MAARİF ƏKBƏROV

CƏBR VƏ ƏDƏDLƏR NƏZƏRİYYƏSİ

Ali məktəblər üçün dərs vəsaiti

MAARİF ƏKBƏROV

CƏBR VƏ ƏDƏDLƏR NƏZƏRİYYƏSİ

Ali məktəblər üçün dərs vəsaiti

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin qərarı (nazirin 13 dekabr 2004-cü il tarixli 912 saylı əmri) ilə kitab ali məktəblər üçün dərs vəsaiti kimi tövsiyə edilmişdir

NURLAR
NƏŞRİYYAT-POLİQRAFİYA MƏRKƏZİ
BAKI – 2005

Kitaba rəy verənlər: Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor Əli Əhmədov

Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor Sabir Mirzəyev

Fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, baş elmi işçi Rauf Bayramov

Fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent Zahirəli Sadıqov

Elmi redaktorları: Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor Karlen Xudaverdiyev

Fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent Oktay Məmmədov

Buraxılışa məsul: Elnur Rasim oğlu Əhmədov

Kompüter işi və korrektor: Fəxri Namiq oğlu Vəliyev

M.S.ƏKBƏROV: Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi
Bakı, «NURLAR» Nəşriyyat-Poliqrafiya Mərkəzi, 2005, 896 səh.

Kitab müəllifin uzun illərdən bəri Bakı Dövlət Universitetində oxuduğu mühazirələrinin, onun əvvəllər çap olunmuş «Ali cəbr» (Bakı, 1976), «Xətti fəzalar və xətti operatorlar» (Bakı, 1984) və «Cəbrdən mühazirələr» (Bakı, 2001) dərs vəsaitlərinin ciddi surətdə yenidən işlənməsi əsasında yazılmışdır.

Kitab universitetlərin riyaziyyatçı kadrlar hazırlayan bakalavr və magistr pilləsinin tələbələri üçün dərs vəsaiti kimi nəzərdə tutulmuşdur. Lakin kitabdan tətbiqi riyaziyyat, fizika fakültələrinin tələbə və magistrləri, habelə riyazi biliyini artırmaq istəyən bütün riyaziyyat həvəskarları da istifadə edə bilərlər.

ISBN - 9952 - 403 - 41 - 0

MÜNDƏRİCAT

ÖN SÖZ

«Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi» universitetlərin riyaziyyatçı kadrlar hazırlayan fakültələrində vacib bir fənn kimi tədris edilir. Əvvəllər «Ali cəbr» və «Ədədlər nəzəriyyəsi» adları altında müstəqil iki fənn kimi tədris edilən bu fənlər indi vahid bir kurs kimi tədris edilir və bu qəbildən azəri dilində latın qrafiki ilə dərslik və dərs vəsaitlərinə ciddi ehtiyac vardır. Ümid edirik ki, Azərbaycan dilində latın qrafikası ilə yazılan ilk iri həcimli kitab bu sahədə olan tələbatı müəyyən dərəcədə ödəyəcək.

Dərs vəsaiti müəllifin uzun illərdən bəri Bakı Dövlət Universitetinin «Mexanika-riyaziyyat» fakültəsində «Ali cəbr», «Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi» fənlərindən oxuduğu mühazirələrin, habelə özünün əvvəllər universitetlər üçün yazıb çap etdirdiyi «Ali cəbr» (Bakı, 1976), «Xətti fəzalar və xətti operatorlar» (Bakı, 1984) və «Cəbrdən mühazirələr» (Bakı, 2001) dərs vəsaitlərinin əsaslı surətdə yenidən işlənməsi və onların bakalavr pilləsi üçün uyğunlaşdırılması nəticəsində meydana gəlib.

Kitabı yazarkən müəllif cəbrə və ədədlər nəzəriyyəsinə aid dərslik və dərs vəsaitlərindən istifadə etmiş (bunların siyahısı kitabın sonunda verilibdir), habelə, özünün 40 ildən artıq bir dövrdə bu fənləri ali məktəblərdə tədris etmək sahəsində topladığı çoxillik pedaqoji təcrübəsinə əsaslanmışdır.

