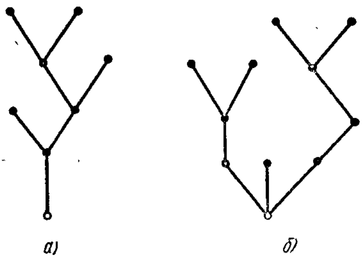


Рис. 13.

$\tilde{\alpha}_1=(0010101101)$, $\tilde{\alpha}_2=(0100101101)$, $\tilde{\alpha}_3=(0101001011)$, $\tilde{\alpha}_4=(0100101011)$, $\tilde{\alpha}_5=(0010110101)$.

4.22. Доказать, что код $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n})$ плоского корневого дерева с n ребрами удовлетворяет следующим свойствам:

1) $\sum\limits_{i=1}^{2n} \alpha_i = n$;

2) для любого $k\,(1 \leqslant k \leqslant 2n)$ справедливо неравенство $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \leqslant k/2$.

4.23. Показать, что всякий двоичный вектор $\tilde{\alpha}$ длины $2n$, удовлетворяющий условиям 1) и 2) предыдущей задачи, является кодом плоского корневого дерева с n ребрами.

4.24. 1) Показать, что для числа $\psi(n)$ векторов $\tilde{\alpha} \in B^{2n}$, удовлетворяющих условиям 1), 2) задачи 4.22, справедливо рекуррентное соотношение

$$\psi(n)=\sum_{i=1}^{n} \psi(i-1)\,\psi(n-i), \quad \text{где} \quad \psi(0)=\psi(1)=1.$$

2*) Найти аналитическое выражение для $\psi(n)$.

4.25. Пусть G — связный плоский граф. Исходя из некоторой вершины v, принадлежащей внешней грани, будем обходить эту границу так, чтобы она оставалась все время справа относительно направления обхода. В некоторый момент мы вновь придем в исходную вершину v. Обход будет продолжаться, если имеются непройденные ребра, инцидентные вершине v и принадлежащие границе внешней грани. В противном случае обход заканчивается.

1) Доказать, что G — дерево тогда и только тогда, когда при обходе каждое ребро проходится дважды.

2) Пусть G — дерево с корнем v. В соответствии с описанным выше обходом дереву G можно сопоставить двоичный вектор. Последовательно проходя одно ребро за другим, будем при обходе очередного ребра выписывать 0, если ребро проходится в первый раз, и 1, если ребро проходится во второй раз. Показать, что полученный таким образом вектор является кодом дерева G.

4.26. Пусть G — граф с n вершинами и m ребрами. Граф называется *сбалансированным*, если никакой его подграф не имеет вершин степени, большей, чем $2m/n$.

1) Показать, что дерево при $n > 2$ — несбалансированный граф.

2) Привести пример сбалансированного графа, у которого $m = n + 3$.

4.27. Пусть G — граф, каждому ребру которого приписан вес — действительное неотрицательное число. *Весом подграфа* графа G называется сумма весов ребер этого подграфа. *Минимальным покрывающим деревом графа* G называется его остовное дерево, имеющее наименьший вес. Доказать, что минимальное покрывающее дерево можно получить с помощью следующего алгоритма. На первом шаге алгоритма выбирается ребро наименьшего веса. Затем на очередном шаге выбирается ребро, имеющее наименьший вес среди всех ребер, не образующих цикла с ранее выбранными ребрами. Алгоритм заканчивает работу, если такого ребра не существует.

4.28. Верно ли, что всякая подсеть сильно связной сети является сильно связной?

4.29. Пусть в связной сети имеется единственный отросток с k вершинами, не содержащийся в другом отростке с бо́льшим числом вершин. Показать, что достаточно провести $k-1$ дополнительных ребер, чтобы сделать сеть сильно связной. Можно ли всегда обойтись меньшим числом дополнительных ребер?

4.30. Верно ли, что для любых n и m ($m \geqslant n \geqslant 3$) существуют разложимые сети с n вершинами и m ребрами?

4.31. Верно ли, что граф сильно связной сети является 2-связным?

4.32. Верно ли, что если выбрать в произвольном 2-связном кубическом графе две несмежные вершины в качестве полюсов, то получится неразложимая сеть?

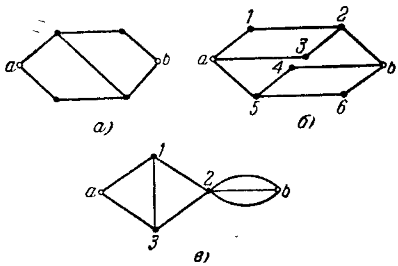


Рис. 14.

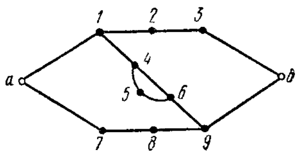


Рис. 15.

4.33. Сколько попарно неизоморфных неразложимых сетей можно получить, выбирая в n-мерном кубе две вершины в качестве полюсов?

4.34. 1) Показать, что если неразложимая сеть имеет $n > 2$ вершин и m ребер, то

$$3n \leqslant 2m+2 \leqslant n(n-1).$$

2) Показать, что для любых m и n, таких, что $m \geqslant \frac{3}{2}n - 1$, $n \geqslant 4$, существует неразложимая сеть с n вершинами и m ребрами.

4.35. Для сетей, представленных на рис. 14, *а*, *б*, *в*,

1) определить тип разложения;

2) найти внешние сети канонического разложения.

4.36. Пусть Г — сеть, изображенная на рис. 15.

1) Указать все минимальные вершины сети.

2) Разбить все внутренние вершины сети Г на классы, состоящие из попарно эквивалентных вершин.

3) Проверить, существует ли в этой сети вершина, которая слабее всех остальных.

4.37. Доказать, что для каждой вершины v сильно связной сети существует цепь, содержащая все вершины, которые сильнее ее или эквивалентны ей.

4.38. Пусть $S(\Gamma)$ — множество всех таких вершин v сети Γ, которые не являются минимальными.

1) Верно ли, что если Γ является H-разложимой сетью без кратных ребер, то после соединения каждой вершины $v \in S(\Gamma)$ ребрами с каждым из тех полюсов, с которым v несмежна, получится неразложимая сеть?

2) Достаточно ли для получения неразложимой сети соединить каждую вершину v из $S(\Gamma)$ ровно с одним из тех полюсов, с которыми v несмежна?

4.39. 1) Показать, что всякая разделяющая вершина минимальна.

2) Показать, что всякая вершина, смежная с обоими полюсами, минимальна.

4.40. Пусть все вершины сильно связной сети Γ минимальны.

1) Выяснить, может ли сеть Γ быть

а) p-разложимой;

б) s-разложимой;

в) H-разложимой.

2) Пусть сеть Γ является s-разложимой. Показать, что каждая внутренняя вершина является разделяющей.

3) Пусть сеть Γ является H-разложимой. Проверить, может ли какая-либо из внутренних сетей быть

а) H-сетью;

б) H-разложимой сетью;

в) сетью, отличной от сетей Γ_m^p $(m \geqslant 1)$.

4.41. Пусть сильно связная сеть Γ с 8 ребрами не является ни p-, ни s-разложимой и не имеет подсетей вида Γ_m^p, Γ_m^s $(m > 1)$. Показать, что Γ — неразложимая сеть.

4.42. Пусть $G=(V_1, V_2, X)$ — связный двудольный граф, степень каждой вершины которого больше или равна 2. Показать, что если построить сеть $\Gamma(a, b)$, соединив ребром полюс a с каждой вершиной множества V_1, а полюс b — с каждой вершиной множества V_2, то эта сеть окажется H-сетью.

4.43. Существует ли p-разложимая сеть, у которой всякая подсеть, имеющая не менее трех ребер, p-разложима?

4.44. Для сетей, изображенных на рис. 16, *а*, *б*, построить диаграммы канонического разложения.

4.45. Построить π-сети, имеющие диаграммы канонического разложения, изображенные на рис. 17, *а*, *б*.

4.46. Доказать, что если π-сети Γ_1 и Γ_2 не изоморфны, то они имеют различные диаграммы канонического разложения.

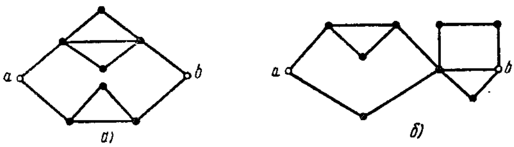


Рис. 16.

4.47. Пусть A и B — две цепи сети Γ (a, b), и пусть вершина u принадлежит цепи A, но не принадлежит цепи B, а вершина v принадлежит цепи B, но не принадлежит цепи A. Пусть, далее, $[u, v]$ — простая цепь, соединяющая u и v, и не пересекающаяся с цепями A и B нигде, кроме своих концов.

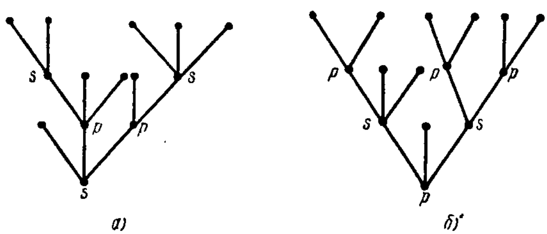


Рис. 17.

1) Доказать, что существуют по крайней мере две цепи сети Γ, вершины которых принадлежат объединению цепей A, B и $[u, v]$ и которые содержат цепь $[u, v]$. Существуют ли всегда хотя бы три такие цепи?

2) Показать, что если цепи A и B имеют общие внутренние вершины, но не имеют общих ребер, то существует не менее четырех цепей сети, содержащихся в объединении цепей A, B и $[u, v]$, удовлетворяющих условиям п. 1).

4.48. Доказать эквивалентность следующих двух определений π-сети:

1) Сеть $\Gamma(a, b)$ называется π-сетью, если ее ребра можно ориентировать так, что в каждой простой цепи, соединяющей полюсы a и b, все ребра направлены от a к b.

2) π-сетями являются те и только те сети, которые получаются следующим индуктивным процессом:

а) Сети Γ_2^p и Γ_2^s (рис. 18, *а*) суть π-сети.

б) Если сети A и B (рис. 18, *б*) суть π-сети, то и сети, представленные на рис. 18, *в*, являются π-сетями.

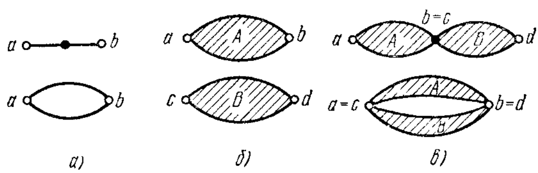


Рис. 18.

4.49. Показать, что среди всех π-сетей с m $(m > 4)$ ребрами наибольшее число кратчайших цепей имеют s-разложимые сети.

4.50. 1) Указать вид π-сетей, имеющих максимальное число простых цепей, соединяющих полюсы.

2) Указать вид π-сетей, имеющих максимальное число тупиковых разрезов.

4.51. Пусть $\varphi(m)$ — максимальное число цепей π-сети с m ребрами. Показать, что:

1) $\varphi(1)=1$;

2) $\varphi(3n)=3^n$ $(n \geqslant 1)$;

3) $\varphi(3n+1)=4\cdot 3^n$ $(n \geqslant 1)$;

4) $\varphi(3n+2)=2\cdot 3^n$ $(n \geqslant 1)$.

4.52. Верно ли, что максимальное число простых цепей среди всех сетей с m ребрами имеют π-сети?

4.53. Для каждого $n \geqslant 5$ указать H-сеть с n вершинами, имеющую максимальное число цепей, соединяющих полюсы. Подсчитать для каждого k $(1 \leqslant k < n)$ число цепей длины k между полюсами.

4.54. Доказать, что для сети с m ребрами, имеющей длину l и ширину t, справедливо неравенство $m \geqslant l\cdot t$.

4.55. Доказать, что в π-сети пересечение любой простой цепи между полюсами и любого тупикового сечения содержит ровно одно ребро.

4.56*. Множество цепей сети Г называется *определяющим* для вершины v, если пересечение множеств внутренних вершин этих цепей есть $\{v\}$. Доказать или опровергнуть следующее утверждение: для того чтобы сеть без кратных ребер, не являющаяся p-разложимой, была неразложимой, необходимо и достаточно, чтобы для любой внутренней вершины существовало определяющее множество цепей.

4.57. Доказать следующее утверждение. Для того чтобы разложимую сеть Г можно было добавлением ребер сделать неразложимой, необходимо и достаточно, чтобы Г не имела кратных ребер и обладала по крайней мере четырьмя вершинами.

4.58. Построить разложимую сеть с наименьшим числом ребер и числом вершин n ($n \geqslant 4$), которую нельзя сделать неразложимой последовательной заменой подсетей вида Γ_2^s и Γ_2^p на ребра.

§ 5. Оценки в теории графов и сетей

Помеченным (или *нумерованным*) называется такой граф (орграф, псевдограф и т. д.), вершинам которого приписаны пометки (номера). Через $\mathscr{G}_n$ будет обозначаться совокупность всех n-вершинных графов (короче, n-графов), в каждом из которых вершины пронумерованы числами 1, 2, . . ., n. Через $\mathscr{G}_{n,m}$ обозначается подмножество всех графов из $\mathscr{G}_n$, каждый из которых имеет ровно m ребер. Граф с n вершинами и m ребрами будет называться кратко *(n, m)-графом*. Графы G и H из $\mathscr{G}_n$ считаются *различными*, если существуют две вершины j и k, смежные в одном из графов, но не смежные в другом.

Пусть $\varphi_n(P)$ обозначает число всех графов из $\mathscr{G}_n$, обладающих свойством P. Говорят, что *почти все n-графы обладают свойством P*, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi_n(P)}{|\mathscr{G}_n|}=1$.

Пусть $m=m(n)$ — целочисленная неотрицательная функция, а $\varphi_{n,m}(P)$ — число всех графов из $\mathscr{G}_{n,m}$, обладающих свойством P. Говорят, что *почти все*

$(n,\ m(n))$*-графы обладают свойством* P, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi_{n,m}(P)}{|\mathscr{G}_{n,m}|}=1$.

Группа автоморфизмов графа G (или, короче, *группа графа* G) представляет собой множество всех автоморфизмов графа G с обычной операцией умножения (последовательного выполнения) автоморфизмов. Группа графа G обозначается через $\Gamma(G)$. Аналогично определяется группа псевдографа (орграфа и т. д.). Группа n-вершинного графа обычно отождествляется с изоморфной ей подгруппой симметрической группы S_n.

Если π — подстановка, определенная на множестве из n элементов, то ее можно разложить в произведение непересекающихся циклов. Пусть $j_k(\pi)$, $1\leqslant k\leqslant n$, обозначает число циклов длины k у подстановки π в ее разложении на непересекающиеся циклы. Набор $(j)=(j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_n)$, где $j_k=j_k(\pi)$, называется *вектором цикловой структуры подстановки* π. Если A — некоторая группа подстановок n-й степени, то выражение

$$Z(A;\ t_1,\ t_2,\ldots,t_n)=|A|^{-1}\sum_{\pi\in A}\prod_{k=1}^{n}t_k^{j_k(\pi)}$$

называется *цикловым индексом* группы A и кратко обозначается через $Z(A)$. Здесь $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n$ — так называемые *формальные переменные*.

Пусть A — группа подстановок, действующая на множестве M. Элементы b_1 и b_2 из M называются *A-эквивалентными*, если существует подстановка $\pi\in A$, переводящая один из этих элементов в другой, т. е. $\pi(b_1)=b_2$ или $\pi(b_2)=b_1$. Множество M разбивается отношением A-эквивалентности на непересекающиеся классы, называемые *орбитами*. Справедливо следующее утверждение.

Лемма (Бернсайд). *Число орбит* $N(A)$ *в множестве* M, *определяемых группой* A, *дается равенством*

$$N(A)=|A|^{-1}\sum_{\pi\in A}j_1(\pi).$$

Пусть на множестве M_1 действует группа подстановок A, а на множестве M_2 — группа подстановок B. Степенная группа B^A состоит из всевозможных элементов вида $(\pi; \sigma)$, где $\pi \in A$, $\sigma \in B$, и действует она на множестве $M_2^{M_1}$ (всех функций, отображающих M_1 в M_2) по следующему правилу: $(\pi; \sigma) f(x) = \sigma (f(\pi(x)))$ для любой функции $f(x)$ из $M_2^{M_1}$. Будем предполагать, что множество M_1 конечное, множество M_2 — не более чем счетное и $|M_k| \geqslant 2$ $(k=1, 2)$. Пусть w: $M_2 \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ — весовая функция, заданная на множестве M_2 и удовлетворяющая условию: при всяком $i=0, 1, 2, \ldots$ мощность c_i подмножества всех элементов из M_2, имеющих вес i, конечна [1]). Производящая функция $c(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ называется *перечисляющим рядом для фигур. Вес функции* f из множества $M_2^{M_1}$ определяется с помощью равенства $w(f) = \sum_{b \in M_1} w(f(b))$. Если группа B равна единичной группе E, действующей на множестве M_2, то вес $w(F)$ *орбиты* F в множестве $M_2^{M_1}$, определяемой группой E^A, равен весу любой функции f из орбиты F. Число C_i орбит веса [2]) i в множестве $M_2^{M_1}$ является конечным при всяком $i \geqslant 0$. Производящая функция $C(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i$ называется *перечисляющим рядом для функций* (или *перечисляющим рядом для конфигураций*). Справедливо следующее утверждение.

Теорема (Пойа).

$$C(x) = Z(A;\ c(x),\ c(x^2), \ldots, c(x^n)),$$

где n — число элементов в множестве M_1 (степень группы A) и $c(x^k)$ подставляется в цикловой индекс $Z(A;\ t_1,\ t_2, \ldots, t_n)$ только на места всех вхождений переменной t_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

5.1. Показать, что:

$$1)\ |\mathcal{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}};\qquad 2)\ |\mathcal{G}_{n,m}| = \binom{\binom{n}{2}}{m}.$$

---

[1]) Часто говорят, что c_i — число *«фигур веса i»* (в множестве M_2).

[2]) Иногда C_i называют числом *«конфигураций веса i»* в множестве $M_2^{M_1}$.

5.2. 1) Найти число различных турниров с n вершинами, пронумерованными числами 1, 2, . . ., n.

2) Найти число ориентированных псевдографов с n нумерованными вершинами и m дугами.

5.3. 1) Показать, что число графов в $\mathscr{G}_n$, у которых заданные k вершин являются изолированными, равно $2^{\binom{n-k}{2}}$.

2) Показать, что число графов без изолированных вершин в $\mathscr{G}_n$ равно

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{\binom{n-k}{2}}.$$

3) Показать, что почти все n-графы не имеют изолированных вершин.

5.4. Пусть подмножество $\mathscr{G} \subset \mathscr{G}_n$ состоит из N попарно различных графов. Показать, что число попарно неизоморфных графов в $\mathscr{G}$ не меньше чем $N/n!$.

5.5. Пусть $\psi(m)$ — число попарно неизоморфных связных графов с m ребрами. Показать, что:

1) $$\psi(m) \leqslant \sum_{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+8m}) \leqslant n \leqslant m+1} \binom{\binom{n}{2}}{m};$$

2) $\psi(m) \leqslant e\left(\frac{em}{2}\right)^m$ при $m \to \infty$.

5.6. Показать, что число попарно неизоморфных псевдографов, не имеющих изолированных вершин и обладающих m ребрами, не превосходит $(cm)^m$, где c — константа, не зависящая от m и k.

5.7. Показать, что число попарно неизоморфных k-полюсных сетей с m ребрами без петель и без изолированных вершин не превосходит $(2m)^k (cm)^{2m}$, где c — константа, не зависящая от m и k.

5.8. Доказать, что число попарно неизоморфных деревьев с m ребрами не превышает числа попарно различных плоских корневых деревьев с m ребрами.

5.9. 1) Показать, что число попарно различных плоских корневых деревьев с m ребрами не превосходит $\binom{2m}{m}$.

2) Найти асимптотическое поведение числа $q(m)$ плоских корневых деревьев с m ребрами при $m \to \infty$.

5.10. Используя теорему Кэли, утверждающую, что число попарно различных деревьев с n нумерованными вершинами равно n^{n-2}, показать, что число попарно неизоморфных деревьев с n вершинами не меньше чем $c_n n^{-1,5} e^n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \sqrt{2\pi}$.

5.11. Показать, что число попарно различных деревьев с n нумерованными вершинами, у которых вершина с номером 1 имеет степень k, равно $\binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}$.

5.12. Найти число графов в $\mathcal{G}_n$, являющихся лесами.

5.13*. Показать, что число тех лесов в $\mathcal{G}_n$, у которых заданные вершины j и k принадлежат разным компонентам связности, равно $2n^{n-3}$.

5.14. Пусть $\varphi(n)$ — число попарно различных корневых деревьев с n висячими вершинами, таких, что степень корня равна двум, а степень каждой вершины, отличной от корня и от висячей вершины, равна трем.

1) Показать, что число $\varphi(n)$ равно числу способов, которыми можно расставить скобки в выражении $b_1 : b_2 : \ldots : b_n$, чтобы вновь полученное выражение имело смысл.

2) Показать, что $\varphi(n) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

5.15. 1) Показать, что число попарно неизоморфных двухполюсных π-сетей с m ребрами не превосходит удвоенного числа попарно различных плоских корневых деревьев с m висячими вершинами.

2) Показать, что число попарно неизоморфных π-сетей с m ребрами не превосходит $2\binom{4m-2}{2m}$.

5.16. Найти число попарно неизоморфных сетей $\Gamma(a, b)$ с n вершинами и m ребрами, обладающих следующими свойствами:

1) сеть $\Gamma(a, b)$ является s-разложимой;

2) все вершины сети $\Gamma(a, b)$ минимальны.

Примечание. Полюсы a и b сети $\Gamma(a, b)$ считаются неравноправными; первый из них является входом, а второй выходом сети. При изоморфном отображении сети Γ на сеть G вход (выход) сети Γ должен соответствовать входу (выходу) сети G.

5.17. Пусть $\Phi(n, m)$ — число различных формул над множеством связок $\{\&, \vee\}$ и множеством переменных $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ с m вхождениями символов связок.

1) Показать, что $\Phi(n, m)$ равно числу попарно различных корневых деревьев, у которых каждая висячая вершина помечена некоторым символом из множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, а каждая вершина, отличная от висячей, помечена одним из символов $\&, \vee$.

2) Показать, что $\Phi(n, m) = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m} 2^m n^{m+1}$.

Примечание. Формулы считаются различными, если они представляют собой различные слова в алфавите $\{\&, \vee, (,), x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

5.18. Пусть $\Phi(n, m, k)$ — число различных формул над множеством связок $\{\&, \vee, {}^{-}\}$ и множеством переменных $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ с m вхождениями символов переменных и k вхождениями символа $^{-}$. Показать, что

$$\Phi(n, m, k) \leqslant \frac{1}{m}\binom{2m-2}{m-1} 8^{m-1} n^m.$$

5.19. Показать, что число несвязных графов в $\mathcal{G}_{n,m}$ не превосходит

$$\sum_{k=1}^{[n/2]} \binom{n}{k} \binom{\binom{n}{2} - k(n-k)}{m}.$$

5.20. Показать, что число графов в $\mathcal{G}_{n,m}$, имеющих ровно две компоненты связности, не превосходит

$$4^{n-2} \sum_{k=1}^{[n/2]} \binom{n}{k} \sum_{j=k-1}^{\binom{k}{2}} \binom{\binom{k-1}{2}}{j-k+1} \binom{\binom{n-k-1}{2}}{m-j-n+k+1}.$$

5.21. Показать, что число k-связных графов в $\mathcal{G}_{n,m}$, не являющихся $(k+1)$-связными $(k \leqslant n-2)$, не превосходит

$$\binom{n}{k} \sum_{j=\binom{k+1}{2}}^{m} \binom{\binom{k}{2} + k(n-k)}{j} \sum_{r=1}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \binom{n-k}{r} \times$$

$$\times \binom{\binom{n-k}{2} - r(n-k-r)}{m-j}.$$

Указание. При $k \leqslant n-2$ в графе, не являющемся $(k+1)$-связным, существует k вершин, удаление которых приводит к несвязному графу.

5.22. Показать, что число попарно различных связных подграфов куба B^n, порожденных подмножествами из k вершин, не превосходит $2^n(4n)^{k-1}$. (Считать, что вершины куба B^n пронумерованы числами от 1 до 2^n).

5.23. Показать, что у почти всех n-графов радиус больше единицы, оценив сверху число графов в $\mathscr{G}_n$, имеющих вершину степени $n-1$.

Пусть $p(G)$ — некоторый числовой параметр графа G. Пусть $\bar{p}(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathscr{G}_n} p(G)$ — среднее значение параметра p, а $\mathrm{D}p(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathscr{G}_n} (p(G) - \bar{p}(n))^2$ — дисперсия параметра p. Аналогично можно определить среднее значение и дисперсию параметров графов из $\mathscr{G}_{n,m}$. Пусть $\theta > 0$, $\delta_n(\theta)$ — доля тех графов G из $\mathscr{G}_n$, для которых $p(G) \geqslant \theta$, а $\Delta_n(\theta)$ — доля таких графов G из $\mathscr{G}_n$, что $|p(G) - \bar{p}(n)| \geqslant \theta$. Для различных оценок и доказательства свойств почти всех графов часто используются следующие неравенства (Чебышев):

$$\delta_n(\theta) \leqslant \frac{\bar{p}(n)}{\theta}, \tag{1}$$

$$\Delta_n(\theta) \leqslant \frac{\mathrm{D}p(n)}{\theta^2}. \tag{2}$$

Пусть, например, $p(G)$ — число изолированных вершин графа G. Требуется показать, что $p(G) = 0$ для почти всех n-графов. Пусть $g_n(i)$ — число графов из $\mathscr{G}_n$, у которых вершина с номером i является изолированной. Тогда

$$\bar{p}(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathscr{G}_n} p(G) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{i=1}^{n} g_n(i).$$

Очевидно, что $g_n(i) = 2^{\binom{n-1}{2}}$ для всех $i = \overline{1, n}$. Отсюда $\bar{p}(n) = n \cdot 2^{-n}$. Полагая в (1) $\theta = 1/2$, получим, что доля графов G из $\mathscr{G}_n$, для которых $p(G) \geqslant 1/2$, не превосходит $n2^{-n+1}$. Но $\lim_{n\to\infty} n\cdot 2^{-n+1}=0$. Следовательно, для почти всех n-графов $p(G)<1/2$, т. е. $p(G)=0$.

Пусть теперь $p(G)$ — число ребер в графе G. Покажем, что у почти всех n-графов $p(G)=\frac{1}{2}\binom{n}{2}(1+\varepsilon_n)$, где $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. Имеем $\bar{p}(n)=2^{-\binom{n}{2}}\sum_{G\in\mathscr{G}_n}p(G)=2^{-\binom{n}{2}}\times\times\sum_{(i,j)}g_n(i,j)$, где $g_n(i,j)=2^{\binom{n}{2}-1}$ — число графов, у которых пара вершин (i,j) соединена ребром. Таким образом, $\bar{p}(n)=\frac{1}{2}\binom{n}{2}$. Подсчитаем дисперсию:

$$Dp(n)=2^{-\binom{n}{2}}\sum_{G\in\mathscr{G}_n}(p(G)-\bar{p}(n))^2=$$
$$=2^{-\binom{n}{2}}\sum_{G\in\mathscr{G}_n}p^2(G)-(\bar{p}(n))^2.$$

Пронумеруем все пары вида (i,j), $1\leqslant i<j\leqslant n$, числами от 1 до $\binom{n}{2}$, и пусть $\tilde{g}_n(\nu,\mu)$ — число графов G из $\mathscr{G}_n$, у которых пары с номерами ν и μ являются ребрами. Тогда

$$\sum_{G\in\mathscr{G}_n}p^2(G)=\sum_{\nu=1}^{\binom{n}{2}}\sum_{\mu=1}^{\binom{n}{2}}\tilde{g}_n(\nu,\mu)=\sum_{\nu=1}^{\binom{n}{2}}\tilde{g}_n(\nu,\nu)+2\sum_{\nu<\mu}\tilde{g}_n(\nu,\mu).$$

Но $\tilde{g}_n(\nu,\mu)=2^{\binom{n}{2}-2}$, если $\nu\neq\mu$. Поэтому

$$Dp(n)=\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{4}\binom{n}{2}\left(\binom{n}{2}-1\right)-\left(\frac{1}{2}\binom{n}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\binom{n}{2}.$$

Полагая в (2) $\theta=\sqrt{n\bar{p}(n)}$, получим, что доля тех графов $G\in\mathscr{G}_n$, для которых $\left|p(G)-\frac{1}{2}\binom{n}{2}\right|\geqslant\sqrt{\frac{n}{2}\binom{n}{2}}$, не превосходит $1/n$. Отсюда вытекает, что для почти всех графов $p(G)=\frac{1}{2}\binom{n}{2}(1+\varepsilon_n)$, где $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

5.24. Пусть $p(G)$ — число пар различных вершин графа G из $\mathscr{G}_n$, для которых не существует цепи длины, меньшей, чем 3, соединяющей эти вершины. Пусть $\bar{p}(n)=2^{-\binom{n}{2}}\sum_{G\in\mathcal{G}_n}p(G)$.

1) Показать, что $\bar{p}(n)=\frac{1}{2}\binom{n}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$.

2) Показать, что у почти всех n-графов отсутствуют вершины, расстояние между которыми больше двух.

3) Используя результаты задач 5.23 и 5.24, 2), показать, что у почти всех n-графов радиус и диаметр равны двум.

5.25. Показать, что среднее число гамильтоновых циклов в графах G из $\mathcal{G}_n$ равно $\frac{(n-1)!}{2^{n+1}}$.

5.26. Найти среднее число циклов длины три в графах G из $\mathcal{G}_{n,m}$.

5.27*. Используя неравенство Чебышева (2), показать, что у почти всех $(n, m(n))$-графов, где $m(n)=[n/\ln(n\ln n)]$, число изолированных вершин равно $n(1-\varepsilon(n))$, где $\lim_{n\to\infty}\varepsilon(n)=0$.

5.28*. Пусть k — целое и $k\geqslant 2$. Доказать, что если $m=m(n)=\varphi(n)\cdot n^{2-\frac{2}{k-1}}$ (где $\varphi(n)\to\infty$ при $n\to\infty$), то почти все (n, m)-графы содержат полный подграф с k вершинами.

5.29. Найти среднее число k-вершинных независимых множеств в графах G из $\mathcal{G}_n$.

5.30. Пусть k — натуральное число. Подсчитать среднее число вершин степени k в графах G из $\mathcal{G}_{n,m}$.

5.31. Пусть $p(G)$ — целочисленный неотрицательный параметр, а $\bar{p}(n)$ — его среднее значение для графов G из $\mathcal{G}_n$. Показать, что если $\lim_{n\to\infty}\bar{p}(n)=0$, то для почти всех графов $p(G)=0$.

5.32. Найти цикловой индекс группы автоморфизмов графа G.

1) G — цикл длины 4;

2) $G=K_{2,3}$;

3) $G=K_5-\{x\}$, где x — произвольное ребро графа K_5.

5.33. Пусть $(j)=(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ — произвольное разбиение числа n, т. е. $j_1+2j_2+\ldots+nj_n=n$, где j_k —

целые неотрицательные числа ($1 \leqslant k \leqslant n$). Через $h(j)$ обозначается число всех таких подстановок симметрической группы S_n, у которых векторы цикловой структуры совпадают с (j).

1) Доказать, что $h(j) = \dfrac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{n} k^{j_k} \cdot j_k!}$.

2) Доказать, что

$$Z(S_n) = \frac{1}{n!} \sum_{(j)} h(j) \prod_{k=1}^{n} t_k^{j_k},$$

где сумма берется по всевозможным разбиениям (j) числа n.

3) Показать, что цикловой индекс $Z(S_n)$ равен коэффициенту при x^n в разложении функции

$$\exp\left(t_1 x + \frac{t_2 x^2}{2} + \ldots + \frac{t_k x^k}{k} + \ldots\right)$$

в ряд по степеням x.

4) Убедиться в справедливости рекуррентного соотношения $Z(S_n) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} t_k Z(S_{n-k})$, где (по определению) положено $Z(S_0) = 1$.

5.34. Пусть A_n — знакопеременная группа степени n (т. е. A_n — подгруппа группы S_n ($n \geqslant 2$), состоящая из всех четных подстановок). Доказать, что

$$Z(A_n;\ t_1,\ t_2, \ldots, t_n) =$$
$$= Z(S_n;\ t_1,\ t_2, \ldots, t_n) + Z(S_n;\ t_1,\ -t_2, \ldots, (-1)^{n-1} t_n).$$

5.35. Перечислить все орбиты в множестве вершин графа G, определяемые группой $\Gamma(G)$, если:

1) $G = K_{2,3} - \{x\}$, где x — произвольное ребро графа $K_{2,3}$;

2) $G = K_3 \times C_4$.

5.36. Пусть на n-элементном множестве M_1 действует группа A, а на конечном множестве M_2 действует единичная группа E. Доказать, что число орбит в множестве $M_2^{M_1}$, определяемых степенной группой E^A, задается формулой

$$N(E^A) = Z(A; \overbrace{|M_2|, |M_2|, \ldots, |M_2|}^{n \text{ раз}}),$$

где правая часть представляет собой результат подстановки числа $|M_2|$ в цикловой индекс $Z(A; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ на места всех вхождений переменных t_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

5.37. Пусть на n-элементном множестве M действует группа A. Рассмотрим два произвольных r-подмножества множества M: $M_1 = \{a_1, \ldots, a_r\}$, $M_2 = \{b_1, \ldots, b_r\}$, $1 \leqslant r \leqslant n-1$. Они называются *$A$-эквивалентными*, если существует такая подстановка π в группе A, что $\pi(a_j) = b_{i_j}$, где $j = 1, \ldots, r$. Отношение A-эквивалентности разбивает все r-подмножества из M на *классы A-эквивалентных* подмножеств. Доказать, что коэффициент при x^r в выражении $Z(A; 1+x, 1+x^2, \ldots, 1+x^n)$ (получающемся из циклового индекса $Z(A; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ заменой каждого вхождения переменной t_k на $1+x^k$) равен числу классов A-эквивалентных r-подмножеств в множестве M.

5.38. Пусть $T(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k x^k$ — производящая функция для корневых деревьев; здесь T_k означает число всех попарно неизоморфных корневых деревьев с k вершинами, включая корень. Возьмем n произвольных корневых деревьев $(n \geqslant 1)$ и корень каждого из них соединим ребром с новой вершиной v_0. Будем считать вершину v_0 (и только ее) корнем нового дерева. Степень корня v_0 равна n. Используя описанную конструкцию порождения корневых деревьев, доказать, что

$$T(x) = x + x\sum_{n=1}^{\infty} Z(S_n; T(x), T(x^2), \ldots, T(x^n)).$$

5.39. Доказать следующее рекуррентное соотношение:

$$T_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{r \mid k \\ 1 \leqslant r \leqslant k}} rT_r T_{n-k+1};$$

здесь $n \geqslant 1$ и T_j равно числу всех попарно неизоморфных корневых деревьев с j вершинами, считая и корень ($T_1 = 1$).

5.40. Пусть $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n x^n$ — производящая функция для графов и $l(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n x^n$ — производящая функция для связных графов. Коэффициент g_n (соответственно l_n) равен числу всех попарно неизоморфных n-вершинных графов (соответственно связных графов). Доказать, что

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(S_n;\ l(x),\ l(x^2), \ldots, l(x^n)).$$

5.41. Пусть на n-элементном множестве M_1 действует группа A и на r-элементном множестве M_2 действует группа B. Найти число орбит в множестве $M_2^{M_1}$, определяемых степенной группой B^A.

1) $A = E_n$, $B = E_r$ (т. е. A — единичная группа степени n, а B — единичная группа степени r);

2) $A = E_n$, $B = S_r$;

3) $A = S_n$, $B = E_r$;

4*) $A = S_2$, $B = S_3$.

5.42. Пусть $t(x)$ и $s(x)$ — производящие функции для турниров и сильных турниров соответственно, т. е. $t(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n x^n$ и $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n x^n$, где t_n — число всех попарно неизоморфных турниров с n вершинами, а s_n — число всех попарно неизоморфных сильных турниров с n вершинами. Доказать, что $t(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} s^k(x)$.

§ 6. Реализация булевых функций контактными схемами и формулами

Сеть Γ с k полюсами, в которой каждое ребро помечено буквой из алфавита $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$, называется *$k$-полюсной контактной схемой, реализующей булевы функции переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, или, короче, $\langle k, n\rangle$-схемой. $\langle 2, n\rangle$-схемы будут называться *X^n-схемами.*

Сеть Γ называется *сетью контактной схемы*. Контактная схема является *связной* (*сильно связной*, *параллельно-последовательной* и т. д.,) если таковой является ее сеть. Параллельно-последовательная контактная схема называется кратко *π-схемой*. Ребра схемы, помеченные символами переменных или их отрицаний, называются *контактами*. Контакт называется *замыкающим*, если он помечен символом переменной, и *размыкающим*, если он помечен символом отрицания переменной. Пусть Σ_1 и Σ_2 — две k-полюсные контактные схемы, полюсы каждой из которых помечены буквами a_1, a_2, . . ., a_k. Схемы Σ_1 и Σ_2 называются *изоморфными*, если их сети изоморфны и при этом а) соответствующие ребра помечены одинаково; б) соответствующие полюсы помечены одинаково. Пусть a и b — два полюса контактной схемы Σ, $[a, b]$ — некоторая цепь, соединяющая a и b, и $K_{[a, b]}$ — конъюнкция букв, приписанных ребрам цепи $[a, b]$. Функция $f_{ab}(\tilde{x}^n)$, определяемая формулой

$$f_{ab}(\tilde{x}^n) = \bigvee_{[a,b]} K_{[a,b]}, \tag{3}$$

в которой дизъюнкция берется по всем простым цепям схемы, соединяющим полюсы a и b, называется *функцией проводимости между полюсами* a, b схемы Σ. Говорят, что схема Σ реализует функцию $g(\tilde{x}^n)$, если в ней существуют полюсы a и b, такие, что $g(\tilde{x}^n) = f_{ab}(\tilde{x}^n)$.

Контактная схема с $k+1$ полюсами называется *(1, k)-полюсником*, если один из ее полюсов выделен (он будет обозначаться буквой a), а остальные равноправны между собой (они будут обозначаться через b_i $(i = \overline{1, k})$). Говорят, что функция $g(\tilde{x}^n)$ *реализуется* (1, k)-полюсником, если существует такой полюс b_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$, что $f_{ab_i}(\tilde{x}^n) = g(\tilde{x}^n)$. В тех случаях, когда число полюсов схемы не указывается, речь всегда будет идти о двухполюсных контактных схемах. Две контактные схемы называются *эквивалентными*, если они реализуют одну и ту же булеву функцию. *Сложностью* контактной схемы называется число ее контактов. Контактная схема, имеющая наименьшую сложность среди всех эквивалентных ей схем, называется *минимальной*. *Сложностью булевой функции f в классе контактных схем* (обозначение: $L_k(f)$) называется сложность минимальной контактной схемы, реализующей f. *Сложностью булевой функции f в классе π-схем* называется число контактов в минимальной π-схеме, реализующей f (обозначение: $L_\pi(f)$). *Сложностью булевой функции f в классе формул* над множеством связок $\{\vee, \&, ^{-}\}$ будет называться число вхождений символов переменных. Сложность функции f в этом классе формул обозначается через $L_\Phi(f)$.

Схемой из функциональных элементов называется ориентированная бесконтурная сеть, полюсы которой делятся на входные и выходные. Входные полюсы помечаются символами переменных. Выходные полюсы называются *выходами схемы.* Каждая вершина, отличная от входного полюса, помечена функциональным символом (или символом логической связки). При этом должны выполняться следующие условия: 1° Степень захода каждого входного полюса равна нулю. 2° Степень захода каждой вершины, отличной от входного полюса, равна числу мест функционального символа (или связки), которым эта вершина помечена.

Понятие *функции f_i, реализуемой в вершине i схемы* Σ, определяется следующим образом. Если вершина i совпадает с входным полюсом, который помечен символом x, то $f_i = x$. Пусть вершина i помечена r-местным функциональным символом φ, и пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ — функции, реализуемые в вершинах, из которых исходят дуги, заходящие в вершину i. Тогда $f_i = \varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$. Говорят, что *функция f реализуется схемой* Σ, если существует выход схемы, в котором она реализуется. Схемы из функциональных элементов с одним выходом, у которых входные полюсы помечены символами $x_1, \ldots, x_n$, а вершины, отличные от входных полюсов — символами $\vee, \&, ^{-}$, будут называться здесь *X^n-функциональными схемами. Сложностью схемы из функциональных элементов* называется число ее вершин, отличных от входных полюсов. X^n-функциональная схема Σ, реализующая функцию f, называется *минимальной*, если всякая другая X^n-функциональная схема, реализующая f, имеет сложность, не меньшую, чем сложность схемы Σ. Под *сложностью булевой функции f в классе схем из функциональных элементов* здесь понимается сложность минимальной X^n-функциональной схемы, реализующей функцию f. Сложность функции f в этом классе схем будет обозначаться через $L(f)$.

6.1. Пусть $f(\tilde{x}^2)=x_1 \oplus x_2$. Показать, что $L(f(\tilde{x}^2))=4$.

6.2. Показать, что для булевой функции, отличной от константы, минимальная контактная схема, реализующая эту функцию, является сильно связной.

6.3. Найти число булевых функций $f(x_1, x_2)$, реализуемых контактными схемами сложности 3.

6.4. 1) Показать, что для каждого натурального m существует минимальная контактная схема сложности m.

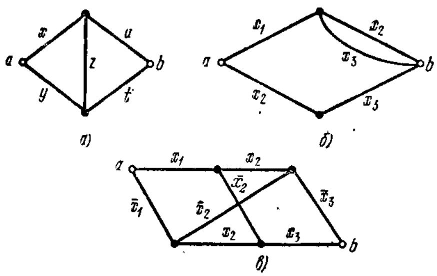


Рис. 19.

2) Показать, что не существует минимальных контактных схем сложности 4, содержащих только замыкающие контакты с пометками из множества $\{x_1, x_2, x_3\}$.

6.5. Показать, что если $m > n \cdot 2^{n-1}$, то ни одна из X^n-схем сложности m не является минимальной.

6.6. Показать, что функция f тогда и только тогда зависит существенно от переменной x, когда в минимальной схеме, реализующей f, присутствует контакт, помеченный переменной x или ее отрицанием.

6.7. Для контактных схем, изображенных на рис. 19, *а*, *б*, *в*, 20, *а*, *б*, *в*, найти функции проводимости f_{ab}.

6.8. Построить контактные схемы, реализующие функцию f.

1) $f(\tilde{x}^3)=(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

2) $f(\tilde{x}^3)=x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1$;

3) $f(\tilde{x}^3)=(00011111)$;

4) $f(\tilde{x}^3)=(11010001)$;

5) $f(\tilde{x}^3)=x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

6.9. Для каждой из функций предыдущей задачи построить X^3-функциональные схемы.

6.10. Для функции f построить контактную схему сложности не выше L, упростив предварительно формулу, с помощью которой f задана.

1) $(x_1 \vee x_2x_3)\ ((x_1 \vee x_2)\ (\bar{x}_2 \vee x_4) \vee (x_3 \vee \bar{x}_4)\ (\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee$ $\vee\ x_4x_5))$, $L=5$;

2) $(x_1 \vee x_2)\ ((x_1x_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3)\ x_6 \vee (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3\bar{x}_5)\ (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \vee$ $\vee (\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee x_6)\ x_3 \vee x_1x_2 \vee x_5x_6)$, $\quad L=5$;

3) $x_1\bar{x}_2x_3\ ((\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_5)\ (x_6 \vee x_1x_4x_7) \vee (x_6x_7 \vee x_2x_4x_5)\ \&$ $\&\ (\bar{x}_4x_5 \vee \bar{x}_3x_6\bar{x}_7) \vee (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_4 \vee x_6)(x_5 \vee x_7))$, $\quad L=6$.

6.11. Для каждой из функций предыдущей задачи построить схему из функциональных элементов сложности, не превышающей 6, реализующую эту функцию.

6.12. Пусть $\nu(\tilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} 2^i\alpha_i$ — номер набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Построить контактную схему с не более чем десятью контактами, реализующую функцию

$$f(\tilde{\alpha}^6) = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \leqslant \nu(\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

6.13. Построить контактную схему, реализующую функцию $f(\tilde{x}^6)$, равную единице тогда и только тогда, когда $(x_1, x_2, x_3) \leqslant (x_4, x_5, x_6)$.

6.14. Построить контактную схему, реализующую сложение двухразрядных двоичных чисел. Точнее, построить контактную схему с полюсами a, b_0, b_1, b_2, в которой для каждого $i=0,1,2$ функция проводимости $f_{ab_i}(\tilde{x}^4)$ равна z_i, где $z_i \in \{0, 1\}$ и определяется из равенства $4z_1 + 2z_2 + z_3 = 2(x_1 + x_2) + x_2 + x_4$.

6.15*. Построить схему из функциональных элементов, удовлетворяющую следующим условиям.

1° Схема реализует три функции $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$.

2° Вершины, отличные от входных полюсов, помечены символами $\vee$, $\&$, $-$.

3° Имеется не более двух вершин, помеченных символом отрицания.

6.16. Показать, что $L_\Phi(f) \geqslant L_k(f)$ для любой булевой функции f, отличной от константы.

6.17*. Привести пример функции $f(\tilde{x}^3)$, для которой $L_\pi(f) > L_k(f)$.

Указание. Рассмотреть функцию, реализуемую схемой, изображенной на рис. 19, *а*.

Пусть двухсвязная двухполюсная контактная схема Σ является плоской (т. е. ее сеть $\Gamma(a, b)$ является плоской) и ее полюсы a и b лежат в одной грани. Проведем в этой грани ребро (a, b) так, чтобы сеть Γ', полученная из Γ добавлением ребра (a, b), осталась плоской. Выберем в каждой грани сети Γ' по одной вершине.

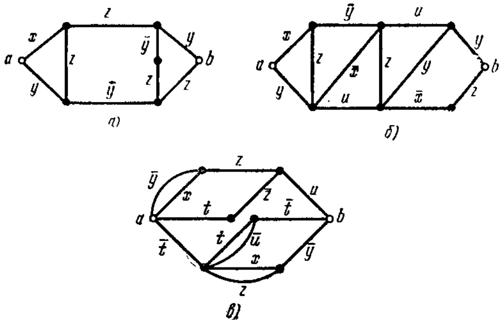


Рис. 20.

Построим на выбранных вершинах граф G^*, двойственный к графу G сети Γ'. Каждое отличное от (a, b) ребро графа G^* пересекает некоторый контакт схемы Σ. Пометим это ребро той буквой, которой помечен пересекаемый им контакт. Вершины графа G^*, расположенные в гранях сети Γ', разделенных ребром (a, b), обозначим через a^*, b^* и назовем полюсами. Удалим ребро (a^*, b^*) из G^*. В результате получится двухсвязная схема Σ^* с полюсами a^* и b^*. Схема Σ^* называется *схемой, двойственной к* Σ.

6.18*. Показать, что схема Σ^*, двойственная к плоской двухсвязной схеме Σ, реализует булеву функцию, двойственную к функции, реализуемой схемой Σ.

Указание. Установить взаимно однозначное соответствие между цепями схемы Σ и разрезами схемы Σ^*.

6.19. Построить схемы, двойственные к схемам, изображенным на рис. 19, *а*, *б*, 20, *а*.

6.20. Доказать, что для всякой булевой функции f выполняется равенство $L_\pi(f)=L_\pi(f^*)$.

6.21. Показать, что если $L_k(f)\leqslant 7$, то $L_k(\bar{f})=L_k(f)$.

Контактная схема называется *бесповторной*, если из того, что некоторое ребро помечено буквой x или $\bar{x}$, вытекает, что всякое другое ребро имеет пометку, отличную от x и $\bar{x}$.

6.22. Показать, что сильно связная бесповторная контактная схема реализует функцию, существенно зависящую от всех переменных, встречающихся в схеме.

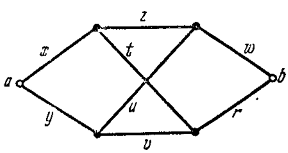


Рис. 21.