Kitabın məzmunu, onun əhatə etdiyi materiallar, mövzular mündəricatda əks olunduğundan onları burada sadalamağa ehtiyac görmürük. Təkcə onu qeyd etməklə kifayətlənmək istərdim ki, iyirmi bir fəsildən ibarət olan bu dərs vəsaiti nəinki proqram materialının əsas hissəsinə, habelə bəzi mühüm əlavə materialları da əhatə edir.

Fürsətdən istifadə edərək kitabın müzakirəsində fəal iştiraklarına görə BDU-nun mexanika və riyaziyyat fakültəsinin həndəsə kafedrası kollektivinə və xüsusilə də bəzi dəyərli qeydlərinə görə kafedranın dosentləri Vaqif Qasımova, Oktay Məmmədova, Habil Fəttayevə dərin təşəkkürümü bildirirəm.

Universitetin dərslik və nəşriyyat şöbəsinə, fakültə elmi şurasına, fakültə elmi-metodiki şurasının kollektivinə dərin razılığımı bildirirəm.

Kitabın nəşrinə öz köməyini əsirgəməyən mexanika-riyaziyyat fakültəsinin dekanı professor Qəmbər Namazova, kitabın yazılma prosesində öz xeyirxah məsləhətlərini əsirgəməyən professor Karlen Xudaverdiyevə və professor Məmməd Yaqubova, habelə, kitabın əlyazması ilə tanış olub onun nəşri üçün rəy verən hörmətli həmkarlarıma zəhmətlərinə görə minnətdarlığımı bildirirəm.

Əsəri əvvəldən axıra qədər diqqətlə oxuyub faydalı qeydləri ilə onun məzmununun yaxşılaşmasına kömək edən cəbrşünas, fizika-riyaziyyat elmləri namizədi Zahirəli Sadıqovun əməyini xüsusi minnətdarlıqla qeyd etmək istəyirəm.

Kitabın işıq üzü görməsində xüsusi xidməti olan, ona öz köməyini əsirgəməyən «Nurlar» nəşriyyatının direktoru Hacı İsmayıl Allahverdiyevə və onun rəhbərlik etdiyi kollektivə, nəhayət, kitabın kompüter işini yüksək peşəkarlıqla yerinə yetirən və korrektura işinə yardım edən Fəxri Namiq oğlu Vəliyevə öz səmimi təşəkkürümü bildirirəm.

Kitab haqqında rəy və təkliflərini bildirən oxucularımıza əvvəlcədən razılığımı bildirirəm.

Müəllif,
Bakı şəhəri,
2005-ci il

GİRİŞ ƏVƏZİ

Cəbr elmi bütöv, vahid riyaziyyat elminin vacib, ayrılmaz bir tərkib hissəsidir, o ədədlər nəzəriyyəsi ilə birlikdə riyaziyyatın qədim və son dərəcə gərəkli bir sahəsi kimi uzun tarixi inkişaf yolu keçmişdir.

Riyaziyyatın fəlsəfəsində bu elmin təbiətinə dair çoxdan bəri özünə kök salmış belə bir ənənəvi klassik baxış var ki, riyaziyyat elmi bizi əhatə edən gerçək aləmin kəmiyyət qanunauyğunluqlarından bəhs edən elmdir, daha dürüstü: *o gerçəkliyin miqdar-fəza münasibətlərini və formalarını öyrənən elmdir*. O öyrəndiyi obyekti bunun malik olduğu keyfiyyət və məzmundan fikrən təcrid edərək əsas diqqətini onun kəmiyyət və forma müəyyənlikləri ilə əlaqədar olan abstrakt nisbət və formalara yönəldir. Riyaziyyatın hissəsi olan cəbrin, eləcə də ədədlər nəzəriyyəsinin bu abstrakt nisbət və formalardan öz payı vardır.

Riyaziyyatın tarixən ən qədim sahələri elementar hesab və elementar həndəsədir ki, bunlar da uyğun olaraq gerçək aləmin məhz kəmiyyət (miqdar) nisbətləri və məkan (fəza) formaları haqqında elm kimi xarakterizə edilirlər, yəni bu elmlər gerçəkliyin ən sadə, bəsit kəmiyyət nisbətləri (ədədlər) və məkan formalarını (həndəsi fiqurlar) öyrənirlər. Həm də həndəsə və çox sonralar həndəsənin yeni, nisbətən cavan sahəsi topologiya üçün kəmiyyətlərdəki kəsilməzlik ideyası başlıca yer tutduğu halda, hesab və sonra onun əsasında yaranan cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi üçün əsasən diskretlik ideyası xarakterikdir. Bir-birinin əksi olan, lakin bir-biri ilə əlaqəsi olan bu iki meylin qarşılıqlı, dialektik təsiri, bəzi sahələrdə isə bunların sintezi riyaziyyatın sonrakı inkişafına səbəb olmuş, bu təsirin nəticəsində riyaziyyatın yeni-yeni sahələri yaranmışdır.

Riyaziyyatın sonralar meydana gələn klassik sahələri əvvəlcə cəbr, sonralar analitik həndəsə və riyazi analiz uzaq keçmişlərdən miras qalan, lakin inkişafdan da qalmayan hesab və elementar həndəsədən qidalanmış və bu əsasla inkişaf edib yeni-yeni nailiyyətlərlə zənginləşmişlər. Əlbəttə, indiki riyaziyyat təkcə sadaladığımız həmin qədim və sonralar yaranan klassik sahələrdən ibarət deyil, onun predmeti də, yəni miqdar-fəza münasibətləri də yeni, daha geniş, daha zəngin məna kəsb etmişdir. Riyaziyyatın indi çoxsaylı yeni-yeni sahələri yaranıb tərəqqi etmişdir. Odur ki, obrazlı desək indiki riyaziyyat elmini çoxsaylı, qollu-budaqlı möhtəşəm bir ağaca bənzətmək olar; bu ağacın kökləri, moçarları həyata, gerçəkliyə, ətraf aləmin əşya və hadisələrinə söykənir, bu ağacın bir-biri ilə sıx əlaqəli olan iki iri tarixi gövdələri hesab və həndəsədir, bu ağacın budaqları, budaqlardan boy atan zoğları hamısı vahid, bütöv, bölünməz riyaziyyat elminin nisbi müstəqil xarakter daşıyan müxtəlif yeni olan sahələri, tərkib hissələridir. Bax, cəbr elmi də bu sahələrdən, bu hissələrdən biridir, həm də elə bir hissəsi ki, bunsuz riyaziyyat elmi ümumiyyətlə mümkün olmazdı. Cəbrsiz riyaziyyat elmi yoxdur, indi də, gələcəkdə də riyaziyyat elmini cəbrsiz təsəvvür etmək mümkün deyil. Təsadüfi deyil ki, müasir riyaziyyatın fərqləndirici xüsusiyyətlərindən söhbət gedəndə onun bütün sahələrində cəbrləşmə prosesinin getdiyini söyləyirlər, yəni cəbrləşməni indiki riyaziyyatın əsas xüsusiyyəti kimi qeyd edirlər.[1]

Riyaziyyat elminin ümumi inkişafı gedişində, onun qədim sahələrindən olan cəbr elmi də inkişaf etmiş, onun məzmun və metodları zənginləşmiş, müəyyən dəyişikliklərə uğramışdır.