6.23. Показать, что сильно связная бесповторная схема минимальна.

6.24. Показать, что если к минимальной схеме присоединить контакт, помеченный новой переменной, так, чтобы получилась сильно связная схема, то построенная схема также будет минимальной.

6.25*. Пусть f — функция, реализуемая схемой, указанной на рис. 21. Доказать, что функция, двойственная к f, не может быть реализована бесповторной схемой.

6.26*. Верно ли, что для всех булевых функций f выполняется соотношение $L_k(f)=L_k(\bar{f})$?

6.27. Пусть f_{ab} и f_{ad} — функции проводимости трехполюсной контактной схемы Σ_1, а f_{eg} и f_{eh} — функции проводимости трехполюсной контактной схемы Σ_2. Пусть Σ — схема с полюсами a и e, полученная из схем Σ_1 и Σ_2 отождествлением полюса b с полюсом g и полюса d с полюсом e. Верно ли, что схема Σ реализует функцию

$$f_{ae}=(f_{ab}\,\&\,f_{eg})\vee(f_{ab}\,\&\,f_{eg})?$$

6.28. 1) Доказать, что функция f монотонна тогда и только тогда, когда существует контактная схема, реализующая f и не содержащая размыкающих контактов.

2) Верно ли, что минимальная контактная схема, реализующая монотонную функцию, не содержит размыкающих контактов?

Булева функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *монотонной по переменной* x_1, если ее можно представить в виде

$$f(\tilde{x}^n) = g(x_2, x_3, \ldots, x_n) \vee x_1 h(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Функция $f(\tilde{x}^n)$ — *квазимонотонна по переменной* x_1, если она монотонна по x_1 или становится монотонной по x_1 после замены x_1 на $\bar{x}_1$. Аналогично определяется монотонность и квазимонотонность по x_i $(i \neq 1)$.

6.29. Доказать, что функция $f(\tilde{x}^n)$ квазимонотонна по x_1 тогда и только тогда, когда существует контактная схема, реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$ и не содержащая либо замыкающих, либо размыкающих контактов.

6.30. 1) Доказать, что минимальная контактная схема, реализующая функцию $x_1 \oplus x_2$, содержит 4 контакта.

2*) Доказать минимальность схемы, изображенной на рис. 20, *в*.

6.31*. Построить минимальную контактную схему для функции f.

1) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) x_4 \vee x_1 x_2 x_3$;

2) $f(\tilde{x}^4) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_4 \oplus x_1 x_3 x_4 \oplus x_2 x_3 x_4$;

3) $f(\tilde{x}^4) = (0001011101111111)$.

6.32. Показать, что число $S(n, m)$ связных попарно неизоморфных контактных X^n-схем сложности, не большей m, не превосходит $(cnm)^m$, где c — константа, не зависящая от n и m.

6.33. Показать, что число $P(n, m)$ связных попарно неизоморфных π-схем сложности, не большей m, реализующих булевы функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не превосходит $(cn)^m$, где c — константа, не зависящая от n и m.

6.34. Показать, что число $\Phi(n, m)$ попарно различных формул сложности m над множеством связок $(\vee, \&, \bar{\ })$ и множеством переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не превосходит $(cn)^m$, где c — константа, не зависящая от n и m.

При получении нижних оценок сложности реализации различных классов функций схемами и формулами часто используются так называемые «мощностные соображения». Примером может служить следующее утверждение.

Пусть $S(n, m)$ — число схем из некоторого класса K, каждая из которых реализует булеву функцию, зависящую от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и имеет сложность, не большую, чем m. Пусть $\varphi(n)$ — число булевых функций $f(\tilde{x}^n)$ в некотором множестве $\mathfrak{M}$. Тогда, если $S(n, m) < \varphi(n)$, то в $\mathfrak{M}$ найдется функция $f(\tilde{x}^n)$, не реализуемая в классе K схемой сложности, меньшей или равной m.

6.35. Показать, что для всякого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n существует самодвойственная $f(\tilde{x}^n)$, для которой одновременно выполняются неравенства:

а) $L_k(f) \geqslant \frac{2^{n-1}}{n}(1-\varepsilon)$; б) $L_\pi(f) \geqslant \frac{2^{n-1}}{\log_2 n}(1-\varepsilon)$.

6.36. Показать, что для всякого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n существует функция $f(\tilde{x}^n)$, являющаяся суперпозицией функции $\varphi(x, y, z) = xy \vee z$ и такая, что

$$L_\varphi(f) \geqslant \frac{\binom{n-1}{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}{\log_2 n}(1-\varepsilon).$$

6.37. Пусть $L(n) = \max\limits_{f \in P_2^n} L(f)$. Показать, что для всякой самодвойственной функции $f(\tilde{x}^n)$ справедливо неравенство $L(f(\tilde{x}^n)) \leqslant L(n-1) + 4n$.

6.38. Булева функция $F(\tilde{y}^m)$ обладает свойством U_n, если любую булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно получить из $F(\tilde{y}^m)$ посредством подстановки констант и переобозначения переменных (допускаются отождествления).

1) Показать, что функция $y_1\bar{y}_2$ обладает свойством U_1.

2) Найти функцию с минимально возможным числом переменных, обладающую свойством U_2.

3) Пусть $m(n)$ — минимально возможное число переменных у функции, обладающей свойством U_n. Показать, что $\frac{2^n}{\log_2(n+2)} \leqslant m(n) \leqslant 3 \cdot 2^{n-1}$.

6.39. Показать, что существует X^n-функциональная схема сложности $2^{2^n} - n$, реализующая все функции, зависящие от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

При построении двухполюсных контактных схем, реализующих функции алгебры логики, широко используется так называемый *метод каскадов*. Опишем его. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 2$, — функция алгебры логики, которую нужно реализовать контактной схемой. Через $\mathfrak{A}_i$ $(i = \overline{1, n-1})$ обозначим множество всех таких функций алгебры логики, каждая из которых зависит только от переменных $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$ и может быть получена из функции $f(\tilde{x}^n)$ в результате подходящей подстановки нулей и единиц на места переменных $x_1, x_2, \ldots, x_i$. Каждому множеству $\mathfrak{A}_i$ взаимно однозначно сопоставим множество V_i, элементами которого являются точки плоскости, называемые *вершинами i-го ранга*. Добавим еще два полюса: входной полюс a и выходной полюс b. Полюс a является вершиной нулевого ранга, полюс b — вершиной n-го ранга. Множество вершин схемы Σ, реализующей функцию $f(\tilde{x}^n)$, будет совпадать с $\{a\} \cup \{b\} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} V_i$. Множество контактов схемы Σ можно описать так: пусть v_i — произвольная вершина i-го ранга $(n-2 \geqslant i \geqslant 0)$, и пусть ей соответствует функция $\varphi(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ из множества $\mathfrak{A}_i$ (при $i=0$ функция φ совпадает с функцией $f(\tilde{x}^n)$). Функции $\varphi(0, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ и $\varphi(1, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ принадлежат множеству $\mathfrak{A}_{i+1}$ и им отвечают некоторые вершины v'_{i+1} и v''_{i+1} соответственно (если функции $\varphi(0, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ и $\varphi(1, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ равны, то вершины v'_{i+1} и v''_{i+1} совпадают). Вершина v_i соединена в схеме Σ контактом $\bar{x}_{i+1}$ с вершиной v'_{i+1} и контактом x_{i+1} с вершиной v''_{i+1}. Наконец, вершины $(n-1)$-го ранга соединяются с вершиной n-го ранга (полюсом b) в соответствии со следующим правилом:

1) если вершина v из V_{n-1} отвечает функции x_n, то она соединяется с полюсом b контактом x_n;

2) если вершина v отвечает функции $\bar{x}_n$, то она соединяется с b контактом $\bar{x}_n$;

3) если вершина v сопоставлена функции, тождественно равной единице, то она соединяется с b двумя параллельными контактами x_n и $\bar{x}_n$;

4) если вершина v сопоставлена тождественному нулю, то вершина v с полюсом b не соединяется.

6.40. Используя метод каскадов, построить схему, реализующую функцию f.

1) $f(\tilde{x}^3) = x_1 x_2 \oplus x_3$;

2) $f(\tilde{x}^4) = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_4$;

3) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;

4) $f(\tilde{x}^n) = x_1 x_2 \ldots x_n \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$;

5) $f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{i=1}^{n} x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n$.

6.41. 1) Показать, что если $f(\tilde{x}^n) \not\equiv 0$, то при построении по методу каскадов контактной схемы, реализующей функцию f, можно исключить из всех множеств $\mathfrak{A}_i$ функции, тождественно равные нулю.

2) Показать, что контактная схема, получаемая при таком построении, является сильно связной.

6.42. 1) Пусть функция $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 2$, существенно зависит от всех своих переменных. Доказать, что схема, реализующая функцию f и построенная по методу каскадов, является сильно связной и не содержит параллельных контактов вида x_j, $\bar{x}_j$ тогда и только тогда, когда f — линейная функция.

2) Привести пример нелинейной функции $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 2$, существенно зависящей от всех своих переменных и такой, что схема, реализующая ее и построенная по методу каскадов, не содержит параллельных контактов вида x_j, $\bar{x}_j$.

6.43. Справедливо ли следующее утверждение: если функция $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 2$, существенно зависит от всех своих переменных и контактная схема, реализующая f и построенная по модифицированному методу каскадов, указанному в задаче 6.41,1), содержит n контактов, то $f = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$ (где $\sigma_i \in \{0, 1\}$)?

6.44. Опровергнуть следующее утверждение: если функция f такова, что при некотором i множества $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_{i+1}$, используемые в методе каскадов, не содержат функций, тождественно равных нулю и единице, но в каждом из них не менее трех функций, то схема, реализующая f и построенная по методу каскадов, является неплоской [1]).

6.45. Привести пример функции f, для которой реализующая ее схема, построенная по методу каскадов, является неплоской.

[1]) Имеются в виду схемы без *источникового* ребра, т. е. без дополнительного ребра, соединяющего полюсы.

Глава V

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОДИРОВАНИЯ

§ 1. Коды с исправлением ошибок

Пусть A и B — два конечных алфавита и R — некоторое множество конечных слов в алфавите A. Однозначное отображение φ множества R в некоторое множество слов в алфавите B называется *кодированием множества* R. Образ C множества R при отображении φ называется *кодом множества* R. Слова из C называются *кодовыми словами*; при этом, если слово w из R отображается в слово v из C, то v называется *кодом слова* w. Слова из R называются *сообщениями*, алфавит A — *алфавитом сообщений*, алфавит B — *кодирующим алфавитом*. Если кодирующий алфавит B состоит из двух букв (в этом случае будем полагать, что $B=\{0, 1\}$), то кодирование φ и соответствующий код C называется *двоичным*. Код называется *равномерным* или *блочным*, если все кодовые слова имеют одинаковую длину. Блочный двоичный код, в котором каждое кодовое слово имеет длину n, представляет собой подмножество вершин единичного n-мерного куба. Булева функция $f_C(\tilde{x}^n)$, равная единице на множестве C и нулю вне C, называется *характеристической функцией двоичного блочного кода* C. Пусть $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ — обычное расстояние Хэмминга между вершинами $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ из B^n, равное числу координат, в которых $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ различаются. Величина $d(C)=\min \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, где минимум берется по всем парам различных вершин, принадлежащих коду $C \subseteq B^n$, называется *кодовым расстоянием* кода C. Код $C \subseteq B^n$ с кодовым расстоянием d будет называться кратко *$\langle n,d\rangle$-кодом*. Максимально возможная мощность $\langle n,d\rangle$-кода обозначается через $m(n,d)$, а $\langle n, d\rangle$-код, мощность которого равна $m(n, d)$, называется *максимальным*. *Плотно упакованным* называется $\langle n, 2d+1\rangle$-код, удовлетворяющий следующему условию: для всякой вершины $\tilde{\alpha} \in B^n$ существует кодовое слово $\tilde{\beta}$, для которого $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \leqslant d$. Блочный двоичный код называется *эквидистантным*, если расстояние между любыми двумя кодовыми словами одинаковое. Код $C \subseteq B^n$ называется *равновесным*, если всякое кодовое слово имеет один и тот же вес, т. е. если существует такое целое k $(0 \leqslant k \leqslant n)$, что $C \subseteq B_k^n$. Это число k называется *весом равновесного кода*. Величина $\max |C|$, где максимум берется по всем $\langle n, d\rangle$-кодам веса k, обозначается через $m(n, k, d)$.

Пусть слова блочного двоичного кода C передаются по каналу связи, в котором могут происходить искажения передаваемого слова. Передачу по такому каналу можно рассматривать как некоторые преобразования передаваемых слов. Здесь будут рассматриваться только такие преобразования двоичных слов, которые не меняют длину слова и состоят в замене некоторых букв на противоположные, т. е. в замене 0 на 1 и 1 на 0. Если слово $\tilde{\alpha}$ при передаче преобразовалось в слово $\tilde{\beta}$, отличное от $\tilde{\alpha}$, то говорят, что *в канале произошли ошибки*. Если i-я буква переданного слова $\tilde{\alpha}$ отличается от i-й буквы полученного слова $\tilde{\beta}$, то говорят, что *произошла ошибка в i-м разряде*. Если полученное слово отличается от переданного в t разрядах, то говорят, что *произошло t ошибок*. Очевидно, что число ошибок, имевших место при передаче, равно расстоянию Хэмминга между переданным и принятым словами.

Пусть $C \subseteq B^n$ — двоичный код. Произвольное однозначное отображение ψ множества B^n на множество C называется *декодированием*. Пусть $\tilde{\alpha} \in C$, а $\psi^{-1}(\tilde{\alpha})$ — множество всех таких вершин $\tilde{\beta}$ из B^n, что $\psi(\tilde{\beta}) = \tilde{\alpha}$. Пусть $S_t^n(\tilde{\alpha})$ — множество всех слов, которые получаются из кодового слова $\tilde{\alpha}$ в результате не более чем t ошибок (очевидно, что $S_t^n(\tilde{\alpha})$ есть шар радиуса t с центром $\tilde{\alpha}$). Говорят, что код C *исправляет t ошибок*, если существует такое декодирование ψ, что $S_t^n(\tilde{\alpha}) \subseteq \psi^{-1}(\tilde{\alpha})$ для каждого $\tilde{\alpha} \in C$. Код C *обнаруживает t ошибок*, если любое слово, которое можно получить из произвольного кодового слова $\tilde{\alpha}$ в результате не более t ошибок, отлично от любого слова из $C \setminus \{\tilde{\alpha}\}$.

1.1. Показать, что код $C \subseteq B^n$ исправляет t ошибок тогда и только тогда, когда $\rho(v, w) \geqslant 2t+1$ для любых двух различных кодовых слов v и w из C.

1.2. Верно ли, что код $C \subseteq B^n$, исправляющий t ошибок, обнаруживает

1) не менее $2t+1$ ошибок;

2) не менее $2t$ ошибок;

3) не более $2t$ ошибок?

1.3. Показать, что из всякого подмножества $C \subseteq B^n$ можно получить код, обнаруживающий одну ошибку, удалив из C не более половины вершин.

1.4. Определить, сколько ошибок исправляет и сколько обнаруживает код с характеристической функцией f.

1) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;

2) $f(\tilde{x}^n) = x_1 x_2 \ldots x_n \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$;

3) $f(\tilde{x}^{3n}) = x_1 x_2 \ldots x_{3n} \vee x_1 x_2 \ldots x_{2n} \bar{x}_{2n+1} \bar{x}_{2n+2} \ldots \bar{x}_{3n} \vee$ $\vee\, x_1 x_2 \ldots x_n \bar{x}_{n+1} \bar{x}_{n+2} \ldots \bar{x}_{3n} \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{3n}$;

4) $f(\tilde{x}^n) = x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \oplus x_1 x_2 \ldots x_{n-2} x_n \oplus \ldots \oplus x_2 x_3 \ldots$ $\ldots x_n$.

1.5. Пусть слова двоичного кода C передаются по каналу связи. При передаче кодового слова может произойти не более одной ошибки. Для каждого кодового слова $\tilde{\alpha}$ построить множество тех слов, которые могут быть получены после передачи $\tilde{\alpha}$ по каналу.

1) $C = \{01100,\ 00111,\ 11010,\ 10001\}$;

2) $C = \{11110,\ 10100,\ 01011,\ 11001\}$.

Пусть вероятность того, что при передаче по каналу связи произвольного слова w из B^n произойдет ошибка в i-м разряде, равна p для всех $i = \overline{1, n}$. Пусть $C \subseteq B^n$ — некоторый код мощности m, а $\psi\colon B^n \to C$ — декодирование. Величина

$$Q_\psi(p, C) = \frac{1}{m} \sum_{v \in C} \sum_{w \in \psi^{-1}(v)} p^{\rho(v, w)} (1 - p)^{n - \rho(v, w)}$$

называется *достоверностью декодирования* ψ *при коде C*.

1.6. Показать, что при $0 < p < 1/2$ максимум величины $Q_\psi(p, C)$ по всевозможным декодированиям при фиксированном C достигается при условии, что для каждого $w \in B^n$ выполняется равенство $\rho(w, \psi(w)) = \min\limits_{v \in C} \rho(w, v)$.

1.7. 1) Для кода C из задачи 1.5, 1) построить декодирование ψ с максимальной достоверностью $Q_\psi(p, C)$, $0 < p < 1/2$, указав для каждого $w \in C$ множество $\psi^{-1}(w)$. Найти $\max\limits_{\psi} Q_\psi(1/4, C)$.

2) Сколько существует различных декодирований ψ с максимальной достоверностью при коде C из задачи 1.5, 1) и $0 < p < 1/2$?

1.8. Найти максимально возможную мощность кода $C \subseteq B^n$, обладающего свойством: для любых $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ из C $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ — четные.

1.9. Сколько существует максимальных $\langle n, 2\rangle$-кодов?

1.10. Пусть $n=3k$. Показать, что $m(n, 2n/3)=4$.

1.11. Показать, что мощность плотно упакованного $\langle n, 2d+1\rangle$-кода равна $2^n / \sum\limits_{i=0}^{d} \binom{n}{i}$.

1.12. Существует ли плотно упакованный $\langle n, 3\rangle$-код при $n=147$?

1.13. Показать, что при $n > 7$ не существует плотно упакованных $\langle n, 7\rangle$-кодов.

1.14. Доказать, что код $C \subseteq B^n$ не является максимальным, если $|C|=3$.

1.15. Показать, что если в B^n существует плотно упакованный $\langle n,3\rangle$-код, то существует разбиение куба B^{n+1} на непересекающиеся сферы радиуса 1.

1.16. Пусть C — плотно упакованный $\langle n, 2d+1\rangle$-код. Показать, что тогда $\binom{n}{d+1}$ делится без остатка на $\binom{2d+1}{d}$.

1.17. Показать, что не существует эквидистантных $\langle n, 2d+1\rangle$-кодов мощности больше 2.

1.18. Показать, что при четном d существует эквидистантный код мощности $[2n/d]$.

1.19. Показать, что $m(n, d)$ — неубывающая функция параметра n.

1.20. Показать, что:

1) $m(n+d,\ d) \geqslant 2m(n,\ d)$;

2) $m(2n,\ d) \geqslant (m(n,\ d))^2$;

3) $m(n,\ d) \leqslant 2m(n-1,\ d)$.

1.21. Доказать, что $m(n,\ 2t+1) \geqslant 2^n / \sum_{i=0}^{2t} \binom{n}{i}$.

1.22. Доказать, что

$$m(n,\ k,\ 2d) \geqslant \frac{\binom{n}{k}}{\sum_{i=0}^{d-1} \binom{k}{i}\binom{n-k}{i}}.$$

1.23. Доказать, что при $n < 2d$ справедливо неравенство

$$m(n,\ d) \leqslant \frac{2d}{2d-n}.$$

1.24. Доказать, что

$$m(n,\ k,\ d) \leqslant \left[\frac{nd}{2k^2 - n(2k-d)}\right],$$

если $2k^2 - n(2k-d) > 0$.

1.25. Показать, что:

1) $m(n,\ k,\ d) \leqslant \left[\frac{n}{k} m(n-1,\ k-1,\ d-1)\right]$;

2) $m(n,\ k,\ d) \leqslant \left[\frac{n}{d}\left[\frac{n-1}{d-1}\left[\ldots\left[\frac{n-d}{k-d}\right]\ldots\right]\right]\right]$;

3) $m(n,\ k,\ d) \leqslant \left[\frac{n}{n-k} m(n-1,\ k,\ d)\right]$.

1.26. Пусть $q(n,\ d)$ — максимальное число вершин в B^n, попарные расстояния между которыми не превосходят d. Доказать, что

$$m(n,\ d+1)\, q(n,\ d) \leqslant 2^n.$$

1.27. Доказать, что $m(n,\ d) \leqslant 2^{n-d+1}$.

1.28. Показать, что из всякого множества $C \subseteq B^n$, такого, что $|C| \geqslant 2^d$, можно выделить подмножество D мощности, не меньшей $2^{-d+1}|C|$, являющееся $\langle n,\ d\rangle$-кодом.

§ 2. Линейные коды

Выражение вида

$$\lambda_1\tilde{\alpha}_1 \oplus \lambda_2\tilde{\alpha}_2 \oplus \ldots \oplus \lambda_s\tilde{\alpha}_s, \qquad (1)$$

где $\tilde{\alpha}_i \in B^n$, $\lambda_i \in \{0, 1\}$, $i=\overline{1, s}$, называется *линейной комбинацией векторов* $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_s$. Линейная комбинация (1) называется *тривиальной*, если $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_s=0$, и нетривиальной в противном случае. Всякая линейная комбинация [1]) векторов из B^n является, очевидно, вектором из B^n. Векторы $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_s$ из B^n называются *линейно независимыми*, если любая их нетривиальная линейная комбинация отлична от $\tilde{0}=(0, 0, \ldots, 0)$. В противном случае говорят, что векторы $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_s$ *линейно зависимы*. Подмножество $G \subseteq B^n$ называется *группой*, если G замкнуто относительно операции сложения по модулю 2, т. е. если для любых $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ из G вектор $\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}$ принадлежит G. Из замкнутости G относительно операции $\oplus$ вытекает, что всякая линейная комбинация векторов из G также принадлежит G (в частности, $\tilde{0} \in G$). Таким образом, всякая группа G в B^n является *линейным векторным пространством над полем* $F_2=\langle\{0, 1\}, \oplus, \cdot\rangle$. Наибольшее число $k=k\,(G)$, для которого в группе (в линейном пространстве) G существует k линейно независимых векторов, называется *размерностью* G. Совокупность из k линейно независимых векторов линейного пространства, имеющего размерность k, называется *базисом* этого пространства. Если код $G \subseteq B^n$ образует группу, то он называется *линейным* или *групповым*. Если линейный код в B^n имеет размерность k, то он называется *(n, k)-кодом*. Двоичный линейный код, исправляющий одну ошибку, называется *кодом Хэмминга*.

Линейные коды удобно задавать с помощью матриц. Матрица $H\,(C)$, строками которой являются кодовые слова кода $C \subseteq B^n$, называется *матрицей кода* C. Матрица $M\,(C)$, составленная из произвольных k линейно независимых векторов, являющихся кодовыми

[1]) Определение операций сложения векторов по модулю 2 и умножения скаляра на вектор дано в параграфе «Булевы векторы и единичный n-мерный куб».

словами (n, k)-кода C, называется *порождающей матрицей* кода C. Если H — произвольная матрица из нулей и единиц с n столбцами, то множество $C(H)$ всех вершин куба B^n, являющихся линейными комбинациями строк матрицы H, называется *кодом, порожденным матрицей* H. Векторы $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta}=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ называются *ортогональными*, если $\alpha_1\beta_1 \oplus \alpha_2\beta_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n\beta_n=0$. Множество $V(H)$ всех векторов из B^n, ортогональных к каждой из строк матрицы H, называется *нулевым пространством матрицы* H. Пусть C — двоичный код, каждое слово которого ортогонально каждой строке некоторой матрицы H. Если C является (n, k)-кодом, а матрица H состоит из $n-k$ линейно независимых строк, то H называется *проверочной матрицей кода* C. Множество C^* всех векторов, представимых в виде линейной комбинации строк проверочной матрицы (n, k)-кода C, называется *кодом, двойственным к коду* C. Через $g(n, d)$ будет обозначаться $\max |C|$, где максимум берется по всем линейным кодам $C \subseteq B^n$ с кодовым расстоянием d.

2.1. Пусть множество $C \subseteq B^n$ состоит из k линейно независимых векторов. Показать, что любые две линейные комбинации векторов множества C, различающиеся коэффициентами, представляют собой различные вершины куба B^n.

2.2. Показать, что в B^n существует система из n линейно независимых векторов, но не существует системы из $n+1$ линейно независимых векторов.

2.3. Показать, что число векторов из B^n, представимых линейными комбинациями вида (1), в которых $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \leqslant t$, не превосходит $\sum_{i=0}^{t} \binom{s}{i}$.

2.4. Показать, что всякий (n,k)-код имеет мощность 2^k.

2.5. Показать, что в двоичном линейном коде либо каждый кодовый вектор имеет четный вес, либо половина кодовых векторов имеет четные веса и половина — нечетные.

2.6. Показать, что число различных базисов в B^n равно

$$\frac{(2^n-1)(2^n-2)\ldots(2^n-2^{n-1})}{n!}.$$

2.7. Показать, что число различных (n, k)-кодов в B^n равно

$$\frac{(2^n-1)(2^n-2)\ldots(2^n-2^{k-1})}{(2^k-1)(2^k-2)\ldots(2^k-2^{k-1})}.$$

2.8. Найти число векторов из B^n, ортогональных к данному вектору $\tilde{\alpha}$ из B^n_k.

2.9. Показать, что множество всех векторов из B^n, ортогональных к каждой из строк двоичной матрицы H размерности $k\times n$, образует линейное пространство. Всегда ли это пространство имеет размерность $n-k$?

2.10. Верно ли что для каждого линейного кода можно указать матрицу H, являющуюся

1) порождающей;

2) проверочной?

2.11. По заданной матрице H указать мощность $m(C(H))$ порожденного ею кода $C(H)$ и кодовое расстояние $d(C(H))$.

$$1)\ H=\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\1&1&0&0&1\\1&1&1&0&0\end{pmatrix};\quad 2)\ H=\begin{pmatrix}0&0&1&0&1\\1&1&1&0&0\\0&1&0&1&0\\1&0&0&1&1\end{pmatrix};$$

$$3)\ H=\begin{pmatrix}1&1&0&0&\ldots&0&0&0\\0&1&1&0&\ldots&0&0&0\\0&0&1&1&\ldots&0&0&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&0&\ldots&0&1&1\\1&0&0&0&\ldots&0&0&1\end{pmatrix},$$

здесь матрица H имеет размерность $n\times n$;

4) $H=(I_kP)$, где I_k — единичная матрица размерности $k\times k$, а P — произвольная двоичная матрица размерности $k\times(n-k)$, каждая строка которой содержит по меньшей мере две единицы, $k\leqslant n-\log_2(n+1)$;

5) $H=(I_5Q)$, где I_5 — единичная матрица, размерности 5×5, а

$$Q=\begin{pmatrix}1&1&1&0&1&1&0&0&1&0\\0&1&1&1&1&0&0&1&0&1\\1&1&0&1&1&0&1&1&1&0\\0&1&1&0&0&1&1&1&1&1\\1&1&0&1&0&1&1&1&0&1\end{pmatrix}.$$

2.12. Пусть $V \subseteq B^n$ — пространство, состоящее из линейных комбинаций строк матрицы $H=(I_k P)$, где I_k — единичная матрица размерности $k \times k$, а P — матрица из нулей и единиц размерности $k \times (n-k)$. Доказать, что V является нулевым пространством матрицы $G=(P^T I_{n-k})$, где I_{n-k} — единичная матрица размерности $(n-k) \times (n-k)$, а P^T — матрица, транспонированная к матрице P.

2.13. Для кода, порожденного матрицей H из задачи 2.11, 1), построить проверочную матрицу.

2.14. Показать, что если $C \subseteq B^n$ является (n, k)-кодом, то двойственный к C код является $(n, n-k)$-кодом.

2.15. Пусть $H(C)$ — матрица (n, k)-кода $C \subseteq B^n$, не содержащая нулевых столбцов. Показать, что:

1) каждый столбец матрицы $H(C)$ имеет 2^{k-1} единиц и столько же нулей;

2) сумма весов строк матрицы $H(C)$ равна $n \cdot 2^{k-1}$.

2.16. Показать, что кодовое расстояние линейного кода $C \subseteq B^n$ равно минимальному из весов его ненулевых векторов.

2.17. Показать, что кодовое расстояние (n, k)-кода не превосходит $[n2^{k-1}/(2^k-1)]$.

2.18. Показать, что при $n=2d-1$ мощность линейного $\langle n, d\rangle$-кода не превосходит $2d$.

2.19. 1) Показать, что максимально возможная мощность $g(n, d)$ линейного $\langle n, d\rangle$-кода удовлетворяет неравенству $g(n, d) \leqslant 2g(n-1, d)$.

2) Используя результат задачи 2.18, показать, что $g(n, d) \leqslant d \cdot 2^{n-2d+2}$.

2.20. Пусть код C является нулевым пространством матрицы H. Показать, что кодовое расстояние кода C тогда и только тогда не меньше d, когда любая совокупность из $d-1$ или меньшего числа столбцов матрицы H является линейно независимой.

2.21. Показать, что если $\sum\limits_{i=0}^{d-2} \binom{n-1}{i} < 2^k$, то существует матрица из нулей и единиц размерности $k \times n$, в которой любые $d-1$ столбцов линейно независимы и, следовательно, существует $(n, n-k)$-код с кодовым расстоянием d или большим, чем d.

2.22. Пусть $H_{k,n}$ — матрица размерности $k\times n$, где $k=]\log_2(n+1)[$, в которой столбец с номером i представляет собой двоичное разложение числа i $(i=\overline{1,\ n})$. Например, при $n=6$ матрица $H_{3,6}$ имеет вид

$$H=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1&1\\0&1&1&0&0&1\\1&0&1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

1) Показать, что нулевое пространство матрицы является кодом Хэмминга, т. е. линейным кодом, исправляющим одну ошибку.

2) Построить код, являющийся нулевым пространством матрицы $H_{3,6}$.

3) Сколько ошибок исправляет код, порожденный матрицей $H_{k,n}$?

2.23. Спектром множества $C\subseteq B^n$ называется вектор $\bar{s}=(s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_n)$, где s_r есть число пар вершин из C, расстояние между которыми равно r. Показать, что для всякого $(n,\ k)$-кода C существует $(n,\ k)$-код C', имеющий тот же спектр и обладающий порождающей матрицей вида (I_kP), где I_k — единичная матрица размерности $k\times k$, а P — некоторая матрица из нулей и единиц размерности $k\times(n-k)$.

2.24. 1) Показать, что $g(9,\ 5)=4$.

2) Показать, что $m(9,\ 5)\geqslant 5$.

2.25. Пусть существует $(n,\ k)$-код с кодовым расстоянием d. Верно ли, что тогда существует $(n,\ k)$-код с кодовым расстоянием $d-1$?

§ 3. Алфавитное кодирование

Пусть A — алфавит, тогда A^* — множество всех конечных слов в алфавите A, включая и пустое. *Длина* (число букв) слова w обозначается через $\lambda(w)$. *Пустое слово* обозначается через Λ. *Соединение слов* w_1 и w_2, получающееся приписыванием слова w_2 справа к слову w_1, обозначается через w_1w_2. Слово w_1 называется *префиксом* слова w_1w_2, а слово w_2 — *суффиксом* слова w_1w_2. Префикс w_1 (суффикс w_2) слова w_1w_2 называется *собственным*, если одновременно $w_1\neq\Lambda$ и $w_2\neq\Lambda$. Слово v называется *подсловом слова* w, если существуют такие слова u_1 и u_2, что $w=u_1vu_2$.

Пусть $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ — алфавит сообщений, а B — кодирующий алфавит. Пусть φ — однозначное отображение букв алфавита A в B^*. Кодирование слов в алфавите A, при котором каждому слову (сообщению) $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}$ ставится в соответствие слово $\varphi(a_{i_1})\varphi(a_{i_2})\ldots$ $\ldots\varphi(a_{i_k})$, называется *алфавитным* (или *побуквенным*) кодированием. Алфавитное кодирование полностью определяется порождающим его отображением φ и обозначается через K_φ. Множество $\{\varphi(a)\colon a\in A\}$ называется *алфавитным кодом* и обозначается через $\varphi(A)$. Алфавитное кодирование K_φ и соответствующий код $\varphi(A)$ называются *однозначно декодируемыми*, или *разделимыми*, если из каждого равенства вида

$$\varphi(a_{i_1})\varphi(a_{i_2})\ldots\varphi(a_{i_k})=\varphi(a_{j_1})\varphi(a_{j_2})\ldots\varphi(a_{j_l})$$

— между словами в кодирующем алфавите B — следует, что $l=k$ и $j_t=i_t$ $(t=\overline{1,k})$. Код $\varphi(A)$ называется *префиксным*, если никакое слово из $\varphi(A)$ не является началом никакого другого слова из $\varphi(A)$. Разделимый алфавитный код $\varphi(A)$ называется *полным*, если для каждого слова w в кодирующем алфавите B справедливо утверждение: либо w является собственным префиксом некоторого слова из $\varphi(A)$, либо некоторое слово из $\varphi(A)$ является префиксом (не обязательно собственным) слова w.

Один из алгоритмов распознавания разделимости алфавитного кода заключается в следующем. Пусть $\varphi(A)=\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ — алфавитный код. Пусть S_1 — множество всех собственных суффиксов кодовых слов, а S_2 — множество всех слов, каждое из которых является префиксом какого-либо кодового слова. Рассмотрим ориентированный мультиграф G_φ, вершинами которого являются элементы множества $S=(S_1\cap S_2)\cup$ $\cup\{\Lambda\}$. Пусть σ и τ — две различные вершины из S. Дуга, ведущая из σ в τ, в графе G_φ существует тогда и только тогда, когда существуют кодовое слово w и последовательность $P=w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_k}$ кодовых слов, такие, что слова w и $\sigma w_{i_1}w_{i_2}\ldots w_{i_k}\tau$ равны как слова в кодирующем алфавите. При этом, если $\sigma\neq\Lambda$, то последовательность P может быть пустой. Дуге, ведущей из σ в τ, приписывается слово $w_{i_1}w_{i_2}\ldots w_{i_k}$. Петли в мультиграфе G_φ отсутствуют. Мультиграф G_φ

называется *графом алфавитного кода* φ. Справедлива следующая

Теорема 1 (Ал. А. Марков). *Код φ является разделимым тогда и только тогда, когда в графе G_φ отсутствуют контуры, проходящие через вершину Λ.*

Пример 1. Пусть $\varphi(A)=\{cc, cca, bcca, aa, ab\}$. Тогда $S=\{\Lambda, c, cca, a, b\}$. Граф G_φ изображен на рис. 22, *а*. В G_φ существует контур, проходящий через

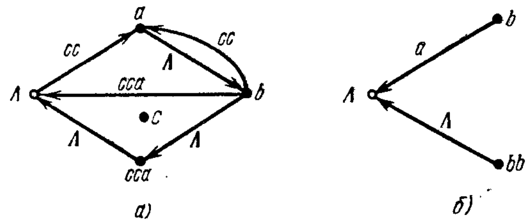


Рис. 22.

вершины Λ, a, b. Выписывая слова, приписанные вершинам и дугам этого контура, находим слово, которое декодируется двумя способами:

$$ccabcca=(cca)\ (bcca)=(cc)\ (ab)\ (cca).$$

Пример 2. Пусть $\varphi(A)=\{a, ab, acbb, bb, bbacc\}$. Тогда $S=\{\Lambda, b, bb\}$. В графе G_φ, показанном на рис. 22, *б*, контуры, проходящие через Λ, отсутствуют. Код является разделимым.

Пусть имеется источник сообщений, который случайным образом последовательно порождает буквы алфавита $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Предполагается, что появления букв алфавита A статистически независимы и подчинены распределению вероятностей $P=\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$, $p_i>0$, $\sum_{i=1}^{m} p_i=1$. Всякому двоичному алфавитному коду $C=\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ можно сопоставить число

$$\mathscr{L}_C(P)=\sum_{i=1}^{m} p_i\lambda(w_i),$$

называемое *стоимостью кода C при распределении P.*

Число $\mathscr{L}_C(P)$ равно среднему числу букв кодирующего алфавита, приходящихся на одну букву алфавита A. Префиксный код C_0 называется *оптимальным при распределении* P, если $\mathscr{L}_{C_0}(P) = \inf\limits_{C} \mathscr{L}_C(P)$, где нижняя грань берется по множеству префиксных двоичных кодов, состоящих из m слов.

Метод Хаффмена для построения оптимального кода опирается на следующую теорему.

Теорема 2. *Если $C = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ — оптимальный двоичный код при распределении $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ и $p_j = q_1 + q_2$, причем $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_{j-1} \geqslant p_j \geqslant \geqslant p_{j+1} \geqslant \ldots \geqslant p_m \geqslant q_1 \geqslant q_2$, то код $C' = \{w_1, w_2, \ldots \ldots w_{j-1}, w_{j+1}, \ldots, w_m, w_j0, w_j1\}$ является оптимальным при распределении*

$$P' = \{p_1, p_2, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_m, q_1, q_2\}.$$

Код C' будет называться *расширением оптимального кода* C. Метод Хаффмена состоит в следующем. Пусть в исходном упорядоченном по невозрастанию списке вероятностей две последние вероятности p_{m-1} и p_m. Эти вероятности из списка исключаются, а их сумма вставляется в список таким образом, чтобы в получившемся новом списке вероятности не возрастали. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не получится список из двух вероятностей. После получения списка из двух вероятностей одной из них приписывается символ 0, а другой — символ 1 (оптимальный код для двухбуквенного алфавита сообщений при любом распределении вероятностей). Затем в соответствии с теоремой строится оптимальный код для трех букв при соответствующем списке вероятностей и т. д. до тех пор, пока не получится оптимальный код при исходном списке вероятностей. Метод Хаффмена иллюстрируется таким примером:

i	p_i							w_i
1	0,4	0,4	0,4	0,6	0	1	1	1
2	0,2	0,2	0,4	0,4	1	00	01	000
3	0,2	0,2	0,2			01	000	001
4	0,1	0,2					001	010
5	0,1							011

При данном распределении вероятностей существуют и другие оптимальные коды, например,

ТАБЛИЦА 6

i	p_i	w_i	w_i'	i	p_i	w_i	w_i'
1	0,4	1	00	4	0,1	0010	110
2	0,2	01	01	5	0,1	0011	111
3	0,2	000	10				

Метод Фано построения кодов, близких к оптимальным, состоит в следующем. Упорядоченный по невозрастанию список вероятностей делится на две (последовательные) части так, чтобы суммы вероятностей, входящих в эти части, различались как можно меньше. Каждой букве алфавита сообщений, соответствующей вероятности из первой части, сопоставляется символ 0 (или 1), а остальным буквам — символ 1 (соответственно 0). Далее точно так же поступают с каждой из частей, если она содержит по крайней мере две вероятности. Процесс продолжается до тех пор, пока весь список не разобьется на части, содержащие по одной вероятности. Примеры кодов, построенных по методу Фано, приведены в таблице 6.

3.1. По заданному алфавитному коду $\varphi(A)$ построить граф G_φ и выяснить, является ли код разделимым.

1) $\varphi(A)=\{ab,\ dc,\ a,\ bcadd,\ ca\}$, $A=\{i,\ i=\overline{1,\ 5}\}$;

2) $\varphi(A)=\{ddac,\ dd,\ cddab,\ a,\ cddd,\ b\}$, $A=\{i,\ i=\overline{1,\ 6}\}$;

3) $\varphi(A)=\{a,\ ab,\ acbb,\ abb,\ bbacc\}$, $A=\{i,\ i=\overline{1,\ 5}\}$;

4) $\varphi(A)=\{abc,\ bbc,\ bcb,\ caa,\ acbb,\ cbcb,\ bccabb,\ abcacbbb\}$, $A=\{i,\ i=\overline{1,\ 8}\}$;

5) $\varphi(A)=\{abc,\ abb,\ bcc,\ ccaa,\ bcabbbcc,\ bbccaaabca,\ abcabbabbbcca\}$, $A=\{i,\ i=\overline{1,\ 7}\}$;

6) $\varphi(A)=\{ab,\ bb,\ ca,\ cba,\ abb,\ bac,\ aabc,\ cabba\}$, $A=\{i,\ i=\overline{1,\ 8}\}$.

3.2. Пусть числа 1, 2, 4, 17, 98 кодируются своими двоичными разложениями минимально возможной длины. Например, код единицы есть 1, код двойки есть 10, код четверки есть 100. Является ли это кодирование разделимым?

3.3. По заданному неразделимому коду $\varphi(A) = \{aa, ab, cc, cca, bcca\}$ и слову w в кодирующем алфавите $B = \{a, b, c\}$ выяснить, является ли слово w кодом некоторого сообщения. Если да, то выяснить, является ли слово w кодом ровно одного сообщения.

1) $w = ccabccabccabcc$;

2) $w = bccaccabccabccacabcca$;

3) $w = abbccaccabccaabab$.

3.4. Пусть $\varphi(A)$ — алфавитный код, а G_φ — граф этого кода. Пусть граф G'_φ получен из графа G_φ удалением всех вершин, являющихся кодовыми словами. Останется ли в силе теорема 1, если заменить G_φ на G'_φ?

3.5. Пусть $\varphi(A)$ — алфавитный код, а G_φ — граф этого кода. Пусть граф G'_φ получен из G_φ удалением всех дуг с пометками Λ, ведущими в вершину Λ. Останется ли в силе теорема 1, если заменить G_φ на G'_φ?

3.6. Для данного разделимого кода $\varphi(A)$ построить префиксный код с тем же набором длин кодовых слов.

1) $\varphi(A) = \{01, 10, 100, 111, 011\}$;

2) $\varphi(A) = \{1, 10, 00, 0100\}$;

3) $\varphi(A) = \{10, 101, 111, 1011\}$.

3.7. Пусть $\varphi(A)$ — алфавитный код мощности m, в котором сумма длин кодовых слов равна N, а максимальная из длин кодовых слов равна l. Используя теорему 1, доказать, что код $\varphi(A)$ является разделимым тогда и только тогда, когда каждое слово в кодирующем алфавите, имеющее длину не более чем $(l-1)(N-m+1)$, либо является кодом ровно одного слова, составленного из букв алфавита сообщений A, либо вообще не является кодом никакого слова из A^*.

3.8. Пусть k — наименьшая, а l — наибольшая из длин кодовых слов алфавитного кода $\varphi(A)$, а N — сумма длин кодовых слов. Показать, что для установления разделимости кода $\varphi(A)$ достаточно проверить на однозначную декодируемость не более чем Nl/k слов в кодирующем алфавите.

3.9. Будем считать, что два слова w и v в алфавите $\{0, 1\}$ *эквивалентны*, если существует такое слово u, которое может быть получено как из w, так и из v с помощью следующих операций, примененных в конечном числе:

а) вычеркивание подслов вида 10 и 1001;

б) вставка в промежутки между буквами[1]) слов вида 10 и 1001.

Эквивалентны ли следующие пары слов w и v:

1) $w=1010101$, $v=0101010$;

2) $w=10010010$, $v=010010010$;

3) $w=11011010$, $v=01101101$?

3.10. Пусть M — множество, состоящее из m непустых слов в алфавите A, имеющем k букв. Показать, что:

1) в M найдется слово, длина которого не меньше $\log_k (1+m(k-1))$;

2) для всякого $\varepsilon > 0$ доля тех слов из M, длина которых меньше чем $(1-\varepsilon)\log_k(1+m(k-1))$, не превосходит $\left(\frac{4}{3}\right)^{1-\varepsilon} m^{-\varepsilon}$ при $m \geqslant 2$, $k \geqslant 2$.

3.11. Пусть в алфавитном двоичном коде C мощности 2^n+1 каждое кодовое слово имеет длину, не превышающую n.

1) Доказать, что код C не является префиксным.

2) Может ли код C быть разделимым?

3.12. Для заданных распределений вероятностей появления букв построить оптимальные коды по методу Хаффмена.

1) $P=(0{,}34;\ 0{,}18;\ 0{,}17;\ 0{,}16;\ 0{,}15)$;

2) $P=(0{,}6;\ 0{,}1;\ 0{,}09;\ 0{,}08;\ 0{,}07;\ 0{,}06)$;

3) $P=(0{,}4;\ 0{,}4;\ 0{,}1;\ 0{,}03;\ 0{,}03;\ 0{,}02;\ 0{,}02)$;

4) $P=(0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}05)$.

3.13. 1) Для распределений вероятностей из предыдущей задачи построить коды по методу Фано.

2) Привести пример распределения вероятностей, при котором код, построенный по методу Фано, не является оптимальным.

3.14. Пусть $C=\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ — оптимальный двоичный код, отвечающий распределению $P=(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_m$. Показать, что:

[1]) Разрешается также приписывание слов 10 и 1001 слева и справа к преобразуемому слову.

1) $\lambda(w_i) \leqslant \lambda(w_j)$, если $p_i > p_j$.

2) Код C является полным.

3) Существует два кодовых слова длины $\lambda(w_m)$, имеющих одинаковые префиксы длины $\lambda(w_m)-1$.

3.15. Показать, что если m не является степенью двойки, то при любом распределении вероятностей $P=(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ в оптимальном коде найдутся два слова, имеющих разную длину.

3.16. Опираясь на задачи 3.14, 3.15 и определение оптимального кода, объяснить, почему нижеследующие коды не являются оптимальными при заданных распределениях вероятностей.

1)

p_i	w_i
0,6	0
0,2	10
0,1	11
0,1	01

2)

p_i	w_i
0,6	1
0,2	01
0,15	001
0,05	0001

3)

p_i	w_i
0,2	000
0,2	001
0,2	010
0,2	011
0,2	100

3.17. Найти наименьшее m и такое распределение вероятностей $P=(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, при которых существуют оптимальные коды, различающиеся наборами длин кодовых слов.

3.18. 1) Показать, что максимальная длина кодового слова в оптимальном коде мощности m не превосходит $m-1$.

2) Показать, что для всякого целого m ($m \geqslant 2$) найдется распределение вероятностей $P=(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, удовлетворяющее условию: существует оптимальный код, отвечающий распределению P и такой, что максимальная длина кодового слова в нем равна $m-1$.

3.19. Показать, что существует не более $\binom{2^m-1}{m}$ полных префиксных двоичных кодов мощности m.

3.20. Код называется почти равномерным, если длины его кодовых слов различаются не более чем на единицу. Показать, что для всякого натурального m

почти равномерный код является оптимальным при распределении $P=\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}\right)$. Верно ли обратное?

3.21. 1) Показать (индукцией по m), что сумма длин кодовых слов оптимального кода с m сообщениями не превосходит $\frac{1}{2}(m+2)(m-1)$.

2) Показать, что для каждого целого $m \geqslant 2$ оценка, указанная в предыдущей задаче, является достижимой.

3.22. Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_m$ — произвольные попарно непересекающиеся грани куба B^n размерностей $r_1, r_2, \ldots, r_m$ соответственно.

1) Используя очевидное неравенство $\sum\limits_{i=1}^{m} 2^{r_i} \leqslant 2^n$, показать, что длины $\lambda(w_1), \lambda(w_2), \ldots, \lambda(w_m)$ слов произвольного двоичного префиксного кода $C=\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ удовлетворяют условию $\sum\limits_{i=1}^{m} 2^{-\lambda(w_i)} \leqslant 1$.

2) Показать, что для полного префиксного кода справедливо равенство $\sum\limits_{i=1}^{m} 2^{-\lambda(w_i)} = 1$.

3) Показать, что если $\sum\limits_{i=1}^{m} 2^{-\lambda_i} \leqslant 1$, где λ_i — натуральные числа, $i=\overline{1, m}$, то существует префиксный код с длинами слов, равными $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

3.23. 1) Верно ли, что в оптимальном двоичном коде число кодовых слов максимальной длины четно?

2) Верно ли, что это число является степенью двойки?

3.24. Пусть $C=\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ — полный префиксный двоичный код, и пусть $\lambda(w_i) \geqslant \lambda(w_{i+1})$ для всех $i=\overline{1, m-1}$. Показать, что при $m \geqslant 2$ для всех $i=\overline{1, m-1}$ справедливо неравенство $\lambda(w_{i+1})-\lambda(w_i) \leqslant \log_2 m - 1$.

3.25*. Пусть L_m — наименьшее целое, для которого существует двоичный префиксный код мощности m и суммой длин кодовых слов, равной L_m. Доказать, что $L_m \geqslant m[\log_2 m]$ при $m \geqslant 2$.

3.26. Показать, что длины кодовых слов $\lambda(w_1), \lambda(w_2), \ldots, \lambda(w_m)$ двоичного оптимального кода $C=\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ подчиняются условию $\sum\limits_{i=1}^{m} 2^{-\lambda(w_i)} = 1$.

3.27. Пусть $P=(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ — распределение вероятностей ($p_i>0$, $i=\overline{1, m}$), а $\mathscr{L}(P)=\inf\limits_C \mathscr{L}_C(P)$, где нижняя грань берется по всем двоичным префиксным кодам мощности m ($m \geqslant 3$).

1) Показать, что $\mathscr{L}(P)>1$.

2) Доказать, что для любого $\varepsilon>0$ и любого целого $m \geqslant 1$ существует распределение вероятностей $P=(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, такое, что $\mathscr{L}(P)<1+\varepsilon$.

Метод Шеннона для построения кодов, близких к оптимальным, состоит в следующем.

Пусть $P=(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, $p_i>0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i=1$, $p_i \geqslant p_{i+1}$, $i=\overline{1, m-1}$ — распределение вероятностей появления букв алфавита сообщений $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Тогда букве a_i сопоставляется кодовое слово длины $l_i=\left]\log \frac{1}{p_i}\right[$, составленное из первых (после запятой) l_i цифр разложения числа $q_{i-1}=\sum\limits_{j=1}^{i-1} p_j$ в бесконечную двоичную дробь (с недостатком).

Например, если $P=(0{,}4;\ 0{,}3;\ 0{,}3)$, то код буквы a_1 есть 00, код a_2 — 01, код a_3 — 10.

3.28. Построить по методу Шеннона коды для распределений вероятностей из задач 3.12, 1), 2).

3.29. Указать наименьшее m, при котором существует распределение вероятностей $P=(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, такое, что код, построенный по методу Шеннона для данного распределения вероятностей, не является оптимальным.

3.30. Доказать, что код, построенный по методу Шеннона, является префиксным.

3.31. Пусть $\mathscr{L}^*(m)=\sup\limits_P \inf\limits_C \mathscr{L}_C(P)$, где верхняя грань берется по всем распределениям $P=(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, таким, что $p_i>0$, $i=\overline{1, m}$, $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i=1$.

1) Доказать, что $\mathscr{L}^*(m) \geqslant [\log_2 m]$.

2) Доказать, что $\mathscr{L}^*(m) \leqslant [\log_2 m]+1$.

Глава VI

КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ

§ 1. Детерминированные и ограниченно-детерминированные функции

Пусть A — непустой конечный алфавит. Элементы алфавита называются *буквами* (или *символами*). *Словом в алфавите* A называется последовательность, составленная из букв алфавита A. *Длина* (число букв) в слове w обозначается через $\lambda(w)$. Множество всех слов $\tilde{x}^s = x(1)\,x(2)\ldots x(s)$ длины s ($s \geqslant 1$) в алфавите A будет обозначаться через A^s. Слово длины 0 (*пустое слово*) обозначается символом Λ. Через A^* обозначается множество $\{\Lambda\} \cup \bigcup\limits_{s\geqslant 1} A^s$, а через A^ω — множество всех слов $\tilde{x}^\omega = x(1)\,x(2)\ldots$, где $x(t) \in A$, $t=1, 2, \ldots$ Слова из A^ω называются *бесконечными словами в алфавите* A.

Слово w, получающееся приписыванием слова w_2 справа к конечному (или пустому) слову w_1, называется *соединением слов* w_1 и w_2 и обозначается через w_1w_2. При этом слово w_1 называется *началом* (*префиксом*), а слово w_2 — *окончанием* (*суффиксом*) слова w.

Пусть A и B — конечные непустые алфавиты. Отображение $\varphi\colon A^\omega \to B^\omega$ называется *детерминированной функцией*, или *детерминированным оператором* (сокращенно — *д. функцией*, или *д. оператором*), если оно удовлетворяет следующим условиям:

(а) для всякого $s \geqslant 1$ s-й символ $y(s)$ слова $\tilde{y}^\omega = \varphi(\tilde{x}^\omega)$ является однозначной функцией первых s символов $x(1), x(2), \ldots, x(s)$ слова $\tilde{x}^\omega$;

(б) если у слов $\tilde{x}_1^\omega$ и $\tilde{x}_2^\omega$ префиксы длины $s\,(s \geqslant 1)$ совпадают, то совпадают также префиксы длины s у слов $\tilde{y}_1^\omega = y(\tilde{x}_1^\omega)$ и $\tilde{y}_2^\omega = \varphi(\tilde{x}_2^\omega)$.

Через $\Phi_{A,B}$ будет обозначаться множество всех д. функций вида $\varphi: A^\omega \to B^\omega$.

Если $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ и $B = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_m$, то отображение $\varphi: A^\omega \to B^\omega$ индуцирует m функций $\varphi_i = \varphi_i(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, каждая из которых зависит от n переменных, причем переменная X_j пробегает множество A_j^ω $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Эти функции определяются так. Пусть $\tilde{x}^\omega = x(1)\,x(2)\ldots x(t)\ldots$ — слово из A^ω и $\tilde{y}^\omega = \varphi(\tilde{x}^\omega) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$ Тогда $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $x_j(t) \in A_j$, $\tilde{x}_j^\omega = x_j(1)x_j(2)\ldots$ $\ldots x_j(t)\ldots, \tilde{x}^\omega = (\tilde{x}_1^\omega, \tilde{x}_2^\omega, \ldots, \tilde{x}_n^\omega)$; $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots$ $\ldots, y_m(t))$, $y_i(t) \in B_i$, $\tilde{y}_i^\omega = y_i(1)\,y_i(2)\ldots y_i(t)\ldots$, $\tilde{y}^\omega =$ $= (\tilde{y}_1^\omega, \tilde{y}_2^\omega, \ldots, \tilde{y}_m^\omega)$, $\varphi_i(\tilde{x}_1^\omega, \tilde{x}_2^\omega, \ldots, \tilde{x}_n^\omega) = \tilde{y}_i^\omega$.

Можно поступать наоборот — исходя из функций φ_i, строить отображение φ.

Понятие *д. функции от n аргументов* возникает естественным образом при рассмотрении д. функций вида $\varphi: (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)^\omega \to B^\omega$.

Переменная X_1 функции $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n): (A_1 \times$ $\times A_2 \times \ldots \times A_n)^\omega \to B^\omega$ называется *существенной*, если найдутся два набора $(\tilde{x}_{11}^\omega, \tilde{x}_{21}^\omega, \ldots, \tilde{x}_{n1}^\omega)$ и $(\tilde{x}_{12}^\omega, \tilde{x}_{21}^\omega, \ldots, \tilde{x}_{n1}^\omega)$ значений переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$, отличающиеся только первой компонентой и такие, что $\varphi(\tilde{x}_{11}^\omega, \tilde{x}_{21}^\omega, \ldots$ $\ldots, \tilde{x}_{n1}^\omega) \neq \varphi(\tilde{x}_{12}^\omega, \tilde{x}_{21}^\omega, \ldots, \tilde{x}_{n1}^\omega)$. Если переменная X_1 не является существенной, то она называется *фиктивной* (или *несущественной*). Аналогично определяется существенность и фиктивность любой другой переменной X_i, от которой зависит данная функция.

Говорят, что функция $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *зависит существенно* (*несущественно*) от переменной X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, если эта переменная является существенной (соответственно фиктивной) переменной функции φ.

Если A есть множество всех векторов длины n с элементами из E_k, а B — множество всех векторов длины m с элементами из E_l, то вместо $\Phi_{A,B}$ будет применяться обозначение $\Phi_{k,l}^{n,m}$. При $n = m = 1$ верхние индексы у $\Phi_{k,l}^{1,1}$ будут опускаться; если $k = l$, то внизу будем писать только один индекс: $\Phi_k^{n,m}$.

Иногда бывает удобно считать, что д. функция φ из $\Phi_{A, B}$ *реализуется* некоторым *дискретным устройством* (*автоматом*) $\mathfrak{A}_\varphi$, работающим в дискретные моменты времени $t=1, 2, \ldots$ На вход этого устройства в каждый момент t подается сигнал $x(t)$, а на выходе появляется сигнал $y(t)$ (рис. 23). Слова $\tilde{x}^\omega$ называют *входными*, слова $\tilde{y}^\omega$ — *выходными*, A называют *входным*, B — *выходным алфавитами автомата* $\mathfrak{A}_\varphi$. Если $A=A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ и $B=B_1\times B_2\times\ldots\times B_m$, то можно считать, что автомат $\mathfrak{A}_\varphi$ реализует m детерминированных функций, каждая из которых зависит от n переменных.

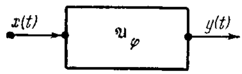


Рис. 23.

Любые две функции φ_1 и φ_2 из $\Phi_{A, B}$ называются *различимыми*, если существует входное слово $\tilde{x}_0^\omega$, перерабатываемое ими в разные выходные слова, т. е. $\varphi_1(\tilde{x}_0^\omega) \neq \varphi_2(\tilde{x}_0^\omega)$. Если же равенство $\varphi_1(\tilde{x}^\omega) = \varphi_2(\tilde{x}^\omega)$ выполняется при всяком входном слове $\tilde{x}^\omega$, то φ_1 и φ_2 называются *эквивалентными*, или *неразличимыми* д. функциями.

Пусть $\varphi \in \Phi_{A, B}$ и $\psi \in \Phi_{A, B}$. Если существует такое слово $\tilde{x}_0^s \in A^*$, что $\varphi(\tilde{x}_0^s\tilde{x}^\omega) = \varphi(\tilde{x}_0^s)\,\psi(\tilde{x}^\omega)$ [1]) для любого слова $\tilde{x}^\omega \in A^\omega$, то оператор ψ называется *остаточным оператором оператора* φ, *порожденным словом* $\tilde{x}_0^s$, и обозначается через $\varphi_{\tilde{x}_0^s}$. Множество $Q(\varphi, \tilde{x}_0^s)$ всех *остаточных операторов* оператора φ, эквивалентных оператору $\varphi_{\tilde{x}_0^s}$, образует *класс эквивалентности*, называемый *состоянием оператора* φ, *содержащим остаточный оператор* $\varphi_{\tilde{x}_0^s}$. Состояние, содержащее оператор φ, называется *начальным*. Если $\psi \in Q(\varphi, \tilde{x}_0^s)$, то будем говорить, что *оператор* ψ *реализуется состоянием* $Q(\varphi, \tilde{x}_0^s)$ оператора φ. Оператор φ называется *ограниченно-детерминированным* (сокращенно — *о.-д. оператором*, или *о.-д. функцией*), если он имеет конечное число попарно различных состояний. Число различных состояний о.-д. функции называется ее *весом*. Если множество попарно различных состояний оператора φ — бесконечное, то будем считать, что вес оператора φ равен ∞.

---

[1]) Здесь через $\varphi(\tilde{x}_0^s)$ обозначен префикс длины s выходного слова $\varphi(\tilde{x}_0^s\tilde{x}^\omega)$.

Через $\hat{\Phi}_{A,B}$ обозначим множество всех функций из $\Phi_{A,B}$, являющихся о.-д. функциями.

При рассмотрении д. функций удобно пользоваться графическим изображением их в виде *бесконечных информативных деревьев*. Пусть A — алфавит из n букв. Через D_A обозначим бесконечное ориентированное корневое дерево, удовлетворяющее условиям:

(а) полустепень исхода каждой вершины, включая и корень, равна n;

(б) полустепень захода корня равна 0, а всякой другой вершины — 1;

(в) каждой дуге дерева D_A приписана некоторая буква алфавита A, причем разным дугам, исходящим

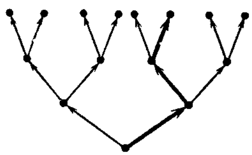


Рис. 24.

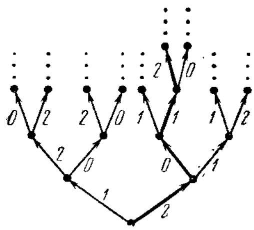


Рис. 25.

из одной и той же вершины дерева (в частности, из корня), приписаны разные буквы. Корень дерева будем считать *вершиной нулевого ранга*; если вершина v является концом дуги, исходящей из вершины i-го ранга ($i \geqslant 0$), то v называется *вершиной* ($i+1$)*-го ранга*. *Дугой j-го яруса* ($j \geqslant 1$) называется дуга, исходящая из вершины ($j-1$)*-го ранга*. Всякой бесконечной ориентированной цепи в дереве D_A соответствует слово из A^{ω}. На рис. 24 изображен *фрагмент дерева* D_A, $A=\{0, 1\}$, состоящий из трех первых ярусов этого дерева (мы предполагаем здесь и в дальнейшем, что символу 0 соответствует левая дуга, исходящая из вершины, а символу 1 — правая); жирными дугами выделена цепь, соответствующая слову 101.

Нагруженное дерево $D_{A,B}$ получается из дерева D_A путем приписывания каждой дуге некоторой буквы из алфавита B. Всякой ориентированной бесконечной цепи в дереве $D_{A,B}$ отвечает слово из B^{ω}, составленное из букв, приписанных дугам этой цепи. Поэтому можно считать, что нагруженное дерево $D_{A,B}$ *задает (реализует)* отображение φ: $A^\omega \to B^\omega$, являющееся д. функцией. На рис. 25 изображен фрагмент некоторого нагруженного дерева $D_{A,B}$, где $A=\{0, 1\}$ и $B=\{0, 1, 2\}$; д. функция, соответствующая этому дереву, перерабатывает, например, слово 1010 в слово 2012.

Пусть $D_{A,B}$ — нагруженное дерево, реализующее д. функцию φ. Остаточному оператору $\varphi_{\tilde{x}_0^s}$ $(s \geqslant 0)$ оператора φ отвечает поддерево $D_{A,B}(\tilde{x}_0^s)$, растущее из такой вершины $v(\tilde{x}_0^s)$ s-го ранга, в которой оканчивается цепь, исходящая из корня и содержащая ровно s дуг, причем этой цепи в i-м ярусе принадлежит дуга, помеченная буквой $x_0(i) \in A$.

Если остаточные операторы $\varphi_{\tilde{x}_1^{s_1}}$ и $\varphi_{\tilde{x}_2^{s_2}}$ эквивалентны, то соответствующие им вершины $v(\tilde{x}_1^{s_1})$ и $v(\tilde{x}_2^{s_2})$ и растущие из этих вершин поддеревья также называются *эквивалентными*. Вес дерева, реализующего д. функцию, равен весу этой функции, а следовательно, максимальному числу попарно неэквивалентных вершин (или поддеревьев) данного дерева.

1.1. Выяснить, является ли д. функцией отображение $\varphi: \{0, 1\}^\omega \to \{0, 1\}^\omega$.

1) $\varphi(x(1)x(2)\ldots) = x(2)x(3)\ldots$, т. е. $y(t) = x(t+1)$, $t \geqslant 1$;

2) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = 10100100010\ldots0\underbrace{10\ldots0}_{n\text{ раз}}10$ при любом входном слове $\tilde{x}^\omega$;

3) $\varphi(x(1)x(2)x(3)\ldots) = x(1)x(2)x(1)x(2)x(3)\ldots$, т. е. $y(1)=x(1)$, $y(2)=x(2)$ и $y(t)=x(t-2)$ при $t \geqslant 3$;

4) $\varphi(x(1)\ x(2)\ \ldots)=0\ x(1+x(2))x(1+x(3))\ldots$, т. е. $y(1)=0$, $y(t)=x(1+x(t))$ при $t \geqslant 2$.

1.2. Является ли детерминированной функция φ: $\{0, 1\}^\omega \to \{0, 1\}^\omega$, заданная следующим словесным описанием?

1) Слово $\tilde{x}^\omega = x(1)x(2)\ldots$ перерабатывается в слово $\tilde{0}^\omega = 000\ldots0\ldots$, если существует такое t, что $x(t)=0$; в противном случае $\varphi(\tilde{x}^\omega) = \tilde{1}^\omega = 111\ldots1\ldots$

2) s-я буква $y(s)$ в слове $\tilde{y}^\omega = \varphi(\tilde{x}^\omega)$ равна 0, если при некотором $t \leqslant s$ выполняется неравенство $x(t) < x(t+1)+x(t+2)$; в противном случае $y(s)=1$.

3) s-я буква $y(s)$ в слове $\tilde{y}^\omega=\varphi(\tilde{x}^\omega)$ равна 0, если существует $t \geqslant s$, такое, что $x(t) \leqslant x(s)$; в противном случае $y(s)=1$.

4) $y(1)=0$ и при $s \geqslant 2$ число нулей в префиксе $y(1)\, y(2) \ldots y(s)$ слова $\tilde{y}^\omega=\varphi(\tilde{x}^\omega)$ на единицу больше числа нулей в слове $x(1)\, x(2) \ldots x(s)$.

Каждому слову $\tilde{x}^\omega=x(1)\, x(2) \ldots x(t) \ldots$ из $\{0, 1\}^\omega$ соответствует некоторое число $\nu(\tilde{x}^\omega)$ из отрезка $[0, 1]$, двоичное разложение которого имеет вид $0, x(1)\, x(2) \ldots x(t) \ldots$ Если $a \in [0, 1]$, то его двоичное разложение[1]) $0, a_1 a_2 \ldots a_t \ldots$ порождает слово $\langle a\rangle=x(1)\, x(2) \ldots x(t) \ldots$, где $x(t)=a_t$ $(t \geqslant 1)$.

1.3. Выяснить, является ли детерминированной функция $\varphi:\{0, 1\}^\omega \to \{0, 1\}^\omega$.

1) $\varphi(\tilde{x}^\omega)=\left\langle\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$;

2) $\varphi(\tilde{x}^\omega)=\left\langle\frac{7}{15}\right\rangle$;

3) $\varphi(\tilde{x}^\omega)=\left\langle\frac{\nu(\tilde{x}^\omega)}{2}\right\rangle$;

4) $\varphi(\tilde{x}^\omega)=\left\langle\frac{\nu(\tilde{x}^\omega)}{3}\right\rangle$;

5) $\varphi(\tilde{x}^\omega)=\langle 1-\nu(\tilde{x}^\omega)\rangle$.

1.4. Является ли детерминированной функция $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n):\underbrace{\{0, 1\}^\omega\times\{0, 1\}^\omega\times\ldots\times\{0, 1\}^\omega}_{n \text{ раз}} \to \{0, 1\}^\omega$?

1) $\varphi(\tilde{x}_1^\omega, \tilde{x}_2^\omega)=\begin{cases}\tilde{1}^\omega, & \text{если } \nu(\tilde{x}_1^\omega) \leqslant \nu(\tilde{x}_2^\omega),\\ \tilde{0}^\omega & \text{в ином случае;}\end{cases}$

2) $\varphi(\tilde{x}_1^\omega, \tilde{x}_2^\omega)=\begin{cases}\tilde{x}_1^\omega, & \text{если } \nu(x_1^\omega)\, \nu(\tilde{x}_2^\omega) \leqslant 1/2,\\ \tilde{x}_2^\omega & \text{в ином случае;}\end{cases}$

3) $\varphi(\tilde{x}_1^\omega, \tilde{x}_2^\omega, \tilde{x}_3^\omega)=\begin{cases}\tilde{1}^\omega, & \text{если } \nu(\tilde{x}_1^\omega)+\nu(\tilde{x}_2^\omega) \leqslant \nu(\tilde{x}_3^\omega),\\ \tilde{x}_3^\omega & \text{в ином случае;}\end{cases}$

4) $\varphi(\tilde{x}_1^\omega, \tilde{x}_2^\omega, \tilde{x}_3^\omega)=\begin{cases}\langle\nu(\tilde{x}_1^\omega)\, \nu(\tilde{x}_2^\omega)\rangle, & \text{если } \nu(\tilde{x}_3^\omega)=1,\\ \tilde{0}^\omega & \text{в ином случае.}\end{cases}$

1.5. Приводимые ниже частичные функции $\varphi:\{0, 1\}^\omega \to \{0, 1\}^\omega$ не определены только на слове $\tilde{0}^\omega=00\ldots0\ldots$ Выяснить, какие из этих функций можно доопределить до детерминированных, а какие — нельзя.

---

[1]) Если $a=p/2^n$ $(n \geqslant 1)$, то рассматривается такое двоичное разложение, которое содержит бесконечно много нулей.

1) $\varphi(\tilde{x}^\omega)=\begin{cases}\tilde{x}^\omega, & \text{если в каждом префиксе слова } \tilde{x}^\omega \\ & \text{число нулей не меньше числа единиц,} \\ \tilde{1}^\omega & \text{в ином случае;}\end{cases}$

2) $\varphi(\tilde{x}^\omega)=y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где

$$y(t)=\begin{cases}0, & \text{если } \exists s\,((s\leqslant t)\,\&\,(x(s)=1)),\\ 1 & \text{в ином случае;}\end{cases}$$

3) $\varphi(\tilde{x}^\omega)=y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где

$$y(t)=\begin{cases}1, & \text{если для некоторого } s\leqslant t \text{ в префиксе } x(1)\,x(2)\ldots\\ & \ldots x(s) \text{ число нулей больше числа единиц,}\\ x(t) & \text{в ином случае;}\end{cases}$$

4) $\varphi(\tilde{x}^\omega)=y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где

$$y(t)=\begin{cases}1, & \text{если } \nu(x(1)\,x(2)\ldots x(t)\,00\ldots0\ldots)\leqslant 1/2,\\ 0 & \text{в ином случае.}\end{cases}$$

1.6. 1) Опровергнуть следующее утверждение: если функция $\varphi(X_1, X_2):\{0,1\}^\omega\times\{0,1\}^\omega\to\{0,1\}^\omega$ существенно зависит от переменной X_1 и при всяком (фиксированном) слове $\tilde{x}_2^\omega\in\{0,1\}^\omega$ $\varphi(X_1, \tilde{x}_2^\omega)$ — д. функция, то и сама функция $\varphi(X_1, X_2)$ является детерминированной.

2*) Пусть функция $\varphi(X_1, X_2):\{0,1\}^\omega\times\{0,1\}^\omega\to\{0,1\}^\omega$ удовлетворяет условию: каковы бы ни были слова $\tilde{x}_1^\omega$ и $\tilde{x}_2^\omega$ из $\{0,1\}^\omega$, функции $\varphi(X_1, \tilde{x}_2^\omega)$ и $\varphi(\tilde{x}_1^\omega, X_2)$ — детерминированные. Является ли тогда детерминированной и функция $\varphi(X_1, X_2)$?

1.7. Для функции $\tilde{y}^\omega=\varphi(\tilde{x}^\omega)$, принадлежащей множеству Φ_2, построить фрагмент нагруженного дерева, содержащий s первых ярусов.

1) $y(1)=1$ и $y(t)=x(t-1)$ при $t\geqslant 2$, $s=3$;

2) $y(1)=0$ и $y(t)=x(t)\oplus y(t-1)$ при $t\geqslant 2$, $s=4$;

3) $\varphi(\tilde{x}^\omega)=\left\langle\frac{1}{3}\right\rangle$, $s=3$;

4) $\varphi(\tilde{x}^\omega)=\left\langle\frac{\nu(\tilde{x}^\omega)}{4}\right\rangle$, $s=4$.

1.8. По заданной функции $\varphi(\tilde{x}^\omega)\in\Phi_2$ изобразить в нагруженном дереве цепь, соответствующую префиксу $\tilde{x}^s$ входного слова $\tilde{x}^\omega$, и написать префикс $\tilde{y}^s$ выходного слова $\tilde{y}^\omega$.

1) $\varphi(\tilde{x}^\omega)=10100100010\ldots$ $\left(\text{т. е. } y(t)=1 \text{ лишь для } t=\binom{i}{2},\ i=2, 3, \ldots\right)$, $\tilde{x}^7=0101001$;

2) $\varphi(\tilde{x}^{\omega})=\left\langle\frac{\nu(\tilde{x}^{\omega})}{2}\right\rangle$, (а) $\tilde{x}^7=1111101$, (б) $\tilde{x}^7=1010110$;

3) $y(t)=\begin{cases}1, \text{ если } x(1)+x(2)+\ldots+x(t)>t/2,\\ 0 \text{ в ином случае,}\end{cases}$

(а) $\tilde{x}^{10}=0101010110$, (б) $\tilde{x}^{10}=1100101110$.

1.9. Нагруженное дерево, соответствующее некоторой функции $\varphi(\tilde{x}^{\omega})\in\Phi_2$, имеет следующий вид: левой дуге, исходящей из корня, приписан 0, правой — 1; если v — вершина i-го ранга ($i\geqslant 1$) и дуге i-го яруса, заходящей в вершину v, приписан символ $\sigma\in\{0, 1\}$, то левой дуге, исходящей из v, приписан тот же символ σ, а правой дуге — символ $\bar{\sigma}$ (отрицание σ).

1) Верно ли, что для этой функции s-я буква выходного слова $\tilde{y}^{\omega}=\varphi(\tilde{x}^{\omega})$ находится из соотношения:

(а) $y(1)=x(1)$, $y(s)=x(s-1)\oplus x(s)$ при $s\geqslant 2$;

(б) $y(1)=x(1)$, $y(2)=x(1)\oplus x(2)$, $y(s)=x(s-2)\oplus$ $\oplus\, x(s)$ при $s\geqslant 3$;

(в) $y(s)=x(1)\oplus x(2)\oplus\ldots\oplus x(s)$?

2) Найти вес функции φ.

1.10. Эквивалентны ли остаточные операторы $\varphi_{\tilde{x}_0^s}$ и $\varphi_{\tilde{x}_1^r}$ д. функции $\varphi\in\Phi_2$?

1) $\varphi(\tilde{x}^{\omega})=10100100010\ldots$ (т. е. $y(t)=1$ только для $t=\binom{i}{2}$, $i=2, 3, \ldots$), $\tilde{x}_0^3=101$; $\tilde{x}_1^3=010$;

2) $\varphi(\tilde{x}^{\omega})=\left\langle\frac{8}{15}\right\rangle$, $\tilde{x}_0^2=10$, $\tilde{x}_1^5=00101$;

3) $\varphi(\tilde{x}^{\omega})=\left\langle\frac{\nu(\tilde{x}^{\omega})}{2}\right\rangle$, $\tilde{x}_0^1=1$, $\tilde{x}_1^3=001$;

4) $\varphi(\tilde{x}^{\omega})=y(1)\,y(2)\ldots$ и

$$y(t)=\begin{cases}0, \text{ если } x(1)+x(2)+\ldots+x(t)<t/2,\\ 1 \text{ в ином случае,}\end{cases}$$

$\tilde{x}_0^2=10$, $\tilde{x}_1^6=010110$.

1.11. Выяснить, является ли φ_1 остаточным оператором функции $\varphi\in\Phi_2$.

1) φ: $\begin{cases}y(1)=0,\\ y(t)=x(t)\oplus\bar{y}(t-1), \quad t\geqslant 2,\end{cases}$

φ_1: $\begin{cases}y(1)=1,\\ y(t)=\bar{y}(t-1), \quad t\geqslant 2;\end{cases}$

2) φ: $\begin{cases} y(1)=1, \\ y(t)=\bar{y}(t-1), & t\geqslant 2, \end{cases}$

φ_1: $\begin{cases} y(1)=0, \\ y(t)=\bar{y}(t-1), & t\geqslant 2; \end{cases}$

3) φ: $\begin{cases} y(1)=0, \\ y(t)=x(t)\cdot \bar{x}(t-1)\vee \bar{x}(t)\cdot x(t-1), & t\geqslant 2, \end{cases}$

φ_1: $\begin{cases} y(1)=0, \\ y(t)=x(t)\oplus y(t-1), & t\geqslant 2; \end{cases}$

4) $\varphi(\tilde{x}^{\omega})=\left\langle\frac{13}{15}\right\rangle$, $\varphi_1(\tilde{x}^{\omega})=\left\langle\frac{7}{15}\right\rangle$.

1.12. Выяснить, является ли функция $\varphi\in\Phi_2^{n,m}$ о.-д. функцией, и найти ее вес.

1) $\varphi(\tilde{x}^{\omega})$: $\begin{cases} y(1)=y(2)=1, \\ y(t)=x(t-2), & t\geqslant 3; \end{cases}$

2) $\varphi(\tilde{x}^{\omega})$: $\begin{cases} y(2t)=x(t+1), & t\geqslant 1, \\ y(2t-1)=x(t), & t\geqslant 1; \end{cases}$

3) $\varphi(\tilde{x}^{\omega})$: $\begin{cases} y(1)=1, \\ y(2t-1)=x(2t-1)\oplus y(2t-3), & t\geqslant 2, \\ y(2t)=x(2t-1), & t\geqslant 1; \end{cases}$

4) $\varphi(\tilde{x}^{\omega})$: $\begin{cases} y_1(1)=x_1(1)\oplus x_2(1), \\ y_1(t)=x_1(t)\oplus x_2(t)\oplus y_2(t-1), & t\geqslant 2, \\ y_2(t)=x_1(1)\cdot x_2(1), \\ y_2(t)=x_1(t)\cdot x_2(t)\oplus x_1(t)\cdot y_2(t-1)\oplus \\ \qquad\oplus x_2(t)\cdot y_2(t-1), & t\geqslant 2; \end{cases}$

5) $\varphi(\tilde{x}^{\omega})$: $\begin{cases} y_1(1)=1, \\ y_1(t)=\bar{y}_2(t-1), & t\geqslant 2, \\ y_2(1)=0, \\ y_2(t)=y_1(t-1), & t\geqslant 2. \end{cases}$

1.13. Пусть $D_{A,B}$ — нагруженное дерево, реализующее о.-д. функцию $\varphi: A^{\omega}\to B^{\omega}$. Каждой вершине дерева $D_{A,B}$ припишем число, равное весу поддерева, растущего из нее. Получим новое дерево $\bar{D}_{A,B}$.

1) Для всякого $r \geqslant 1$ привести пример такой о.-д. функции φ, чтобы каждая вершина в дереве $\bar{D}_{A,B}$, соответствующем функции φ, была помечена числом r.

2) Для всякого $r \geqslant 2$ привести пример такой о.-д. функции φ, чтобы при $j=0, 1, \ldots, r-1$ каждая вершина j-го ранга в дереве $\bar{D}_{A,B}$, соответствующем функции φ, была помечена числом $r-j$.

1.14. 1) Доказать, что дерево $\bar{D}_{A,B}$, построенное в соответствии с условием задачи 1.13, обладает следующим свойством: последовательность чисел $\nu(v_1)$, $\nu(v_2)$, ..., приписанных вершинам ориентированной цепи v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, ... (конечной или бесконечной), является монотонно невозрастающей и, в случае бесконечной цепи, эта последовательность стабилизируется.

2) Показать, что любой остаточный оператор функции $\varphi \in \Phi_{A,B}$ имеет вес, не превосходящий ве́са функции φ.

1.15. Дерево, реализующее функцию $\varphi_0(\tilde{x}^\omega) \in \Phi_2$, имеет следующий вид: символ 1 приписан только тем дугам, которые принадлежат ориентированной цепи, исходящей из корня и соответствующей входному слову $10100100010\ldots$ (здесь $x(t)=1$ лишь для $t=\binom{i}{2}$, $i=2, 3, \ldots$); остальным дугам приписан символ 0. Доказать, что функция φ_0 имеет бесконечный вес и, следовательно, не является ограниченно-детерминированной.

1.16. Для каждого $r \geqslant 2$ построить пример такой о.-д. функции веса r, которая удовлетворяет условию: в реализующем эту функцию нагруженном дереве символ 1 приписан только дугам некоторой одной бесконечной ориентированной цепи Z, исходящей из корня; остальным дугам (не принадлежащим цепи Z) приписан символ 0.

Слово $\tilde{x}^\omega \in A^\omega$ называется *квазипериодическим*, если существуют такие целые числа n_0 и T, что $n_0 \geqslant 1$, $T \geqslant 1$ и $x(n+T)=x(n)$ при $n \geqslant n_0$. При этом префикс $x(1)\,x(2)\ldots x(n_0-1)$ слова $\tilde{x}^\omega$ называется *предпериодом*, число n_0-1 — *длиной предпериода*, слово $x(n_0)\,x(n_0+1)\ldots$ $\ldots x(n_0+T-1)$ — *периодом слова* $\tilde{x}^\omega$, а число T — *длиной периода*. Такое квазипериодическое слово удобно записывать в виде

$$x(1)\,x(2)\ldots x(n_0-1)\,[x(n_0)\,x(n_0+1)\ldots x(n_0+T-1)]^\omega.$$

1.17. 1) Доказать, что если функция $\varphi \in \hat{\Phi}_{A, B}$, то всякое квазипериодическое слово из A^ω преобразуется функцией φ в квазипериодическое слово из B^ω.

2) Показать, не выходя за пределы множества Φ_2, что утверждение, обратное к сформулированному в 1), неверно.

Указание. См. задачу 1.15.

1.18. Опровергнуть следующее утверждение: если д. функция $\varphi(X_1, X_2): \{0, 1\}^\omega \times \{0, 1\}^\omega \to \{0, 1\}^\omega$ существенно зависит от переменной X_1 и при всяком (фиксированном) слове $\tilde{x}_2^\omega \in \{0, 1\}^\omega$ $\varphi(X_1, \tilde{x}_2^\omega)$ — о.-д. функция, то функция $\varphi(X_1, X_2)$ также является ограниченно-детерминированной.

1.19. Пусть все вершины нагруженного дерева разбиты обычным образом на классы эквивалентности. Доказать, что, каков бы ни был класс эквивалентности, в нем существует некоторая вершина v, удовлетворяющая условию: все вершины в ориентированной цепи, исходящей из корня дерева и оканчивающейся в вершине v, попарно не эквивалентны.

1.20. 1) Доказать, что для каждой вершины нагруженного дерева, имеющего вес r, найдется эквивалентная ей вершина ранга не выше $r-1$.

2) Можно ли в предыдущей задаче заменить $r-1$ на $r-2$, если $r \geqslant 2$?

Пусть $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функции вида $\underbrace{E_k \times E_k \times \ldots \times E_k}_{n \text{ раз}} \to E_l$, где k и l не меньше 2. Оператор $\varphi_{f_1, f_2, \ldots, f_m}$ из $\Phi_{k, l}^{n, m}$ называется *оператором, порожденным функциями* $f_1, f_2, \ldots, f_m$, если для всякого $t \geqslant 1$

$$y_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

1.21. Показать, что оператор из $\Phi_{k, l}^{n, 1}$ является порожденным (некоторой функцией вида $\underbrace{E_k \times E_k \times \ldots \times E_k}_{n \text{ раз}} \to E_l$) тогда и только тогда, когда его вес равен 1.

1.22. Выяснить, является ли порожденным оператор $\varphi \in \Phi_2^{1, 2}$, задаваемый следующими соотношениями:

$$\begin{cases} y_1(1) = 0, \\ y_1(t) = x(t-1) \oplus y_2(t-1), \quad t \geqslant 2, \\ y_2(t) = x(t). \end{cases}$$

1.23. Частичный оператор $\varphi: \{0, 1\}^\omega \to \{0, 1\}^\omega$ задан только на входных словах $\tilde{0}^\omega$ и $\tilde{1}^\omega$. Доопределить его так, чтобы получился оператор с минимально возможным весом.

1) $\varphi(\tilde{0}^\omega) = 0101\,[100]^\omega$, $\varphi(\tilde{1}^\omega) = 11\,[10]^\omega$;

2) $\varphi(\tilde{0}^\omega) = 01\,[011]^\omega$, $\varphi(\tilde{1}^\omega) = 1010010001000010\ldots$ $\left(\text{т. е. } y(t) = 1 \text{ только для } t = \binom{i}{2},\ i = 2, 3, \ldots\right)$.

1.24. 1) Доказать, что если $|A| > 1$ и $|B| > 1$, то мощность множества $\Phi_{A, B}$ равна c (мощности континуума).

2) Найти мощность множества $\Phi_{A, B}$ в тех случаях, когда либо $|A| = 1$, либо $|B| = 1$.

1.25. Слова $\tilde{x}_1^\omega$ и $\tilde{x}_2^\omega$ из A^ω называются *s-эквивалентными* (обозначение: $\tilde{x}_1^\omega \underset{s}{\sim} \tilde{x}_2^\omega$), если равны их префиксы длины s ($s \geqslant 1$). Отношение $\underset{s}{\sim}$ является отношением эквивалентности и разбивает множество A^ω на классы $K_j(s)$ s-эквивалентных слов.

1) Какова мощность каждого класса $K_j(s)$ (s — фиксированное число)?

2) Сколько существует различных классов $K_j(s)$ (при фиксированном s)?

3) Сколько существует различных классов $K_{ji}(s + l)$ в каждом классе $K_j(s)$ (здесь $l \geqslant 1$)?

4) Доказать, что отображение $\varphi: A^\omega \to B^\omega$ является д. функцией тогда и только тогда, когда для всякого $s \geqslant 1$ и любых слов $\tilde{x}_1^\omega$ и $\tilde{x}_2^\omega$, принадлежащих множеству A^ω, соотношение $\tilde{x}_1^\omega \underset{s}{\sim} \tilde{x}_2^\omega$ влечет соотношение $\varphi(\tilde{x}_1^\omega) \underset{s}{\sim} \varphi(\tilde{x}_2^\omega)$.

1.26. 1) Доказать, что если $|B| \geqslant 2$, то множество $\hat{\Phi}_{A, B}$ — счетно-бесконечное.

2) Чему равна мощность множества $\hat{\Phi}_{A, B}$, если $|B| = 1$?

1.27. Пусть $D_{A, B}$ — нагруженное дерево, реализующее о.-д. функцию $\varphi: A^\omega \to B^\omega$ веса r. Изменим выходной символ у какой-либо дуги j-го яруса дерева $D_{A, B}$ (считаем, что $|B| \geqslant 2$). Получим дерево $D'_{A, B}$, реализующее некоторую (новую) о.-д. функцию φ' веса r'.

1) Показать, что $1 \leqslant r' \leqslant r + j$.

2) Привести пример такой о.-д. функции φ, на которой достигается верхняя оценка, т. е. $r' = r + j$.

§ 2. Представление детерминированных функций диаграммами Мура, каноническими уравнениями, таблицами и схемами. Операции над детерминированными функциями

Пусть $Q=\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_{w-1}\}$ — множество всех состояний функции φ из $\hat{\Phi}_{A,B}$. Сопоставим функции φ орграф Γ_φ:

1) множеством вершин орграфа Γ_φ является множество $E_w=\{0, 1, \ldots, w-1\}$, причем считается, что вершина j соответствует состоянию Q_j;

2) если $\varphi^{(i)}$ и $\varphi^{(j)}$ — остаточные операторы функции φ, реализуемые соответственно состояниями Q_i и Q_j (причем $\varphi^{(j)}$ является также остаточным оператором оператора $\varphi^{(i)}$, соответствующим префиксу $\tilde{x}^1=a$, и $\varphi^{(i)}(a\tilde{x}^{\omega})=$ $=b\varphi^{(j)}(\tilde{x}^{\omega})$), то в орграфе Γ_φ имеется дуга (i, j) и ей приписывается выражение $a\,(b)$;

3) дуга (i, j) существует в Γ_φ только при выполнении условий п. 2).

Вершина из Γ_φ, соответствующая начальному состоянию функции φ, обычно отмечается звездочкой. Пусть из вершины i в вершину j идут m дуг, которым приписаны выражения $a_1(b_1)$, $a_2(b_2), \ldots, a_m(b_m)$ (здесь обязательно $a_p \neq a_q$ при $p \neq q$, но некоторые или все из символов b_s могут совпадать друг с другом); тогда будем соединять i с j только одной дугой (i, j) и будем приписывать ей все выражения $a_p(b_p)$, $p=\overline{1, m}$. Орграф Γ_φ называется *диаграммой Мура функции* φ. С Γ_φ можно связать две функции:

а) F: $A\times Q\to B$ — *функция выходов*,

б) G: $A\times Q\to Q$ — *функция переходов*.

Функции F и G по Γ_φ определяются так: по паре (a, j) находим вершину j и такую дугу, исходящую из j, которой приписан входной символ a (пусть эта дуга имеет вид (j, r)); значением функции F на паре (a, j) является выходной символ, приписанный дуге (j, r) и стоящий в скобках за символом a; значение функции G на паре (a, j) совпадает с r, т. е. равно «номеру» того состояния, которое «является концом» дуги (j, r).

Система уравнений

$$\begin{cases} y(t)=F(x(t),\ q(t-1)), \\ q(t)=G(x(t),\ q(t-1)), \\ q(0)=q_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t) \in A$, $y(t) \in B$, $q(t) \in Q$ $(t=1, 2, \ldots)$ и $q_0 \in Q$, называется *каноническими уравнениями оператора* φ *с начальным условием* q_0.

С помощью диаграммы Мура и канонических уравнений можно задавать и такие детерминированные операторы, которые не являются ограниченно-детерминированными. Множество вершин орграфа Γ_φ, соответствующего такому д. оператору, совпадает с натуральным рядом $N=\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Если φ — ограниченно-детерминированный оператор, то функции $F(x(t), q(t-1))$ и $G(x(t), q(t-1))$ (см. систему (1)) и аргументы, от которых зависят эти функции, принимают конечное число значений; поэтому возможно табличное задание о.-д. оператора φ с помощью так называемой *канонической таблицы*.

ТАБЛИЦА 7

$x(t)$	$q(t-1)$	$y(t)$	$q(t)$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
a	j	$F(a, j)$	$G(a, j)$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Вместо канонических уравнений (1) бывает удобно рассматривать такие канонические уравнения, в которых функции выходов и переходов являются функциями k-значной логики P_k $(k \geqslant 2)$. Для получения соответствующего представления оператора φ алфавиты A, B и Q кодируются векторами, координаты которых принадлежат множеству E_k $(k \geqslant 2)$. Если φ — о.-д. оператор и $n =]\log_k |A|[$, $m =]\log_k |B|[$, $r =]\log_k |Q|[$, то для кодирования букв из алфавитов A, B и Q достаточно взять векторы (с координатами, принадлежащими E_k), имеющие длины n, m и r соответственно [1]).

[1]) Если д. оператор φ не является о.-д. оператором, то $r = \infty$.

Система (1) преобразуется тогда в следующую:

$$\begin{cases} y_1(t)=F_1(x_1(t),\ldots,x_n(t),\ q_1(t-1),\ldots,q_r(t-1)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m(t)=F_m(x_1(t),\ldots,x_n(t),\ q_1(t-1),\ldots,q_r(t-1)), \\ q_1(t)=G_1(x_1(t),\ldots,x_n(t),\ q_1(t-1),\ldots,q_r(t-1)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_r(t)=G_r(x_1(t),\ldots,x_n(t),\ q_1(t-1),\ldots,q_r(t-1)), \\ q_1(0)=q_{01},\ldots,q_r(0)=q_{0r}. \end{cases} \qquad (2)$$

В дальнейшем используется также «векторная запись» систем, аналогичных системе (2). При такой записи система (2) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{(m)}(t)=\boldsymbol{F}^{(m)}(\boldsymbol{x}^{(n)}(t),\ \boldsymbol{q}^{(r)}(t-1)), \\ \boldsymbol{q}^{(r)}(t)=\boldsymbol{G}^{(r)}(\boldsymbol{x}^{(n)}(t),\ \boldsymbol{q}^{(r)}(t-1)), \\ \boldsymbol{q}^{(r)}(0)=\boldsymbol{q}_0^{(r)}. \end{cases} \qquad (3)$$

Функции F_i и G_l в системе (2) являются, вообще говоря, *частичными*, т. е. не всюду определенными. Обычно их доопределяют так, чтобы правые части уравнений в (2) имели по возможности более простой вид.

Каноническая таблица, задающая о.-д. оператор φ, соответствующий системе (2), имеет $m+n+2r$ столбцов и k^{n+r} строк.

Уравнения системы (2) называются *каноническими уравнениями в скалярной форме*, а уравнения из системы (1) — *каноническими уравнениями в векторной форме*.

Можно считать, что система (2) определяет оператор из множества $\Phi_k^{n,m}$.

Пусть д. оператор φ задан системой (2) и каждая из функций F_i и G_l — всюду определенная функция k-значной логики P_k ($k\geqslant 2$). Будем рассматривать оператор φ как элемент множества $\Phi_k^{n,m}$. Схема Σ_φ оператора φ определяется следующим образом: Σ_φ представляет собой сеть, полюсам которой приписаны символы входных и выходных переменных, а некоторым вершинам, отличным от полюсов, приписаны символы каких-то д. операторов $\left(\text{из множества } \bigcup\limits_{s=1}^{\infty}\bigcup\limits_{s'=1}^{\infty}\Phi_k^{s,s'}\right)$.

Схему оператора φ из $\Phi_k^{n,m}$ будем изображать в виде прямоугольника (рис. 26) с n *входными* и m *выходными каналами*. Входные каналы изображаются в виде стрелок, исходящих из входных полюсов, а выходные — в виде стрелок, заходящих в выходные полюсы. Полюсы изображаются в виде кружочков. Если $m=1$, то схему Σ_φ оператора φ иногда будем изображать в виде треугольника (рис. 27) с n входными и одним выходным полюсами.

Считаем, что в каждый момент времени $t=1, 2, \ldots$ на i-й вход x_i *«поступает»* входной символ $x_i(t) \in E_k$, а на j-м выходе y_j *«выдается»* (*реализуется*) значение $y_j(t)=F_j(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_r(t-1))$. Говорят, что *выход* y_j *зависит с запаздыванием от входа*

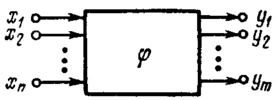


Рис. 26.

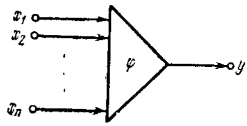


Рис. 27.

x_i, если функция $F_j(x^{(n)}(t), q^{(r)}(t-1))$ не зависит существенно от переменной $x_i(t)$.

Понятие зависимости с запаздыванием можно ввести иначе. Рассмотрим, например, случай д. функции вида $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ и определим зависимость с запаздыванием от переменной X_1. Функция φ *зависит с запаздыванием от* X_1, если при любых входных словах $\tilde{x}_1^\omega, \tilde{x}_2^\omega, \ldots, \tilde{x}_n^\omega$ ($\tilde{x}_j^\omega \in A_j^\omega$, $j=\overline{1, n}$) s-я буква выходного слова $\tilde{y}^\omega = \varphi(\tilde{x}_1^\omega, \tilde{x}_2^\omega, \ldots, \tilde{x}_n^\omega)$ однозначно определяется s первыми символами слов $\tilde{x}_2^\omega, \ldots$ $\ldots, \tilde{x}_n^\omega$ и $s-1$ первыми символами слова $\tilde{x}_1^\omega$.

Пусть д. функция φ задана системой (2) и Σ_φ — схема этой функции. Определим три операции над функцией φ и схемой Σ_φ.

1) *Операция* O_1 — *отождествление двух* или *большего числа входных переменных* в функции φ и *отождествление в схеме* Σ_φ соответствующих этим переменным *входных полюсов*. Отождествленные полюсы рассматриваются как один полюс новой схемы. На рис. 28 показана схема Σ_ψ, которая получена из Σ_φ отождествлением полюсов x_1 и x_2.

2) *Операция* O_2 — *удаление некоторой выходной переменной* y_j у функции φ (что эквивалентно выбрасыванию из системы (2) уравнения $y_j(t) = F_j(x^{(n)}(t), q^{(r)}(t-1))$) и *удаление из схемы* Σ_φ *выходного канала и полюса*, соответствующих выходной переменной y_j

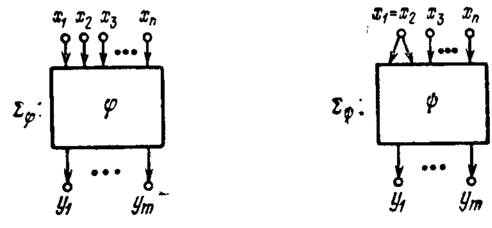


Рис. 28.