Ədədlər haqqında elm olan hesabın («arifmetika») və fiqurlardan bəhs edən həndəsənin («geometriya») əsasında yaranan cəbr elminin *tarixən öyrəndiyi obyekt cəbri tənliklər olmuşdur*. «Cəbr» elminin öz adı IX əsrdə yaşayıb yaradan Özbək riyaziyyatçısı Mühəmməd İbn Əl-Xorezmin «Əl-cəbr və Əl-mükəbalə hesabına dair qısa kitab» adlı traktatındakı «Əl-cəbr» sözündən alınmışdır. Rusların və bir çox digər xalqların işlətdiyi «алгебра» sözü də «əl-cəbr» sözünün latıncaya tərcüməsindən alınmışdır (yeri gəlmişkən onu da qeyd edək ki, hazırda elmdə işlədilən «alqorifm» və ya «alqoritm» sözü də Əl-Xorezm sözünün latınlaşdırılmasından alınıb). Mühəmməd Əl-Xorezmin adını çəkdiyimiz əsərində «Əl-cəbr» termini tənliklər üzərində onu kanonik şəklə gətirməklə əlaqədar olaraq aparılan çevirmələrdən birinin, müsbət həddi bərabərliyin bir tərəfindən digər tərəfə keçəndə burada mənfi işarənin bərpası ilə göstərmək mənada, «Əl-mükəbalə» isə tənlikdə oxşar hədlərin islahını nəzərdə tutan termin kimi işlədilirdi. Bunun özü də bir daha göstərir ki, əvvəllər cəbr elmi tənliklər haqqında təlim idi. Doğrudur, indinin özündə də cəbri tənliklər bəhsi cəbr elminin tərkibində onun əsas obyektlərindən biri kimi qalmaqda davam

[1] Müasir riyaziyyatda özünü bütün qabarıqlığı ilə göstərən «cəbrləşmə» prosesi, onun əsası və formaları, bu barədə baxışların metodoloji təhlili barədə bizim «Исследования по алгебре и топологии» (Баку, 1989; Изд-во Азербайджанского Университета) toplusundakı: Акперов М.С. «Об алгебраизации современной математики» (стр. 3-18) məqaləmizdə ətraflı məlumat verilir.

edir, lakin müasir cəbri heç də təkcə tənliklər haqqında elm kimi səciyyələndirmək düzgün olmaz. Müasir cəbr elmi o qədər inkişaf edib zənginləşib ki, o qədər abstrakt şəkil alıb ki, onun məşğul olduğu obyektlər sistemini təkcə cəbri tənliklərlə məhdudlaşdırmaq mümkün deyil.

Çoxluqlar nəzəriyyəsinin və aksiomatik metodun müasir riyaziyyatda mövqe tutması və bunun cəbrə nüfuz etməsi sayəsində cəbrdə «cəbri strukturalar» anlayışı formalaşmışdır. Bu nüfuzetmə o dərəcədə geniş vüsət alıb ki, indiki cəbr elmini cəbri strukturaları öyrənən elm kimi səciyyələndirirlər.

Aksiomatik metod tarixən inkişaf edib təkmilləşmiş və hazırda riyazi nəzəriyyələrin qurulma metodu kimi şöhrətlənmişdir. Bu metodun bizə gəlib çatan ilk yazılı nümunəsi Evklidin «Başlanğıclar» əsəridir, bu əsərdə riyaziyyat (əsasən həndəsə) ciddi aksiomatik metod əsasında qurulmuşdur. Bu metodun mahiyyəti burasındadır ki, nəzəriyyə bir sıra tərif verilməyən (ilkin anlayışlar) və isbat edilməyən təkliflərə («aksiomlara») əsaslanır, yəni nəzəriyyənin bütün sonrakı təklifləri (teoremləri) qəbul edilən ilk anlayış və aksiomlardan ciddi məntiqi isbat yolu ilə alınır. İndiki riyaziyyatda geniş surətdə işlədilən «aksiomatik tərif» anlayışı da məhz aksiomatik metodun təzahürüdür. Burada müəyyən bir riyazi obyektə tərif verəndə həmin obyekti səciyyələndirən, onun əlamətlərini göstərən aksiomlar sistemi qeyd olunur, bu aksiomların vəhdəti həmin obyektin tərifi olur və sonra bu obyektə aid olan xassələr bu tərifdə cəm olan aksiomlardan məntiqi yolla alınır, isbat edilir (kitabda bunun nümunələrinə çox rast gələcəksiniz).