(см. рис. 29, на котором изображена схема Σ_ψ, получающаяся из Σ_φ после удаления выходного канала и полюса y_1).

Замечание. Если $m=1$, то, удаляя переменную y_1 (единственную выходную переменную), получаем *автомат без выхода*.

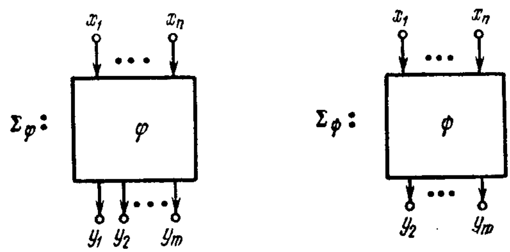


Рис. 29.

3) *Операция* O_3 — *введение обратной связи* по одной входной и одной выходной переменным. Пусть в качестве входной переменной взята переменная x_i, а в качестве выходной — y_j. Операцию O_3 можно применять (к функции φ и схеме Σ_φ) лишь в том случае, когда выход y_j зависит с запаздыванием от входа x_i. Канонические уравнения для новой функции ψ получаются исключением из системы (2) уравнения $y_j(t) = F_j(x^{(n)}(t),$

$q^{(r)}(t-1))$ и заменой переменной $x_i(t)$ в каждой функции F_q $(q \neq j)$ и G_l на функцию $F'_j(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), x_{i+1}(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_r(t-1))$, получающуюся из функции $F_j(x^{(n)}(t), q^{(r)}(t-1))$ отбрасыванием несущественной переменной $x_i(t)$. Начальные условия остаются прежними. Схема Σ_ψ получается из схемы Σ_φ в результате отождествления выхода y_j с входом x_i; при этом отождествленные полюсы объявляются внутренней вершиной схемы Σ_ψ. На рис. 30 показана схема Σ_ψ, которая получена из Σ_φ введением обратной связи по переменным x_1 и y_1.

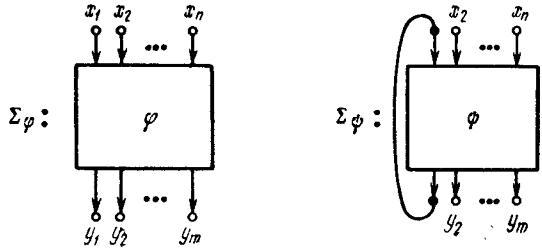


Рис. 30.

З а м е ч а н и е 1. Если $n=1$, то, вводя обратную связь по переменной x_1 (и любой выходной переменной), получаем *автомат без входа*.

З а м е ч а н и е 2. Применяя перечисленные выше операции, удобно указывать в скобках (за обозначениями этих операций) те каналы (полюсы и переменные), к которым операции применяются. Например, $O_1(x_1, x_3)$, $O_2(y_5)$, $O_3(x_{10}, y_2)$.

Определим еще две операции над д. функциями.

4) *Операция O_4 — операция объединения двух* (или *большего числа*) *функций*. Пусть $\varphi_1 \in \Phi_k^{n_1, m_1}$ и $\varphi_2 \in \Phi_k^{n_2, m_2}$. Будем предполагать, что эти функции имеют в качестве входных переменных $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n_1}$ и $x''_1, x''_2, \ldots, x''_{n_2}$ соответственно, а в качестве выходных — $y'_1, y'_2, \ldots, y'_{m_1}$ и $y''_1, y''_2, \ldots, y''_{m_2}$. Считаем, что все эти переменные попарно различны. Пусть Σ_{φ_1} и Σ_{φ_2} — схемы функций φ_1 и φ_2 соответственно. Тогда схема Σ_ψ функции ψ, равной объединению функций φ_1 и φ_2, будет выглядеть так,

как показано на рис. 31; при этом выходными (входными) полюсами схемы Σ_ψ являются все выходные (входные) полюсы исходных схем Σ_{φ_1} и Σ_{φ_2}. Система канонических уравнений (и начальных условий) функции ψ получается простым объединением соответствующих систем функций φ_1 и φ_2 (при этом, естественно, предполагается, что множества $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ всех состояний функций φ_1 и φ_2 не пересекаются).

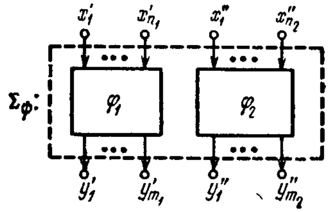


Рис. 31.

5) *Операция* S — *операция суперпозиции*. Пусть $\varphi_1 \in \Phi_{A,B}$ и $\varphi_2 \in \Phi_{B,C}$. *Суперпозицией* φ_1 (φ_2) *операторов* φ_2 и φ_1 называется такой оператор $\psi \in \Phi_{A,C}$, что $\psi(\tilde{x}^\omega) = \varphi_1(\varphi_2(\tilde{x}^\omega))$ при любом входном слове $\tilde{x}^\omega$ из A^ω. Пусть операторы $\varphi_i \in \Phi_k^{n_i, m_i}$ ($i = 1, 2$) и им отвечают схемы Σ_{φ_1} и Σ_{φ_2} (считаем, что входные и выходные переменные

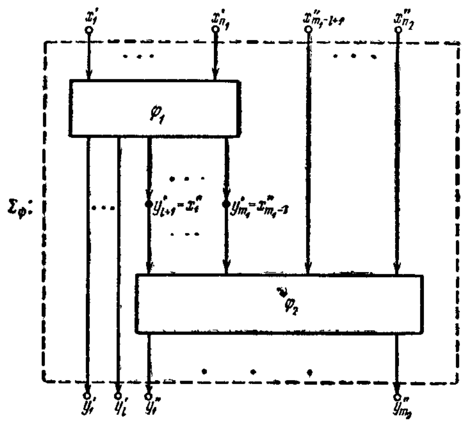


Рис. 32.

и состояния функций φ_1 и φ_2 такие же, как в предыдущем абзаце). Тогда можно рассматривать «иную» *суперпозицию* этих операторов: отождествим, например, входной полюс x''_1 схемы Σ_{φ_2} с выходным полюсом y'_{l+1} схемы Σ_{φ_1}, полюс x''_2 — с полюсом y'_{l+2} и т. д., наконец, полюс x''_{m_1-l} — с полюсом y'_{m_1}; получим схему Σ_ψ (рис. 32), у которой: а) входными полюсами будут все входные полюсы схемы Σ_{φ_1} и входные полюсы схемы Σ_{φ_2}, не участвовавшие в указанной выше процедуре отождествления; б) выходными полюсами являются все выходные полюсы схемы Σ_{φ_2} и те выходные полюсы схемы Σ_{φ_1}, которые не были отождествлены ни с одним входным полюсом схемы Σ_{φ_2}. Отождествленные полюсы объявляются внутренними вершинами схемы Σ_ψ. Схема Σ_ψ называется *суперпозицией схем* Σ_{φ_2} *и* Σ_{φ_1} (по переменным $x''_1 - y'_{l+1}$, $x''_2 - y'_{l+2}, \ldots, x''_{m_1-l} - y'_{m_1}$). Если оператор φ_1 задается системой

$$\left\{\begin{aligned} y'_1(t) &= F'_1(x'_1(t), \ldots, x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1), \ldots \\ &\qquad \ldots, q'_{r_1}(t-1)), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y'_{m_1}(t) &= F'_{m_1}(x'_1(t), \ldots, x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1), \ldots \\ &\qquad \ldots, q'_{r_1}(t-1)), \\ q'_1(t) &= G'_1(x'_1(t), \ldots, x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1), \ldots \\ &\qquad \ldots, q'_{r_1}(t-1)), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q'_{r_1}(t) &= G'_{r_1}(x'_1(t), \ldots, x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1),\ q'_{r_1}(t-1)), \\ q'_{r_1}(0) &= q'_{01}, \ldots, q'_{r_1}(0) = q'_{0r_1}, \end{aligned}\right. \tag{4'}$$

а оператор φ_2 — системой

$$\left\{\begin{aligned} y''_1(t) &= F''_1(x''_1(t), \ldots, x''_{n_2}(t),\ q''_1(t-1), \ldots \\ &\qquad \ldots, q''_{r_2}(t-1)), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y''_{m_2}(t) &= F''_{m_2}(x''_1(t), \ldots, x''_{n_2}(t),\ q''_1(t-1), \ldots \\ &\qquad \ldots, q''_{r_2}(t-1)), \\ q''_1(t) &= G''_1(x''_1(t), \ldots, x''_{n_2}(t),\ q''_1(t-1), \ldots \\ &\qquad \ldots, q''_{r_2}(t-1)), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q''_{r_2}(t) &= G''_{r_2}(x''_1(t), \ldots, x''_{n_2}(t),\ q''_1(t-1), \ldots \\ &\qquad \ldots, q''_{r_2}(t-1)), \\ q''_1(0) &= q''_{01}, \ldots, q''_{r_2}(0) = q''_{0r_2}, \end{aligned}\right. \tag{4''}$$

то оператору ψ, реализуемому схемой Σ_ψ, соответствует такая система:

$$\left\{\begin{array}{l}
y'_1(t) = F'_1(x'_1(t), \ldots, x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1), \ldots \\
\qquad\qquad \ldots, q'_{r_1}(t-1)), \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
y'_l(t) = F'_l(x'_1(t), \ldots, x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1), \ldots \\
\qquad\qquad \ldots, q'_{r_1}(t-1)), \\
y''_1(t) = F''_1(F'_{l+1}, \ldots, F'_{m_1},\ x''_{m_1-l+1}(t), \ldots \\
\qquad \ldots, x''_{n_2}(t),\ q_1(t-1), \ldots, q_{r_2}(t-1)), \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
y''_{m_2}(t) = F''_{m_2}(F'_{l+1}, \ldots, F'_{m_1},\ x''_{m_1-l+1}(t), \ldots \\
\qquad \ldots, x''_{n_2}(t),\ q_1(t-1), \ldots, q_{r_2}(t-1)), \\
q'_1(t) = G'_1(x'_1(t), \ldots, x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1), \ldots \\
\qquad\qquad \ldots, q'_{r_1}(t-1)), \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
q'_{r_1}(t) = G'_{r_1}(x'_1(t), \ldots, x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1), \ldots \\
\qquad\qquad \ldots, q'_{r_1}(t-1)), \\
q_1(t) = G''_1(F'_{l+1}, \ldots, F'_{m_1},\ x''_{m_1-l+1}(t), \ldots \\
\qquad \ldots, x''_{n_2}(t),\ q_1(t-1), \ldots, q_{r_2}(t-1)), \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
q_{r_2}(t) = G''_{r_2}(F'_{l+1}, \ldots, F'_{m_1},\ x''_{m_1-l+1}(t), \ldots \\
\qquad \ldots, x''_{n_2}(t), q_1(t-1),\ \ldots,\ q_{r_2}(t-1)), \\
q'_1(0) = q'_{01}, \ldots, q'_{r_1}(0) = q'_{0r_1}, q_1(0) = q''_{01}, \ldots \\
\qquad\qquad \ldots, q_{r_2}(0) = q''_{0r_2},
\end{array}\right. \tag{5}$$

где $F'_j = F'_j(x'_1(t), \ldots, x'_{n_1}(t), q'_1(t-1), \ldots, q'_{r_1}(t-1))$, $j = l+1, \ldots, m_1$.

Элементом единичной задержки (в множестве $\hat{\Phi}_k$) называется о.-д. оператор $\varphi_з$, задаваемый системой

$$\left\{\begin{array}{l}
y(t) = q(t-1), \\
q(t) = x(t), \\
q(0) = 0.
\end{array}\right. \tag{6}$$

П р и м е р. Оператор φ из Φ_2 задан с помощью диаграммы Мура, изображенной на рис. 33. Каноническая таблица (см. табл. 8), канонические уравнения и начальное условие для него выглядят так:

ТАБЛИЦА 8

$x(t)$	$q(t-1)$	$y(t)$	$q(t)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

$$\left\{\begin{array}{l} y(t) = x(t)\cdot\bar{q}(t-1), \\ q(t) = x(t)\vee\bar{q}(t-1), \\ q(0) = 0. \end{array}\right. \tag{7}$$

На рис. 34 изображена схема, реализующая этот оператор и построенная с использованием элемента единичной задержки и оператора из $\Phi_2^{2,1}$, порожденного

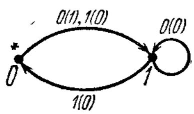


Рис. 33.

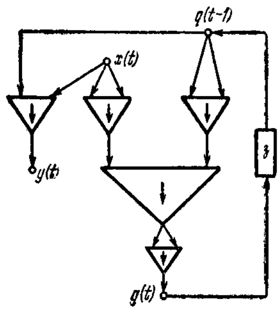
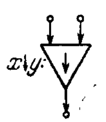


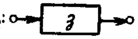
Рис. 34.

стрелкой Пирса $x \downarrow y$. Здесь оператор, порожденный стрелкой Пирса, реализуется схемой



,

а элемент единичной задержки — схемой

$\varphi_з$:  .

Известно, что всякий о.-д. оператор из $\hat{\Phi}_k^{n,m}$ может быть реализован схемой над таким множеством, которое содержит: 1) схемы, реализующие элемент единичной задержки; 2) схемы, реализующие операторы, порожденные функциями из некоторой полной в P_k системы. Другими словами, множество о.-д. операторов, состоящее из элемента $\varphi_з$ и операторов, порожденных функциями из некоторой полной в P_k системы, образует полную в $\bigcup\limits_{n,m} \hat{\Phi}_k^{n,m}$ систему относительно операций O_1, O_2, O_3, O_4 и S.

Замечание. В дальнейшем, говоря о построении схемы какого-либо о.-д. оператора φ над некоторым заданным множеством M о.-д. операторов, мы будем понимать это следующим образом: схема Σ_φ оператора φ строится с использованием только одновыходных схем, реализующих операторы из множества M (при этом разрешается применять лишь операции O_1, O_2, O_3, O_4 и S, если нет других указаний).

2.1. Построить диаграмму Мура, каноническую таблицу и канонические уравнения для функции $\varphi \in \hat{\Phi}_2$.

1) $\varphi(\tilde{x}^\omega)$: $\begin{cases} y(2t-1) = x(2t-1), & t \geqslant 1, \\ y(2t) = x(2t) \oplus y(2t-1), & t \geqslant 1; \end{cases}$

2) $\varphi(\tilde{x}^\omega)$: $\begin{cases} y(1) = 1, \\ y(t) = x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2; \end{cases}$

3) $\varphi(\tilde{x}^\omega)$: $\begin{cases} y(3t-2) = x(3t-2), & t \geqslant 1, \\ y(3t-1) = x(3t-2), & t \geqslant 1, \\ y(3t) = x(3t) \cdot y(3t-1), & t \geqslant 1; \end{cases}$

4) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = \langle 2/3 \rangle$;

5) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = \langle \nu(\tilde{x}^\omega)/8 \rangle$.

2.2. Доопределив некоторым образом частичный оператор φ: $\{0, 1\}^\omega \to \{0, 1\}^\omega$, причем так, чтобы получился о.-д. оператор, построить для нового оператора диаграмму Мура, каноническую таблицу и канонические уравнения.

1) $\varphi([011010]^\omega)=[0111]^\omega,\ \varphi(0[1]^\omega)=0[1]^\omega$;

2) $\varphi(\tilde{0}^\omega)=\tilde{1}^\omega,\ \varphi(1[0]^\omega)=[10]^\omega$;

3) $\varphi(1[10]^\omega)=[01]^\omega,\ \varphi([001]^\omega)=1[10]^\omega$;

4) φ: $\begin{cases} y(3t-1)=x(3t-1),\ t\geqslant 1, \\ y(3t)=x(3t-1),\ t\geqslant 1. \end{cases}$

2.3. Найти вес о.-д. оператора φ из $\hat{\Phi}_2$, заданного каноническими уравнениями.

1) φ: $\begin{cases} y(t)=x(t)\cdot\bar{q}_1(t-1)\vee x(t)\cdot q_2(t-1), \\ q_1(t)=x(t)\cdot q_1(t-1)\vee\bar{x}(t)\cdot q_2(t-1), \\ q_2(t)=x(t)q_2(t-1)\vee\bar{x}(t)\cdot\bar{q}_1(t-1)\cdot\bar{q}_2(t-1), \\ q_1(0)=q_2(0)=0; \end{cases}$

2) φ: $\begin{cases} y(t)=x(t)\oplus q_1(t-1)\oplus q_2(t-1), \\ q_1(t)=x(t)\sim q_1(t-1), \\ q_2(t)=(x(t)\to\bar{q}_1(t-1))\to\bar{x}(t)\cdot\bar{q}_1(t-1), \\ q_1(0)=q_2(0)=1; \end{cases}$

3) φ задается каноническими уравнениями из предыдущей задачи, но с измененными начальными условиями: $q_1(0)=0,\ q_2(0)=1$;

4) φ: $\begin{cases} y(t)=(x(t)\to q_2(t-1))\to q_1(t-1), \\ q_1(t)=q_1(t-1)\to(x(t)\to q_2(t-1)), \\ q_2(t)=q_2(t-1)\to x(t), \\ q_1(0)=q_2(0)=0. \end{cases}$

2.4. Пусть $(\hat{\Phi}_k^{n,m};\ X_1,\ X_2,\ldots,X_n;\ Y_1,\ Y_2,\ldots,Y_m)$ обозначает множество всех функций из $\hat{\Phi}_k^{n,m}$, у которых входными переменными являются переменные X_1, $X_2,\ldots,X_n$, а выходными — $Y_1,\ Y_2,\ldots,Y_m$. Показать, что в множестве $(\hat{\Phi}_k^{n,m};\ X_1,\ X_2,\ldots,X_n,\ Y_1,\ Y_2,\ldots,Y_m)$ число функций веса w не больше чем $(w\cdot k^m)^{w\cdot k^n}$.

2.5. Пусть оператор φ из $\hat{\Phi}_2^{n,m}$ задан системой (2) и функции $G_1,\ G_2,\ldots,G_r$ связаны соотношением $G_1\oplus\oplus G_2\oplus\ldots\oplus G_r\equiv 0$. Показать, что вес оператора φ не превосходит 2^{r-1}.

2.6. Реализовать оператор $\varphi \in \hat{\Phi}_2^{n,m}$ схемой над множеством, состоящим из элемента единичной задержки и оператора, порожденного штрихом Шеффера.

1) φ: $\begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = x(t), \\ q(0) = 1; \end{cases}$

2) φ: $\begin{cases} y(t) = (x(t) \vee q_1(t-1)) \to q_2(t-1), \\ q_1(t) = x(t) \to q_2(t-1), \\ q_2(t) = \bar{q}_1(t-1) \vee \bar{q}_2(t-1), \\ q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 1; \end{cases}$

3) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = \begin{cases} 10[110]^\omega, \text{ если } \tilde{x}^\omega = \tilde{0}^\omega, \\ \tilde{1}^\omega \text{ в ином случае}; \end{cases}$

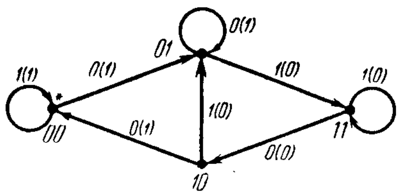


Рис. 35.

4) оператор φ задается диаграммой Мура, изображенной на рис. 35;

5) φ: $\begin{cases} y_1(t) = x(t) \to \bar{q}_1(t-1), \\ y_2(t) = q_1(t-1) \cdot q_2(t-1), \\ q_1(t) = x(t), \\ q_2(t) = (q_1(t-1) \vee q_2(t-1)) \cdot x(t), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$

2.7. По схеме оператора $\varphi \in \hat{\Phi}_2^{n,m}$ построить канонические уравнения, каноническую таблицу и диаграмму Мура.

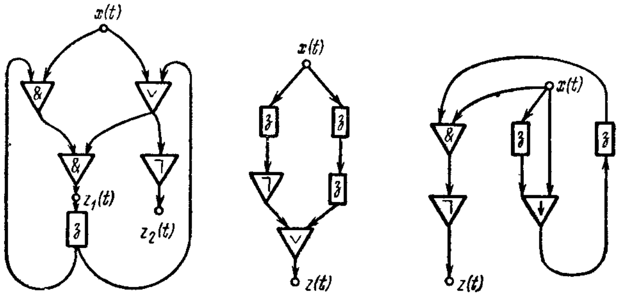
1) см. рис. 36, *а*; 2) см. рис. 36, *б*; 3) см. рис. 36, *в*.

2.8. Для суперпозиции $\psi = \varphi_1(\varphi_2)$ операторов φ_2 и φ_1 из $\hat{\Phi}_2$ построить канонические уравнения, диаграмму Мура и схему Σ_ψ. Схема Σ_ψ должна быть построена над множеством, состоящим из элемента единичной задержки и операторов, порожденных импликацией $x \to y$ и отрицанием $\bar{x}$.

$$1)\quad \varphi_1:\ \begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \cdot q_1(t-1), \\ q_1(t) = q_1(t-1) \to x_1(t), \\ q_1(0) = 0, \end{cases}$$

$$\varphi_2:\ \begin{cases} y_2(t) = x_2(t) \oplus q_2(t-1), \\ q_2(t) = x_2(t) \vee q_2(t-1), \\ q_2(0) = 1; \end{cases}$$

$$2)\quad \varphi_1(\tilde{x}^\omega) = \langle 1/3 \rangle,$$



а) б) в)

Рис. 36.

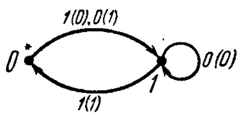


Рис. 37.

оператор φ_2 задается диаграммой Мура, изображенной на рис. 37;

$$3)\quad \varphi_1(\tilde{x}^\omega):\ \begin{cases} y(1) = 0, \\ y(t) = y(t-1) \oplus x(t-1), \quad t \geqslant 2, \end{cases}$$

$$\varphi_2(\tilde{x}^\omega):\ \begin{cases} y(1) = 1, \\ y(t) = x(t) \to x(t-1), \quad t \geqslant 2; \end{cases}$$

4) $\varphi_1(\tilde{x}^\omega)$: $\begin{cases} y(1)=1, \\ y(t)=y(t-1)\to x(t), \quad t\geqslant 2, \end{cases}$

$\varphi_2(\tilde{x}^\omega)=\langle 1/7\rangle$.

2.9. Построить канонические уравнения и диаграмму Мура о.-д. оператора, получающегося из оператора φ введением обратной связи по переменным x_2, y_1.

1) φ: $\begin{cases} y_1(t)=q(t-1)\to x_1(t)\,x_3(t), \\ y_2(t)=x_2(t)\vee(x_1(t)\to q(t-1)), \\ q(t)=x_2(t)\oplus q(t-1), \\ q(0)=0; \end{cases}$

2) φ: $\begin{cases} y_1(t)=\bar{q}(t-1)\to x_1(t)\,x_3(t), \\ y_2(t)=(x_1(t)\downarrow q(t-1))\vee x_2(t), \\ q(t)=x_2(t)\oplus q(t-1), \\ q(0)=0. \end{cases}$

2.10. Найти вес о.-д. оператора, получающегося из о.-д. оператора φ введением обратной связи по переменным x_3, y_2.

1) φ: $\begin{cases} y_1(t)=x_1(t)\to(x_3(t)\to q(t-1)), \\ y_2(t)=x_2(t)\to x_1(t), \\ q(t)=x_2(t)\to(x_1(t)\cdot x_3(t)\to(x_1(t)\to q(t-1))), \\ q(0)=0; \end{cases}$

2) φ: $\begin{cases} y_1(t)=x_1(t)\,x_3(t)\to q(t-1), \\ y_2(t)=x_2(t)\,q(t-1), \\ q(t)=\bar{x}_2(t)\vee x_3(t)\vee q(t-1), \\ q(0)=0. \end{cases}$

2.11. Пусть оператор ψ получается из оператора φ с помощью операции O_1 (отождествление входных переменных).

1) Привести пример такой пары операторов φ и ψ, для которой справедливо неравенство: вес оператора φ больше веса оператора ψ.

2) Возможно ли, чтобы вес оператора φ был меньше веса оператора ψ?

2.12. Пусть φ — о.-д. оператор веса r и ψ — оператор веса r', получающийся из φ введением обратной связи по некоторой паре переменных. Верно ли, что всегда

1) $r\geqslant r'$; 2) $r=r'$; 3) $r\leqslant r'$?

2.13. Пусть о.-д. операторы φ_1 и φ_2 имеют веса́ r_1 и r_2 соответственно. Чему равен вес оператора ψ, получающегося из φ_1 и φ_2 с помощью операции O_4 (объединения)?

2.14. О.-д. операторы φ_1 и φ_2 имеют веса́, равные r_1 и r_2 соответственно. Может ли вес суперпозиции φ_1 (φ_2) быть

1) больше r_1; 4) больше $r_1 \cdot r_2$;
2) больше r_2; 5) меньше r_1;
3) больше $r_1 + r_2$; 6) меньше r_2?

2.15. Найти вес суперпозиции φ_1 (φ_2), если:

1) операторы φ_1 и φ_2 задаются диаграммами Мура, изображенными на рис. 38, *а*, *б*;

Рис. 38.

Рис. 39.

2) операторы φ_1 и φ_2 задаются диаграммами Мура, изображенными на рис. 39, *а*, *б*;

$$3)\ \varphi_i: \begin{cases} y_i(t) = x_i(t) \to q_i(t-1), \\ q_i(t) = q_i(t-1) \to x_i(t), \qquad i = 1,\ 2. \\ q_i(0) = 0, \end{cases}$$

Оператор φ из $\Phi_{A,B}$ называется *автономным* (*константным*, *оператором без входа*), если при любом входном слове $\tilde{x}^\omega \in A^\omega$ значение оператора φ на $\tilde{x}^\omega$ равно одному и тому же (выходному) слову из B^ω.

2.16. Является ли автономным оператор $\varphi \in \hat{\Phi}_2$?

1) $\varphi(\tilde{x}^{\omega})$: $\begin{cases} y(1) = y(2) = 1, \\ y(t) = y(t-1) \oplus y(t-2), & t \geqslant 3; \end{cases}$

2) φ: $\begin{cases} y(t) = x(t) \to q(t-1), \\ q(t) = x(t) \vee q(t-1), \\ q(0) = 1; \end{cases}$

3) φ: $\begin{cases} y(t) = x(t) \to q(t-1), \\ q(t) = x(t) \vee q(t-1), \\ q(0) = 0; \end{cases}$

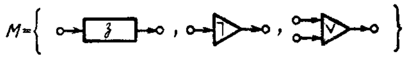
4) $\varphi(\tilde{x}^{\omega})$: $\begin{cases} y(1) = 0, \\ y(2t-1) = \bar{y}(2t-2), & t \geqslant 2, \\ y(2t) = \left| \cos \frac{\pi}{2} t \right|, & t \geqslant 1. \end{cases}$

2.17. Пусть φ — автономный оператор веса r ($r < \infty$).

1) Показать, что выходное слово оператора φ является квазипериодическим.

2) Доказать, что сумма длин периода и предпериода выходного слова оператора φ не превосходит r.

2.18. 1) Над множеством



построить такую схему Σ_{φ}, которая содержит ровно четыре элемента из M и реализует какой-либо автономный оператор φ из $\hat{\Phi}_2$.

2) Можно ли построить (над множеством M) схему Σ_{φ}, реализующую некоторый автономный оператор φ из $\hat{\Phi}_2$ и содержащую менее четырех элементов?

Операцию O_5 — *операцию разветвления* (некоторого выхода о.-д. функции) можно определить так. Пусть φ — оператор из $\hat{\Phi}_k^{n,m}$ и Σ_{φ} — реализующая его схема. В результате применения операции O_5 к выходу y_j функции φ получается оператор ψ, реализуемый такой схемой Σ_{ψ}, у которой вместо одного канала (и полюса) y_j появятся несколько «одинаково работающих» каналов $y_j^{(1)}, \ldots, y_j^{(s)}$ ($s \geqslant 2$), каждый из которых реализует ту же функцию, что и y_j в схеме Σ_{φ}.

2.19. 1) Какие изменения надо внести в систему канонических уравнений и начальных условий, задающую функцию φ, чтобы получить соответствующую систему для функции ψ, являющейся результатом применения операции O_5 к выходу y_j функции φ?

2) Можно ли, используя операции O_1—O_5 и S, построить над множеством M (см. задачу 2.18) такую схему Σ_φ, которая содержала бы не более трех элементов и реализовала автономный оператор φ из $\hat{\Phi}_2$?

2.20. Пусть оператор ψ получен из $\varphi \in \hat{\Phi}_k^{n,m}$ в результате применения операции O_5 к некоторому выходу оператора φ. Показать, что оператор ψ можно реализовать над множеством $\{\varphi\}$ (т. е. используя несколько экземпляров оператора φ) с помощью операций O_1, O_2 и O_4.

2.21. Операторы φ_1 и φ_2 из $\hat{\Phi}_2$ имеют веса, равные 2, и задаются следующими каноническими уравнениями:

$$\varphi_i\colon \begin{cases} y_i(t) = F_i(x_i(t),\ q_i(t-1)), \\ q_i(t) = G_i(x_i(t),\ q_i(t-1)), i = 1, 2, \\ q_i(0) = 0, \end{cases}$$

причем $G_1(x, q) \equiv G_2(x, q)$. Известно, что если в диаграмме Мура оператора φ_1 заменить нули, приписанные дугам, на единицы, а единицы — на нули, то получится диаграмма Мура оператора φ_2. Доказать, что если выходные значения операторов φ_1 и φ_2 совпадают на некотором префиксе длины 2 (т. е. $\varphi_1(\sigma_1\sigma_2) = \varphi_2(\sigma_1\sigma_2)$ при некоторых σ_1, σ_2), то эти операторы тождественно равны.

2.22. Подсчитать число всех таких о.-д. функций в $\hat{\Phi}_2$, которые удовлетворяют следующим условиям: а) функция зависит от входной переменной X; б) вес функции равен трем; в) в диаграмме Мура, задающей функцию, полустепень захода каждой вершины одна и та же и равна полустепени исхода.

2.23. Для каждого $r \geqslant 2$ привести пример такого оператора φ из $\hat{\Phi}_2$, чтобы вес суперпозиции $\varphi(\varphi)$ был равен r. Можно ли это сделать для неавтономных операторов?

2.24. Вес функции $\varphi \in \hat{\Phi}_2$ равен r, а вес суперпозиции $\varphi(\varphi)$ равен $2r$. Верно ли, что вес суперпозиции $\varphi(\varphi(\varphi))$ равен $3r$?

§ 3. Замкнутые классы и полнота в множествах детерминированных и ограниченно-детерминированных функций

Пусть M — некоторое множество д. функций (или о.-д. функций) и $\mathcal{O}$ — какая-либо *совокупность операций*, не выводящих за пределы множества всех д. функций (или о.-д. функций). Другими словами, если $\sigma \in \mathcal{O}$, то, применяя σ к произвольным (или допустимым) д. (или о.-д.) функциям, мы получаем снова д. (или о.-д.) функции. *Замыканием* $[M]_{\mathcal{O}}$ *множества* M *относительно совокупности операций* $\mathcal{O}$ называется множество всех д. (или о.-д.) функций, которые могут быть получены из функций множества M с помощью операций из $\mathcal{O}$, причем операции можно применять любое конечное число раз. Обычно считают, что $[M]_{\mathcal{O}} \supseteq M$. В дальнейшем мы почти всегда будем предполагать, что это включение выполняется (в противном случае будут делаться специальные оговорки). Операция получения множества $[M]_{\mathcal{O}}$ из M называется *операцией замыкания*. Множество M называется (*функционально*) *замкнутым классом относительно совокупности операций* $\mathcal{O}$, если $[M]_{\mathcal{O}}=M$. Пусть M — замкнутый относительно совокупности операций $\mathcal{O}$ класс д. (или о.-д.) функций. Подмножество $\mathcal{P}$ из M называется (*функционально*) *полной системой в* M *относительно совокупности операций* $\mathcal{O}$, если $[\mathcal{P}]_{\mathcal{O}}=M$. Множество $\mathcal{P}$ д. (или о.-д.) функций называется *неприводимой системой относительно совокупности операций* $\mathcal{O}$, если, каково бы ни было собственное подмножество $\mathcal{P}'$ из $\mathcal{P}$, $[\mathcal{P}']_{\mathcal{O}} \subset [\mathcal{P}]_{\mathcal{O}}$ (включение строгое!). *Базисом* замкнутого класса M относительно совокупности операций $\mathcal{O}$ называется всякая полная и неприводимая система из M. Множество M', содержащееся в замкнутом классе M, называется *предполным классом в* M, если оно не является полной системой в M, но при всякой функции $\varphi \in M \setminus M'$ выполняется равенство $[M' \cup \{\varphi\}]_{\mathcal{O}}=M$.

З а м е ч а н и е 1. В дальнейшем, когда ясно, относительно какой совокупности $\mathcal{O}$ рассматриваются замыкание, полные системы, базисы и т. д., слова «относительно совокупности операций $\mathcal{O}$» будут опускаться.

З а м е ч а н и е 2. Обычно в качестве $\mathcal{O}$ мы будем брать множество $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, состоящее из операций, описанных в § 2 данной главы.

Как указывалось в § 2, множество о.-д. функций, содержащее элемент единичной задержки $\varphi_з$ и операторы, порожденные функциями из некоторой полной в P_k ($k \geqslant 2$) системы, образует полную систему в множестве $\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} \hat{\Phi}_k^{n,m}$ относительно операций O_1, O_2, O_3, O_4 и S (т. е. в множестве всех *k-значных о.-д. функций*).

Оказывается, что в множестве $\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} \hat{\Phi}_k^{n,m}$ ($k \geqslant 2$) существуют базисы относительно $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, состоящие из одной функции. Примером такого базиса является множество $\{\varphi_0(X_1, X_2, X_3, \varphi_з(X_4))\}$, где $\varphi_з$ — элемент единичной задержки из $\hat{\Phi}_k$, а φ_0 — оператор из $\hat{\Phi}_k^{4,1}$, порожденный функцией $\max(x_1 \cdot x_4 + x_2(1 - x_4), x_3) + 1$ (сумма, разность и произведение по $\mathrm{mod}\, k$).

Всюду в данном параграфе мы будем применять символ $\hat{\Phi}_{(k)}$ (соответственно $\Phi_{(k)}$) для обозначения множества всех k-значных о.-д. (соответственно д.) функций, включая и функции без входов, или без выходов, или без входов и без выходов, т. е.

$$\hat{\Phi}_{(k)} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} \hat{\Phi}_k^{n,m} \quad \left(\text{и } \Phi_{(k)} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} \Phi_k^{n,m}\right).$$

3.1. Является ли множество M замкнутым классом относительно совокупности операций $\mathcal{O}$?

1) M состоит из всех k-значных о.-д. функций, не имеющих выходов, а также из всех таких функций φ, принадлежащих $\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \hat{\Phi}_k^{n,m}$, которые «сохраняют $\tilde{0}^{\omega}$», т. е. $\varphi(\underbrace{\tilde{0}^{\omega}, \ldots, \tilde{0}^{\omega}}_{n \text{ раз}}) = (\underbrace{\tilde{0}^{\omega}, \ldots, \tilde{0}^{\omega}}_{m \text{ раз}})$; $\mathcal{O} = \{O_3, O_5, S\}$.

2) M состоит из всех таких k-значных о.-д. функций, которые принадлежат множеству $\bigcup_{m=0}^{\infty} \hat{\Phi}_k^{1,m}$ и имеют вес, кратный k; $\mathcal{O} = \{S\}$.

3) M состоит из всех k-значных д. функций, принадлежащих множеству $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \Phi_k^{n,m}$ и имеющих четный или бесконечный вес; $\mathcal{O} = \{O_1, O_2, O_4, O_5\}$.

4) $M = \bigcup_{n=0}^{1} \bigcup_{m=0}^{\infty} (\Phi_k^{n,m} \setminus \hat{\Phi}_k^{n,m})$; $\mathcal{O} = \{O_3, S\}$.

3.2. 1) Пусть $\varphi_з$ — элемент единичной задержки из множества $\hat{\Phi}_2$ и $\mathcal{O}=\{O_3, O_5, S\}$. Доказать, что класс $[\varphi_з]_{\mathcal{O}}$ содержит лишь функции, тождественно равные 0 (т. е. операторы, на каждом выходе которых «выдается» слово $\tilde{0}^{\omega}$), и функции, имеющие четный вес.

2) Привести пример функции из $\hat{\Phi}_2$, имеющей четный вес и не принадлежащей классу $[\varphi_з]_{\mathcal{O}}$, описанному в задаче 3.2, 1).

3.3. Пусть $\varphi_0(X_1, X_2)$ — оператор из $\hat{\Phi}_{(2)}$, порожденный штрихом Шеффера $x_1 \mid x_2$, а $\varphi_з$ — элемент единичной задержки из $\hat{\Phi}_2$. Доказать, что оператор $\varphi(\tilde{x}^{\omega})=$ $=\langle 1/3\rangle$ из $\hat{\Phi}_2$ не принадлежит классу $[\varphi_0, \varphi_з]_{\mathcal{O}}$, если $\mathcal{O}=\{S\}$.

3.4. На вход о.-д. оператора $\varphi\in\hat{\Phi}_2$ подается периодическое слово $\tilde{x}^{\omega}$ периода 3. Найти максимальный период выходного слова (максимум берется по всем входным периодическим словам периода 3).

$$1)\ \varphi:\ \begin{cases} y(t)=(x(t)\oplus q_1(t-1))\cdot q_2(t-1),\\ q_1(t)=x(t)\cdot\bar{q}_1(t-1)\cdot\bar{q}_2(t-1)\vee\bar{x}(t)\cdot q_2(t-1),\\ q_2(t)=x(t)\cdot q_1(t-1)\cdot\bar{q}_2(t-1)\vee\bar{x}(t)\cdot q_2(t-1),\\ q_1(0)=q_2(0)=0;\end{cases}$$

$$2)\ \varphi:\ \begin{cases} y(t)=x(t)\cdot q_1(t-1),\\ q_1(t)=\bar{x}(t)\cdot\bar{q}_1(t-1)\vee q_2(t-1),\\ q_2(t)=q_1(t-1),\\ q_1(0)=q_2(0)=0.\end{cases}$$

3.5. Пусть φ — о.-д. функция веса r, принадлежащая множеству $\Phi_{A,B}$.

1) Показать, что если входное слово $\tilde{x}^{\omega}$ является квазипериодическим с периодом T, то выходное слово $\varphi(\tilde{x}^{\omega})$ также является квазипериодическим и его период не превосходит числа $r\cdot T$.

2) Оценить сверху длину предпериода выходного слова $\varphi(\tilde{x}^{\omega})$, если известно, что длина предпериода слова $\tilde{x}^{\omega}$ равна p.

3.6. Пусть функции φ_0, $\varphi_з$ и φ такие же, как в задаче 3.3. Существует ли некоторое $s\geqslant 1$, удовлетворяющее условию $\varphi(\varphi_з^s(X))\in[\varphi_0, \varphi_з]_{\mathcal{O}}$, где $\mathcal{O}=\{S\}$? (Здесь $\varphi_з^s(X)=\varphi_з(\varphi_з(\ldots\varphi_з(X)\ldots))$ — суперпозиция s «штук» функций $\varphi_з$.)

Если $f(\tilde{x}^n) \in P_k$, то через $\varphi_{f(\tilde{x}^n)}(X_1, \ldots, X_n)$ будем обозначать о.-д. оператор (из $\Phi_k^{n,1}$), порожденный функцией $f(\tilde{x}^n)$.

3.7. Являются ли полными в $\hat{\Phi}_{(k)}$ относительно совокупности операций $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$ следующие системы о.-д. функций?

1) $\{\varphi_{\max(x_1, x_2)}(X_1, X_2), \varphi_s(X)\}$, $k \geqslant 2$;

2) $\{\varphi_{x_1 \cdot x_2}(X_1, X_2), \varphi_{x_1 \dotplus x_2}(X_1, X_2), \varphi_{x_1 \dotplus x_2}(\varphi_s(X), X_2), \varphi_{\equiv 1}(X), \varphi_{\equiv(k-2)}(X)\}$, $k \geqslant 3$ (здесь $\varphi_{\equiv j}(X)$ — о.-д. оператор, порожденный функцией из P_k, тождественно равной j);

3) $\{\varphi_{x+1}(X), \varphi_s(\varphi_s(X)), \varphi_{x \dotplus y}(\varphi_s(X), X_2)\}$.

3.8. Из системы $\mathscr{P}$, полной в $\hat{\Phi}_{(k)}$ относительно совокупности операций $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, выделить хотя бы один базис.

1) $\mathscr{P} = \{\varphi_s(X), \varphi_{\equiv 0}(X), \varphi_{\equiv 1}(X), \varphi_{x_1 \cdot x_2}(X_1, X_2),$
$\varphi_{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3}(X_1, X_2, X_3)\}$, $k = 2$;

2) $\mathscr{P} = \{\varphi_s(X), \varphi_{\equiv 0}(X), \varphi_{\equiv 1}(X), \varphi_{f_0(x)}(X),$
$\varphi_{x_1 + x_2}(X_1, X_2)\}$, $k \geqslant 3$;

3) $\mathscr{P} = \{\varphi_{\equiv 0}(X), \varphi_{x_1 \dotplus x_2}(\varphi_s(X), X_2), \varphi_{x+1}(X),$
$\varphi_{\min(x_1, x_2)}(X_1, X_2)\}$, $k \geqslant 3$.

3.9*. Существует ли в $\hat{\Phi}_{(2)}$ базис относительно совокупности операций $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, содержащий пять функций?

3.10*. Доказать, что в $\hat{\Phi}_{(k)}$ любой замкнутый класс, отличный от всего множества $\hat{\Phi}_{(k)}$, расширяется до предполного класса[1]).

3.11*. Используя задачи 3.8, 1) и 3.10, показать, что в $\hat{\Phi}_{(2)}$ существует не менее 4 предполных классов.

3.12. Пусть $\varphi_s \in \hat{\Phi}_2$. Перечислить все классы, предполные в $[\varphi_s]_{\{O_3, O_5, S\}}$ относительно совокупности операций $\{O_5, S\}$.

3.13. Пусть $\varphi_x = \varphi_x(X)$ — о.-д. оператор из $\Phi_{(k)}$, порожденный функцией x. Доказать, что, каков бы ни был замкнутый класс[1]) M из $\Phi_{(k)}$, всегда выполняется равенство $[M \cup \{\varphi_x\}] = M \cup \{\varphi_x\}$ (здесь, как обычно, вместе

---

[1]) Замкнутость и предполнота берутся относительно совокупности операций $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$.

с функцией берутся и все равные, и все конгруентные ей функции).

3.14. Существует ли функция, которая принадлежит каждому предполному в $\hat{\Phi}_{(k)}$ классу?

3.15. Можно ли представить множество $\hat{\Phi}_{(k)}$ в виде объединения $\bigcup\limits_{i=1}^{s} M_i$ $(s \geqslant 2)$ попарно непересекающихся замкнутых [1]) в $\hat{\Phi}_{(k)}$ классов?

3.16*. Доказать, что в $\hat{\Phi}_{(k)}$ мощность множества всех замкнутых классов континуальна.

3.17. Какова мощность множества всех замкнутых в $\hat{\Phi}_{(k)}$ классов [1]), имеющих конечные полные системы?

3.18*. Доказать, что в $\Phi_{(k)}$ мощность множества всех замкнутых [1]) классов равна $2^{\mathfrak{c}}$ (мощность гиперконтинуума).

3.19*. Найти мощность множества всех замкнутых в $\Phi_{(k)}$ классов [1]), обладающих конечными базисами.

3.20. Опровергнуть следующие утверждения:

1) множество $\hat{\Phi}_{(k)}$ образует предполный класс в $\Phi_{(k)}$;

2) в множестве $\Phi_{(k)}$ существует функция, образующая совместно с множеством $\hat{\Phi}_{(k)}$ полную в $\Phi_{(k)}$ систему.

3.21. Пусть M_0 — множество, состоящее из всех k-значных д. функций, не имеющих выходов, а также из всех таких функций φ, принадлежащих $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \Phi_k^{n,m}$, которые принимают значение 0 при $t=1$, т. е. $\varphi(\tilde{x}_1^\omega, \ldots, \tilde{x}_n^\omega) = (\tilde{y}_1^\omega, \ldots, \tilde{y}_m^\omega)$ и $y_j(1)=0$ при $j=\overline{1, m}$.

1) Является ли M_0 предполным в $\Phi_{(k)}$ классом?

2) Образует ли предполный класс в $\hat{\Phi}_{(k)}$ пересечение $M_0 \cap \hat{\Phi}_{(k)}$?

3.22. 1) Является ли предполным классом в $\hat{\Phi}_{(k)}$ множество $\bigcup\limits_{n=0}^{1}\bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \Phi_k^{n,m}$?

2) Образует ли предполный в $\Phi_{(k)}$ класс множество $\bigcup\limits_{n=0}^{1}\bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \Phi_k^{n,m}$?

---

[1]) См. сноску на стр. 211.

Глава VII

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ

§ 1. Машины Тьюринга и операции над ними. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга

Машина Тьюринга представляет собой (абстрактное) устройство, состоящее из *ленты*, *управляющего устройства* и *считывающей головки*.

Лента разбита на *ячейки*. Во всякой ячейке в каждый (дискретный) момент времени находится в точности один *символ* из *внешнего алфавита* $A=\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, $n \geqslant 2$. Некоторый символ алфавита A называется *пустым*, а любая ячейка, содержащая в данный момент пустой символ, называется *пустой ячейкой* (в этот момент). В качестве пустого символа обычно используют 0 (нуль). Лента предполагается потенциально неограниченной в обе стороны [1]).

Управляющее устройство в каждый момент времени находится в некотором *состоянии* q_j, принадлежащем множеству $Q=\{q_0, q_1, \ldots, q_{r-1}\}$, $r \geqslant 1$. Множество Q называется *внутренним алфавитом* (или *множеством внутренних состояний*). Иногда из Q выделяются непересекающиеся подмножества Q_1 и Q_0 *начальных* и *заключительных состояний* соответственно.

З а м е ч а н и е. В дальнейшем, если не будет оговариваться противное, мы считаем, что $|Q| \geqslant 2$, и в качестве начального берем только одно состояние q_1. Заключительным, как правило, будет состояние q_0.

[1]) Это следует понимать так: в каждый момент времени лента конечна (содержит конечное число ячеек), но «размеры» ленты (число ячеек на ней) можно (при необходимости) увеличивать.

Считывающая (или печатающая) головка перемещается вдоль ленты так, что в каждый момент времени она обозревает ровно одну ячейку ленты. Головка может *считывать* содержимое обозреваемой ячейки и *записывать* в нее (*печатать* в ней) вместо обозреваемого символа некоторый новый символ из внешнего алфавита. «Засылаемый» в ячейку символ может, в частности, совпадать с тем, который обозревался (в данный момент).

В процессе работы управляющее устройство в зависимости от состояния, в котором оно находится, и символа, обозреваемого головкой, изменяет свое (внутреннее) состояние (может остаться в прежнем состоянии), выдает головке приказ напечатать в обозреваемой ячейке определенный символ из внешнего алфавита и «приказывает» головке либо остаться на месте, либо сдвинуться на одну ячейку влево, либо сдвинуться на одну ячейку вправо.

Работа управляющего устройства характеризуется тремя функциями:

$$G\colon Q \times A \to Q,$$
$$F\colon Q \times A \to A,$$
$$D\colon Q \times A \to \{S,\ L,\ R\}.$$

Функция G называется *функцией переходов*, функция F — *функцией выходов* и D — *функцией движения* (*головки*). Символы S, L и R обозначают соответственно отсутствие движения головки, сдвиг головки на одну ячейку влево и сдвиг на ячейку вправо.

Функции G, F и D можно задать списком пятерок вида

$$q_i a_j G(q_i,\ a_j)\, F(q_i,\ a_j)\, D(q_i,\ a_j) \qquad (1)$$

или, короче, $q_i a_j q_{ij} a_{ij} d_{ij}$. Эти пятерки называются *командами*. Функции G, F и D являются, вообще говоря, *частичными* (не всюду определенными). Это значит, что не для всякой пары $(q_i,\ a_j)$ определена соответствующая пятерка вида (1). Список всех пятерок, определяющих работу машины Тьюринга, называется *программой* этой машины. Программу машины часто задают в виде таблицы (см. табл. 9).

ТАБЛИЦА 9

	q_0	$\ldots$	q_i	$\ldots$	q_{r-1}
a_0			$\vdots$		
$\ldots$					
a_j		$\ldots$	$\boxed{q_{ij}a_{ij}d_{ij}}$	$\ldots$	
$\ldots$					
a_{n-1}			$\vdots$		

Если в программе машины для пары (q_i, a_j) пятерка вида (1) отсутствует, то в таблице на пересечении строки a_j и столбца q_i ставится прочерк.

Работу машины Тьюринга бывает удобно описывать на «языке конфигураций».

Пусть в момент времени t самая левая непустая ячейка C_1 ленты содержит символ a_{j_1}, а самая правая непустая ячейка C_s $(s \geqslant 2)$ содержит символ a_{j_s} (между ячейками C_1 и C_s находятся $s-2$ ячеек). В этом случае будем говорить, что *в момент* t на ленте *записано слово* $P = a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_p}\ldots a_{j_s}$, где a_{j_p} — символ, содержащийся в момент t в ячейке C_p $(1 \leqslant p \leqslant s)$. При $s=1$, т. е. когда на ленте только один непустой символ, $P = a_{j_1}$. Пусть в этот момент времени управляющее устройство находится в состоянии q_i и головка обозревает символ a_{j_l} слова P $(l \geqslant 2)$. Тогда слово

$$a_{j_1}\ldots a_{j_{l-1}}q_i a_{j_l}\ldots a_{j_s} \tag{2}$$

называется *конфигурацией машины* (в данный момент t). При $l=1$ конфигурация имеет вид $q_i a_{j_1}\ldots a_{j_s}$. Если в момент t головка обозревает пустую ячейку, находящуюся слева (или справа) от слова P, и между этой ячейкой и первой (соответственно последней) ячейкой слова P расположено $v \geqslant 0$ пустых ячеек, то *конфигурацией машины в момент* t называется слово

$$q_i\underbrace{\Lambda\ldots\Lambda}_{v+1 \text{ раз}}a_{j_1}\ldots a_{j_s} \tag{3}$$

(соответственно слово $a_{j_1}\ldots a_{j_s}\underbrace{\Lambda\ldots\Lambda}_{v \text{ раз}}q_i\Lambda$), где через Λ обозначен пустой символ алфавита A. Если в момент t лента пуста, т. е. на ней записано пустое слово, состоящее лишь из пустых символов внешнего алфавита, то *конфигурацией машины* в момент t будет слово $q_t\Lambda$.

Пусть в момент t конфигурация машины имеет вид (2) и в программе машины содержится команда

$$q_i a_{j_l} q_{ij_l} a_{ij_l} d_{ij_l};$$

тогда при $d_{ij_l}=L$ в следующий момент времени конфигурацией машины будет слово:

а) $q_{ij_1}\Lambda a_{ij_1}a_{j_2}\ldots a_{j_s}$, если $l=1$;

б) $q_{ij_2}a_{j_1}a_{ij_2}a_{j_3}\ldots a_{j_s}$, если $l=2$;

в) $a_{j_1}\ldots a_{j_{l-2}}q_{ij_l}a_{j_{l-1}}a_{ij_l}a_{j_{l+1}}\ldots a_{j_s}$, если $l>2$.

Случаи, когда $d_{ij_l}=R$ или $d_{ij_l}=S$, или конфигурация машины соответствует головке, находящейся вне слова P (как в слове (3)), или слово P — пустое, описываются аналогично.

Если в программе машины нет пятерки вида (1) для пары $(q_i,\ a_{j_l})$ или «новое» состояние q_{ij_l} является *заключительным*, то машина *прекращает работу*, а «результирующая» конфигурация называется *заключительной*. Конфигурация, соответствующая началу работы машины, называется *начальной*.

Пусть в некоторый момент времени конфигурация машины была K, а в следующий момент — K'. Тогда конфигурация K' называется *непосредственно выводимой из* K (обозначение: $K \models K'$). Если K_1 — начальная конфигурация, то последовательность $K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_m$, где $K_i \models K_{i+1}$ при $1 \leqslant i \leqslant m-1$, называется *тьюринговым вычислением*. При этом говорят, что конфигурация K_m *выводима из* конфигурации K_1, и пишут $K_1 \vdash K_m$. Если K_m является к тому же заключительной конфигурацией, то говорят, что K_m *заключительно выводима* из K_1, и применяют запись: $K_1 \vdash\!\!\cdot\, K_m$.

Пусть машина Тьюринга T начинает работать в некоторый (начальный) момент времени. Слово, записанное в этот момент на ленте, называется *исходным*, или *начальным*. Чтобы машина T действительно начала работать, необходимо поместить считывающую головку против какой-либо ячейки на ленте и указать, в каком состоянии машина T находится в начальный момент.

Если P_1 — исходное слово, то машина T, начав работу «на слове» P_1, либо остановится через определенное число шагов, либо никогда не остановится. В первом случае говорят, что машина *T применима к слову* P_1 и *результатом применения машины* T *к слову* P_1 является слово P, соответствующее заключительной конфигурации (обозначение: $P=T(P_1)$). Во втором случае говорят, что машина *T не применима к слову* P_1.

В дальнейшем мы будем предполагать, если не оговаривается противное, что 1) исходное слово — непустое, 2) в начальный момент головка находится против самой левой непустой ячейки на ленте и 3) машина начинает работу, находясь в состоянии q_1.

Зоной работы машины T (*на слове* P_1) называется множество всех ячеек, которые за время работы машины хотя бы один раз обозреваются головкой.

Часто будет использоваться обозначение $[P]^m$ для слов вида $PP\ldots P$ (m раз); если $P=a$ — слово длины 1, то вместо $aa\ldots a$ (m раз) и $[a]^m$ будем писать a^m.

Через W будем обозначать произвольное конечное слово во внешнем алфавите машины Тьюринга (в частности, *пустое*, т. е. состоящее из пустых символов внешнего алфавита).

При описании работы машины Тьюринга «на языке конфигураций» будут использоваться выражения, аналогичные такому:

$$q_1 1^x 0 1^y 0 W \models 1^y 0 q_0 W,$$

$x \geqslant 1$ и $y \geqslant 1$. Приведенное выражение надо понимать так: машина «стирает» слово 1^x и останавливается на первой букве слова W; если же W — пустое слово, то «останов» происходит на втором 0 (нуле) после слова 1^y.

Машины Тьюринга T_1 и T_2 называются *эквивалентными* (в алфавите A), если для всякого входного слова P (в алфавите A) выполняется соотношение $T_1(P) \simeq T_2(P)$, означающее следующее: $T_1(P)$ и $T_2(P)$ определены или не определены одновременно [1]), и если они определены, то $T_1(P)=T_2(P)$. Символ $\simeq$ называется *знаком условного равенства*.

Пусть машины T_1 и T_2 имеют соответственно программы Π_1 и Π_2. Предположим, что внутренние алфавиты этих машин не пересекаются и что q_1' — некоторое

---

[1]) $T(P)$ определено (не определено), если машина T применима (не применима) к слову P.

заключительное состояние машины T_1, а q_2' — какое-либо начальное состояние машины T_2. Заменим всюду в программе $П_1$ состояние q_1' на состояние q_2' и полученную программу объединим с программой $П_2$. Новая программа $П$ определяет машину T, называемую *композицией машин* T_1 *и* T_2 (*по паре состояний* (q_1', q_2')) и обозначаемую через $T_1 \circ T_2$ или $T_1 T_2$ (более подробно: $T = T(T_1, T_2, (q_1', q_2'))$). Внешний алфавит композиции $T_1 T_2$ является объединением внешних алфавитов машин T_1 и T_2.

Пусть q' — некоторое заключительное состояние машины T, а q'' — какое-либо состояние машины T, не являющееся заключительным. Заменим всюду в программе $П$ машины T символ q' на q''. Получим программу $П'$, определяющую машину $T'(q', q'')$. Машина T' называется *итерацией машины* T (*по паре состояний* (q', q'')).

Пусть машины Тьюринга T_1, T_2 и T_3 задаются программами $П_1$, $П_2$ и $П_3$ соответственно. Предполагаем, что внутренние алфавиты этих машин попарно не пересекаются. Пусть q_1' и q_1'' — какие-либо различные заключительные состояния машины T_1. Заменим всюду в программе $П_1$ состояние q_1' некоторым начальным состоянием q_2' машины T_2, а состояние q_1'' — некоторым начальным состоянием q_3' машины T_3. Затем новую программу объединим с программами $П_2$ и $П_3$. Получим программу $П$, задающую машину Тьюринга $T = T(T_1, (q_1', q_2'), T_2, (q_1'', q_3'), T_3)$. Эта машина называется *разветвлением машин* T_2 *и* T_3, *управляемым машиной* T_1.

При задании сложных машин Тьюринга часто применяют так называемую *операторную запись алгоритма*, которая представляет собой строку, состоящую из символов машин, символов перехода $\left(\text{вида } \frac{\lfloor q'}{k} \text{ и } \frac{q''\rfloor}{k}\right)$, а также символов α и ω, служащих для обозначения соответственно начала и окончания работы алгоритма. В операторной записи (некоторого алгоритма) выражение $T_i \frac{\lfloor q_{i0}}{k} T_j \ldots T_m \frac{q_{n1}\rfloor}{k} T_n$ обозначает разветвление машин T_j и T_n, управляемое машиной T_i, причем заключительное состояние q_{i0} машины T_i заменяется начальным состоянием q_{n1} машины T_n, а всякое другое заключительное состояние машины T_i заменяется начальным состоянием машины T_j (одним и тем же!). Если машина T_i имеет одно заключительное состояние, то символы $\lfloor q_{i0}$ и $q_{n1}\rfloor$ служат для обозначения безусловного перехода. Там, где не могут возникнуть недоразумения, символы q_{i0} и q_{n1} опускаются.

Пример. Операторная схема

$$\underset{2}{\rfloor}\ \underset{1}{\rfloor}\, T_1 \alpha T_2 \underset{1}{\lfloor q_{20}}\, T_3 \underset{2}{\lfloor q_{30}}\, T_4 \omega$$

описывает следующий «процесс вычисления». Начинает работу машина T_2. Если она заканчивает работу в состоянии q_{20}, то начинает работать машина T_1, а по окончании работы машины T_1 вновь «выполняет работу» машина T_2. Если же машина T_2 останавливается в некотором заключительном состоянии, отличном от q_{20}, то «работу продолжает» машина T_3. Если T_3 приходит в заключительное состояние q_{30}, то начинает работу машина T_1; если же T_3 заканчивает работу в некотором заключительном состоянии, отличном от q_{30}, то «работу продолжает» машина T_4. Если машина T_4 когда-либо остановится, то процесс вычисления на этом заканчивается.

Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $n \geqslant 1$, — произвольный набор целых неотрицательных чисел. Слово $1^{\alpha_1+1}01^{\alpha_2+1}0 \ldots 01^{\alpha_n+1}$ называется *основным машинным кодом* (или просто *кодом*) *набора* $\tilde{\alpha}$ (в алфавите $\{0, 1\}$) и обозначается $k(\tilde{\alpha})$. В частности, слово $1^{\alpha+1}$ является основным машинным кодом числа α.

В дальнейшем рассматриваются в основном лишь *частичные числовые функции*. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, называется *частичной числовой функцией*, если переменные x_i принимают значения из натурального ряда $N = \{0, 1, 2, \ldots, m, \ldots\}$ и в том случае, когда на наборе $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ функция f определена, $f(\tilde{\alpha}) \in N$.

Частичная числовая функция называется *вычислимой* (*по Тьюрингу*), если существует машина Тьюринга T_f, обладающая следующими свойствами:

а) если $f(\tilde{\alpha})$ определено, то $T_f(k(\tilde{\alpha})) = k(f(\tilde{\alpha}))$;

б) если $f(\tilde{\alpha})$ не определено, то либо $T_f(k(\tilde{\alpha}))$ не является кодом никакого числа из N, либо машина T_f не применима к слову $k(\tilde{\alpha})$.

Замечание. В дальнейшем предполагаем, что в начальный момент головка машины обозревает самую левую единицу слова k ($\tilde{\alpha}$). Известно, что это ограничение не сужает класса вычислимых функций.

Если функция f вычислима по Тьюрингу с помощью машины T_f, то мы будем говорить, что *машина T_f вычисляет функцию f*.

1.1. Выяснить, применима ли машина Тьюринга T, задаваемая программой Π, к слову P. Если применима, то найти результат применения машины T к слову P. Предполагается, что q_1 — начальное состояние, q_0 — заключительное и в начальный момент головка машины обозревает самую левую единицу на ленте.

1) $\Pi: \begin{cases} q_1 0 q_2 0 R \\ q_1 1 q_1 1 R \\ q_2 0 q_3 0 R \\ q_2 1 q_1 1 L \\ q_3 0 q_0 0 S \\ q_3 1 q_2 1 R \end{cases}$ а) $P = 1^3 0^2 1^2$, б) $P = 1^3 0 1^3$, в) $P = 10[01]^2 1$.

2) $\Pi: \begin{cases} q_1 0 q_2 1 R \\ q_1 1 q_3 0 R \\ q_2 0 q_3 1 L \\ q_2 1 q_2 1 S \\ q_3 1 q_1 1 R \end{cases}$ а) $P = 1^4 01$, б) $P = 1^3 0 1^2$, в) $P = 1^6$.

3) $\Pi: \begin{cases} q_1 0 q_1 1 R \\ q_1 1 q_2 0 R \\ q_2 0 q_1 1 R \\ q_2 1 q_3 1 L \\ q_3 0 q_1 1 L \end{cases}$ а) $P = 101^2$, б) $P = 1^2 0^2 1$, в) $P = [10]^2 1$.

1.2. Построить в алфавите $\{0, 1\}$ машину Тьюринга, обладающую следующим свойством (в качестве пустого символа берется 0):

1) машина применима к любому непустому слову в алфавите $\{0, 1\}$;

2) машина не применима ни к какому слову в алфавите $\{0, 1\}$, и зона работы на каждом слове — бесконечная;

3) машина не применима ни к какому слову в алфавите $\{0, 1\}$, и зона работы на любом слове ограничена одним и тем же числом ячеек, не зависящим от выбранного слова;

4) машина применима к словам вида 1^{3n} $(n \geqslant 1)$ и не применима ни к одному из слов вида $1^{3n+\alpha}$, где $\alpha=1, 2$ и $n \geqslant 1$;

5) машина применима к словам вида $1^{\alpha}01^{\alpha}$, где $\alpha \geqslant 1$, и не применима к словам $1^{\alpha}01^{\beta}$, если $\alpha \neq \beta$ $(\alpha \geqslant 1$ и $\beta \geqslant 1)$.

1.3. По заданной машине Тьюринга T и начальной конфигурации K_1 найти заключительную конфигурацию (q_0 — заключительное состояние).

1) T:

	q_1	q_2
0	$q_0 1 S$	$q_1 0 R$
1	$q_2 0 R$	$q_2 1 L$

а) $K_1 = 1^2 q_1 1^3 01$, б) $K_1 = 1 q_1 1^4$.

2) T:

	q_1	q_2	q_3
0	$q_0 0 S$	$q_0 1 L$	$q_1 1 L$
1	$q_2 1 R$	$q_3 0 R$	$q_1 0 R$

а) $K_1 = 1 q_1 1^5$, б) $K_1 = q_1 1^3 01$, в) $K_1 = 10 q_1 1^4$.

1.4. Построить в алфавите $\{0, 1\}$ машину Тьюринга, переводящую конфигурацию K_1 в конфигурацию K_0.

1) $K_1 = q_1 1^n$, $K_0 = q_0 1^n 0 1^n$ $(n \geqslant 1)$;

2) $K_1 = q_1 0^n 1^n$, $K_0 = q_0 [01]^n$ $(n \geqslant 1)$;

3) $K_1 = 1^n q_1 0$, $K_0 = q_0 1^{2n}$ $(n \geqslant 1)$;

4) $K_1 = 1^n q_1 0 1^m$, $K_0 = 1^m q_0 0 1^n$ $(m \geqslant 1, n \geqslant 1)$.

1.5. 1) Показать, что для всякой машины Тьюринга существует эквивалентная ей машина, программа которой не содержит символа S.

2) Показать, что по всякой машине Тьюринга можно построить эквивалентную ей машину, в программе которой не содержатся заключительные состояния.

1.6. Программа машины Тьюринга T имеет вид

	q_1	q_2	q_3	q_4
0	$q_2 1 R$	$q_3 1 R$	$q_1 2 L$	$q_2 3 R$
1	$q_4 1 L$	$q_3 1 R$	$q_2 1 R$	$q_3 1 R$
2	$q_1 2 L$	$q_2 0 R$	$q_3 2 R$	—
3	—	$q_2 3 R$	$q_3 0 R$	$q_4 3 L$

(пустой символ — 0, начальное состояние — q_1).

1) Показать, что, начиная работу с пустой ленты, машина T за $t(n)$ шагов построит слово вида $P_n = 11010^2 10^3 \ldots 10^n 1$ (n — произвольное целое положительное число), причем в любой момент времени $t \geqslant t(n)$ (для $n \geqslant 3$) головка машины будет находиться правее слова P_{n-2}.

2) Построить машину, обладающую таким же свойством и имеющую в качестве внешнего алфавита множество $\{0, 1\}$.

3) Доказать, что если в программе машины Тьюринга не встречается символ L (но могут встречаться, естественно, символы S и R), то эта машина, начиная работу с пустой ленты, не может построить сколь угодно длинный префикс слова $11010^2 10^3 1 \ldots 0^n 10^{n+1} 1 \ldots$

1.7. Показать, что для всякой машины Тьюринга T (в алфавите A) существует счетное количество эквивалентных ей машин $T_1, T_2, \ldots, T_m, \ldots$ (в алфавите A), отличающихся друг от друга своими программами.

1.8. Пусть $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ — некоторый алфавит, содержащий не менее двух букв. Закодируем его буквы следующим образом: кодом символа a_i является слово $10^{i+1}1$ в алфавите $\{0, 1\}$. В соответствии с этим кодированием код произвольного слова $P=a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_s}$ $(s \geqslant 1)$ в алфавите A будет иметь вид $10^{i_1+1}110^{i_2+1}1\ldots10^{i_s+1}1$. Доказать, что, какова бы ни была машина Тьюринга T с внешним алфавитом A, существует машина Тьюринга T_0 с внешним алфавитом $\{0, 1\}$, удовлетворяющая условию: при любом слове P (в алфавите A) машина T_0 применима к коду этого слова тогда и только тогда, когда машина T применима к слову P, причем, если $T(P)$ определено, то код слова $T(P)$ совпадает со словом, являющимся результатом применения машины T_0 к коду слова P.

1.9. Построить композицию T_1T_2 машин Тьюринга T_1 и T_2 (по паре состояний (q_{10}, q_{21})) и найти результат применения композиции T_1T_2 к слову P (q_{20} — заключительное состояние машины T_2).

1) T_1:

	q_{11}	q_{12}
0	$q_{12}0R$	$q_{10}1L$
1	$q_{12}1R$	$q_{11}0R$

T_2:

	q_{21}	q_{22}
0	$q_{22}1R$	$q_{21}1R$
1	$q_{21}0L$	$q_{20}1S$

а) $P=1^30^21^2$, б) $P=1^401$.

2) T_1:

	q_{11}	q_{12}	q_{13}
0	$q_{10}0L$	$q_{13}0R$	$q_{11}0R$
1	$q_{12}1R$	$q_{13}1R$	$q_{11}0R$

T_2:

	q_{21}	q_{22}
0	$q_{22}1L$	$q_{20}0R$
1	$q_{22}1L$	$q_{21}0L$

а) $P=1^40^21^301^2$, б) $P=1^20101^3$.

3) T_1:

	q_{11}	q_{12}	q_{13}
0	$q_{12}0R$	$q_{13}0R$	$q_{10}1L$
1	$q_{11}1R$	$q_{11}1R$	—

T_2:

	q_{21}	q_{22}	q_{23}
0	$q_{22}0L$	$q_{23}0L$	$q_{20}0R$
1	$q_{21}1L$	$q_{22}1L$	$q_{23}1L$

а) $P=1^201^301^2$, $P=1^201^20^21^2$.

1.10. Найти результат применения итерации машины T (по паре состояний (q_0, q_i)) к слову P (заключительными состояниями являются q_0 и q_0').

1) $i=1$, T:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0	$q_0 0 S$	$q_4 0 S$	$q_5 0 S$	$q_4 1 R$	$q_0' 1 L$
1	$q_2 0 R$	$q_3 0 R$	$q_1 0 R$	—	—

а) $P=1^{3k}$, б) $P=1^{3k+1}$, в) $P=1^{3k+2}$, $k\geqslant 1$.

2) $i=1$, T:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	$q_0' 0 R$	$q_0' 0 R$	$q_4 0 R$	$q_5 1 L$	$q_6 0 L$	$q_0 0 R$
1	$q_2 0 R$	$q_3 0 R$	$q_3 1 R$	$q_4 1 R$	$q_5 1 L$	$q_6 1 L$

а) $P=1^{2x}$, б) $P=1^{2x+1}$, $x\geqslant 1$.

3) $i=3$, T:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	$q_2 0 L$	—	$q_4 0 R$	$q_5 1 L$	$q_6 0 L$	$q_0' 0 R$
1	$q_1 2 R$	$q_2 1 R$	—	$q_4 1 R$	$q_5 1 L$	$q_6 1 L$
2	—	$q_3 1 R$	—	—	—	$q_0 1 R$

$P=1^x 0 1^y$ $(x\geqslant 1,\ y\geqslant 1)$.

1.11. Найти результат применения машины $T=T(T_1, (q_{10}', q_{21}), T_2, (q_{10}'', q_{31}), T_3)$ к слову P (q_{20} — заключительное состояние машины T_2, а q_{30} — заключительное состояние машины T_3).

1) T_1:

	q_{11}	q_{12}
0	$q_{12}0R$	$q'_{10}0R$
1	$q_{12}1R$	$q''_{10}1L$

T_2:

	q_{21}
0	$q_{20}1S$
1	$q_{21}0R$

T_3:

	q_{31}	q_{32}
0	$q_{32}1L$	$q_{30}1L$
1	$q_{31}1L$	—

а) $P = 101^3$, б) $P = 1^3 01$.

2) T_1:

	q_{11}	q_{12}	q_{13}
0	$q_{12}0R$	$q'_{10}0L$	$q''_{10}0R$
1	$q_{11}1R$	$q_{13}1R$	$q_{13}1R$

T_2:

	q_{21}	q_{22}
0	$q_{22}0L$	$q_{20}0R$
1	$q_{21}1L$	$q_{22}1L$

T_3:

	q_{31}	q_{32}
0	$q_{32}0R$	$q_{30}1S$
1	$q_{31}1R$	$q_{31}1R$

а) $P = 1^x 0^2 1$ $(x \geqslant 1)$,
б) $P = 1^x 0101^y 01^z$ $(x \geqslant 1,\ y \geqslant 1,\ z \geqslant 1)$.

1.12. Используя машины T_1, T_2, T_3, T_4 и T_5, построить операторную схему алгоритма $\mathfrak{A}$ (здесь q_{10}, q'_{10}, q_{20}, q_{30}, q_{40} и q_{50} — заключительные состояния соответствующих машин).

T_1:

	q_{11}	q_{12}
0	$q_{12}0R$	$q_{10}0R$
1	$q'_{10}0R$	$q_{11}1S$

T_2:

	q_{21}	q_{22}	q_{23}
0	$q_{22}0R$	$q_{23}0R$	$q_{20}0S$
1	$q_{21}1R$	$q_{22}1R$	$q_{23}1R$

T_3:

	q_{31}	q_{32}
0	$q_{32}1R$	$q_{30}1S$
1	$q_{31}1R$	—

T_4:

	q_{41}	q_{42}	q_{43}
0	$q_{42}0L$	$q_{43}0L$	$q_{40}0R$
1	$q_{41}1L$	$q_{42}1L$	$q_{43}1L$

T_5:

	q_{51}
0	$q_{50}1S$
1	$q_{51}1R$

1) $\mathfrak{A}$: $q_1 1^x \models q_0 1^{2x}$ $\quad (x \geqslant 1)$,

2) $\mathfrak{A}$: $q_1 1^{x+1} \models q_0 1^{3x}$ $\quad (x \geqslant 0)$,

3) $\mathfrak{A}$: $W0q_1 1^{x+1} \models W0q_0 1^{2x+1}$ $\quad (x \geqslant 0)$.

З а м е ч а н и е. Если $x=0$, то 1^x считается пустым словом.

1.13. По операторной схеме алгоритма $\mathfrak{A}$ и описанию машин, входящих в схему алгоритма, построить программу машины и найти результат применения машины, задаваемой этой схемой, к слову P.

1) $\mathfrak{A} = \alpha T_1 \underset{1}{\rfloor} T_2 T_3 \underset{1}{|}\underline{q_{30}}\,\omega$,

T_1:

	q_{11}
0	$q_{10}0L$
1	$q_{11}2R$
2	—

T_2:

	q_{21}	q_{22}	q_{23}
0	$q_{23}0R$	$q_{23}0R$	$q_{20}1L$
1	$q_{21}1R$	—	$q_{23}1R$
2	$q_{22}1R$	—	—

T_3:

	q_{31}	q_{32}
0	$q_{32}0L$	$q'_{30}0R$
1	$q_{31}1L$	$q_{32}1L$
2	—	$q_{30}1R$

$$P = 1^x 0 1^y \quad (x \geqslant 1,\ y \geqslant 1).$$

(Начальные состояния машин — q_{11}, q_{21} и q_{31}, а заключительные — q_{10}, q_{20}, q_{30} и q'_{30}.)

2) $\mathfrak{A} = \alpha \underset{2}{\rfloor} T_1 T_2 \underset{1}{|}\underline{q_{20}}\, T_3 \underset{2}{|}\underline{q_{30}} \underset{1}{\rfloor}\,\omega$,

T_1:

	q_{11}	q_{12}	q_{13}	q_{14}
0	—	$q_{13}0R$	$q_{14}0L$	—
1	$q_{12}0R$	$q_{12}1R$	$q_{13}1R$	$q_{10}0L$

T_2:

	q_{21}	q_{22}	q_{23}
0	$q_{22}0L$	$q_{20}1S$	$q_{20}1S$
1	$q'_{20}1S$	$q_{23}1L$	$q_{23}1L$

T_8:

	q_{31}	q_{32}	q_{33}	q_{34}
0	$q_{32}0L$	$q_{33}0R$	$q'_{30}1S$	$q_{30}1R$
1	$q_{31}1L$	$q_{34}1L$	—	$q_{34}1L$

$$P = 1^x 0^2 1^y \quad (x \geqslant 1,\ y \geqslant 1).$$

(Начальные состояния машин — q_{11}, q_{21} и q_{31}, а заключительные — q_{10}, q_{20}, q'_{20}, q_{30} и q'_{30}.)

1.14. Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию f.

1) $f(x) = \operatorname{sg} x = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ 1, & \text{если} \quad x \geqslant 1; \end{cases}$

2) $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right] = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = 1, \\ 0, & \text{если} \quad x \geqslant 2, \\ \text{не определено}, & \text{если} \quad x = 0; \end{cases}$

3) $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right] = m$, если $x = 2m$ или $x = 2m + 1$, $m \geqslant 0$;

4) $f(x, y) = x \dot{-} y = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leqslant y, \\ x - y, & \text{если} \quad x > y; \end{cases}$

5) $f(x, y) = x - y$;

6) $f(x, y) = \frac{4 - x}{y^2}$.

Замечание. Здесь (и в дальнейшем) при «аналитическом» задании числовых функций часто используются широко известные «элементарные» функции (из математического анализа). При этом «аналитически» заданная функция считается *определенной* только на таких целочисленных наборах значений переменных (принадлежащих натуральному ряду N), на которых *определены и принимают целые неотрицательные значения все «элементарные» функции*, входящие в данное «формульное задание» определяемой функции. Например, функция $\frac{x^2}{3 - \frac{y}{2}}$ определена лишь тогда, когда $\frac{y}{2}$ — целое неотрицательное число и $3-\frac{y}{2}$ — целое положительное число, и $\frac{x^2}{3-\frac{y}{2}}$ — целое неотрицательное число.

Говорят, что машина Тьюринга T *правильно вычисляет функцию* $f(\tilde{x}^n)$, если:

1) в том случае, когда $f(\tilde{\alpha}^n)$ определено, $T(k(\tilde{\alpha}^n))=k(f(\tilde{\alpha}^n))$ и головка машины в заключительной конфигурации обозревает левую единицу кода $k(f(\tilde{\alpha}^n))$;

2) в случае, когда $f(\tilde{\alpha}^n)$ не определено, машина T, начиная работу с левой единицы кода $k(\tilde{\alpha}^n)$, не останавливается.

1.15. Доказать, что для всякой вычислимой функции существует машина Тьюринга, правильно вычисляющая эту функцию.

1.16. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию f.

1) $f(x)=x \dot{-} 1$;

2) $f(x)=\overline{\mathrm{sg}}\, x=1-\mathrm{sg}\, x$;

3) $f(x)=\frac{1}{x-2}$;

4) $f(x, y)=x+y$;

5) $f(x, y)=\frac{x}{2-y}$.

1.17. По программе машины Тьюринга T написать аналитическое выражение для функций $f(x)$ и $f(x, y)$, вычисляемых машиной T. (Всюду в качестве начального состояния берется q_1, а в качестве заключительного — q_0.)

1) T:

	q_1	q_2
0	$q_2 1 L$	$q_0 0 R$
1	$q_1 1 R$	$q_2 1 L$

2) T:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0	$q_2 0 R$	$q_1 0 L$	$q_4 0 L$	$q_4 0 L$	$q_0 0 R$
1	$q_1 1 R$	$q_3 0 R$	$q_3 0 R$	$q_5 1 L$	$q_5 1 L$

3) T:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9
0	$q_2 0 R$	$q_3 0 R$	$q_0 1 S$	$q_5 0 R$	$q_3 0 L$	$q_7 0 L$	—	$q_9 0 L$	$q_1 0 R$
1	$q_2 0 R$	$q_4 1 R$	$q_3 1 L$	$q_4 1 R$	$q_6 1 R$	$q_6 1 R$	$q_8 0 L$	$q_8 1 L$	$q_9 1 L$

1.18. Какие одноместные функции вычисляются всеми такими машинами Тьюринга (в алфавите $\{0, 1\}$), программы которых содержат лишь по одной команде?

1.19. Справедливо ли утверждение: две различные вычислимые функции $f_1(\tilde{x}^m)$ и $f_2(\tilde{x}^n)$ можно вычислить на одной машине Тьюринга тогда и только тогда, когда $m \neq n$?

1.20. Пусть M — счетное множество каких-то вычислимых функций и $T(M)$ — такое минимально возможное множество машин Тьюринга, что для всякой функции f из M существует машина в множестве $T(M)$, вычисляющая функцию f.

1) Показать, что если для некоторого $n \geqslant 1$ в множестве M существует бесконечное подмножество, состоящее из n-местных функций, то в $T(M)$ найдется машина со сколь угодно большим числом состояний (т. е. для всякого $l_0 \geqslant 1$ можно указать в $T(M)$ машину с числом состояний, большим l_0).

2) Каково необходимое и достаточное условие конечности множества $T(M)$?

1.21. Построить операторную схему машины Тьюринга, вычисляющей функцию f; в качестве элементарных операторов используйте машины T_i ($i=4$, 5, 6, 7, 8). В задачах 1) и 2) сначала постройте операторную схему, используя только машины T_1, T_2, T_3, а затем каждую из машин T_1, T_2, T_3 представьте операторной схемой, использующей машины T_4, T_5, . . ., T_8. Начальными состояниями в рассматриваемых здесь машинах являются q_{11}, $q_{21}, \ldots, q_{81}$, а заключительными — q_{10}, q'_{10}, q_{20}, q'_{20}, q_{30}, $q_{40}, \ldots, q_{80}$, q'_{80}.

T_4:

	q_{41}
0	$q_{40}0R$
1	$q_{40}1R$

T_5:

	q_{51}
0	$q_{50}0L$
1	$q_{50}1L$

T_6:

	q_{61}
0	$q_{60}0S$
1	$q_{61}1R$

T_7:

	q_{71}
0	$q_{70}0S$
1	$q_{71}1L$

T_8:

	q_{81}
0	$q_{80}1S$
1	$q'_{80}0S$

1) $f(x, y) = x + y \pmod 2$,

T_1:

	q_{11}	q_{12}
0	$q_{12}1L$	$q_{10}0R$
1	$q_{11}1R$	$q_{12}1L$

T_2:

	q_{21}	q_{22}	q_{23}
0	$q_{23}1L$	$q_{23}0L$	$q_{20}1S$
1	$q_{22}0L$	$q_{21}0L$	—

T_3:

	q_{31}
0	$q_{30}0L$
1	$q_{31}1R$

2) $f(x) = 2^x$,

$$T_1: \begin{cases} q_{11}1 \models q_{10}1^2, \\ q_{11}1^{x+1} \models 101^x0q'_{10}1^2 \quad \text{при} \quad x > 0; \end{cases}$$

$$T_2: \begin{cases} 1^x010^tq_{21}1^y \models q_{20}1^y, \\ 1^x0^{z+1}10^tq_{21}1^y \models 1^{x+1}01^z0^tq'_{20}1^y \quad \text{при} \quad z > 0; \end{cases}$$

здесь $x > 0,\ y > 0,\ t > 0$;

T_3: $W0q_{31}1^{y+1} \models W0q_{30}1^{2y+1}, \quad y \geqslant 0$;

3) $f(x) = 3x$;

4) $f(x, y) = x \cdot y$;

5) $f(x, y) = x - y$.

Расстояние между двумя ячейками C и C' ленты равно увеличенному на единицу числу ячеек, расположенных между C и C'. В частности, соседние ячейки ленты находятся друг от друга на расстоянии 1. Пусть l — целое положительное число. Подмножество всех таких ячеек ленты, каждые две из которых расположены друг от друга на расстоянии, кратном l, называется *решеткой с шагом* l. Таким образом, ленту можно рассматривать как объединение l решеток с шагом l.

Пусть $R_{(l)}$ — решетка с шагом l. Две ячейки этой решетки будем называть *соседними*, если расстояние между ними (рассматриваемое относительно всей ленты) равно l. Говорят, что *слово* $P = a_1 a_2 \ldots a_m$ *записано на решетке* $R_{(l)}$, если:

1) символ a_1 записан в некоторой ячейке C_1 этой решетки;

2) символ a_2 записан в ячейке C_2, которая является соседней к C_1 на решетке $R_{(l)}$ и расположена справа от ячейки C_1, и т. д.

m) символ a_m записан в ячейке C_m, отстоящей от ячейки C_1 на расстоянии $(m-1)\cdot l$ и расположенной справа от [1] C_1.

Будем говорить, что *машина Тьюринга* T_1 *моделирует машину Тьюринга* T *на решетке* $R_{(l)}$ (с шагом l), если, каково бы ни было слово P (в алфавите A), выполняется следующее условие: пусть на решетке $R_{(l)}$ записано слово P и в начальный момент времени головка машины T_1 обозревает самую левую букву слова P; машина T_1 останавливается тогда и только тогда, когда машина T применима к слову P; при этом, если $T(P)$ определено, то после окончания работы машины T_1 на решетке $R_{(l)}$ будет записано слово $T(P)$.

1.22. На решетке с шагом l смоделировать работу машины T, вычисляющей функцию f.

1) $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$, $l = 4$;

2) $f(x, y) = \frac{\operatorname{sg} x}{y}$, $l = 3$;

3) $f(x, y) = x + y$, $l = 3$.

1.23. Показать, что для любой машины Тьюринга T и всякого целого $l \geqslant 2$ существует машина T', моделирующая машину T на решетке с шагом l.

Будем называть *l-кратным кодом набора* $\tilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ слово в алфавите $\{0, 1\}$, имеющее вид $1^{l(\alpha_1+1)}0^l1^{l(\alpha_2+1)}0^l \ldots 0^l1^{l(\alpha_n+1)}$ $(l \geqslant 2)$.

1.24. 1) Доказать, что машину, преобразующую основной код набора $\tilde{\alpha}^n$ в l-кратный код этого набора $(l \geqslant 2)$,

---

[1] Считаем, что вне ячеек $C_1, C_2, \ldots, C_m$ на решетке $R_{(l)}$ расположены лишь пустые символы внешнего алфавита.

можно задать следующей операторной схемой:

$$\alpha T_1 \underset{1}{\rfloor}\; T_2 \underset{1}{\underline{|q'_{20}}}\,\omega,$$

где:

а) T_1 имеет начальное состояние q_{11}, заключительное — q_{10} и

$$q_{11}1^{\alpha_1+1}01^{\alpha_2+1}0\,\dots\,01^{\alpha_n+1} \mathrel{\underset{\cdot}{\vdash}} q_{10}1^{\alpha_1+1}\,0^21^{\alpha_2+1}01^{\alpha_3+1}0\,\dots$$
$$\dots\,01^{\alpha_n+1}0^{l+1}1^{l};$$

б) T_2 имеет начальное состояние q_{21} и два заключительных состояния — q_{20} и q'_{20} и

$$q_{21}1^{x+1}0^21^{\alpha_{i+1}+1}01^{\alpha_{i+2}+1}0\,\dots\,01^{\alpha_n+1}0^{l+1}1^{l(\alpha_1+1)}\,0^l1^{l(\alpha_2+1)}0^l\,\dots$$
$$\dots\,0^l1^{l(\alpha_i+1-x)} \mathrel{\underset{\cdot}{\vdash}} q'_{20}1^x0^21^{\alpha_{i+1}+1}\,01^{\alpha_{i+2}+1}0\,\dots$$
$$\dots\,01^{\alpha_n+1}0^{l+1}1^{l(\alpha_1+1)}0^{l+1}1^{l(\alpha_2+1)}\,0^l\,\dots\,0^l1^{l(\alpha_i+2-x)} \quad \text{при} \quad x>0,$$

$$q_{21}10^21^{\alpha_{i+1}+1}01^{\alpha_{i+2}+1}0\,\dots\,01^{\alpha_n+1}0^{l+1}1^{l(\sigma_1+1)}0^l\,\dots$$
$$\dots\,0^l1^{l(\alpha_i+1)} \mathrel{\underset{\cdot}{\vdash}} q'_{20}1^{\alpha_{i+1}+1}0^2\,1^{\alpha_{i+2}+1}01^{\alpha_{i+3}+1}0\,\dots$$
$$\dots\,01^{\alpha_n+1}0^{l+1}1^{l(\alpha_1+1)}0^l\,\dots\,0^l1^{l(\alpha_i+1)}0^l1^l,$$

$$q_{21}10^{l+1}1^{l(\alpha_1+1)}0^l1^{l(\alpha_2+1)}0^l\dots0^l1^{l(\alpha_n+1)} \mathrel{\underset{\cdot}{\vdash}} q_{20}1^{l(\alpha_1+1)}0^l1^{l(\alpha_2+1)}0^l\dots$$
$$\dots\,0^l1^{l(\alpha_n+1)}.$$

2) По словесному описанию машин T_3, T_4, ..., T_{11} построить их программы.

T_3 — машина, начав работу с последней единицы массива из единиц, «сдвигает» его на одну ячейку влево (не изменяя «остального содержимого» ленты [1]); головка останавливается на первой единице «перенесенного» массива;

T_4 — при заданном $l \geqslant 1$ головка машины, начав работу с произвольной ячейки, содержащей единицу, движется вправо до тех пор, пока не пройдет массив из $l+1$ нулей; головка останавливается в первой ячейке за этим массивом, напечатав в ней 1;

T_5 — при заданном $l \geqslant 1$ головка машины, начав работу с какой-то ячейки и двигаясь вправо, ставит подряд l единиц и останавливается на последней из них;

[1]) Иными словами, считаем, что ни одной «новой» единицы не появилось и изменения в исходном куске ленты коснулись *только* указанного массива.

T_6 — машина начинает работу с самой левой непустой ячейки; при заданном $l \geqslant 1$ «отыскивается» первый слева массив иэ $l+1$ нулей и головка останавливается на последнем из этих нулей («содержимое исходного куска ленты» не меняется);

T_7 — начав работу с самой левой непустой ячейки, машина отыскивает единицу, примыкающую с левой стороны к первому слева массиву из трех нулей, «окаймленному» единицами; головка останавливается на найденной единице («содержимое исходного куска ленты» не меняется);

T_8 — в исходной ячейке печатается 0 и головка, сдвинувшись на одну ячейку влево, останавливается;

T_9 — головка сдвигается на две ячейки вправо от «начальной» ячейки, и машина останавливается в состоянии q_{90}, если новая ячейка содержит символ 0, и в состоянии q'_{90}, если в «новой» ячейке — 1 (содержимое ленты остается прежним);

T_{10} — головка передвигается на одну ячейку влево (после чего машина останавливается; на ленте никаких изменений не происходит);

T_{11} — головка, начав двигаться вправо от какой-то «начальной» ячейки, «находит» первую (при таком перемещении) единицу и, сделав еще один шаг, останавливается на ячейке, расположенной справа от «найденной» единицы [1]) (содержимое ленты не меняется).

3) Взяв в качестве исходных машины T_3, T_4, . . ., T_{11}, построить операторную схему для машин T_1 и T_2 и для машины, преобразующей основной код набора в l-кратный.

1.25. Построить операторную схему машины Тьюринга, преобразующей l-кратный код набора $\tilde{\alpha}^n$ в основной код этого набора. В качестве исходных машин, соответствующих элементарным операторам, используйте машины T_4, T_5, . . ., T_8 из задачи 1.21 и еще такие три машины:

T_1 — при заданном $l \geqslant 1$ головка машины, двигаясь вправо от какой-либо пустой ячейки, находит первый (при таком перемещении головки) массив, содержащий не менее l единиц, затем в этом массиве стирает первые

[1]) Если в «начальной» ячейке записана единица, то головка останавливается на соседней справа ячейке.

l единиц и останавливается на ячейке, в которой была последняя стертая единица («остальное содержимое» ленты не меняется);

T_2 — головка из «начального положения» сдвигается влево на l ячеек (l задано), после чего машина останавливается на l-й ячейке; содержимое ленты при этом не меняется;

T_3 — работает аналогично машине T_2, но «сдвиг» происходит вправо.

Решетчатым кодом набора $\tilde{\alpha}^n=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называется слово в алфавите $\{0, 1\}$, записанное на n решетках с шагом n, причем так, что на первой решетке записано слово 1^{α_1+1}, на второй — слово 1^{α_2+1} и т. д., на n-й — слово 1^{α_n+1}; начала слов на решетках должны быть *согласованы*, т. е. самая левая единица на первой решетке непосредственно предшествует (на ленте) самой левой единице на второй решетке, а эта единица непосредственно предшествует самой левой единице на третьей решетке и т. д.

1.26. 1) Построить операторную схему машины Тьюринга, преобразующей основной код набора $\tilde{\alpha}^n$ в решетчатый код этого набора. В качестве исходных машин, соответствующих элементарным операторам, используйте машины $T_4, T_5, \ldots, T_8$ из задачи 1.21 и еще две машины:

T_1 — головка из «начального положения» сдвигается на n ячеек вправо, после чего машина останавливается (на n-й ячейке); содержимое ленты при этом не меняется;

T_2 — работает аналогично машине T_1, но головка передвигается влево.

2) Используя те же машины, что и в предыдущей задаче, построить операторную схему машины Тьюринга, преобразующей решетчатый код набора $\tilde{\alpha}^n$ в основной код этого набора.

§ 2. Классы вычислимых и рекурсивных функций

Функции, рассматриваемые в этом параграфе, являются частичными числовыми функциями.

Функция $F(x_1, \ldots, x_n)=f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$ называется *суперпозицией функций* f и $g_1, \ldots, g_m$ и обозначается через $S(f^{(m)}; g_1^{(n)}, \ldots, g_m^{(n)})$. При этом функция F определена на наборе $\tilde{\alpha}^n$ и $F(\tilde{\alpha}^n)=f(g_1(\tilde{\alpha}^n), \ldots$

$\ldots, g_m(\tilde{x}^n))$ тогда и только тогда, когда каждая функция g_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ определена на наборе $\tilde{\alpha}^n$ и, кроме того, функция f определена на наборе $(g_1(\tilde{\alpha}^n), \ldots, g_m(\tilde{\alpha}^n))$.

Пусть $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $h(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1})$ — какие-либо две функции, причем $n \geqslant 2$. Определим третью функцию $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ с помощью следующей схемы:

$$\begin{cases} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \ldots, x_{n-1}), \\ f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y+1) = \\ = h(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)), \quad y \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Схема (1) называется *схемой примитивной рекурсии* для функции $f(\tilde{x}^n)$ *по переменным* x_n и x_{n+1} и задает *примитивно рекурсивное описание функции* $f(\tilde{x}^n)$ с помощью функций g и h. Говорят также, что *функция f получена из функций g и h с помощью операции примитивной рекурсии по переменным* x_n и x_{n+1}. В этом случае используют такое обозначение: $f = R(g, h)$ (и указывают отдельно, по каким переменным ведется рекурсия).

При задании примитивно рекурсивного описания функции $f(x)$, зависящей от одной переменной, схема примитивной рекурсии имеет вид

$$\begin{cases} f(0) = a, \\ f(y+1) = h(y, f(y)), \quad y \geqslant 0, \end{cases} \tag{2}$$

где a — константа (число из натурального ряда $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$).

Пусть $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, $n \geqslant 1$, — некоторая функция. Определим функцию $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ следующим образом: пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ — произвольный набор целых неотрицательных чисел; рассмотрим уравнение

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, y) = \alpha_n, \tag{3}$$

а) если уравнение (3) имеет решение $y_0 \in N$ и при всех $y \in N$, таких, что $0 \leqslant y < y_0$, функция $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, y)$ определена и ее значения отличны от α_n, то полагаем $g(\tilde{\alpha}) = y_0$;

б) если уравнение (3) не имеет решений в целых неотрицательных числах, то считаем, что $g(\tilde{\alpha})$ не определено;

в) если y_0 — наименьшее целое неотрицательное решение уравнения (3) и при некотором $y_1 \in N$ и меньшем

y_0 значение $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, y_1)$ не определено, то полагаем: $g(\tilde{\alpha})$ не определено.

О функции $g(\tilde{x}^n)$, построенной указанным способом из функции $f(\tilde{x}^n)$, говорят, что она *получена из функции* $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ *с помощью операции минимизации по переменной* x_n (или короче: *с помощью минимизации по* x_n). В этом случае используются следующие обозначения: $g = Mf$ или $g(\tilde{x}^n) = M_{x_n}(f(\tilde{x}^n))$, или $g(\tilde{x}^n) = \mu_y(f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n)$, или $g(\tilde{x}^n) = \mu_{x_n}(f(\tilde{x}^n))$.

Замечание. Операции примитивной рекурсии и минимизации можно применять по любым переменным, входящим в функции f, g и h (но всегда нужно указывать, по каким переменным эти операции проводятся).

Простейшими будем называть в дальнейшем следующие функции:

а) $s(x) = x+1$ — *функция следования*;

б) $o(x) \equiv 0$ — *нулевая функция*;

в) $I_m^n(x_1, \ldots, x_n) = x_m$ $(1 \leqslant m \leqslant n; n = 1, 2, \ldots)$ — *селекторная функция*, или *функция выбора аргумента*.

Класс $K_{\text{пр}}$ *всех примитивно рекурсивных функций* представляет собой множество всех функций, которые могут быть получены из простейших функций с помощью операций суперпозиции и примитивной рекурсии.

Классом $K_{\text{чр}}$ *всех частично рекурсивных функций* называется множество всех функций, которые могут быть получены из простейших функций с помощью операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

Замечание. При определении классов $K_{\text{пр}}$ и $K_{\text{чр}}$ предполагается, что при построении каждой конкретной функции соответствующие операции применяются не более чем конечное число раз (некоторые или все операции могут вообще не применяться).

Класс $K_{\text{ор}}$ *всех общерекурсивных функций* представляет собой множество всех всюду определенных частично рекурсивных функций.