XX əsrin kamil fransız riyaziyyatçılarının «Nikola Burbaki» ləqəbi altında yaranan birliyi və ya ittifaqı[1] riyaziyyata «abstrakt riyazi strukturaları» öyrənən elm kimi tərif vermişlər. Xüsusi qeyd etmək istərdik ki, riyazi struktura anlayışı müasir riyaziyyatın əsasında duran çoxluq anlayışı ilə aksiomatik metodun sintezi, birləşməsidir. Burbaki riyaziyyatı abstrakt riyazi strukturaları öyrənən elm kimi səciyyələndirəndə də müasir riyaziyyat üçün xarakterik olan bu sintezə istinad etmişdir. Riyaziyyat elminə yuxarıda qeyd etdiyimiz ənənəvi «kəmiyyət-fəza» baxışından bir qədər fərqli olan və Burbakinin adı ilə bağlı olan bu yeni «struktur baxış» heç də ənənəvi, klassik baxışı inkar etmir və onunla ziddiyyət təşkil etmir. Belə ki,

[1] Gənc güclü fransız riyaziyyatçılarının «Nikola Burbaki» ləqəbi ilə yaratdıqları könüllü ittifaqı XX əsr riyaziyyat aləmində misilsiz bir hadisə kimi qiymətləndirilir. Bu qəribə ittifaqın yaranması tarixi, məqamı, fəaliyyəti haqqında bizim «Riyaziyyat haqqında söhbətlər» (Bakı, 1969) kitabımızda və «Riyaziyyat nədir?» adlı monoqrafiyamızda (Bakı, 2003) ətraflı məlumat verilib.

burada belə bir vacib cəhətə diqqət yetirmək gərəkdir ki: *abstrakt riyazi strukturalar gerçəkliyin məhz miqdar-fəza münasibətlərinin və ya ümumiləşmiş kəmiyyət nisbətlərinin şüurumuzda inikasıdır.*[1]

Riyazi abstraksiyalar başqa elmi abstraksiyalarla müqayisədə bəzi xarakterik xüsusiyyətlərə malikdirlər, belə ki, əvvələn, riyazi abstraksiyaların real mənası öyrənilən əşya və hadisələrin keyfiyyət və məzmunu ilə deyil, onların kəmiyyət və forması ilə əlaqədar olur (riyazi biliklərin abstrakt xarakterinin sirri də məhz bundadır); ikincisi, riyazi abstraksiyalar çoxpilləlidir, onlar əksərən «abstraktsiyanın abstraksiyası» kimi formalaşır; üçüncüsü, bu abstraksiyalarda simvollardan daha geniş istifadə edilir, burada «işarələr dili» xarakterikdir; dördüncüsü, riyazi abstraksiyalar izoləedici xarakter daşıyır, yəni burada abstraksiya elə yüksək zirvəyə, «limit vəziyyətinə» çatır ki, bunun sayəsində daha gerçəklikdə maddi bir şey kimi olmayan, yalnız təfəkkürdə «cövlan edən» ideal obyektlər kimi formalaşırlar (ona görə də bir elm kimi riyaziyyatın ətraf aləmi öyrənmək üçün istifadə etdiyi idrak vasitələrindən söhbət gedəndə *abstraksiya və idealizasiyanı* bu elmin əsas metodları hesab edirlər); və s. Burbakinin elmə daxil etdikləri riyazi struktura anlayışı da bu xüsusiyyətlərə malik olan riyazi abstraksiya və ya bu abstraksiyaların sistemidir.