Нетрудно показать, что $K_{\text{чр}} \supset K_{\text{ор}}$ (включение строгое!). Справедливо также и следующее строгое включение: $K_{\text{ор}} \supset K_{\text{пр}}$.

Через $K_{\text{в}}$ будем обозначать *класс всех частичных числовых функций, вычислимых на машинах Тьюринга.*

Справедливо следующее утверждение: классы $K_{чр}$ и $K_{в}$ совпадают.

Теорема (Р. Робинсон). *Все одноместные примитивно рекурсивные функции, и только они, могут быть получены из функций* $x+1$ *и* $\overline{\mathrm{sg}}(x \dot{-} [\sqrt{x}]^2)$ *с помощью конечнократного применения следующих трех операций:*

а) *абсолютная разность* — $f(x)=|f_1(x)-f_2(x)|$;

б) *композиция* — $f(x)=f_1(f_2(x))$;

в) *итерация* — $\begin{cases} f(0)=0, \\ f(x+1)=f_1(f(x)). \end{cases}$

2.1. Применить операцию примитивной рекурсии к функциям $g(x_1)$ и $h(x_1, x_2, x_3)$ по переменным x_2 и x_3. Функцию $f(x_1, x_2)=R(g, h)$ записать в «аналитической» форме.

1) $g(x_1)=x_1, \quad h(x_1, x_2, x_3)=x_1+x_3$;

2) $g(x_1)=x_1, \quad h(x_1, x_2, x_3)=x_1+x_2$;

3) $g(x_1)=2^{x_1}, \quad h(x_1, x_2, x_3)=x_3^{x_1}$ (полагаем $0^0=1$);

4) $g(x_1)=1, \quad h(x_1, x_2, x_3)=x_3(1+\mathrm{sg}\,|x_1+2-2x_3|)$;

5) $g(x_1)=x_1, \quad h(x_1, x_2, x_3)=(x_3+1)\,\mathrm{sg}\left(1+\frac{x_3}{3}\right)$.

2.2. Доказать примитивную рекурсивность функции $f(\tilde{x}^n)$.

1) $f(x_1, x_2)=x_1 \dot{-} x_2^2$;

2) $f(x_1)=3^{x_1}$;

3) $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2x_2 \oplus x_3$ (сумма по модулю 2).

2.3. Доказать справедливость соотношения $f=R(g, h)$.

1) $f(x_1, x_2)=\mathrm{rest}(x_1, x_2)=$

$$=\begin{cases} x_1, & \text{если } x_2=0, \\ \text{остаток от деления } x_1 \text{ на } x_2, & \text{если } x_2>0; \end{cases}$$

$g(x_2)=0, \quad h(x_1, x_2, x_3)=(x_3+1)\,\mathrm{sg}\,|x_2-(x_3+1)|$, рекурсия ведется по переменным x_1, x_3.

2) $f(x_1, x_3)=\left[\frac{x_1}{x_2}\right]=$

$$=\begin{cases} x_1, & \text{если } x_2=0, \\ \text{целая часть от деления } x_1 \text{ на } x_2, & \text{если } x_2>0; \end{cases}$$

$g(x_2)=0, \quad h(x_1, x_2, x_3)=$

$$=x_3+\overline{\mathrm{sg}}\,|x_1+1-(x_3+1)x_2|+\overline{\mathrm{sg}}\,x_2,$$

рекурсия ведется по переменным x_1, x_3.

3) $f(x_1) = x_1 \dot{-} [\sqrt{x_1}]^2$,

$g = 0, \quad h(x_1, x_2) = (x_2 + 1)\,\mathrm{sg}\,(4x_1 \dot{-} (x_2^2 + 4x_2))$.

4) $f(x_1) = [\sqrt{x_1}]$,

$g = 0, \quad h(x_1, x_2) = x_2 + \overline{\mathrm{sg}}\,((x_2 + 1)^2 \dot{-} (x_1 + 1))$.

2.4. Показать, что если функции $g(y)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $\varphi_3(x)$ примитивно рекурсивны, то функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \varphi_1(x), & \text{если} \quad g(y) \leqslant a, \\ \varphi_2(x), & \text{если} \quad a < g(y) \leqslant b, \\ \varphi_3(x), & \text{если} \quad g(y) > b, \end{cases}$$

где $0 \leqslant a \leqslant b$, также примитивно рекурсивна[1]).

2.5. Пусть $g_1(y)$, $g_2(x)$ и $g_3(x, y)$ — примитивно рекурсивные функции. Доказать, что тогда примитивно рекурсивна и $f(x, y)$, определяемая следующей схемой:

$$\begin{cases} f(0, y) = g_1(y), \\ f(x+1, 0) = g_2(x), \\ f(x+1, y+1) = g_3(x, y) \end{cases}$$

(здесь $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$).

2.6. Пусть функции $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, $h_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ и $h_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, $n \geqslant 1$, примитивно рекурсивны. Доказать, что тогда примитивно рекурсивны и следующие функции:

1) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \sum\limits_{i=0}^{x_n} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, i)$;

2) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \prod\limits_{i=0}^{x_n} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, i)$;

3) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, z) = \begin{cases} \sum\limits_{i=y}^{z} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, i) & \text{при } y \leqslant z, \\ 0 & \text{при } y > z; \end{cases}$

4) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, z) = \begin{cases} \prod\limits_{i=y}^{z} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, i) & \text{при } y \leqslant z, \\ 1 & \text{при } y > z; \end{cases}$

5) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \sum\limits_{i=h_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)}^{h_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, i)$

[1]) Условия, наложенные на функцию $g(y)$, надо понимать так: рассматриваются все такие значения y, при которых функция $g(y)$ удовлетворяет указанному соотношению.

(здесь, как обычно, считается, что если верхний предел суммирования меньше нижнего, то сумма равна 0);

6) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \prod\limits_{i=h_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)}^{h_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, i)$

(в том случае, когда верхний предел у произведения меньше нижнего, произведение полагается равным 1).

2.7. Применить операцию минимизации к функции f по переменной x_i. Результирующую функцию представить в «аналитической» форме.

1) $f(x_1) = 3$, $i = 1$;

2) $f(x_1) = \left[\frac{x_1}{2}\right]$, $i = 1$;

3) $f(x_1, x_2) = I_1^2(x_1, x_2)$, $i = 2$;

4) $f(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} x_2$, $i = 1, 2$;

5) $f(x_1, x_2) = x_1 - \frac{1}{x_2}$, $i = 1, 2$;

6) $f(x_1, x_2) = 2^{x_1}(2x_2 + 1)$, $i = 1, 2$.

2.8. Применив операцию минимизации к подходящей примитивно рекурсивной функции, доказать, что функция f является частично рекурсивной.

1) $f(x_1) = 2 - x_1$; 3) $f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$;

2) $f(x_1) = \frac{x_1}{2}$; 4) $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{1 - x_1 x_2}$.

2.9. Верно ли утверждение: если хотя бы одна из частично рекурсивных функций g и h не является всюду определенной, то $f = R(g, h) \notin K_{\text{ор}}$?

2.10. 1) Можно ли с помощью однократного применения операции минимизации ко всюду определенной функции получить нигде неопределенную функцию?

2) Привести пример примитивно рекурсивной функции, из которой двукратным применением операции минимизации можно получить нигде неопределенную функцию.

2.11. Доказать вычислимость следующих функций:

1) $f(x, y, z) = \left[\frac{2}{x+1}\right](x - \overline{\text{sg}}(2^x \dot{-} y)) \dot{-} (x+1)^z$;

2) $f(x, y, z) = \left(\frac{yz}{x-1} + 2^{[x/2]}\right)(y^2 \dot{-} xz)$;

3) $f(x, y, z) = 4^{x^2 \dot{-} y^2} - (x^2+1)^{z \dot{-} 1}$;

4) $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 - y^2}{z+1} \cdot 2^{(x^3+y)\overline{\mathrm{sg}}(x \dot{-} yz)}$.

2.12. Каковы мощности классов $K_{\text{пр}}$, $K_{\text{ор}}$, $K_{\text{чр}}$ и $K_{\text{в}}$? Функция $\varphi(x, y)$, определяемая схемой

$$\begin{cases} \varphi(0, y) = y+1, \\ \varphi(x+1, 0) = \varphi(x, 1), \\ \varphi(x+1, y+1) = \varphi(x, \varphi(x+1, y)), \end{cases}$$

где $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, обычно называется *функцией Аккермана.*

2.13. Показать, что функция Аккермана удовлетворяет следующим условиям:

а) $\varphi(x, y) > y$ при любых x и y;

б) $\varphi(x, y)$ строго монотонна по обеим переменным;

в) $\varphi(x+1, y) \geqslant \varphi(x, y+1)$ при любых x и y.

2.14. Используя задачу 2.13 и теорему Р. Робинсона (о том, что система $\{x+1, \overline{\mathrm{sg}}(x \dot{-} [\sqrt{x}]^2)\}$ полна относительно операций композиции, итерации и абсолютной разности в классе всех одноместных примитивно рекурсивных функций), доказать, что, какова бы ни была одноместная примитивно рекурсивная функция $f(y)$, найдется такое x, для которого $f(y) < \varphi(x, y)$ при любом значении переменной y.

2.15. Показать, что функция Аккермана общерекурсивна, но не примитивно рекурсивна.

2.16*. Обозначим через $K_{\text{пр}}^{(1)}$ и $K_{\text{ор}}^{(1)}$ соответственно множества всех одноместных примитивно рекурсивных и всех одноместных общерекурсивных функций. Доказать, что система $K_{\text{пр}}^{(1)} \cup \{x+y\}$ полна относительно операции суперпозиции в классе $K_{\text{пр}}$, а система $K_{\text{ор}}^{(1)} \cup \cup \{x+y\}$ — в классе $K_{\text{ор}}$.

2.17. Пусть машина Тьюринга T вычисляет функцию $f_1(x) \in K_{\text{ор}} \setminus K_{\text{пр}}$. Верно ли всегда, что функция $f_2(x, y)$, вычислимая на этой же машине, не принадлежит $K_{\text{пр}}$?

2.18. 1) Пусть машины Тьюринга T_1 и T_2 вычисляют примитивно рекурсивные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно. Верно ли всегда, что композиция T_1T_2 также вычисляет некоторую примитивно рекурсивную функцию $f(x)$? А если машины T_1 и T_2 правильно вычисляют функции f_1 и f_2?

2) Пусть машина T вычисляет примитивно рекурсивную функцию $f(x)$. Всегда ли справедливо утверждение: если итерация машины T вычисляет некоторую всюду определенную функцию $g(x)$, то эта функция обязательно примитивно рекурсивна?

2.19. Справедливы ли следующие соотношения?

1) $\mu_x(x \dot{-} 2) = (\mu_x(x \dot{-} 1)) \dot{-} 1$.

2) $\mu_{x_2}(x_1 + (x_2 \dot{-} x_1)) = \mu_{x_1}((x_1 \dot{-} x_2) + x_2)$.

3) $\mu_x\left(x \dot{-} \left[\frac{x}{2}\right]\right) \in K_{\text{пр}}$.

4) $\mu_x(x \dot{-} [\sqrt{x}]^2) \in K_{\text{пр}}$.

5) $\mu_x([\sqrt[3]{x}]) \in K_{\text{пр}}$.

2.20*. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ принадлежат множеству $K_{\text{ор}} \setminus K_{\text{пр}}$. Могут ли быть верными следующие утверждения?

1) $f_1(f_2(x)) \in K_{\text{пр}}$, но $f_2(f_1(x)) \notin K_{\text{пр}}$.

2) $f_1(x^2) \in K_{\text{пр}}$, но $[\sqrt{f_1(x^2)}] \notin K_{\text{пр}}$.

3) $f_1(x) + f_2(x) \in K_{\text{пр}}$, но $f_1(x) + 2f_2(x) \notin K_{\text{пр}}$.

2.21*. Пусть $f(x) \in K_{\text{ор}} \setminus K_{\text{пр}}$. Всегда ли справедливо следующее соотношение?

1) $f(2x) \notin K_{\text{пр}}$.

2) $f(x+y) \in K_{\text{пр}}$.

3) $f(x \cdot y) \notin K_{\text{пр}}$.

4) $1 \dot{-} f(x) \notin K_{\text{пр}}$.

5) $f(x \dot{-} y) \in K_{\text{пр}}$.

2.22. 1) У функции $f(x, y)$ из $K_{\text{ор}}$ обе переменные — существенные. Предположим, что $\mu_x f(x, y)$ и $\mu_y f(x, y)$ — всюду определенные функции. Может ли хотя бы одна из этих двух функций зависеть существенно только от одной переменной?

2) Функция $f(x, y) \in K_{\text{ор}}$ имеет одну фиктивную переменную. Могут ли быть у функции $\mu_x f(x, y)$ существенными обе переменные, если предположить дополнительно, что она общерекурсивная функция?

2.23. Сформулировать условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функция $\mu_x f(x)$ была нигде неопределенной.

2.24. 1) Каково необходимое и достаточное условие выполнимости соотношения $\mu_x f(x) \in K_{\text{ор}}$?

2) Может ли хотя бы одна из функций $\mu_x f(x, y)$ или $\mu_y f(x, y)$ быть общерекурсивной, если $f(x, y) \in K_{чр} \setminus K_{ор}$?

2.25*. Пусть $f(x) \in K_{ор} \setminus K_{пр}$. Может ли быть верным соотношение $\mu_x f(x) \in K_{пр}$?

2.26. Известно, что $f(x) \in K_{ор}$ и что $f(2x+1)=f(x)$ и $f(2x)=f(x+1)$ при всех $x \geqslant 0$. Верно ли, что $f(x) \in K_{пр}$?

2.27. Выяснить, полна ли система $K_{ор} \setminus K_{пр}$ относительно операции суперпозиции в классе $K_{ор}$?

2.28. Образует ли множество M полную систему относительно совокупности операций $\mathcal{O}$ в классе $K_{чр}$?

1) $M = K_{чр} \setminus K_{пр}$, $\mathcal{O} = \{R, \mu\}$.
2) $M = K_{чр} \setminus K_{ор}$, $\mathcal{O} = \{S\}$.
3) $M = K_{ор} \setminus K_{пр}$, $\mathcal{O} = \{S, \mu\}$.
4) $M = K_{пр}$, $\mathcal{O} = \{\mu\}$.

2.29. Пусть общерекурсивная функция $f(x)$ такова, что $f(N) = \{f(x) : x \in N\}$ является бесконечным собственным подмножеством множества N. Будет ли при этом условии выполняться равенство:

$$[(K_{чр}^{(1)} \setminus K_{ор}^{(1)}) \cup \{f(x)\}] = K_{чр}^{(1)},$$

где $K_{чр}^{(1)}$ и $K_{ор}^{(1)}$ — соответственно множества всех одноместных частично рекурсивных и всех одноместных общерекурсивных функций и замыкание берется относительно операций суперпозиции и минимизации.

§ 3. Вычислимость и сложность вычислений

Частичная функция $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ называется *универсальной* для семейства $\mathcal{G}$ n-местных функций, если выполнены следующие два условия:

а) для каждого i ($i=0, 1, \ldots$) n-местная функция $F(i, x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит $\mathcal{G}$;

б) для каждой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathcal{G}$ существует такое число i, что для всех значений переменных $x_1, \ldots, x_n$

$$F(i, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Число i называется *номером функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$, а полученная таким образом нумерация функций семейства $\mathcal{G}$ называется *нумерацией, отвечающей универсальной функции* $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Обратно, если задана нумерация системы $\mathcal{G}$, т. е. если задано какое-нибудь отображение φ: $i \to f_i$ натурального ряда на $\mathcal{G}$, то функция $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, определенная формулой

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = f_{x_0}(x_1, \ldots, x_n),$$

является универсальной для $\mathcal{G}$. Каждой примитивно (частично) рекурсивной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно сопоставить терм, отражающий способ выражения функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ через функции $I^n_m(x_1, \ldots, x_n) = x_m$, $s(x) = x+1$ и $o(x) \equiv 0$ с помощью операций суперпозиции, примитивной рекурсии (и минимизации). Пронумеровав все термы, можно получить нумерацию всех примитивно (частично) рекурсивных функций. Нумерации такого сорта принято называть *геделевскими* [1]). В дальнейшем мы будем считать, что зафиксирована некоторая геделевская нумерация. Частично рекурсивная n-местная функция, имеющая номер x в этой нумерации, будет обозначаться через $\varphi_x^{(n)}$. Верхний индекс будет опускаться, если не имеется других указаний на число переменных функции $\varphi_x^{(n)}$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1 (о функции, универсальной для совокупности всех n-местных примитивно рекурсивных функций). *Класс всех примитивно рекурсивных n-местных функций имеет общерекурсивную универсальную функцию.*

Эта универсальная функция (соответствующая выбранной геделевской нумерации) будет обозначаться через $D(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема 2 (об универсальной функции). *Существует частично рекурсивная функция $U(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, универсальная для совокупности всех n-местных частично рекурсивных функций.*

Понятие универсальной функции часто используется для проведения доказательств с помощью так называемой «*диагонализации*». Примером может служить следующее доказательство существования общерекурсив-

---

[1]) Формальное определение геделевской нумерации можно найти в книге А. И. Мальцева «Алгоритмы и рекурсивные функции».

ной функции, не являющейся примитивно рекурсивной. Пусть $D(x_0, x_1)$ — универсальная функция для класса одноместных примитивно рекурсивных функций. Из п. а) определения универсальной функции следует, что $D(x_0, x_1)$ всюду определена. Рассмотрим $g(x) = D(x, x)+1$. Функция $g(x)$ не является примитивно рекурсивной. В самом деле, если бы $g(x)$ была примитивно рекурсивной, то для некоторого j и для всех x выполнялось бы равенство $D(j, x)=g(x)$. Но при $x=j$ это равенство обращается в противоречивое соотношение

$$D(j, j)=g(j)=D(j, j)+1.$$

Важную роль играет так называемая $(s—m—n)$-теорема, принадлежащая Клини.

Т е о р е м а 3. *Для любых* m, $n \geqslant 1$ *существует примитивно рекурсивная функция* $s^{(m+1)}$ *такая, что для всяких* $x, y_1, \ldots, y_m$

$$\varphi_x^{(m+n)}(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) = \varphi_{s(x, y_1, \ldots, y_m)}^{(n)}(z_1, \ldots, z_n).$$

Пусть T — машина Тьюринга, а K — некоторая конфигурация. *Временная сложность процесса вычисления* $t_T(K)$ определяется как число шагов, которые сделает машина T при переходе от K к заключительной конфигурации, если T применима к K. Функция $t_T(K)$ не определена, если T не применима к K. *Зоной процесса вычисления* называется минимальная часть ленты, содержащая все ячейки ленты, входящие хотя бы в одну конфигурацию, встречающуюся в процессе вычисления. *Емкостная сложность* $s_T(K)$ определяется как длина зоны процесса вычисления с начальной конфигурацией K, если T применима к конфигурации K. Функция $s_T(K)$ не определена, если T не применима к K. Через $\omega_T(K)$ обозначается число изменений направления движения головки, а через $r_T(K)$ — максимальное число прохождений головки через границу между двумя соседними ячейками зоны в процессе вычисления (максимум берется по всем парам соседних ячеек). Функции $\omega_T(K)$ и $r_T(K)$ не определены, если T не применима к K. Если в качестве конфигурации K берется начальная конфигурация для слова P, то функции сложности обозначаются соответственно через $t_T(P)$, $s_T(P)$, $\omega_T(P)$ и $r_T(P)$. Если q_T — некоторая функция сложности, то $q_T(n) = \max\limits_{P:\, \lambda(P) \leqslant n} q_T(P)$.

3.1. Доказать, что функция, универсальная для одноместных примитивно рекурсивных функций

а) принимает все значения;

б) принимает каждое значение бесконечное число раз.

3.2. Показать, что в геделевской нумерации каждая одноместная примитивно рекурсивная функция имеет счетное число номеров.

3.3. Доказать, что не существует частично рекурсивной универсальной функции для семейства всех n-местных общерекурсивных функций.

3.4. Доказать, что существуют частичные числовые функции, не являющиеся частично рекурсивными. Дать два доказательства, одно из которых основано на сравнении мощностей множества частично рекурсивных функций и множества всех частичных числовых функций, а другое — на «диагонализации».

3.5. Привести пример частичной числовой функции, принимающей ровно одно значение и не являющейся частично рекурсивной.

3.6. Доказать, что функция f не является частично рекурсивной.

1) $$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если значение } \varphi_x(y) \text{ определено,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

2) $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_x(x) \text{ определено,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

3) $$f(x, y) = \begin{cases} \varphi_x(y), & \text{если } \varphi_x(y) \text{ определено,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

4) $$f(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_x(y) = z, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

5) $$f(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{если существует } y, \text{ при котором } \varphi_x(y) = z, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

3.7. Выяснить, является ли функция f частично рекурсивной.

1) $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_x(x) = 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

2) $$f(x) = \begin{cases} \text{не определено,} & \text{если } \varphi_x(x) \text{ определено,} \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

3) $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если единица принадлежит множеству значений функции } \varphi_x, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_x \text{ является примитивно рекурсивной,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если в десятичном разложении числа } \pi \text{ имеется бесконечное число нулей,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

3.8. Пусть $u(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — частично рекурсивная функция, универсальная для некоторого непустого подмножества M общерекурсивных функций, такого что $K_{\text{ор}} \setminus M$ бесконечно. Путем «диагонализации» указать счетное множество общерекурсивных функций, не принадлежащих M.

3.9. Показать, что если функция $f(x)$ частично рекурсивна, то и всякая функция, отличающаяся от $f(x)$ на конечном множестве значений аргумента, является частично рекурсивной.

3.10. Пусть $U(x, y)$ — функция, универсальная для множества всех одноместных частично рекурсивных функций. Доказать, что функция $f(x)=U(x, x)+1$ не имеет рекурсивных доопределений (иными словами, всякая всюду определенная функция, совпадающая с $f(x)$ везде, где $f(x)$ определена, а в остальном произвольная, не является частично рекурсивной).

3.11. Пусть частично рекурсивная функция $f(x)$ такова, что функция $h(x)$, определяемая условием:

$$h(x)=\begin{cases} 0 & \text{в тех точках, где } f(x) \text{ определена,} \\ 1 & \text{в точках, где } f(x) \text{ не определена,} \end{cases}$$

рекурсивна. Показать, что функция $f(x)$ имеет рекурсивное доопределение.

3.12. Привести пример двоичной последовательности $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$, которая порождается подходящим автономным детерминированным оператором и удовлетворяет следующему условию: функция $f(x)$, определяемая при всяком $n \geqslant 0$ равенством $f(n)=\alpha_n$, не является общерекурсивной.

3.13. 1) Показать, что если последовательность $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$, является выходной для некоторого автономного о.-д. оператора, то функция $f(x)$, задаваемая при всяком $n \geqslant 0$ соотношением $f(n)=\alpha_n$, является общерекурсивной.

2) Всегда ли такая функция является примитивно рекурсивной?

3.14. Построить пример бесконечной двоичной последовательности $\tilde{\alpha}=\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) не существует автономного о.-д. оператора, для которого $\tilde{\alpha}$ является выходной последовательностью;

2) существует машина Тьюринга, которая, начиная работу на пустой ленте, строит последовательность $\tilde{\alpha}$; при этом для каждого n существует такой момент времени $t_0=t_0(n)$, что для всякого $t \geqslant t_0$ головка машины не посещает ячейки ленты, расположенные левее той, в которой записан символ α_n.

3.15. Привести пример преобразования конечных слов, которое может быть совершено подходящей машиной Тьюринга, но не может быть совершено никаким детерминированным оператором.

3.16. Для заданной функции f построить машину Тьюринга T, правильно вычисляющую f, с верхней оценкой для ее временно́й функции сложности и оценить сверху остальные функции сложности. Входные данные заданы в унарной форме. Внешний алфавит $A=\{0, 1\}$.

1) $f(x, y)=x+y$, $\quad t_T(n) \leqslant cn$;

2) $f(x)=2x$, $\quad t_T(n) \leqslant cn^2$;

3) $f(x)=|x-y|$, $\quad t_T(n) \leqslant cn^2$;

4) $f(x, y)=\left[\frac{x}{y}\right]$, $\quad t_T(n) \leqslant cn^2$;

5) $f(x)=\,]\log_2 x[$, $\quad t_T(n) \leqslant cn^2$.

3.17. Построить машину Тьюринга T, осуществляющую перевод унарной записи числа в двоичную с заданными ограничениями на функции сложности: $t_T(n) \leqslant c_1 n^2$, $s_T(n) \sim n$, $w_T(n) \leqslant c_2 n$, $r_T(n) \leqslant c_3 n$, где c_1, c_2, c_3 — некоторые константы.

3.18. Построить такую машину Тьюринга T, осуществляющую перевод из двоичной записи в унарную, что $t_T(n) \leqslant c_1 n 2^n$, $s_T(n) \sim c_2 n+2^n$, $\omega_T(n) \leqslant c_3 n 2^n$, $r_T(n) \leqslant c_4 n 2^n$, где c_1, c_2, c_3, c_4 — некоторые константы.

3.19. Построить машину Тьюринга T с входным алфавитом A из m букв, преобразующую слово P в слово $P * P$, где символ $*$ не входит в P, и такую, что $t_T(n) \leqslant c_1 n^2$, $s_T(n) \leqslant c_2 n$, $\omega_T(n) \leqslant c_3 n$, $r_T(n) \leqslant c_4 n$.

3.20. 1) Построить машину T, распознающую линейность[1]) произвольной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$. Функция $f(\tilde{x}^n)$ задается двоичным вектором $\tilde{\alpha}_f$ длины $N = 2^n$. Входной алфавит машины есть $A = \{0, 1, \Lambda\}$. Функции $t_T(N)$ и $s_T(N)$ должны удовлетворять неравенствам $t_T(N) \leqslant c_1 N^2$, $s_T(N) \leqslant c_2 N$.

2) Построить машину T, распознающую самодвойственность произвольной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, и такую, что $t_T(N) \leqslant c_1 N^2$, $s_T(N) \leqslant c_2 N$.

3) Построить машину T, распознающую монотонность произвольной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ и такую, что $t_T(N) \leqslant c_1 N^2$, $s_T(N) \leqslant c_2 N$.

3.21. Показать, что для любой машины Тьюринга T и любого слова P

1) $s_T(P) \leqslant t_T(P)$.

2) Существует константа c, такая, что $t_T(P) \leqslant c^{s_T(P)}$.

3.22. Пусть $s_T(n) > n + c$ при любом n. Доказать, что для любого $c_1 \leqslant c$ существует машина T_1, такая, что для всякого слова P выполняется равенство $T(P) = T_1(P)$ и при этом $s_{T_1}(n) \leqslant s_T(n) - c_1$.

---

[1]) Машина, распознающая некоторое свойство входного слова, имеет два заключительных состояния q_0' и q_0''. Машина должна останавливаться в состоянии q_0', если свойство выполнено, и в состоянии q_0'', если свойство не выполнено.

РЕШЕНИЯ, ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ

ГЛАВА I

§ 1

1.1. 1) $\binom{n}{k}$; 2) 2^n. **1.2.** 1) 9, 13, 50; 2) (010011). **1.3.** $\binom{n-1}{k-1}$.

1.5. 1) $n2^{n-1}$; 2) $\binom{n}{k}2^{n-1}$. **1.6.** 1) 2^m; 2) [1] $\binom{m}{\frac{k+m-r}{2}}\binom{n-m}{\frac{k-m+r}{2}}$;

3) [1] $\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{\frac{j+m-r}{2}}\binom{n-m}{\frac{j+r-m}{2}}$.

1.9. Указание. Показать, что число $\psi(n)$ векторов $\tilde{\alpha}\in B_n^{2n}$ таких, что $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\leqslant m/2$ для всех $m=\overline{1,\ 2n}$, удовлетворяет рекуррентному соотношению $\psi(n)=\sum_{i=1}^{n}\psi(i-1)\,\psi(n-i)$, $\psi(0)=\psi(1)=1$. Используя это соотношение, найти, что $\psi(6)=132$.

1.10. $\binom{n-(r+1)(k-1)-1}{k}$.

1.11. 1) Указание. Рассмотреть слой $B^n_{[n/2]}$; 2) Указание. Среди $n+2$ наборов из B^n всегда найдутся два набора одного веса.

1.12. 1) $\binom{n-l}{k-l}$; 2) $\binom{k}{l}$; 3) $2^k+2^{n-k}-1$.

1.13. Полагая, что $0\leqslant l<k\leqslant n$, подсчитаем число $p(n,k,l)$ пар $(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$ таких, что $\tilde{\alpha}\in A$, $\tilde{\beta}\in B$. С одной стороны, $p(n,k,l)=$

---

[1] При a, не являющихся целыми, $\binom{n}{a}$ здесь полагается равным 0.

$=|A|\binom{n-l}{k-l}$, а с другой — $p(n, k, l) \leqslant |B|\binom{k}{l}$. Используя тождество $\binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}=\binom{n}{k}\binom{k}{l}$, получаем требуемое неравенство. В случае $l \geqslant k$ имеем тот же результат.

1.14. 1) Возрастающая цепь длины n содержит в каждом слое по одной вершине. Выбрать вершину в слое B_1^n можно n способами. После того, как вершина цепи, лежащая в B_1^n, выбрана, вершину цепи, лежащую во втором слое, можно выбрать $n-1$ способами и т. д.

1.15. 1) Пусть A — множество попарно несравнимых наборов из B^n, и пусть $A_i = A \cap B_i^n$, а $Z(\tilde{\alpha})$ — множество возрастающих цепей длины n, содержащих вершину $\tilde{\alpha}$. Имеем

$$n! \geqslant \left|\bigcup_{\tilde{\alpha}\in A} Z(\tilde{\alpha})\right| = \sum_{\tilde{\alpha}\in A} |Z(\tilde{\alpha})| = \sum_{i=0}^{n} |A_i|\, i!\,(n-i)! \geqslant$$

$$\geqslant \left[\frac{n}{2}\right]!\, \left]\frac{n}{2}\right[!\, \sum_{i=0}^{n} |A_i| = |A| \left[\frac{n}{2}\right]!\, \left]\frac{n}{2}\right[!$$

Отсюда $|A| \leqslant \binom{n}{[n/2]}$. 2) Указание. При $i \leqslant k \leqslant n/2$ справедливо $i!\,(n-i)! \geqslant k!\,(n-k)!$

1.16. Указание. Каждому числу вида $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$ сопоставим вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ из B^n. Тогда множеству A будет соответствовать множество $A' \subseteq B^n$, состоящее из попарно несравнимых наборов. Применяя результат задачи 1.15, 1), получим утверждение.

1.17. Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — номера тех координат, в которых $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ различаются. Всякий вектор $\tilde{\gamma}$ такой, что $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\gamma} \leqslant \tilde{\beta}$, может быть получен из $\tilde{\alpha}$ заменой в некоторых из перечисленных координат 0 на 1. Число способов произвести такую замену равно 2^k.

1.18. Для B^1 разбиение состоит из единственной цепи $Z=\{(0, 1)\}$. Для B^2 в качестве цепей разбиения можно взять $Z_1=\{(1, 0)\}$ и $Z_2=\{(00), (01), (11)\}$. Свойства 1° и 2° выполнены для этих разбиений. Предположим, что утверждение доказано для кубов размерности $\leqslant n$, и докажем его для B^{n+1}. В силу предположения существует разбиение граней $B_0^{n+1, n+1}$ и $B_1^{n+1, n+1}$ на цепи, удовлетворяющее условиям 1° и 2°. Разбиения в $B_0^{n+1, n+1}$ и $B_1^{n+1, n+1}$ можно выбрать изоморфными, т. е. такими, что цепь $Z_0=\{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_s\}$ тогда и только тогда принадлежит разбиению куба $B_0^{n+1, n+1}$, когда цепь $Z_1 = \{\tilde{\alpha}_1', \tilde{\alpha}_2', \ldots, \tilde{\alpha}_s'\}$, полученная из Z_0 заменой в каждом наборе $\tilde{\alpha}_i$ из Z_0 нуля в $(n+1)$-й координате на единицу, принадлежит разбиению грани $B_1^{n+1, n+1}$. Пусть $Z_0 = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_s\}$ и $Z_1 = \{\tilde{\alpha}_1', \tilde{\alpha}_2', \ldots, \tilde{\alpha}_s'\}$ — две такие изоморфные цепи из разбиений граней $B_0^{n+1, n+1}$ и $B_1^{n+1, n+1}$. Построим две новые цепи $\hat{Z}_0 = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_s, \tilde{\alpha}_s'\}$ и $\hat{Z}_1 = \{\tilde{\alpha}_1', \tilde{\alpha}_2', \ldots, \tilde{\alpha}_{s-1}'\}$. Цепь $\hat{Z}_0$ получена из Z_0 присоединением вершины $\tilde{\alpha}_s' \in Z_1$, а цепь $\hat{Z}_1$ получена из Z_1 отбрасыванием вершины $\tilde{\alpha}_s'$. Поступим так с каждой парой изоморфных цепей. Получим разбиение куба B^{n+1} на непересекающиеся цепи. Выполнение условий 1° и 2° легко проверяется.

1.19. $2^k\binom{n-k}{r}$.

1.20. 2) Покажем, что слой B_1^n — полное множество при $n > 2$. Пусть $\tilde{\alpha}_i$ — вектор из B_1^n, у которого i-я координата равна единице. Пусть заданы расстояния $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}) = r_i$, $i = \overline{1, n}$. Покажем, как восстановить $\tilde{\beta}$. Если $\|\tilde{\beta}\| = k > 0$, то, очевидно, $r_i \in \{k-1, k+1\}$. Пусть $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} r_i \geqslant 2$, и пусть $A(\tilde{\beta}) = \{i : r_i = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} r_j\}$. Тогда i-я координата вектора $\tilde{\beta}$ равна единице, если $i \in A(\tilde{\beta})$, и равна нулю в противном случае. Если $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} r_j = 1$, то $\tilde{\beta} = \tilde{0}$. При $n = 5$ слой B_1^n не является базисным множеством, поскольку множество $\{(00001), (00010), (00100), (01000)\}$ является полным. 3) При n четном и $k = n/2$, при любом $n > 1$ и $k = 0, n$. 4) Пусть $A = \{\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_k\}$ — полная система. Рассмотрим систему равенств $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}) = r_i$, $i = \overline{1, k}$. Очевидно, что $r_i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $i = \overline{1, k}$. Каждый набор $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$, при котором система имеет решение, однозначно определяет некоторый вектор $\tilde{\beta} \in B^n$. Отсюда вытекает, что $(n+1)^k \leqslant 2^n$. Указание. Верхняя оценка для числа векторов в базисной системе может быть получена из того, что система уравнений $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}) = r_i$, $i = \overline{1, k}$, может быть сведена к обычной линейной системе. При $k > n$ некоторые уравнения этой системы выражаются в виде линейной комбинации через остальные. Такие уравнения, а следовательно, и соответствующие им векторы можно удалить.

1.21. Достаточность. Перестановка координат всех векторов из B^n, а также инвертирование координат $i_1, i_2, \ldots, i_k$ всех векторов из B^n не меняет взаимных расстояний между вершинами. Необходимость. Пусть φ — отображение куба B^n на себя такое, что для любых $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ справедливо $\rho(\varphi(\tilde{\alpha}), \varphi(\tilde{\beta})) = \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. Рассмотрим множество $D = B_0^n \cup B_1^n$, являющееся полным в B^n (см. предыдущую задачу). Пусть $\varphi(D)=\{\varphi(\tilde{0}), \varphi(\tilde{\alpha}_1), \ldots, \varphi(\tilde{\alpha}_n)\}$ — образ множества D, а $\tilde{\alpha}_i$ — вектор из B_1^n, у которого i-я координата равна единице. Положим $\tilde{\beta}_i=\varphi(\tilde{0})\oplus\varphi(\tilde{\alpha}_i)$, $i=\overline{1, n}$. Имеем $\|\tilde{\beta}_i\|=\rho(\tilde{0}, \tilde{\beta}_i)=\rho(\varphi(\tilde{0})\oplus\oplus\varphi(\tilde{0}), \quad \varphi(\tilde{0})\oplus\varphi(\tilde{\alpha}_i))=\rho(\varphi(\tilde{0}), \quad \varphi(\tilde{\alpha}_i))=\rho(\tilde{0}, \tilde{\alpha}_i)=1$. Пусть $j(i)$ — номер той координаты вектора $\tilde{\beta}_i$, которая равна единице, $i=\overline{1, n}$. Тогда отображение π: $i\to j(i)$ есть перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Для произвольного $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \ldots \ldots, \alpha_n)$ из B^n положим $\pi(\tilde{\alpha})=(\alpha_{\pi(1)}, \ldots, \alpha_{\pi(n)})$. Покажем, что для всякого $\tilde{\gamma}\in B^n$ справедливо $\varphi(\tilde{\gamma})=\pi(\tilde{\gamma}\oplus\varphi(\tilde{0}))$. Тем самым необходимость будет доказана. В самом деле, $\rho(\varphi(\tilde{\gamma}), \varphi(\tilde{0}))=\rho(\tilde{\gamma}, \tilde{0})$, $\rho(\varphi(\tilde{\gamma}), \varphi(\tilde{\alpha}_i))=\rho(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}_i)$. С другой стороны, $\rho(\pi(\tilde{\gamma}\oplus\varphi(\tilde{0})), \varphi(\tilde{0}))=\rho(\tilde{\gamma}, \tilde{0})$, $\rho(\pi(\tilde{\gamma}\oplus\varphi(\tilde{0})), \varphi(\tilde{\alpha}_i))=\rho(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}_i)$. Очевидно, множество $\varphi(D)$ является полным в B^n, как и D. Отсюда вытекает, что $\varphi(\tilde{\gamma})$ и $\pi(\tilde{\gamma}\oplus\varphi(\tilde{0}))$ совпадают.

1.22. $\binom{2^{n+1}-1}{2^n-1}$.

1.23. 1) Для $n=1$ и $k=\overline{0, 1}$ утверждение справедливо. $\left(\text{Мы полагаем, что } \binom{0}{k}=0 \text{ при всех } k=0, 1, \ldots\right)$. Пусть утверждение доказано для размерностей, меньших или равных $n-1$, и для всех $k=0, 1, \ldots$. Пусть $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, и пусть $\tilde{\alpha}'=(\alpha_1', \ldots, \alpha_{n-1}')=(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Если $\alpha_1=0$, то, очевидно, $|M_k^n(\tilde{\alpha})|=|M_k^{n-1}(\tilde{\alpha}')|=1+\binom{n-1-(i_1-1)}{k}+\ldots \ldots+\binom{n-1-(i_k-1)}{1}=1+\binom{n-i_1}{k}+\ldots+\binom{n-i_k}{1}$. Если $\alpha_1=1$, то $|M_k^n(\tilde{\alpha})|=\binom{n-1}{k}+|M_{k-1}^{n-1}(\tilde{\alpha}')|=\binom{n-1}{k}+1+ +\binom{n-1-(i_2-1)}{k-1}+\ldots+\binom{n-1-(i_k-1)}{1}=1+\binom{n-i_1}{k}+\ldots \ldots+\binom{n-i_k}{1}$. 2) Для произвольных k и $\tilde{\alpha}\in B_k^n$ число $\mu_k(\tilde{\alpha})= =|M_k^n(\tilde{\alpha})|$ будем называть номером набора $\tilde{\alpha}$ в слое B_k^n. Пусть $\tilde{\alpha}\in B_k^n$ — вектор, единичные координаты которого есть $i_1, \ldots, i_k$, $1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n$. Тогда в силу предыдущего $\mu_k(\tilde{\alpha})= =1+\binom{n-i_1}{k}+\ldots+\binom{n-i_k}{1}$. Пусть далее набор $\tilde{\beta}\in B_l^n$ получен из $\tilde{\alpha}$ заменой последних $k-l$ единичных координат на нули. Покажем, что $Z_l^n(M_k^n(\tilde{\alpha}))=M_l^n(\tilde{\beta})$ или, что то же самое, что $Z_l^n(M_k^n(\tilde{\alpha}))=\{\tilde{\gamma}: \mu_l(\tilde{\gamma})\leqslant\mu_l(\tilde{\beta})\}$. Покажем сначала, что для всякого $\tilde{\gamma}\in B_l^n$ такого, что $\mu_l(\tilde{\gamma})<\mu_l(\tilde{\beta})$, существует набор

$\tilde{\delta} \in B_k^n$ такой, что $\tilde{\gamma} < \tilde{\delta}$ и $\mu_k(\tilde{\delta}) \leqslant \mu_k(\tilde{\alpha})$. Выберем в качестве $\tilde{\delta}$ набор, полученный из $\tilde{\gamma}$ заменой последних $k-l$ нулевых координат на единицы. Требуется показать, что $\mu_k(\tilde{\delta}) \leqslant \mu_k(\tilde{\alpha})$. Если $\mu_k(\tilde{\delta}) > \mu_k(\tilde{\alpha})$, то существует такое t, что $a_i = \delta_i$ при $i < t$, $a_t = 0$, $\delta_t = 1$. Рассматривая наборы $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\delta}'$, полученные из $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\delta}$ соответственно заменой последних $k-l$ единичных координат на нули, имеем $\mu_l(\tilde{\alpha}') \leqslant \mu_l(\tilde{\delta}')$, $\tilde{\alpha}' = \tilde{\beta}$, $\mu_l(\tilde{\delta}') \leqslant \leqslant \mu_l(\tilde{\gamma})$. Получаем противоречие с неравенством $\mu_l(\tilde{\beta}) > \mu_l(\tilde{\gamma})$. Аналогично можно показать, что для всякого $\tilde{\gamma} \in B_l^n$ такого, что $\mu_l(\tilde{\gamma}) > \mu_l(\tilde{\beta})$ не существует набора $\tilde{\delta} \in M_k^n(\tilde{\alpha})$ такого, что $\tilde{\gamma} < \tilde{\delta}$. 3) Вытекает из 1) и 2). 4). Пусть $A \subseteq B_k^n$ и A не является начальным отрезком слоя B_k^n. Укажем способ построения такого множества $F \subseteq B_k^n$, что $|F| = |A|$, $\Sigma_{\tilde{\alpha} \in F} \nu(\tilde{\alpha}) < < \Sigma_{\tilde{\alpha} \in A} \nu(\tilde{\alpha})$, $|Z_{k-1}^n(F)| \leqslant |Z_{k-1}^n(A)|$. Тем самым утверждение будет доказано. Обозначим через $K(\tilde{\alpha})$ множество номеров единичных координат набора $\tilde{\alpha}$. Пусть $\tilde{\alpha} \in B_k^n \setminus A$ и $\tilde{\beta} \in A$ — те наборы, на которых достигается $\min |K(\tilde{\sigma}) \setminus K(\tilde{\tau})|$, где минимум берется по всем парам $(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ таким, что $\tilde{\sigma} \in B_k^n \setminus A$, $\tilde{\tau} \in A$, $\nu(\tilde{\sigma}) < \nu(\tilde{\tau})$. Пусть $M = K(\tilde{\alpha}) \setminus K(\tilde{\beta})$, $N = K(\tilde{\beta}) \setminus K(\tilde{\alpha})$. Очевидно, $M \cap N = \varnothing$, $|M| = |N|$. Для произвольных $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\tau}$ из B^n обозначим через $\tilde{\sigma} \setminus \tilde{\tau}$ набор вида $\tilde{\sigma} \oplus (\tilde{\sigma} \cap \tilde{\tau})$, и пусть $\tilde{\alpha}' = \tilde{\alpha} \setminus \tilde{\beta}$, $\tilde{\beta}' = \tilde{\beta} \setminus \tilde{\alpha}$. Ясно, что $\nu(\tilde{\alpha}') < \nu(\tilde{\beta}')$. Положим

$$D = \{\tilde{\gamma} : \tilde{\gamma} \in A,\ \tilde{\alpha}' \cap \tilde{\gamma} = \tilde{0},\ \tilde{\beta}' < \tilde{\gamma};\ (\tilde{\gamma} \setminus \tilde{\beta}') \cup \tilde{\alpha}' \notin A\},$$

$$E = \{\tilde{\delta} : \tilde{\delta} = (\tilde{\gamma} \setminus \tilde{\beta}') \cup \tilde{\alpha}',\ \tilde{\gamma} \in D\},$$

$$F = E \cup (A \setminus D).$$

Очевидно, что $F \subseteq B_k^n$, $|F| = |A|$ и $\sum\limits_{\tilde{\alpha} \in F} \nu(\tilde{\alpha}) < \sum\limits_{\tilde{\alpha} \in A} \nu(\tilde{\alpha})$, поскольку $\nu((\tilde{\gamma} \setminus \tilde{\beta}') \cup \tilde{\alpha}') < \nu(\tilde{\gamma})$ для всех $\tilde{\gamma} \in D$. Остается доказать, что $|Z_{k-1}^n(F)| \leqslant |Z_{k-1}^n(A)|$. Ограничимся указанием. Сначала следует показать, что если $\tilde{\delta} \in Z_{k-1}^n(F) \setminus Z_{k-1}^n(A)$, то $\tilde{\sigma} \cap \tilde{\beta}' = \tilde{0}$ и $\tilde{\alpha}' < \tilde{\sigma}$. Затем показать, что набор $\tilde{\varepsilon} = (\tilde{\sigma} \setminus \tilde{\alpha}') \cup \tilde{\beta}'$ содержится в $Z_{k-1}^n(A) \setminus Z_{k-1}^n(F)$. 5) Указание. Провести индукцию по $k-l$. 6) Пусть k — максимальное целое, при котором $a_k > 0$. Тогда при $l = k-1$ утверждение сводится к пункту 4). При проведении индуктивного шага (индукция ведется по $k-l$) положим $A_i = A \cap B_i^n$, $A_i' = A \cap \left(\bigcup\limits_{j=1}^{k} B_j^n\right)$ и заметим, что

$$Z_l^n(A) = Z_l^n(Z_{l+1}^n(A_{l+1}')) \cup A_l.$$

Ясно, что

$$\min_{C \subseteq B_l^n,\ |C| = m} |Z_l^n(C)| \leqslant \min_{C \subseteq B_l^n,\ |C| > m} |Z_l^n(C)|.$$

В силу индуктивного предположения $\min|Z^n_{l+1}(A'_{l+1})|$ достигается в случае, когда каждое $Z^n_i(A)$, $i>l+1$, является начальным отрезком слоя B^n_i. Но тогда в силу 2) множество $Z^n_{l+1}(A'_{l+1})$ является начальным отрезком. Тогда выбором A_{l+1} множество $Z^n_l(A)=Z^n_{l+1}(A'_{l+1})\cup A_{l+1}$ можно сделать начальным отрезком слоя B^n_l. Отсюда и вытекает утверждение.

1.24. Для каждого $l=\overline{0,n}$ пусть $A_l=A\cap B^n_l$. Число $t(n, m, k)$ пар $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ таких, что $\tilde{\alpha}\in A_m$, $\tilde{\beta}\cap\tilde{\alpha}=\tilde{0}$, $\tilde{\beta}\in B^n_k\cup B^n_{m+k}$. Из условия вытекает, что $\tilde{\beta}\notin A$. С одной стороны, $t(n, m, k)=$ $=a_m\binom{n-m}{k}$. С другой стороны, $t(n, m, k)\leqslant\left(\binom{n}{m+k}-a_{m+k}\right)\times$ $\times\binom{m+k}{m}+\left(\binom{n}{k}-a_k\right)\binom{n-k}{m}$. Отсюда и вытекает утверждение.

1.25. 1) Пусть $\tilde{\alpha}$ — центр множества A; тогда $A'=\{\tilde{\alpha}\oplus\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta}\in A\}$ является искомым множеством. 2) Можно считать в силу 1), что $\tilde{0}$ является центром A. Для построения A' достаточно для каждого $i=\overline{1,n}$ заменить каждый набор $\tilde{\alpha}$ из A_1^i, для которого $\tilde{\alpha}^i\notin A$, набором $\tilde{\alpha}^i$. 3) Указание. Пусть $A\subseteq B^n$ имеет центр $\tilde{0}$ и обладает свойством 1°. Пусть $S^{i,j}$ — преобразование, состоящее в том, что для каждого $\tilde{\alpha}\in A^{i,j}_{10}$ такого, что $\tilde{\alpha}^{i,j}\notin A$, набор $\tilde{\alpha}$ заменяется на $\tilde{\alpha}^{i,j}$. Упорядочим пары (i, j) такие, что $1\leqslant i<j\leqslant n$, следующим образом:

$$(1, n), (1, n-1), \ldots, (1, 2), (2, n),$$
$$(2, n-1), \ldots, (2, 3), \ldots, (n-1, n).$$

Применив к A последовательно все преобразования $S^{i,j}$, начиная с $(i, j)=(1, n)$ и кончая $(i, j)=(n-1, n)$, получим искомое A'. 4) Пусть $A\subseteq B^n$ удовлетворяет условиям задачи. Тогда можно считать, что $\tilde{0}$ является центром A и A удовлетворяет свойствам 1°, 2°. Если для всякого $\tilde{\alpha}\in A$ $\|\tilde{\alpha}\|\leqslant k$, то утверждение верно, так как в силу свойства 2° для каждого i множество $A_i=A\cap B^n_i$ является начальным отрезком слоя B^n_i. Пусть существует $\tilde{\alpha}\in A$ такое, что $\|\tilde{\alpha}\|>k$. Пусть s — наибольшее число, для которого A_s не пусто, а t — наименьшее число такое, что $A_t\neq B^n_t$. Пусть $\tilde{\alpha}$ — набор с наибольшим номером в A_s, а $\tilde{\beta}$ — набор с наименьшим номером в $B^n_t\setminus A_t$. Пусть $B=(A\setminus\{\tilde{\alpha}\})\cup\{\tilde{\beta}\}$. Для доказательства утверждения достаточно показать, что $|\Gamma(A)|\geqslant|\Gamma(B)|$. Пусть $N(\tilde{\alpha})=\{\tilde{\gamma}:\tilde{\gamma}\in\Gamma(A)$, $\tilde{\gamma}\notin\Gamma(A\setminus\{\tilde{\alpha}\})\}$ и $N(\tilde{\beta})=\{\tilde{\gamma}:\tilde{\gamma}\in\Gamma(B)$, $\tilde{\gamma}\notin\Gamma(B\setminus\{\tilde{\beta}\})\}$. Ясно, что $\Gamma(B)=(\Gamma(A)\cup N(\tilde{\beta})\cup\{\tilde{\alpha}\})\setminus(N(\tilde{\alpha})\cup\{\tilde{\beta}\})$. Таким образом, нужно показать, что $|N(\tilde{\alpha})|\geqslant|N(\tilde{\beta})|$. Пусть $\tilde{\delta}\in B^n$ —

произвольный набор, обозначим через $q(\tilde{\delta})$ число $i_1 - 1$, где i_1 — наименьший номер единичной координаты набора $\tilde{\delta}$. Тогда $|N(\tilde{\alpha})| = q(\tilde{\alpha})$, $|N(\tilde{\beta})| = q(\tilde{\beta})$. Пусть $\tilde{\gamma} \in B_t^n$ — набор, полученный из $\tilde{\alpha}$ заменой последних $s - t$ единичных координат на нули. Тогда $q(\tilde{\alpha}) \geqslant q(\tilde{\gamma})$. Но из $\nu(\tilde{\gamma}) > \nu(\tilde{\beta})$ следует, что $q(\tilde{\gamma}) \geqslant q(\tilde{\beta})$. Отсюда и вытекает утверждение.

1.26. 2) В качестве A такого, что $|A| = 2^{n-1}$, можно взять любую $(n-1)$-мерную грань, содержащую $\tilde{1}$, а при нечетном n можно взять множество $\{\tilde{\alpha}: \|\tilde{\alpha}\| \geqslant (n+1)/2\}$. С другой стороны, если $|A| > 2^{n-1}$, то в A найдутся два противоположных набора, пересечение которых есть $\tilde{0}$.

1.27. 1) У к а з а н и е. Рассмотреть множество $\left\{\tilde{\alpha}: \|\tilde{\alpha}\| \geqslant \right.$ $\left. \geqslant \left] \frac{n+k+1}{2} \right[, \ \tilde{\alpha} \in B^n \right\}$.

1.28. 1) Аналогично 1.25. 2) $A = \{\tilde{\alpha}: \tilde{\alpha} \in B^n, \|\tilde{\alpha}\| - \text{четное}\}$.

1.31. 1) Каждой грани $B^{n, i_1, \ldots, i_k}_{\sigma_1 \ldots \sigma_k}$ направления $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ можно взаимно однозначно сопоставить ее *код* — вектор $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ с координатами $\gamma_i \in \{0, 1, -\}$, $i = \overline{1, n}$, такой, что $\gamma_{i_1} = \sigma_1, \ldots, \gamma_{i_k} = \sigma_k$, а в остальных координатах стоят прочерки. Заполнить фиксированные k мест нулями и единицами можно 2^k способами. 4) Искомое число равно числу векторов $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ с k координатами из множества $\{0, 1\}$ и $n - k$ прочерками. Выбрать k мест из n для значащих символов, т. е. для 0 и 1, можно $\binom{n}{k}$ способами, заполнить фиксированные k мест нулями и единицами можно 2^k способами. 6) Код k-мерной грани, содержащей заданную вершину $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, можно задать, расставив k прочерков вместо некоторых k координат вектора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. 8) Пересечение двух граней есть грань. Выбрать грань размерности j в грани размерности l можно $\binom{l}{j} 2^{l-j}$ способами. Тем самым в коде грани размерности k уже зафиксированы l координат. Среди остальных $n-l$ координат необходимо расставить $k - j$ прочерков. Это можно сделать $\binom{n-l}{k-j}$ способами.

1.33. Пусть $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$ — коды граней g_1, g_2, g_3 соответственно. Две грани не пересекаются тогда и только тогда, когда существует координата, в которой коды этих граней имеют значащие символы, причем эти символы противоположны. Если же грани g_1, g_2 пересекаются, то код их пересечения содержит значащие символы в тех координатах, где хотя бы один из кодов $\tilde\gamma_1$, $\tilde\gamma_2$ имеет значащую координату, причем значащие координаты кода пересечения совпадают с соответствующими координатами хотя бы одного из кодов $\tilde\gamma_1$, $\tilde\gamma_2$. Если $\tilde\delta$ — код пересечения граней g_1 и g_2 и грань g_3 не имеет общих вершин с этим пересечением, то найдется i такое, что i-е координаты векторов $\tilde\delta$ и $\tilde\gamma_3$ являются значащими и не совпадают. Но тогда i-я координата вектора $\tilde\gamma_3$ не совпадает со значащей i-й координатой одного из векторов $\tilde\gamma_1$ или $\tilde\gamma_2$. Это означает, что соответствующие грани не пересекаются. Противоречие.

1.34. Задача легко сводится к случаю, когда $\sum_{i=1}^{s} 2^{n_i} = 2^n$. Проведем доказательство для этого случая индукцией по n. Для $n = 0$, 1 утверждение, очевидно, справедливо. Переход $n \to n+1$. Пусть $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} n_i \geqslant 1$. Положим $n_i' = n_i - 1$. Тогда n_i' — неотрицательные числа и $\sum_{i=1}^{s} 2^{n_i'} = 2^n$. По индуктивному предположению существует разбиение каждой из граней $B_0^{n+1,\, n+1}$ и $B_1^{n+1,\, n+1}$ куба B^{n+1} на грани размерностей $n_1', \ldots, n_s'$. Выберем эти разбиения одинаковыми, т. е. такими, что для каждого $i = \overline{1, s}$ объединение граней размерности n_i' образует грань g_i размерности n_i. Получим нужное разбиение. Если $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} n_i = 0$, то пусть m — число тех i, для которых $n_i = 0$. Из условия $\sum_{i=1}^{s} 2^{n_i} = 2^{n+1}$ вытекает, что m — четно. Рассмотрим новую совокупность $n_1', n_2', \ldots, n_{s-m/2}'$, полученную из прежней путем замены m нулей на $m/2$ единиц. Построим, как в предыдущем случае, разбиение куба B^{n+1} на грани, а затем некоторые $m/2$ граней размерности 1 разобьем на m граней размерности 0.

1.36. 1) В е р х н я я о ц е н к а. У к а з а н и е. Рассмотреть $N = \{\tilde\alpha\colon \tilde\alpha \in B^n,\ \|\tilde\alpha\| \text{ — четное}\}$. Нижняя оценка. Пусть $N \subseteq B^n$, $|N| < 2^{n-1}$. Существует (см. 131, 134) разбиение куба B^n на непересекающиеся грани размерности 1. Число граней в таком разбиении равно 2^{n-1}. Отсюда следует, что хотя бы одна из граней не содержит вершин из N. 3). У к а з а н и е. Рассмотреть $N = \{\tilde\alpha\colon\ \tilde\alpha \in B^n,\ \|\tilde\alpha\| \equiv 0 \pmod 3\}$ или $N_1 = \{\tilde\alpha\colon\ \tilde\alpha \in B^n,\ \nu(\tilde\alpha) \equiv 3 \pmod 4\}$. 4) Н и ж н я я о ц е н к а. Заметим, что для того чтобы вершина $\tilde\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ содержалась в $(n-2)$-мерной грани с кодом $\tilde\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ (см. решение задачи 1.31), имеющим значащие координаты в разрядах i и j, нужно, чтобы $\alpha_i = \gamma_i$, $\alpha_j = \gamma_j$. Пусть $N \subseteq B^n$, $|N| = m$, — множество такое, что в каждой $(n-2)$-мерной грани содержится вершина $\tilde\alpha$ из N.

Рассмотрим двоичную матрицу M, строками которой являются векторы из N. Из предыдущего замечания вытекает, что для каждой пары чисел (i, j), $1 \leqslant i < j \leqslant n$, и любой пары (σ, τ), $\sigma, \tau \in \{0, 1\}$, должна найтись строка $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такая, что $\alpha_i = \sigma$, $\alpha_j = \tau$. Отсюда вытекает, что любые два столбца матрицы M попарно несравнимы. Число попарно несравнимых двоичных наборов длины m не превосходит $\binom{m}{[m/2]}$. Отсюда $\binom{m}{[m/2]} \geqslant n$. Верхняя оценка. Пусть m — наименьшее целое такое, что $\binom{m}{[m/2]} \geqslant n$. Построим двоичную матрицу M с n строками и m попарно несравнимыми столбцами. Добавим к матрице M строки $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$. Тогда полученная совокупность векторов-строк будет «протыкающей» для множества всех $(n-2)$-мерных граней куба B^n.

1.37. Для $n = 1, 2$ утверждение очевидно. Пусть $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_{2^n}$ является циклом в B^n. Пусть $\tilde{\beta}\sigma$, где $\tilde{\beta} \in B^n$, $\sigma \in \{0, 1\}$, обозначает вектор длины $n+1$, первые n координат которого совпадают с соответствующими координатами набора $\tilde{\beta}$, а $(n+1)$-я координата равна σ. Тогда последовательность $\tilde{\alpha}_1 0, \tilde{\alpha}_2 0, \ldots, \tilde{\alpha}_{2^n} 0, \tilde{\alpha}_{2^n} 1, \ldots, \tilde{\alpha}_2 1, \tilde{\alpha}_1 1$ является циклом в B^{n+1}, содержащим все его вершины.

1.39. 1) Да. 2) Нет. 3) Да. 4) Да.

1.43. Указание. Заметить, что если наборы $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ и $\tilde{\sigma}' = (\sigma_1', \ldots, \sigma_n')$ сравнимы, то одна из сумм $\sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{\sigma_i} a_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{\sigma_i'} a_i$ больше единицы по абсолютной величине.

§ 2

2.1. $2^{2^{n-1}}$ $(n \geqslant 1)$. **2.2.** 2 $(n \geqslant 1)$. **2.3.** $C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^{k-1}$, где $m = 2^n$ $(n \geqslant 1, k \geqslant 1)$. **2.7.** 2) 2^{n+1} $(n \geqslant 1)$. **2.10.** 1) 5 способами. 2) 9 способами.

2.12. 1) *Базис индукции.* Если сложность формулы равна единице (над множеством связок $M = \{\neg, \&, \vee, \rightarrow\}$), то эта формула имеет один из следующих видов: $(\neg x)$, $(x \,\&\, y)$, $(x \vee y)$, $(x \rightarrow y)$ (с точностью до обозначения переменных). Поэтому утверждение очевидно для формул сложности 1. *Индуктивный шаг.* Пусть утверждение справедливо для всех формул (над множеством связок M), имеющих сложность, не превосходящую числа l $(l \geqslant 1)$. Возьмем произвольную формулу $\mathfrak{A}$ (над M), сложность которой равна $l+1$. Будем считать, для определенности, что $\mathfrak{A}=(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C})$ (остальные случаи рассматриваются аналогичным образом). Очевидно, что связка $\vee$, стоящая между формулами $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$, имеет индекс, равный 1. Далее, если связка в формуле $\mathfrak{B}$ (или $\mathfrak{C}$), рассматриваемая как связка формулы $\mathfrak{B}$ (соответственно, $\mathfrak{C}$), имеет индекс больше, чем 1, то в формуле $\mathfrak{A}$ индекс этой связки уменьшиться не может. Если же связка в $\mathfrak{B}$ (или $\mathfrak{C}$) имеет индекс, равный 1, то в формуле $\mathfrak{A}$ ее индекс будет равен 2 (индекс увеличивается потому, что в формуле $\mathfrak{A}$ перед подформулой $\mathfrak{B}$ есть левая скобка).

2.15. 3) (0 1 0 0). 2.18. 3) $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}$. 2.19. 2) $f_1(x, y)\equiv 0$, $f_2(x, y)=x$, $f_3(x, y)=y$, $f_4(x, y)=x\oplus y$. 2.20. 1) $((x\downarrow y)\downarrow\downarrow(x\downarrow y))$. 2) $((x\downarrow y)\downarrow((x\downarrow x)\downarrow(y\downarrow y)))$. 2.21. 1) $((x\mid y)\mid(x\mid y))$. 2) $((x\vee(x\vee y))\sim y)$. 3) Нельзя.

2.22. 2) Функция, реализуемая формулой над множеством $\{\to\}$, принимает значение 1 не менее чем на половине наборов значений аргументов. Этому условию функция xy не удовлетворяет.

2.23. Вообще говоря, нельзя. Пример: $S=\{\neg\}$, функция $\bar{x}$ не реализуема над S формулой четной глубины.

2.24. Если над множеством S реализуются только константные функции, то утверждение очевидно. Пусть над S реализуема некоторая функция $f(\tilde{x}^n)\not\equiv\text{const}$. Отождествляя в функции $f(\tilde{x}^n)$ и в реализующей ее формуле все переменные, получаем функцию $\varphi(x)$ (и соответствующую ей формулу $\mathfrak{A}(x)$). Надо рассмотреть следующие три случая: а) $\varphi(x)$ — константа, б) $\varphi(x)=x$ и в) $\varphi(x)=\bar{x}$. Получив (в случаях а) и в)) формулу, реализующую функцию x (и имеющую глубину не меньше 1), мы сможем строить для каждой конкретной функции, реализуемой формулой над S, формулу сколь угодно большой глубины. Пусть $\varphi(x)\equiv 0$. Тогда найдется набор $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, на котором функция f равна 1. Заменим все x_i, соответствующие $\alpha_i=1$, на x, а остальные x_i — на $\varphi(x)\equiv 0$. Получим функцию $\psi(x)=x$. Если же $\varphi(x)\equiv 1$, то аналогичным способом получаем функцию $\bar{x}$.

2.26. 2) $x\vee y=(x\to y)\to y$. 3) $x\sim y=(x\to y)\,\&\,(y\to x)$.

2.30. 2) Вообще говоря, нельзя. Пример: $\mathfrak{A}=y_2\to x$ — формула, не являющаяся тождественно истинной; однако формула $S^{x}_{y_1\to y_2}\mathfrak{A}\,\big|=y_2\to(y_1\to y_2)$ — тождественно истинная.

2.31. 1) Если предположить, что $f(0, 0)=0$, то, беря $x=y=z=0$, имеем $f(f(0, f(0, 0)), f(f(0, 0), f(0, 0)))=f(f(0, 0), f(0,0))=0$, что противоречит условию задачи. Итак, $f(0,0)=1$

Полагая затем $f(0, 1)=0$, имеем (при $x=y=z=0$) $f(f(0, f(0, 0))$, $f(f(0, 0), f(0, 0)))=f(f(0, 1), f(1, 1))=f(0, f(1, 1))$ и, в силу условия задачи, должно выполняться соотношение $f(1, 1)=0$. Но, рассматривая затем $x=0$, $y=z=1$, видим, что $f(f(0, f(1,1))$, $f(f(0, 1), f(0, 1)))=f(f(0, 0), f(0, 0))=0$, а это противоречит условию задачи. Таким образом, $f(0, 1)=1$. Наконец, предположим, что $f(1, 1)=0$. Полагая $x=y=0$ и $z=1$, получаем $f(f(0. f(0, 1)), f(f(0,0), f(0, 1)))=f(f(0, 1), f(1, 1))=f(1, 0)$. Принимая во внимание условие задачи, имеем $f(1, 0)=1$. Но тогда $f(f(1, f(1, 1)), f(f(1, 1), f(1, 1)))=f(f(1, 0), f(0, 0))= =f(1, 1)=0$ — что противоречит условию задачи. Следовательно, и $f(1, 1)=1$. Итак, $f(0, 0)=f(0,1)=f(1,1)=1$. Значит, $f(x, y)=x \to y$ или $f(x, y)\equiv 1$. Далее эквивалентности а)—д) проверяются непосредственно (например, с использованием основных эквивалентностей). 2) Нет, не вытекают. Достаточно рассмотреть функцию $f(x, y)=x \sim y$

§ 3

3.6. 2^n. **3.7.** 1) 2^{n-1}; 2) 2^n-2; 3) 2^{n-1}. **3.8.** 1) $k\cdot l$; 2) $k\cdot 2^m+ +l\cdot 2^n-k\cdot l$; 3) $k(2^m-l)+l(2^n-k)$. **3.9.** 2) $f_0^1(\tilde{x}^3)=x_2x_3$, $f_0^2(\tilde{x}^3)=\bar{x}_1$, $f_{01}^{1,3}(\tilde{x}^3)=x_2$. **3.11.** $2^{(3/4)\cdot 2^n}$. **3.12.** 12. **3.16.** 4. **3.18.** $\binom{n}{r}$. **3.19.** $2^{S_n^r}-2^{S_n^{r-1}}$, где $S_n^k=\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{n}{i}$. **3.20.** 0, если k нечетно, $\binom{2^n-1}{k}$, если k — четно. **3.23.** $\tilde{\beta}_P=(1101111011100111)$, **3.26.** $f(\tilde{x}^n)=\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n$.

3.29. Указание. Заметить, что при $k=1$ многочлен обращается в единицу на 2^{n-1} наборах. Используя формулу разложения, провести доказательство индукцией по k.

3.30. 1) $2^{n-k}+2^k-1$; 2) $\frac{1}{3}(2^n-(-1)^n)$.

3.31. Для $n=1$ утверждение очевидно. Индуктивный переход от $n-1$ к n. Если $l\leqslant 2^{n-1}$, то по индуктивному предположению существует полином $P(\tilde{x}^{n-1})$ длины $\leqslant n-1$, для которого $|N_P|=l$. Тогда полином $x_nP(\tilde{x}^{n-1})$ обращается в 1 в l вершинах куба B^n. Если $2^{n-1}<l\leqslant 2^n$, то рассмотрим полином $P(\tilde{x}^{n-1})$, обращающийся в единицу на 2^n-l вершинах куба B^{n-1}. Тогда полином $x_nP(\tilde{x}^{n-1})\oplus 1$ является искомым.

§ 4

4.4. Указание. Пусть $K = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $L = x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}$ и $K^\circ L$ есть э. к., полученная из K вычеркиванием тех букв $x_i^{\alpha_i}$, для которых $\alpha_i \neq \beta_i$. Заметить, что каждый импликант функции $f(\tilde{x}^n)$ можно представить в виде $K^\circ L$, где K и L — подходящие э. к. из совершенной д. н. ф. функции $f(\tilde{x}^n)$, быть может совпадающие.

4.5. 1) 2^{n-1}; 2) 2^{n-1}; 3) $3 \cdot 2^{n-3}$; 4) 2^{n-2}; 5) $k + (n-k) \times$ $\times (n-k-1)$.

4.6. 1) $\binom{l}{k}\binom{n-l}{k+m-l}$.

4.8. 2) $\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_4 \vee x_2 x_3 x_4$.

4.9. 1) $2^{2^n - 2^{n-r}}$; 2) $2^{2^n - 2^{n-r}} \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} 2^{-i \cdot 2^{n-r}}$.

4.11. 1) $\bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_4 \vee x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_4$.

4.12. 1) $\bar{x}_1 x_3$, $x_1 x_2$, $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4$, $\bar{x}_2 x_3 x_4$.

4.13. Указание. Показать, что никакие два собственных набора двух различных ядровых импликантов не являются соседними, и использовать тот факт, что множество $N \subset B^n$, такое что $|N| > 2^{n-1}$, всегда содержит ребро (см. 1.44).

4.14. 1) 2^{n-1}; 2) 2^{n-3}; 3) 0; 4) 2^{n-2}; 5) k.

4.15. $2^{2^n - 2^{n-r}} \left(1 - (1 - 2^{-r})^{2^{n-r}}\right)$.

4.18. 1) 1; 2) $5^{2^{n-r}}$; 3) $5^{2^{n-4}}$; 4) 1.

4.20. Одна. Показать, что все простые импликанты являются ядровыми.

4.23. Указание. Провести индукцию по n, используя разложение (3) функции по переменным.

4.24. 1) У двух функций. 2) У 2^{n+1} функций.

4.25. Например, $k = n2^n - 1$.

4.27. 1) 0, если $k \neq 0$, $k + m < n$; $\binom{n}{m}$, если $k = 0$; $\binom{n}{k}$, если $k + m = n$. 2) На двух при четном n и на четырех при нечетном n.

§ 5

5.2. 1) x_3; 2) x_1, x_2; 3) x_4; 4) x_1. 5.4. 1) x_2, x_3; 2) x_1, x_3; 3) x_2. 5.7. m. 5.8. 1) x_1, x_2, x_3, x_4; 2) x_1, x_2, x_3; 3) x_3, x_4; 4) x_1, x_2, x_4.

5.10. 1) $n \geqslant 3$; 2) ни при каком n; 3) $n \geqslant 3$; 4) при четных n; 5) при $n = 4k - 2$, $k = 1, 2, \ldots$

5.12. 2) $|P_2^c(X^3)| = 218$.

5.13. Указание. Из условия задачи вывести, что существуют наборы $\tilde{\alpha}'$, $\tilde{\beta}'$, $\tilde{\gamma}'$ такие, что $\rho(\tilde{\alpha}', \tilde{\beta}') = \rho(\tilde{\beta}', \tilde{\gamma}') = 1$. Пусть $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$ различаются в i-м, а $\tilde{\beta}'$ и $\tilde{\gamma}'$ — в j-м разряде. Тогда переменные x_i и x_j являются существенными.

5.14. Указание. Достаточно показать, что если x_i или $\bar{x}_i$ входит в некоторый простой импликант K функции f, то x_i — существенная переменная. Вычеркивание x_i^σ из K приводит к э. к. K', не являющейся импликантом. Отсюда вытекает существование набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \bar{\sigma}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ такого, что $K'(\tilde{\alpha}) = 1$, но $f(\tilde{\alpha}) = 0$. В то же время $f(\tilde{\alpha}^i) = 1$, поскольку $K(\tilde{\alpha}^i) = 1$. Отсюда и вытекает существенность x_i.

5.15. Указание. Если x_i входит явно в полином $P(\tilde{x}^n)$, то последний можно записать в виде $x_iQ \oplus R$, где Q и R — полиномы, не зависящие от x_i и $Q \not\equiv 0$. Пусть набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ такой, что $Q(\tilde{\alpha}) = 1$; тогда $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = x_i \oplus R(\tilde{\alpha})$. Утверждение вытекает теперь из задачи 5.1, 1).

5.16. Неверно. Указание. Рассмотреть $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$.

5.17. Указание. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ удовлетворяет условию. Тогда существует такое целое i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, что для любых $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ таких, что $\tilde{\alpha} \in B_i^n$, $\tilde{\beta} \in B_{i-1}^n$, $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$. Утверждение вытекает теперь из того, что для всякого i в $B_{i-1}^n \cup B_i^n$ имеются ребра любого из i направлений.

5.18. Указание. См. 5.13.

5.19. Если $f(\tilde{x}^n)$ выражается полиномом степени больше единицы, то без ограничения общности ее можно представить в виде $x_1x_2P_1 \oplus x_1P_2 \oplus x_2P_3 \oplus P_4$, где $P_1 \not\equiv 0$ и P_1, P_2, P_3, P_4 зависят от переменных $x_3, \ldots, x_n$. Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ — такой набор, что $P_1(\tilde{\alpha}) = 1$. Тогда компонента $f_{\alpha_3 \ldots \alpha_n}^{3, \ldots, n}(\tilde{x}^n)$ имеет вид $x_1x_2 \oplus \lambda_1x_1 \oplus \lambda_2x_2 \oplus \lambda_3$ и, следовательно, эта компонента существенно зависит от x_1 и x_2. Отсюда вытекает, что искомые три набора найдутся в грани $B_{\alpha_3 \ldots \alpha_n}^{n;\, 3, \ldots, n}$. Если $f(\tilde{x}^n)$ выражается полиномом первой степени и существенно зависит от x_1 и x_2, то для всякого набора $(\alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ любые три вершины в грани $B_{\alpha_3 \ldots \alpha_n}^{n;\, 3, \ldots, n}$ являются искомыми

5.21. Предположим противное. Без ограничения общности можно считать, что среди всех компонент вида $f^i_\sigma(\tilde{x}^n)$ наибольшее число существенных переменных имеет компонента $f^1_1(\tilde{x}^n)$. Тогда предположение эквивалентно тому, что $f^1_1(\tilde{x}^n)$ фиктивно зависит от некоторой переменной, например от x_2, т. е. $f^1_1 = f^{1,2}_{11} = f^{1,2}_{10}$. Поскольку x_1 — существенная переменная, то выполнено хотя бы одно из соотношений $f^{1,2}_{10} \neq f^{1,2}_{00}$, $f^{1,2}_{11} \neq f^{1,2}_{01}$. Пусть, например, $f^{1,2}_{11} \neq f^{1,2}_{01}$. Тогда функция

$$f^2_1 = \bar{x}_1 f^{1,2}_{01} \vee x_1 f^{1,2}_{11}$$

существенно зависит от x_1 и от всех существенных переменных подфункции $f^{1,2}_{11} = f^1_1$. Это противоречит тому, что f^1_1 имеет максимальное число существенных переменных.

5.22. 1) Верно. Вытекает из предыдущей задачи. 2) Неверно. Указание. Рассмотреть $f(\tilde{x}^3) = x_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3$ и переменные x_1, x_2.

5.23. 1) $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$; 2) 1; 3) x_1, x_2; 4) $x_2 \to x_1$, $x_1 \sim x_2$, 1.
5.25. 6. **5.26.** Можно. Указание. Рассмотреть функцию $x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_4 \vee x_1 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4$.

5.27. Номера координат наборов $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ можно разбить на следующие четыре группы:

$$A_1 = \{i:\ \alpha_i = \beta_i = \gamma_i\},\quad A_2 = \{i:\ \alpha_i = \beta_i,\ \beta_i < \gamma_i\},$$
$$A_3 = \{i:\ \alpha_i < \beta_i,\ \beta_i = \gamma_i\},\quad A_4 = \{i:\ \alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 1\}.$$

Пусть $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\gamma}) = \sigma$, $f(\tilde{\beta}) = \bar{\sigma}$. Тогда, если $f(\tilde{0}) = f(\tilde{1}) = \sigma$, то полагаем $x_i = x$, если $i \in A_1 \cup A_2$, $x_i = y$, если $i \in A_3 \cup A_4$. Если $f(\tilde{0}) = \sigma$, $f(\tilde{1}) = \bar{\sigma}$, то полагаем $x_i = x$ при $i \in A_1$, $x_i = y$ при $i \in A_2$, $x_i = z$ при $i \in A_3 \cup A_4$. Если $f(\tilde{0}) = \bar{\sigma}$, то полагаем $x_i = x$ при $i \in A_1 \cup A_2$, $x_i = y$ при $i \in A_3$, $x_i = z$ при $i \in A_4$. Существенная зависимость полученных функций вытекает из задачи 5.13.

5.29. $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \sigma$, $\sigma \in \{0, 1\}$ при $n \geqslant 2$; $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \vee x_3^{\sigma_3} x_1^{\sigma_1}$, $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, 3}$ при $n = 3$; $x_1^\sigma x_2^{\bar{\sigma}}$, $x_1^\sigma \vee x_2^{\bar{\sigma}}$ при $n = 2$.

5.30. Функция, полученная из $f(\tilde{x}^n)$ отождествлением переменных x_i, x_j, имеет вид $x_i f^{i,j}_{11} \vee \bar{x}_i f^{i,j}_{00}$. Из условия вытекает, что по меньшей мере одна из компонент $f^{i,j}_{11}$, $f^{i,j}_{00}$ не равна тождественно нулю.

5.33. Указание. По меньшей мере одна из функций f, g обращается в единицу на нечетном числе наборов.

5.34. Указание. См. 5.30.

ГЛАВА II

§ 1

1.2. Нет, не вытекает. Можно положить (по определению) для любого множества M из P_2 (в том числе и пустого) $[M]=P_2$, т. е. ввести такую операцию замыкания. Тогда соотношения 1)—3) из задачи 1.1 будут, очевидно, выполняться, а соотношение 4) выполняться не будет.

1.3. 1) Да. 2) Нет. 3) Нет. 4) Да 5) Да. 6) Нет. 7) Нет.

1.4. 1) $\{1\}$. 2) $\{0, 1, x_1, \bar{x}_1\}$. 3) $\{x_1, x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_2 \vee x_3\}$. 4) $\{1, x_1, x_1 \sim x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$.

1.5. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — функция из замкнутого класса, существенно зависящая от всех своих переменных ($n \geqslant 2$). Тогда функция

$$f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_2, \ldots, x_n) = \\ = f(f(y_1, y_2, \ldots, y_n), x_2, \ldots, x_n)$$

существенно зависит от всех $2n-1$ переменных (здесь $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \cap \{x_2, \ldots, x_n\} = \varnothing$). Затем в функцию f_1 на место переменной y_1 можно подставить функцию $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ и получить функцию, существенно зависящую от $3n-2$ переменных и т. д.

1.6. $[0]$, $[1]$, $[x]$, $[0, 1]$, $[0, x]$, $[1, x]$, $[x, \bar{x}]$, $[0, 1, x]$, $[0, 1, x, \bar{x}]$.

1.7. 1) Да. 2) Нет, не всегда. 3) Нет, не всегда (исключением являются только все P_2 и его дополнение — пустой замкнутый класс $\varnothing$).

1.8. 3) $(x \to y) \to y = x \vee y$, $\bar{x} = \overline{x \oplus x \oplus x}$. 4) Из второй функции с помощью отождествления всех переменных получается отрицание. 5) $m(x, y, 0) = xy$, $x^0 \oplus 0 = \bar{x}$.

1.9. 1) $K_1 \subseteq K_2$, но может быть и строгое включение: $K_1 \subset K_2$. 2) $K_1 \not\supseteq K_2$; например, при $M_1 = \{xy, \bar{x}\}$ и $M_2 = \{\bar{x}\}$ имеем $K_1 = [xy]$, а $K_2 = P_2 \setminus [\bar{x}]$. 5) См. 1.9, 2).

1.10. 2) $M_1 = [x, 0]$, $M_2 = [x, 1]$. 3) $M_1 = [\bar{x}, 0]$, $M_2 = [0]$. 5) См. 1.10, 2).

1.11. 1) $\{0, \bar{x}\}$. 2) $\{1, x \oplus y\}$. 3) $\{x \vee y, x \cdot y \cdot z\}$. 4) $\{x \oplus 1, m(x, y, z)\}$, так как $x \oplus y \oplus z = m(m(x, y, \bar{z}), m(x, \bar{y}, z), m(\bar{x}, y, z))$ и в замкнутом классе $[m(x, y, z)]$ любая функция, зависящая существенно от одного аргумента, равна тождественной функции.

1.12. Пусть M — предполный класс (в P_2). Это значит, что $[M] \neq P_2$, но при всякой функции $f \in P_2 \setminus M$ имеем $[M \cup \{f\}] =$

3.10. Как следует из задачи 3.9, 1), данная система порождает множество S_k. Используя функцию $x+j_0(x)$, нетрудно построить любую функцию, выпускающую ровно одно значение (из E_k). После этого, предполагая, что имеются все функции, выпускающие не более i значений ($1 \leqslant i \leqslant k-2$), нужно продемонстрировать, как можно построить произвольную функцию из $P_k^{(1)}$, выпускающую $i+1$ значений. Пусть $g(x)$ — произвольная функция, выпускающая только одно значение. Тогда существуют ровно два значения аргумента — e_0 и e_1, на которых значения функции $g(x)$ равны, т. е. $g(e_0)=g(e_1)$. Элементы из множества $E_k \setminus \{e_0, e_1\}$ обозначим через $e_2, e_3, \ldots, e_{k-1}$. Возьмем две функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ из множества S_k : $g_1(e_r)=r$, $r=0, 1, \ldots, k-1$; $g_2(s)=g(e_s)$, $s=1, 2, \ldots, k-1$, а $g_2(0)=e \in E_k \setminus g(E_k)$. Обозначим функцию $x+j_0(x)$ через $h_0(x)$. Имеем $g(x)=g_2(h_0(g_1(x)))$. Берем теперь произвольную функцию $g'(x)$, выпускающую $i+1$ значений ($1 \leqslant i \leqslant k-2$). Пусть одно из этих значений — e_0'. Предположим, что $g'(b_0)=g'(b_1)$. Рассмотрим функцию $f_1(x)$, совпадающую с $g'(x)$ всюду, кроме $x=b_0$, а $f_1(b_0)=e_0'$. Очевидно, что функция $f(x)$ у нас уже построена (по индуктивному предположению). Пусть $a_1, \ldots, a_s$ — все разные значения, принимаемые функцией $g'(x)$ (здесь $s=k-i-1 \geqslant 1$), и $E_k \setminus \{a_1, \ldots, a_s\}=\{e_0', e_1', \ldots, e_i'\}$. Возьмем функцию $f_2(x)$, имеющую следующий вид:

$$f_2(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x \neq e_0', \\ g'(b_0), & \text{если } x=e_0'. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция $f_2(x)$ выпускает только одно значение, а значит, ее мы умеем строить. Имеем $g'(x)=f_2(f_1(x))$.

3.14. 1) $s(x)=\sim x$. 2) $s(x)=\sim x$. 3) $s(x)=x-1$.

3.15. Это утверждение противоречит тому, что в P_k число предполных классов не больше чем 2^{k^k} (см. задачи 2.17 и 3.11).

3.16. $f(x, y)=x^2y-xy^2+xy-x^2-x-y-1$ — функция Шеффера, а $f(x, y)+x \in T(\{1\})$. Для доказательства того, что $[f(x, y)]=P_3$, достаточно построить три функции: $x+1$, $x+j_0(x)$ и $x+j_0(x)-j_1(x)$ — и воспользоваться теоремами С. Пикар и Е. Слупецкого. Пусть $\varphi(x)=f(x, x)$, тогда $\varphi(\varphi(x))=x+1$, $g(x)=f(x, x+1)=x+j_0(x)$, $f(g(x), g(x))=x^2-j_1(x)$, $g(x^2-j_1(x)) \equiv 1$, $f(x, 1)=x+j_0(x)-j_1(x)$.

3.18. Ни при каких значениях $k \geqslant 3$.

3.22. Это множество не более чем счетно. В то же время существует счетно-бесконечное множество $\{K_n\}$ замкнутых классов, каждый из которых содержит конечное число попарно неконгруентных функций: $K_n=[f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, $n=2, 3, \ldots$, где $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)=j_1(x_1)j_2(x_2)j_2(x_3)\ldots j_2(x_n)$.

3.24. Таким классом является, например, класс $K=[f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots]$, где $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)=j_1(x_1)j_2(x_2)j_2(x_3)\ldots j_2(x_n)$.

3.25. 1) $B=\{k-1, j_0(x), x\dot{-}y\}$. В самом деле, $[B]\supset\{0, 1, \ldots, k-2, k-1\}$, $j_{k-1}(x)=j_0((k-1)\dot{-}x)$, $j_{k-2}(x)=j_0((k-2)\dot{-}x)\dot{-}j_{k-1}(x)$, $j_{k-2}(x)=j_0((k-3)\dot{-}x)\dot{-}$
$$\dot{-}j_0((k-2)\dot{-}x), \ldots$$

Далее, любую функцию $g(x)$ из $P_k^{(1)}$ можно построить так. Сначала строим функцию $g_0(x)=((((k-1)\dot{-}j_0(x))\dot{-}j_0(x))\dot{-}\ldots$ $\ldots\dot{-}j_0(x))$, где $j_0(x)$ вычитается из $k-1$ такое число раз r_0, чтобы $g_0(0)=g(0)$, т. е. $r_0=k-1-g(0)$. Затем из $g_0(x)$ вычитаем $r_1=k-1-g(1)$ раз функцию $j_1(x)$ и т. д. В частности, можно построить $\bar{x}$. Для доказательства полноты системы B остается вспомнить, что $\min(x, y)=x\dot{-}(x\dot{-}y)$, $\max(x, y)=\sim\min(\sim x, \sim y)$ и что система $\{\bar{x}, \max(x, y)\}$ полна в P_k. Далее, очевидно, что функцию $x\dot{-}y$ из B удалить нельзя (ибо тогда останутся только функции, существенно зависящие не более чем от одной переменной). Заметим еще, что $\{j_0(x), x\dot{-}y\}\subset T(\{0, 1\})$, а $\{k-1, x\dot{-}y\}\subset T(\{0, k-1\})$. 3) $\{\sim x, \min(x, y), x+y\}$. Полезно учесть, что $\{\sim x, \min(x, y)\}\subset T(\{0, k-1\})$, $\{\sim x, x+y\}\subset L$ и $\{\min(x, y), x+y\}\subset T(\{0\})$. 5) $\{j_0(x), x+y^2\}$. Здесь стоит иметь в виду, что $j_0(j_0(x))+(j_0(x))^2\equiv 1$ и что $x+y^2$ можно использовать для построения всех одноместных функций (с помощью $j_0(x)$, $j_1(x), \ldots, j_{k-1}(x)$) — почти так же, как использовалась в задаче 1.9 функция $x+y$.

ГЛАВА IV

§ 1

1.1. Вытекает из подсчета пар вида (v, x), где $v\in V$, $x\in X$, v и x инцидентны.

1.2.2) Ни одного. 1.3. Индукция по числу ребер.

1.5.1) Пусть $O(v)$ — множество вершин, смежных с v, а $O'(v)=\{v\}\cup O(v)$. По условию $|O'(v)|\geqslant(n+1)/2$ и $|V\setminus O'(v)|\leqslant(n-1)/2$. Отсюда вытекает, что каждая вершина из $V\setminus O'(v)$ смежна с некоторой вершиной из $O'(v)$, следовательно, граф связен. 2) При четном n нельзя, при нечетном — можно.

1.10. Пусть $[v, u]$, $[w, t]$ — две цепи максимальной длины, не имеющие общих вершин в G. Граф G связен. Следовательно, существует цепь Z, соединяющая, например, вершины v и w. Пусть v_1 — последняя вершина цепи $[v, u]$, встречающаяся на пути от v к w вдоль цепи Z, а w_1 — первая вершина цепи $[w, t]$, встречающаяся на этом пути после v_1. Вершина v_1 из цепи $[v, u]$ делит ее на две части: $[v, v_1]$ и $[v_1, u]$. Пусть цепь $[v, v_1]$ не короче, чем $[v_1, u]$. Аналогично, вершина w_1 делит цепь $[w, t]$ на две части. Пусть $[w, w_1]$ не короче, чем $[w_1, t]$. Тогда цепь $[v, v_1; w_1, w]$ длиннее каждой из цепей $[v, u]$ и $[w, t]$. Противоречие.

1.18. Указание. Рассмотреть дополнения графов G и H. 1.20. $2p$. 1.22. Шесть.

1.24. 1) Пусть v, u, w — три вершины одинаковой степени некоторого графа G из R_n. Предположим, что v и u смежны, а v и w не смежны. Для вершин u и w справедливо хотя бы одно из включений $O(u) \subseteq O(w)$ или $O(w) \subseteq O(u)$. Отсюда и из равенства $|O(u)| = |O(w)|$ вытекает, что $O(u) = O(w)$, и, следовательно, $v \in O(w)$. Рассмотрим теперь пару v и w. По доказанному v и w смежны. Но включение $O'(v) \subseteq O'(w)$ не имеет места, так как $u \in O'(v) \setminus O(w)$. Неверно также и $O'(w) \subset O'(v)$, так как $|O'(w)| = |O'(v)|$. Получаем противоречие.

1.26. 1) Число ребер графа G равно сумме чисел ребер графов H_i, деленной на $n-1$. 2) Вытекает из 1). 1.28. Два.

1.34. 1) Существует. 2) Не существует. 1.35. Верно 1.39. 2) Неверно.

§ 2

2.5. Пусть G — плоский двухсвязный граф не менее чем с двумя внутренними гранями. Если существует внутренняя грань, отделенная от внешней грани единственной простой цепью то, удаляя эту цепь, получим двухсвязный граф (доказать это утверждение). Пусть такой грани не существует. Тогда всякая внутренняя грань, имеющая общую цепь с внешней гранью, имеет с ней еще хотя бы одну общую вершину, не лежащую на этой цепи. Покажем, что этот случай невозможен. Пронумеруем все внутренние грани. Связные куски границы внешней грани, принадлежащие одновременно внутренней грани с номером i, пометим индексом i. Тогда найдутся такие индексы i, j, которые встречаются при обходе границы внешней грани в порядке i, j, i, j. Обозначим соответствующие куски границы через Γ_{i1}, Γ_{j1}, Γ_{i2}, Γ_{j2}. Выберем на этих кусках по одной точке плоскости:

a_1, b_1, a_2, b_2. Тогда точки a_1 и a_2 можно соединить кривой, все точки которой, за исключением a_1 и a_2, являются внутренними точками грани с номером i, а точки b_1 и b_2 можно соединить кривой, внутренняя часть которой лежит в грани с номером t. Кривые пересекаются в некоторой точке d, которая, таким образом, оказывается внутренней точкой двух различных граней. Получили противоречие.

2.9. Пусть G — двухсвязный планарный граф, а G' — его плоская реализация. Пусть n — число вершин, m — число ребер, r — число граней графа G' (включая и внешнюю). В силу задачи 2.6 имеем $r=m-n+2$. Число пар вида (v, x), где v — вершина, инцидентная ребру x, равно $2m$. С другой стороны, это число равно сумме степеней вершин графа. Поскольку каждая степень по условию не меньше чем 6, то $2m \geqslant 6n$, т. е. $m \geqslant 3n$. Граница каждой грани имеет не менее трех ребер, а каждое ребро принадлежит границе не более двух граней. Отсюда $3r \leqslant 2m$. Нетрудно убедиться, что система $r=m-n+2$, $m \geqslant 3n$, $3r \leqslant 2m$ несовместна.

2.14. Предположим, что граф K_5 является планарным. Пусть K_5' — его плоская реализация. Тогда число r граней графа K_5' равно $r=m-n+2$, где m — число ребер, n — число вершин. Аналогично тому, как в задаче 2.9, имеем $3r \leqslant 2m$. Отсюда $m \leqslant 3n-6$. Но $m=10$, $n=5$. Получили противоречие. При доказательстве непланарности графа $K_{3,3}$ заметить, что каждый его цикл содержит не менее четырех ребер, и, предположив, что $K_{3,3}$ планарный, воспользоваться 2.11.

2.22. Каждая вершина шестисвязного графа имеет степень не меньше 6 (см. 2.9).

2.27. 3) $\chi(B^n)=2$, $\chi'(B^n)=n$.

2.28. Две.

2.45. 1) Пусть $\tau(m)$ — число тупиковых покрытий цепи длины m. Тогда $\tau(m)=\tau(m-2)+\tau(m-3)$, $\tau(1)=\tau(2)=\tau(3)$. Решение рекуррентных соотношений такого вида см. в § 3 гл. VIII.

2.49. 1) $\bar{\nu}_k(G)$ равно среднему числу вершин, не смежных с вершинами подмножества $U \subseteq V$ мощности k. Следовательно, существует такое подмножество U_0, $|U_0|=k$, что $\nu(U_0) \leqslant \bar{\nu}_k(G)$. Если W — множество вершин, не смежных с вершинами из U_0, то $W \cup U_0$ — вершинное покрытие мощности, не превосходящей $k+\bar{\nu}_k(G)$. 2) Пусть $e(v, u)=1$, если вершины v и u не смежны, и $e(v, u)=0$, если v и u смежны. Пусть $S_k(v)$ — количество подмножеств $U \subseteq V$, составленных из k вершин, ни одна из которых не смежна с v, а $d(v)$ — степень вершины v. Тогда

$$\sum_{U\subseteq V,\,|U|=k} \nu(U) = \sum_{U\subset V,\,|V|=k}\ \sum_{v\in V} e(v,\, u) =$$
$$= \sum_{v\in V} S_k(v) = \sum_{v\in V} \binom{n-d(v)}{k} \leqslant |V| \binom{n-d_0}{k}.$$

Отсюда

$$\nu_k(G) \leqslant |V| \prod_{i=0}^{|V|-1} \left(1 - \frac{d_0}{|V|-i}\right).$$

§ 3

3.2. Доказательство можно провести индукцией по числу вершин орграфа. На индуктивном шаге полезно удалить из орграфа одну из вершин v_1 или v_2.

3.5. Применить индукцию по числу k.

3.8. Утверждение можно доказать индукцией по числу вершин в турнире.

3.10. Неравенство очевидно при $n=1$. Пусть оно справедливо для таких n, что $1 \leqslant n \leqslant m$. Рассмотрим турнир T с $m+1$ вершинами. Так как во всяком турнире с $m+1$ вершинами ровно C^2_{m+1} дуг, то найдется вершина v_0 с полустепенью исхода $\geqslant [(m+1)/2]$. Удалив из T вершину v_0, получаем турнир T', который имеет m вершин и содержит множество S, состоящее не менее чем из $f(m)$ согласованных дуг. Дуги, исходящие из v_0, и дуги, принадлежащие S, согласованы. Воспользовавшись индуктивным предположением, имеем

$$f(m+1) \geqslant \left[\frac{m+1}{2}\right] + \left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m+1}{2}\right] = \left[\frac{m+1}{2}\right]\left[\frac{m+2}{2}\right].$$

3.12. Всякая группа четного порядка содержит хотя бы один элемент, обратный к самому себе и отличный от единичного элемента группы. Если бы группа турнира T была четной, то в ней нашелся бы элемент α, удовлетворяющий указанному выше свойству. Так как α — не единичный элемент, то существуют две вершины v_1 и v_2 такие, что $\alpha(v_1)=v_2$ и $\alpha(v_2)=v_1$. Пусть T содержит дугу (v_1, v_2). Тогда дуга $(\alpha(v_1), \alpha(v_2))$ тоже должна была бы принадлежать T. Получили противоречие.

3.15. Доказательство можно провести индукцией по числу сильных компонент турнира. Если в конденсации либо только одна вершина, либо две вершины, то она является транзитивным орграфом по определению.

3.19. Применить индукцию по числу вершин в орграфе. На индуктивном шаге надо удалить одну из вершин с нулевой полустепенью исхода, установив предварительно существование такой вершины в данном орграфе.

3.21. Доказательство можно осуществить индукцией по числу вершин орграфа.

3.25. Применить индукцию по длине контура.

3.29. Доказательство можно провести индукцией по порядку определителя.

§ 4

4.2. Исходя из произвольной вершины дерева, будем строить цепь, присоединяя на каждом шаге по одной новой вершине, пока это возможно. В тот момент, когда этого сделать нельзя, концевые вершины цепи окажутся висячими вершинами дерева. Процесс построения цепи обрывается в силу конечности множества вершин и отсутствия циклов в дереве.

4.4.1) В силу задачи 1.26 по системе $F(G)$ можно восстановить число ребер графа G и его связность.

4.9. Можно провести индукцию по величине радиуса дерева.

4.12. Мощность — континуальная. 4.14. 2. 4.23. Провести доказательство индукцией по длине вектора. 4.28. Верно. 4.30. Верно. 4.31. Вообще говоря, неверно. 4.32. Вообще говоря, неверно. 4.33. $n-1$.

4.34. Неразложимая сеть не имеет параллельных ребер и не является p-разложимой. Отсюда $m \leqslant \binom{n}{2} - 1$. В неразложимой сети каждая внутренняя вершина имеет степень не ниже 3, а полюсы — не ниже 2 при $n > 2$.

4.40. 1) а), б), в). Может. 3) а), б) Не может. 4.43. Рассмотреть Γ_m^p, $m > 3$. 4.52. Неверно.

§ 5

5.2. 1) $2^{\binom{n}{2}}$. 2) $\binom{n^2}{m}$. 5.3. 2) Использовать формулу «включений и исключений». 5.5. 1) Использовать то, что в связном графе $m \leqslant \binom{n}{2}$ и $m \geqslant n-1$. 2) В связном графе с m ребрами не более $m+1$ вершин. Число пар неодинаковых вершин, таким образом, не больше $\binom{m+1}{2}$. Отсюда $\psi(m) \leqslant \binom{\binom{m+1}{2}}{m}$. Далее применяется формула Стирлинга.

5.6. Отметить, что число вершин в графе не превосходит $2m$. Далее — аналогично задаче 5.5, 2).

5.7. См. 5.5, 2) и 5.6.

5.9. 1) Код дерева с m ребрами есть двоичный вектор длины $2m$ с m единичными координатами. 2) См. 4.24.

5.10. Использовать 5.4 и формулу Стирлинга. 5.14. См. VIII. 3.18 и VIII. 3.19.

5.16. Сеть $\Gamma(a, b)$, обладающая свойствами I и II, является результатом подстановки сетей типа Γ_k^p, $k=\overline{1, m+1}$, вместо ребер сети $\Gamma_{n-1}^s(a, b)$. Число таких сетей равно числу размещений m предметов по $n-1$ ящикам так, чтобы ни один из ящиков не был пустым, и равно $\binom{m-1}{n-2}$.

5.17. 2) Использовать 5.14.

5.19. Если граф не связен, то множество его вершин можно разбить на две доли такие, что не существует ребер, соединяющих вершины разных долей. Одна из долей имеет число вершин, заключенное в пределах от 1 до $[n/2]$. Граф с нумерованными вершинами полностью определяется выбором ребер. Число ребер, которые запрещено при этом выбирать, равно $k(n-k)$, где k — число вершин в одной из долей.

5.22. Всякий подграф куба B^n полностью определяется заданием множества вершин. Множество вершин связного подграфа определяется заданием некоторого его остова (дерева, содержащего все вершины). Чтобы задать дерево, являющееся подграфом куба B^n, можно выбрать какую-либо вершину куба, принадлежащую дереву (имеется не более 2^n способов), дерево с k вершинами (не более 4^{k-1} способов). Для каждого ребра дерева указать направление его как ребра куба B^n можно не более чем n способами. Отсюда и вытекает оценка.

5.26. $\binom{n}{3}\dfrac{\binom{\binom{n}{2}-3}{m-3}}{\binom{\binom{n}{2}}{m}}$.   5.29. $\binom{n}{k}2^{-\binom{k}{2}}$.

5.31. Пусть $\delta(n)$ — доля тех графов, у которых $p(G) \geqslant 1$. В силу неравенства (1) имеем: $\delta(n) \leqslant \bar{p}(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда и вытекает результат.

5.32. 2) $Z(\Gamma(K_{2,3}), t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) =$

$$= \frac{1}{2!\,3!}(t_1^2 + t_2)(t_1^3 + 3t_1t_2 + 2t_3).$$

5.33. 1) Возьмем произвольную перестановку $a_1 a_2 \ldots a_n$ чисел множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ и расставим в ней скобки так, чтобы получилась подстановка с цикловой структурой $(j)=(j_1, j_2, \ldots, j_n)$; при этом сначала будут идти j_1 циклов длины 1, затем j_2 циклов длины 2 и т. д. (т. е. подстановка будет иметь следующий вид: $(a_1)(a_2) \ldots (a_{j_1})(a_{j_1+1}a_{j_1+2}) \ldots)$. Предположим теперь, что из двух различных перестановок элементов множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ построены по описанному выше способу две подстановки π_1 и π_2 с цикловой структурой (j). Спрашивается, когда π_1 совпадает с π_2? Совпадение может быть по двум причинам: (1) одинаковые циклы в подстановках π_1 и π_2 стоят на разных местах, (2) циклы хотя и равны (как циклы подстановки), но при указанном выше построении они начинаются с разных элементов (например, (123) и (231)). Первая причина приводит к повторению одной и той же подстановки $\prod\limits_{k=1}^{n} j_k!$ раз, а вторая — к повторению $\prod\limits_{k=1}^{n} k^{j_k}$ раз, причем эти причины действуют независимо друг от друга. 4) Доказательство можно провести индукцией по n с использованием соотношений из пунктов 1) и 2) данной задачи.

5.34. Полезно воспользоваться следующим очевидным фактом: цикл является четной подстановкой тогда и только тогда, когда его длина нечетная.

5.36. Следует из перечислительной теоремы Пойа.

5.37. Проинтерпретировать подходящим образом коэффициенты бинома $1+x$ и воспользоваться перечислительной теоремой Пойа.

5.40. Каждому графу сопоставить набор связных графов — набор всех его компонент связности. Затем применить перечислительную теорему Пойа.

5.42. Всякий турнир однозначно определяется своей конденсацией (с нумерованными вершинами) и набором сильных компонент. Нумерация вершин нужна только для сопоставления им соответствующих сильных компонент турнира.

§ 6

6.3. Четырнадцать. 6.4. См. 6.2. 6.6. Вытекает из того, что всякая функция $f(\tilde{x}^n)$ имеет д. н. ф. сложности не выше $n2^{n-1}$. 6.16. См. 6.15.

6.20. Вытекает из того, что сложность схемы, двойственной к данной, равна сложности исходной схемы, и из 6.18.

6.21. Если схема содержит не более семи контактов, то ее так можно нарисовать на плоскости, что добавление ребра между полюсами оставляет ее плоской. Следовательно, существует двойственная к ней схема. Замена в последней всех контактов вида x^{σ} на $x^{\bar{\sigma}}$ приводит к схеме, реализующей отрицание той функции, которая реализуется исходной схемой.

6.22. Выберем произвольный контакт бесповторной схемы, реализующей булеву функцию f, и рассмотрим цепь, проходящую через этот контакт. Можно так зафиксировать значения переменных, отличных от тех, что входят в выбранную цепь, что все контакты, не входящие в цепь, окажутся разомкнутыми. Полученная схема реализует э. к., зависящую от выбранной переменной. Таким образом, оказывается, что некоторая компонента функции f, а значит и сама f, существенно зависит от выбранной переменной.

6.25. Схема Σ, указанная на рис. 21, имеет среди своих сечений множества $\{x, y\}$, $\{r, w\}$, $\{x, r, v, z\}$ и $\{x, w, t, u\}$. Тогда, если существует бесповторная схема Σ_1, реализующая функцию f^*, то в ней имеются цепи с проводимостями xy, rw, $xrvz$, $xwtu$. Без ограничения общности можно считать, что контакт x примыкает к полюсу a сети Σ_1. Тогда к этому полюсу примыкает также или контакт r, или контакт w. В первом случае в Σ_1 не существует цепи $xrvz$, а во втором — цепи $xwtu$.

6.26. Неверно. Воспользоваться тем, что $f(x_1, \ldots, x_n) = f^*(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, и результатом задачи 6.25.

ГЛАВА V

§ 1

1.1. Пусть $\rho(v, w) \leqslant 2t$ для некоторых v и w из C. Тогда $S_t^n(v) \cap S_t^n(w) \neq \varnothing$. Следовательно, любое отображение ψ: $B^n \to C$ такое, что $S_t^n(u) \subseteq \psi^{-1}(u)$ для всякого $u \in C$, неоднозначно.

1.2. 1) Вообще говоря, неверно. 2) Верно. 3) Вообще говоря, неверно.

1.3. Множества $C_0 = \{\tilde{\alpha} \in C,\ \|\alpha\|$ четно$\}$ и $C_1 = \{\tilde{\alpha} \in C,\ \|\tilde{\alpha}\|$ нечетно$\}$ являются кодами, обнаруживающими одну ошибку. Хотя бы одно из них содержит не менее половины слов из C.

1.4. 1) Обнаруживает одну и исправляет 0 ошибок. 2) Обнаруживает $n-1$ и исправляет $[(n-1)/2]$ ошибок.

1.7. 2) 16. 1.8. 2^{n-1}. 1.9. 2. 1.12. Не существует.

1.13. Пусть для некоторого $n > 7$ существует плотно упакованный $\langle n, 3\rangle$-код. Тогда в силу 1.11 для этого n число $\sum_{i=0}^{3}\binom{n}{i}$ является степенью двойки. Следовательно, для некоторого k выполняется равенство $(n+1)(n^2-n-6)=3\cdot 2^k$. Тогда либо $n+1$ является степенью двойки, либо $n+1$ имеет вид $3\cdot 2^r$ для некоторого натурального r. Если $n+1=2^r$, то $n^2-n+6=3\cdot 2^{k-r}$. Подставляя в последнее равенство $n=2^r-1$, имеем $2^{2r-3}-3\cdot 2^{r-3}+1=3\cdot 2^{k-r-3}$. При $r>3$ левая часть есть нечетное число, превышающее 3, а справа — либо четное число, либо 3. Аналогично рассматривается второй случай.

1.14. Пусть вершины $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta}=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\tilde{\gamma}=(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ образуют $\langle n, d\rangle$-код. Без ограничения общности $\tilde{\alpha}=\tilde{0}$ и $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})=d$. Положим $A_{\sigma\tau}=\{i\colon\ \beta_i=\sigma,\ \gamma_i=\tau\}$, $\sigma, \tau\in\{0, 1\}$. Рассмотрим вершину $\tilde{\delta}$ такую, что $\delta_i=0$ при $i\in A_{11}$, $\delta_i=1$ при $i\notin A_{11}$. Имеем $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\delta})=\|\tilde{\delta}\|=|A_{01}\cup A_{10}\cup \cup A_{00}|\geqslant|A_{01}\cup A_{10}|=\rho(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})\geqslant d$, $\rho(\tilde{\delta}, \tilde{\beta})\geqslant\|\tilde{\gamma}\|\geqslant d$, $\rho(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma})\geqslant \geqslant\|\tilde{\beta}\|=d$.

1.16. Без ограничения общности считаем, что $\tilde{0}\in C$. Для каждого $\tilde{\alpha}\in B^n_{d+1}$ существует и притом единственная вершина $\tilde{\gamma}\in C$ такая, что $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma})\leqslant d$. Поскольку вес всякого ненулевого кодового слова не меньше $2d+1$, то $\tilde{\gamma}\in B^n_{2d+1}$. Пусть $A(\tilde{\gamma})= =\{\tilde{\alpha}\colon\ \tilde{\alpha}\in B^n_{d+1},\ \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma})=d\}$. Тогда $\bigcup\limits_{\tilde{\gamma}\in C\cap B^n_{2d+1}} A(\tilde{\gamma})=B^n_{d+1}$ и для любых $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ из $C\cap B^n_{2d+1}$ имеем $A(\tilde{\gamma}_1)\cap A(\tilde{\gamma}_2)=\varnothing$.

1.17. Кодовое расстояние всякого эквидистантного кода, имеющего мощность, большую, чем 2, четно.

1.20. 1) В каждой из граней $B^{n+d,\,1,\,\ldots,\,d}_{0\,\ldots\,0}$ и $B^{n+d,\,1,\,\ldots,\,d}_{1\,\ldots\,1}$ построим коды C_0 и C_1 мощности $m(n, d)$. Тогда $C_0\cup C_1$ есть $\langle n+d, d\rangle$-код мощности $2m(n, d)$. 3) Указание. Если C есть $\langle n, d\rangle$-код в B^n, то для каждой $(n-1)$-мерной грани g множество $C\cap g$ является $\langle n-1, d\rangle$-кодом.

1.23. Пусть $n<2d$ и C — произвольный $\langle n, d\rangle$-код мощности $m\geqslant 2$. Составим матрицу M, строками которой являются кодовые слова. Пусть R — сумма попарных расстояний между (неупорядоченными) парами кодовых слов. С одной стороны, $R\geqslant\binom{m}{2}d$. С другой стороны, $R=\sum\limits_{i=1}^{n} h_i(m-h_i)$, где h_i —

число единиц в i-м столбце матрицы M. Поскольку $h(m-h) \leqslant \leqslant \frac{m^2}{4}$, то $\frac{m(m-1)}{2} d \leqslant n \frac{m^2}{4}$. Отсюда $m \leqslant \frac{2d}{2d-n}$.

1.25. 3) Пусть C — максимальный $\langle n, k, d\rangle$-код. Тогда множество $C_i = \{\tilde{\alpha}: \tilde{\alpha} \in C, \alpha_i = 0\}$ является $\langle n-1, k, d\rangle$-кодом. Число пар вида $(i, \tilde{\beta})$ таких, что $1 \leqslant i \leqslant n$, $\tilde{\beta} \in C_i$, не превосходит $n \max\limits_i |C_i| \leqslant n \cdot m(n-1, k, d)$. С другой стороны, каждый вектор $\tilde{\alpha} \in C$ порождает $n-k$ таких пар. Отсюда

$$(n-k)\, m(n, k, d) \leqslant nm(n-1, k, d).$$

1.26. Пусть $\tilde{\alpha} \in B^n$, $C \subseteq B^n$, и пусть $C_{\tilde{\alpha}} = \{\tilde{\gamma}: \tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}, \tilde{\beta} \in C\}$. Тогда, если C является $\langle n, d\rangle$-кодом и $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) < d$, то $C_{\tilde{\alpha}} \cap C_{\tilde{\beta}} = \varnothing$. В самом деле, пусть $\tilde{\gamma} \in C_{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\delta} \in C_{\tilde{\beta}}$ и $\tilde{\delta}' = \tilde{\delta} \oplus \tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma} \oplus \tilde{\alpha}$. Тогда $\rho(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}) = \rho(\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\gamma}', \tilde{\beta} \oplus \tilde{\delta}') = \|\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\gamma}' \oplus \tilde{\beta} \oplus \tilde{\delta}'\| = \|(\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}) \oplus (\tilde{\gamma}' \oplus \tilde{\delta}')\| \neq 0$, так как в противном случае $\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta} = \tilde{\gamma}' \oplus \tilde{\delta}'$ и, следовательно, $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \rho(\tilde{\gamma}', \tilde{\delta}')$. Но $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) < d$, а $\rho(\tilde{\gamma}', \tilde{\delta}') \geqslant d$, поскольку $\tilde{\gamma}', \tilde{\delta}' \in C$. Отсюда и вытекает утверждение.

1.27. Вытекает из 1.26 с учетом того, что в любой $(d-1)$-мерной грани куба B^n попарные расстояния между вершинами не превосходят $d-1$, а число вершин равно 2^{d-1}.

§ 2

2.2. Линейно независимой системой является, например, B_1^n. Если s векторов из B^n линейно независимы, то все их комбинации вида (1) представляют собой попарно различные векторы. Если бы нашлось подмножество, состоящее из $n+1$ линейно независимых векторов, то имели бы равенство $|B^n| = 2^{n+1}$.

2.4. Вытекает из того, что (n, k)-код является k-мерным подпространством B^n, т. е. максимальное число линейно независимых векторов в нем равно k и всякая линейная комбинация кодовых векторов принадлежит коду.

2.5. Если в коде существует вектор нечетного веса, то половина кодовых слов имеет нечетный вес, а другая половина — четный. В противном случае все векторы имеют четный вес. Первое утверждение вытекает из того, что число линейных комбинаций, в которые входит заданный вектор нечетного веса, равно числу тех комбинаций, в которых он отсутствует. Все комбинации разбиваются на пары, в которых ровно одна имеет нечетный вес.

2.6. Выбрать ненулевой вектор в B^n можно 2^n-1 способами. Если выбраны i линейно независимых векторов, то соответствующее подпространство имеет 2^i векторов. Всякий вектор из дополнения к этому подпространству составляет с i выбранными векторами линейно независимое множество, а всякий вектор из подпространства выражается линейной комбинацией выбранных векторов. Таким образом, выбрать $(i+1)$-й вектор можно 2^n-2^i способами.

2.7. См. 2.6. **2.8.** 2^{n-1}. **2.10.** Верно.

2.11. 1) $m(C(H))=8$, $d(C(H))=2$; 5) $m(C(H))=32$, $d(C(H))=7$.

2.14. Порождающую матрицу $M(C)$ (n, k)-кода C можно привести к виду (I_kP) путем замены строк их линейными комбинациями и перестановки столбцов. Если вектор $\tilde{\alpha}$ ортогонален каждой строке матрицы $M(C)$, то вектор $\tilde{\beta}$, полученный из $\tilde{\alpha}$ соответствующей перестановкой координат, ортогонален каждой строке матрицы $M(C)$, и обратно. Одна из порождающих матриц кода C^*, двойственного к коду C, порожденному матрицей (I_kP), имеет вид (P^TI_{n-k}), т. е. C^* является $(n, n-k)$-кодом. Отсюда вытекает, что и код C^*, двойственный к C, является $(n, n-k)$-кодом.

2.15. Аналогично 2.5.

2.16. Очевидно, что кодовое расстояние d не меньше минимального веса кодового вектора. Если $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})<d$ для некоторых кодовых слов $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, то, поскольку $\tilde{\alpha}\oplus\tilde{\beta}$ также является кодовым вектором и $\rho(\tilde{0}, \tilde{\alpha}\oplus\tilde{\beta})<d$, приходим к противоречию с условием.

2.17. Вытекает из 2.15 и 2.16.

2.18. Число единиц в матрице кода C равно $\frac{1}{2}|C|n$; с другой стороны, это число не меньше $d(|C|-1)$.

2.20. Пусть $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — вектор веса d, ортогональный к матрице H. Обозначим i-й столбец матрицы H через h_i. Из ортогональности $\tilde{\alpha}$ к каждой строке матрицы H вытекает, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i h_i=\tilde{0}$. Отсюда вытекает соотношение линейной зависимости между теми столбцами h_i, которые входят в линейную комбинацию. Следовательно, каждому $\tilde{\alpha}$ веса d из нулевого пространства матрицы H соответствует совокупность d линейно зависимых столбцов этой матрицы. Таким образом, если каждые $d-1$ столбцов матрицы H линейно независимы, то минимальный вес кодового вектора не меньше d, и обратно, если существует множество из $d-1$ линейно зависимых строк, то существует вектор веса меньше d в ортогональном подпространстве.

2.21. Следствие 2.20.

2.24. 1) Из 2.18 вытекает, что $g(9, 5) \leqslant 10$. Нетрудно построить линейный $\langle 9, 5\rangle$-код мощности 4. Отсюда $g(9, 5) \in \{4, 8\}$. Предположим, что C — линейный $\langle 9, 5\rangle$-код мощности 8. Тогда четыре кодовых вектора имеют нечетный вес. Никакие два из этих четырех не лежат вне B_5^9. Но среди трех векторов из B_5^9 всегда существуют два, расстояние между которыми не больше 4.

§ 3

3.4. Рассмотреть код $\{a, aabb, bb\}$.

3.8. См. 3.7.

3.10. Число слов длины, меньшей чем l, в k-буквенном алфавите равно $\sum_{i=0}^{l-1} k^i = \frac{k^l - 1}{k - 1}$. Отсюда, если $k^l - 1 < m(k-1)$, то в M существует слово длины, не меньшей $\log_k(1+m(k-1))$.

3.11. 1) Провести доказательство индукцией по n. 2) Для всякого разделимого кода существует префиксный код с тем же набором длин кодовых слов (см. [10], раздел 5).

3.18. 1) Провести доказательство индукцией по m.

3.19. Вытекает из 3.18.

3.22. 1) Пусть $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ — двоичный префиксный код и максимальная длина кодового слова равна n. Пусть $w = \alpha_1 \ldots \alpha_{\lambda(w)}$ — слово из C. Пусть $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ — вектор, в котором $\gamma_i = \alpha_i$, $i = \overline{1, \lambda(w)}$, а в остальных координатах стоят прочерки. Тогда вектор $\tilde{\gamma}$ является кодом $(n-\lambda(w))$-мерной грани куба B. Из префиксности кода вытекает, что грани, соответствующие различным кодовым словам, не пересекаются. Отсюда $\sum_{j=1}^{m} 2^{n-\lambda(w_j)} \leqslant 2^n$. 2) Из полноты кода вытекает, что для каждого $\tilde{\alpha} \in B^n$ существует кодовое слово w, являющееся префиксом $\tilde{\alpha}$. Это означает, что набор $\tilde{\alpha}$ содержится в грани, соответствующей слову w. Из префиксности кода вытекает, что грани, соответствующие различным кодовым словам, не пересекаются. Таким образом, совокупность граней, соответствующих словам полного префиксного кода, задают разбиение куба B^n на непересекающиеся грани. Отсюда вытекает равенство. 3) Доказательство аналогично I.1.34.

3.23. 1) Верно. Утверждение вытекает из того, что всякий оптимальный код является полным префиксным кодом.

3.24. Индукция по m.

3.25. Префиксный код с длинами кодовых слов $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ существует тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{m} 2^{-\lambda_i} \leqslant 1$ (см. 3.22). Отсюда $L_m = \min \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$, где минимум берется по всем совокупностям $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ натуральных чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{m} 2^{-\lambda_i} \leqslant 1$. Минимум $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ достигается на таких совокупностях $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, что $|\lambda_i - \lambda_j| \leqslant 1$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$. В самом деле, если существуют такие λ_i, λ_j, что $\lambda_i - \lambda_j \geqslant 2$, то после замены λ_i на $\lambda_i - 1$ и λ_j на $\lambda_j + 1$ величина $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ не изменяется, а условие $\sum_{i=1}^{m} 2^{-\lambda_i} \leqslant 1$ остается выполненным. Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ — совокупность чисел такая, что $\lambda_i = \lambda$ при $i = \overline{1, m-r}$, $\lambda_i = \lambda + 1$ при $m - r < i \leqslant m$, λ — целое. Тогда $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = m\lambda + r$, а условие принимает вид $m2^{-\lambda} - r2^{-\lambda-1} \leqslant 1$. Из условия вытекает, что $\lambda > (\log_2 m) - 1$, и, следовательно, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \geqslant m\,[\log_2 m]$.

3.27. 1) Для $m = 3$, полагая, что $p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 > 0$, имеем $L(P) = p_1 + 2p_2 + 2p_3 = 1 + p_2 + p_3 > 1$. Далее утверждение вытекает из того, что при операции расширения стоимость кода не уменьшается. 2) Для заданных $\varepsilon > 0$ и $m \geqslant 2$ рассмотреть распределение $P = \left(1 - \delta, \frac{\delta}{m-1}, \ldots, \frac{\delta}{m-1}\right)$, где $\delta = \frac{\varepsilon}{\rceil \log_2 m \lceil}$.

ГЛАВА VI

§ 1

1.1. 1) Не является, так как выходной сигнал в момент времени t зависит от входного сигнала в следующий момент времени. 3) Является.

1.2. 3) Не является. 4) Является.

1.3. 2) Является. 3) Является. 5) Является: выход в момент времени t равен отрицанию входа в этот же момент времени.

1.4. 2) Не является. 4) Не является.

1.5. 1) Доопределить до детерминированной функции нельзя. 2) Функция φ допускает доопределение до детерминированной функции. 4) Доопределение возможно.

1.6. 1) Достаточно рассмотреть функцию

$$\varphi(X_1, X_2) = \begin{cases} \tilde{1}^\omega, & \text{если } X_2 = \tilde{0}^\omega, \\ \tilde{x}_1^\omega, & \text{если } X_2 \neq \tilde{0}^\omega \text{ и } X_1 = \tilde{x}_1^\omega. \end{cases}$$

1.9. 2) Вес функции φ равен 2. 1.10. 1) Эквивалентны. 2) Не эквивалентны. 1.11. 2) Является. Например, $\varphi_1 = \varphi_{\tilde{x}^s}$ при $s = 1$ и $\tilde{x}^s = 0$. 3) Не является. 1.12. 1) Является. Вес равен 4. 3) Является. Вес равен 7. 1.13. 2) Если $r=3$, то в качестве подходящей функции можно взять $\varphi(\tilde{x}^\omega) = \langle 3/4 \rangle$.

1.16. При $r=3$ в качестве такой функции можно взять

$$\varphi: \begin{cases} y(1) = x(1), \\ y(t) = (x(t) \oplus x(t-1))\, y(t-1), \quad t \geqslant 2. \end{cases}$$

1.18. См. указание к задаче 1.6, 1).

1.20. 2) Для получения ответа достаточно рассмотреть функцию

$$\varphi(\tilde{x}^\omega) = 00\, x(2)\, x(3) \ldots x(t) \ldots$$

1.22. Является порожденным оператором.

1.24. 2) Если $|A| = 1$ и $|B| \geqslant 2$, то $|\Phi_{A,B}| = \mathrm{c}$. Если $|B| = 1$ и $|A| \geqslant 1$, то $|\Phi_{A,B}| = 1$.

1.25. 1) Если $|A| > 1$, то каждый класс $K_j(s)$ имеет мощность c. 2) Число различных классов равно $|A|^s$.

1.26. 2) Если $|B| = 1$ и $|A| \geqslant 1$, то $|\hat{\Phi}_{A,B}| = 1$.

§ 2

2.1. 4) Канонические уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} y(t) = (x(t) \vee \bar{x}(t))\, \bar{q}(t-1), \\ q(t) = (x(t) \vee \bar{x}(t))\, \bar{q}(t-1), \\ q(0) = 0; \end{cases}$$

входной сигнал $x(t)$ можно опустить, так как функция φ зависит от него несущественно.

2.2. 1) Оператор можно доопределить так, что получится о.-д. оператор веса 4, описываемый такими каноническими уравнениями:

$$\begin{cases} y(t) = \bar{x}(t)\, q_1(t-1)\, q_2(t-1) \oplus q_1(t-1) \oplus q_2(t-1), \\ q_1(t) = m(x(t),\ q_1(t-1),\ q_2(t-1)) \oplus x(t) \oplus q_1(t-1), \\ q_2(t) = \bar{x}(t)\, (\bar{q}_1(t-1) \vee \bar{q}_2(t-1)) \oplus q_1(t-1) \oplus q_2(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

2.3. 4) Вес оператора равен 3 (состояния, отвечающие парам $(q_1, q_2)=(1, 0)$ и $(q_1, q_2)=(1, 1)$, можно отождествить).

2.4. Каждой функции веса w (из указанного множества о.-д. функций) соответствует каноническая таблица, содержащая $n+1$ «входных» столбцов (включается также столбец, описывающий состояние функции) и $m+1$ «выходных» столбцов (здесь тоже учитывается функция переходов). «Входных» наборов в этой таблице wk^n. На «выходе» в таблице должны быть какие-то наборы из множества, содержащего wk^m элементов («выходных» наборов). Для получения требуемой верхней оценки надо считать, что каждому «входному» набору можно сопоставить любой «выходной» набор.

2.8. 3) Канонические уравнения оператора ψ имеют вид

$$\begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = \bar{q}(t-1), \\ q(0) = 0, \end{cases}$$

т. е. оператор ψ — автономный.

2.9. 1) Канонические уравнения оператора, полученного из оператора φ введением обратной связи по переменным x_2 и y_1, выглядят так:

$$\begin{cases} y'(t) = 1, \\ q'(t) = x_1(t)\,\bar{x}_3(t)\,q'(t-1), \\ q'(0) = 0. \end{cases}$$

2.10. 1) Вес оператора равен 2.

2.11. 1) В качестве φ можно взять следующий о.-д. оператор:

$$\varphi : \begin{cases} y(t) = x_1(t) \vee \bar{q}(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \oplus x_2(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

2.14. 1) и 2) Рассмотреть оператор $\varphi_3(\varphi_3)$. 5) Полезно исследовать оператор $\varphi_3(\varphi_{\equiv 0})$, где $\varphi_{\equiv 0}$ — оператор, порожденный константой 0.

2.15. 3) Вес суперпозиции равен 4. **2.16.** 2) Оператор — автономный. 3) Оператор не является автономным. **2.19.** 2) Такая схема существует.

2.22. Изобразите сначала всевозможные трехвершинные орграфы с нумерованными вершинами, удовлетворяющие условию в) и такие, что полустепень исхода каждой вершины в них равна 2. В качестве номеров для вершин орграфов можно взять цифры 0, 1, 2. Вершину, помеченную цифрой 0, удобно считать начальной. Затем надо «нагрузить» всевозможными допустимыми способами дуги каждого из построенных орграфов — так, чтобы получались диаграммы Мура каких-то о.-д. операторов.

§ 3

3.1. 1) M — замкнутый класс. 2) Множество M не является замкнутым классом.

3.3. Индукцией по числу задержек можно показать, что любой оператор ψ из $[\varphi_0, \varphi_3]_{\mathcal{O}}$, имеющий один вход, преобразует слово $\tilde{0}^\omega$ либо в слово вида $y(1)\ldots y(n_0)[0]^\omega$, либо в слово вида $y(1)\ldots y(n_0)[1]^\omega$, где n_0 — длина предпериода (зависящая от выбора оператора ψ).

3.7. 1) Система не полна. 2) и 3) Системы — полные.

3.8. 2) $\{\varphi_3(X), \varphi_{j_0(x)}(X), \varphi_{x_1+x_2}(X_1, X_2)\}$.

3.10. Доказательство этого утверждения можно провести так. Пусть M — замкнутый класс в $\hat{\Phi}_{(k)}$, отличный от всего множества $\hat{\Phi}_{(k)}$. Предположим, что M — непредполный класс, и рассмотрим совокупность всех таких подмножеств M' из $\hat{\Phi}_{(k)} \setminus M$, которые удовлетворяют условию: $[M \cup M']_{\mathcal{O}} \neq \hat{\Phi}_{(k)}$. Эта совокупность не пуста. Выберем в ней какую-либо максимальную цепь (по включению), существование которой можно установить либо с помощью аксиомы Цермело, либо, учитывая счетность множества $\hat{\Phi}_{(k)}$, — непосредственно (упорядочив по типу натурального ряда множество $\hat{\Phi}_{(k)} \setminus M$). Объединение всех множеств выбранной максимальной цепи обозначим через M_0. Тогда $M \cup M_0$ — предполный класс в $\hat{\Phi}_{(k)}$. При доказательстве существенно используется тот факт, что в множестве $\hat{\Phi}_{(k)}$ существует конечная полная система относительно совокупности операций $\mathcal{O} = \{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$.

3.13. Этот факт можно доказать почти так же, как устанавливалась справедливость аналогичного утверждения в алгебре логики (см. задачу II.1.16).

3.14. Да, существует (см. задачу 3.13 и II.1.25). **3.15.** Ср. с задачей II.1.17.

3.16. При $k \geqslant 3$ утверждение непосредственно следует из соответствующего результата в P_k. В общем случае (при $k \geqslant 2$) можно использовать подмножества автономных операторов.

3.17. Счетная. **3.19.** Эта мощность — континуальная.

3.20. Полезно использовать «мощностные соображения» — сравнить мощности соответствующих множеств.

ГЛАВА VII

§ 1

1.1. 1) а) $T(P)=1^3 0^2 1^2$. б) Машина T не применима к слову $1^3 0 1^3$. в) $T(P)=10\,[01]^2 1$.

1.2. 4) Программа одной из возможных машин имеет вид

	q_1	q_2	q_3
0	$q_0 0S$	$q_2 0S$	$q_3 0S$
1	$q_2 1R$	$q_3 1R$	$q_1 1R$

1.3. 2) а) $1^2 0^2 1 q_0 01$; в) $[10]^2 0 q_0 1^2$.

1.4. 3) Одна из машин Тьюринга, переводящая конфигурацию K_1 в K_0, задается следующей программой:

$$\begin{array}{ll} q_1 0 q_2 0R & q_4 1 q_4 1L \\ q_1 1 q_1 1R & q_5 0 q_6 0R \\ q_2 0 q_3 1R & q_5 1 q_5 1L \\ q_2 1 q_2 1R & q_6 1 q_7 0R \\ q_3 0 q_4 1L & q_7 0 q_0 0R \\ q_4 0 q_5 0L & q_7 1 q_1 1R \end{array}$$

1.5. 1) Можно поступить так: в программе машины Тьюринга заменить каждую команду вида $q_i a q_j \beta S$ (где a и β принадлежат внешнему алфавиту A) на $|A|+1$ команд: $q_i a q'_j \beta R$, $q'_j \gamma q_j \gamma L$ (γ пробегает весь алфавит A); q'_j — новое состояние (для каждого состояния q_j — свое).

1.7. Для построения машины T_m достаточно добавить m дополнительных (новых) состояний $q'_1, \ldots, q'_m$ и «пополнить» программу машины T, например, такими командами: $q'_1 a q'_1 a S, \ldots$ $\ldots, q'_m a q'_m a S$, где a — какой-то фиксированный символ из внешнего алфавита.

1.9. 1) а) Композиция $T_1 T_2$ к слову $1^3 0^2 1^2$ не применима. б) $T_1 T_2$ применима к слову $1^4 01$, и результат применения есть $1010^3 1^2$.

1.10. 1) а) Указанная итерация к словам вида 1^{3k} ($k \geqslant 1$) не применима. б) Не применима она и к словам вида 1^{3k+1} ($k \geqslant 1$). в) Итерация применима к любому слову вида 1^{3k+2} ($k \geqslant 1$), и в результате получается слово 1.

1.11. 1) а) $T(P)=10^4 1$. б) $T(P)=1^5 01$.

1.14. 3) Одна из возможных машин Тьюринга:

$$\begin{array}{ll} q_1 0 q_0 0R & q_4 0 q_5 1L \\ q_1 1 q_2 0R & q_4 1 q_4 1R \\ q_2 0 q_0 1S & q_5 0 q_6 0L \\ q_2 1 q_3 0R & q_5 1 q_5 1L \\ q_3 0 q_4 0R & q_6 0 q_1 0R \\ q_3 1 q_3 1R & q_6 1 q_6 1L \end{array}$$

1.16. 3) Вот одна из возможных машин:

$$\begin{array}{ll} q_1 0 q_0 1L & q_3 1 q_4 0R \\ q_1 1 q_2 0R & q_4 0 q_4 0S \\ q_2 0 q_2 0S & q_4 1 q_5 0R \\ q_2 1 q_3 0R & q_5 0 q_1 1R \\ q_3 0 q_3 0S & q_5 1 q_5 1S \end{array}$$

1.17. 1) $f(x)=x+1$, $f(x, y)=x+y+2$.

1.18. Если считать, как обычно, что машины начинают работать в состоянии q_1 и в начальный момент обозревается самая левая единица кода числа x, то указанные в условии задачи машины могут вычислять только одну из следующих трех функций: x, $x-1$ и нигде не определенную функцию.

1.19. Да, это утверждение истинно.

1.20. 1) При фиксированном (конечном!) множестве состояний существует только конечное число попарно неэквивалентных машин Тьюринга (с заданным внешним алфавитом). 2) Существует такое l, что, каково бы ни было $n \geqslant 1$, подмножество всех n-местных функций в M содержит не более чем l элементов.

§ 2

2.1. 2) $x_1+x_2-\mathrm{sg}\,x_2$.

2.2. 1) Можно доказать сначала примитивную рекурсивность функций $x_1 \dot{-} x_2$ и x^2, а затем применить операцию суперпозиции. «Прямое доказательство» примитивной рекурсивности функции $g(x)=x^2$ выглядит так:

$$\begin{cases} g(0)=0, \\ g(x+1)=h_1(x, g(x))=x^2+2x+1, \end{cases}$$

т. е. $h_1(x, y)=2x+y+1$;

$$\begin{cases} h_1(x, 0)=2x+1=g_1(x), \\ h_1(x, y+1)=s(h_1(x, y))=(2x+y+1)+1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1(0)=1, \\ g_1(x+1)=h_2(x, g_1(x))=2x+3, \end{cases}$$

т. е. $h_2(x, y) = y + 2$;

$$\begin{cases} h_2(x, 0) = 2, \\ h_2(x, y+1) = s(h_2(x, y)) = (y+2)+1. \end{cases}$$

2.5. $f(x, y) = \overline{\mathrm{sg}}\, x \cdot g_1(y) + g_2(x \dot{-} 1) \cdot \mathrm{sg}\, x \cdot \overline{\mathrm{sg}}\, y +$
$+ g_3(x \dot{-} 1, y \dot{-} 1) \cdot \mathrm{sg}\, x \cdot \mathrm{sg}\, y.$

2.7. 2) $\mu_{x_1}([x_1/2]) = 2x_1$. 4) $\mu_{x_1}(x_1 \dot{-} x_2) = (x_1 + x_2)\,\mathrm{sg}\, x_1$,

$\mu_{x_2}(x_1 \dot{-} x_2) = x_1 - x_2$.

2.8. 4) $f(x_1, x_2) = x_1(1 \dot{-} x_2)$.

2.9. Нет, неверно. **2.10.** 1) Нельзя. 2) $1 + \mathrm{sg}\, x$. **2.12.** Все эти классы счетно-бесконечные. **2.17.** Нет, неверно: функция $f_2(x, y)$ может быть даже тождественно равна 0. **2.18.** 1) Нет, неверно. **2.19.** 3) Справедливо. 4) Справедливо.

2.20. 1) Да, может быть верным. 2) Это утверждение ложно при всякой функции f_1 из $K_{\text{ор}} \setminus K_{\text{пр}}$. 3) Утверждение справедливо для некоторых функций f_1 и f_2 из множества $K_{\text{ор}} \setminus K_{\text{пр}}$.

2.21. 1) Нет, не всегда. 2) Это включение ложно при всякой функции $f(x)$ из $K_{\text{ор}} \setminus K_{\text{пр}}$. 3) Да, соотношение справедливо для любой функции $f(x)$ из $K_{\text{ор}} \setminus K_{\text{пр}}$.

2.24. 2) Да, может. П р и м е р. $f(x, y) = x - y$. **2.26.** Да, верно.

§ 3

3.1. а) Вытекает из того, что в $K_{\text{пр}}$ существует функция, принимающая все значения.

3.2. Всякой примитивно рекурсивной функции можно сопоставить бесконечное множество термов, отражающих способ получения функции из простейших функций.

3.3. Если существует частично рекурсивная универсальная функция $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, то она всюду определена. Тогда функция $F(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) + 1$ общерекурсивна и имеет некоторый номер y в нумерации, отвечающей универсальной функции $F^{(n+1)}$. Но тогда $F(y, y, \ldots, y) = F(y, y, \ldots, y) + 1$.

3.6. Провести доказательство методом «диагонализации». **3.7.** 1)—4) Нет. 5) Да. **3.8.** Аналогично 3.3.

3.11. Рассмотреть функцию

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } h(x) = 0, \\ 1, & \text{если } h(x) = 1. \end{cases}$$

3.12. Рассмотреть последовательность $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$, такую, что $\alpha_i=1$, если φ_i (i) определено, $\alpha_i=0$, если φ_i (i) не определено, $i=0, 1, \ldots$

3.13. Для всякого автономного конечного автомата его выходная последовательность является квазипериодической.

3.15. Например, инвертирование слова.

3.21. 2) Вытекает, из того, что существует не более $c^{S_T(P)}$ различных конфигураций длины $S_T(P)$ для некоторого c, зависящего от алфавита состояний и внешнего алфавита машины T. Если какая-то конфигурация повторяется, то машина T работает бесконечное время.

ГЛАВА VIII

§ 1

1.1. 1) Каждый из членов перестановки с повторениями может быть выбран независимо от других n способами. Поэтому $\hat{P}(n, r)=n^r$. 2) Первый из членов (n, r)-перестановки можно выбрать n способами. Если i элементов уже выбраны, то $(i+1)$-й элемент можно выбрать $n-i$ способами. Применяя несколько раз правило произведения, получим $P(n, r)=(n)_r$, $n \geqslant r$. 3) Достаточно заметить, что из каждого (n, r)-сочетания путем $r!$ перестановок его членов можно получить $r!$ различных (n, r)-перестановок и каждая (n, r)-перестановка может быть получена таким путем. 4) Каждому (n, r)-сочетанию A с повторениями, составленному из элементов множества $U=\{a_1, \ldots, a_n\}$, поставим в соответствие вектор $\tilde{\alpha}(A)$ длины $n+r-1$ из r нулей и $n-1$ единиц, такой, что число нулей, находящихся между $(i-1)$-й и i-й единицами, равно числу элементов a_i, входящих в сочетание A, $i=\overline{2, n-1}$, а число нулей, стоящих перед первой единицей (после $(n-1)$-й единицы), равно числу элементов a_1 (соответственно элементов a_n), входящих в сочетание A. Это соответствие между сочетаниями и векторами взаимно однозначно. С другой стороны, число векторов с $n-1$ единицами и r нулями равно числу $(n-1)$-элементных подмножеств $(n+r-1)$-элементного множества. Это число равно $\binom{n+r-1}{n-1}$.

1.2. 1) k^n; 2) $k_1 k_2 \ldots k_n$; 3) $\binom{n}{r}$. **1.3.** 1) 2^{mn}; 2) $(2^m)_n$.

1.4. Для каждого $n \geqslant 1$ понадобится $n \cdot 10^{n-1}$ цифр для каждой отличной от нуля цифры и $(n-1) \cdot 10^{n-1}$ нулей. **1.5.** $2^{p+k}3^{n-p-k}-1$.

1.6. 1) 147; 2) 126; 3) $300+300\cdot 299+300\cdot 299\cdot 298=$ $=26820600$, если имена различаются, и $300+300^2+300^3$, если имена не обязательно различны.

1.7. $\binom{m}{r}\binom{n}{s}$.

1.8. 1) $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_r)$. Каждому делителю $p_{i_1}^{\beta_1}\ldots$ $\ldots p_{i_r}^{\beta_r}$, $0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i$, $i=\overline{1,\ r}$, можно сопоставить вектор $(\beta_1,\ldots$ $\ldots,\beta_r)$; 2) 2^r; 3) $\prod_{k=1}^{r}\frac{1-p_k^{\alpha_k-1}}{1-p_k}$. Раскрыв скобки в выражении $(1+p_1+\ldots+p_1^{\alpha_1})\ldots(1+p_r+\ldots+p_r^{\alpha_r})$, убедиться, что каждый делитель присутствует в сумме ровно один раз.

1.9. 1) $\binom{n-\alpha-\beta}{p-h-k}$; 2) $\frac{p!}{h!\,k!}\binom{n-\alpha-\beta}{p-h-k}$.

1.10. 1) $\binom{n+k-1}{k-1}$. Число способов равно числу двоичных векторов длины $n+k-1$ с n единицами и $k-1$ нулями. Соответствие устанавливается так: каждой сумме сопоставляется вектор, такой, что первое слагаемое в сумме равно числу единиц, стоящих перед первым нулем в векторе, второе слагаемое — числу единиц, стоящих между первым и вторым нулями, и т. д.
2) $\binom{n-1}{k-1}$. Поместим k единиц в промежутки между нулями, по одной единице в каждый промежуток (места левее первого нуля и правее последнего тоже считаются промежутками). Остальные $n-k$ единиц распределяются произвольно. Задача свелась к предыдущей.

1.11. 1) $\binom{n-1}{k-2}+\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$, см. задачу 1.10, 2); 2) $\binom{n+9}{9}-1$, свести задачу к 1.10, 1); 3) $\binom{n+k}{n}$, свести задачу к 1.10, 1).

1.12. 1) $\binom{n+2}{2}$; 2) $\frac{1}{6}\binom{n+2}{2}^2+\frac{1}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)^2$.

1.13. 1) $k!$; 2) $\binom{k}{p}\cdot k!$; 3) $(n)_k\,(m)_k$; 4) $\frac{(n)_k\,(m)_k}{k_1!\ldots k_s!}$.

1.14. 1) $4(n-4)$; 2) $4(n-1)\,n$; 3) $24n\,(n-1)$; 4) $4\binom{n}{5}$; 5) $4^5(n-4)$; 6) $4n\binom{4n-4}{2}$; 7) $6\cdot 4^3\cdot n\binom{n-1}{3}$.

ЛИТЕРАТУРА [1]

1. Автоматы, сб. статей под ред. К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти, М., ИЛ, 1956.
2. Алферова З. В., Теория алгоритмов, М., «Статистика», 1973 (VII).
3. Арбиб М., Мозг, машина и математика, М., «Наука», 1968 (VI, VII).
4. Берж К., Теория графов и ее применение, М., ИЛ, 1962 (IV).
5. Берлекэмп Э., Алгебраическая теория кодирования, М., «Мир», 1971 (V).
6. Виленкин Н. Я., Комбинаторика, М., «Наука», 1969 (VIII).
7. Гилл А., Введение в теорию конечных автоматов, М., «Наука», 1966 (VI).
8. Гиндикин С. Г., Алгебра логики в задачах, М., «Наука», 1972 (I—IV, VI, VII).
9. Глушков В. М., Синтез цифровых автоматов, М., Физматгиз, 1962 (VI).
10. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. I, М., «Наука», 1974 (I—V).
11. Захарова Е. Ю., Критерий полноты систем функций из P_k, Сб. Проблемы кибернетики, вып. 18, М., «Наука», 1967, 5—10 (III).
12. Захарова Е. Ю., Яблонский С. В., О некоторых свойствах существенных функций из P_k, Сб. Проблемы кибернетики, вып. 12, М., «Наука», 1964, 247—252 (III).
13. Зыков А. А., Теория конечных графов, т. I, Новосибирск, «Наука», 1969 (IV).
14. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж., Введение в конечную математику, М., «Мир», 1965 (IV, VIII).
15. Кобринский Н. Е., Трахтенброт Б. А., Введение в теорию конечных автоматов, М., Физматгиз, 1962 (VI).
16. Кофман А., Введение в прикладную комбинаторику, М., «Наука», 1975 (IV, VIII).

---

[1] Римские цифры, стоящие после названия, указывают главы задачника, при работе над которыми эта литература может оказаться полезной.

17. Лавров И. А., Максимова Л. Л., Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов, М., «Наука», 1975 (I, II, VII).
18. Леонтьев В. К., Задачи по вычислительным системам (ч. III. Дискретный анализ), МФТИ, 1975 (V, VIII).
19. Лупанов О. Б., О синтезе некоторых классов управляющих систем, Сб. Проблемы кибернетики, вып. 10, М., Физматгиз, 1963, 63—97 (I, IV).
20. Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., «Наука», 1965 (VII).
21. Марков Ал. А., Нерекуррентное кодирование, Сб. Проблемы кибернетики, вып. 8, М., Физматгиз, 1962, 169—186 (V).
22. Мендельсон Э., Введение в математическую логику, М., «Наука», 1971 (I, VII).
23. Минский М., Вычисления и автоматы, М., «Мир», 1971 (VI, VII).
24. Мощенский В. А., Лекции по математической логике, Минск, Изд-во БГУ, 1973 (I, II, VII).
25. Оре О., Теория графов, М., «Наука», 1968 (IV).
26. Питерсон У., Коды, исправляющие ошибки, М., «Мир», 1964 (V).
27. Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, М., ИЛ, 1963 (IV, VIII).
28. Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., «Мир», 1972 (VII).
29. Рыбников К. А., Введение в комбинаторный анализ, М., Изд-во МГУ, 1972 (IV, VIII).
30. Трахтенброт Б. А., Алгоритмы и вычислительные автоматы, М., «Советское радио», 1974 (VI, VIII).
31. Трахтенброт Б. А., Барздинь Я. М., Конечные автоматы, М., «Наука», 1970 (VI).
32. Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложение, т. 1, М., «Мир», 1967 (VIII).
33. Харари Ф., Теория графов, М., «Мир», 1973 (IV).
34. Холл М., Комбинаторика, М., «Мир», 1970 (IV, VIII).
35. Яблонский С. В., Функциональные построения в k-значной логике, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 51, М., Изд-во АН СССР, 1958, 5—142 (I—IV).
36. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста, М., «Наука», 1966 (I, II).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