Riyazi strukturaların əsas bir növü olan cəbri strukturalar da başqa riyazi abstraksiyalar kimi gerçəkliyin şüurda miqdar-fəza münasibətlərini, ümumiləşmiş kəmiyyət nisbət və formaları mücərrəd inikasıdır. Buradan bir daha aydın olur ki, cəbr elmi həqiqətən də bütöv, vahid riyaziyyat elminin tərkib hissəsidir, onun anlayış və nəzəriyyələri də bütün riyazi bilgilər kimi «çoxpilləli» abstraksiyanın məhsuludur, onlar «abstraksiyanın abstraksiyası» kimi formalaşır, simvollardan çox geniş istifadə edir, diskret xarakterli ideal obyektlərlə məşğul olur və s. Riyazi biliklər, o cümlədən cəbri anlayış və nəzəriyyələr konkretlikdən abstrakta yüksəlir, sonra isə təfəkkürümüzdə abstraksiyaların sintezi yaranır, yəni şüurda yeni konkretlik formalaşır. Belə mürəkkəb dialektik yol qət edən cəbri həqiqətlər cəbri strukturaların məğzini təşkil edir.

Bəs abstraksiyanın belə yüksək zirvəsinə yüksələn və bu səbəbdən də öz gerçək mənbəyindən çox-çox «qıraq düşən» abstrakt cəbri struktur

[1]Azərbaycan dilində bu məqalənin şərhində rast gəlinən termin dolaşıqlığı olmaması naminə (məsələn, rusca həm «величина», həm də «количество» sözləri əvəzinə çox zaman eyni bir «kəmiyyət» sözü işlədirik) biz müasir riyaziyyatın predmeti üçün daha geniş məna daşıyan ya «ümumiləşmiş kəmiyyət nisbət və formaları» termini, yaxud da *«miqdar-fəza münasibət və formaları»* terminini sinonim kimi işlətməyi məqsədəuyğun sayırıq.

anlayışına riyaziyyat daxilində necə baxılır? Cavab belədir: cəbri struktura, - elementləri üzərində bir və ya bir neçə cəbri əməlin təyin edildiyi müxtəlif təbiətli elementlərə malik olan çoxluqlardır. Bunu nəzərə alsaq müasir cəbr elminə aşağıdakı kimi tərif vermək olar:

Cəbr elmi vahid riyaziyyat elminin elə sahəsidir ki, o müxtəlif təbiətli çoxluqlarda təyin edilən cəbri əməlləri və bunların xassələrini öyrənən elmdir.

Cəbri əməl, onların xassələri, cəbri struktura və onların əsas növləri barədə kitabda məlumat veriləcək. Ona görə də burada bu tərifin izahına ehtiyac görmürük. Amma burada «cəbr» sözü ilə əlaqədar olaraq müasir riyaziyyatda mövcud olan bir termin dolaşıqlığına oxucuların nəzərini cəlb etmək istərdik.

Biz «cəbr» terminindən həm elmin adında, həm tədris fənnində, həm də cəbr elminin öz daxilində formalaşan və cəbri strukturaların xüsusi bir növünün («meydan üzərində cəbrlər») adında istifadə edirik. Bunları qarışdırmamaq gərəkdir. Kitabın müvafiq bölməsində cəbri strukturaların bu növü ilə də tanış olacaqsınız.

Tədris fənni kimi orta və ali məktəblərdə öyrənilən cəbr fənni bu elmin çox zəngin məzmunundan pedaqoji baxımdan məqsədəuyğun olaraq seçilib dərs proqramlarına daxil edilən ayrı-ayrı elementləridir.

«Ədədlər nəzəriyyəsinə» gəldikdə isə onu da qeyd edək ki, bu, riyaziyyatın tam ədədləri, onların xassələrini öyrənən klassik sahəsidir. Bəzi əlahiddə, səciyyəvi cəhətləri ilə fərqlənən bu sahə riyaziyyatın qədim, maraqlı və heç zaman köhnəlməyən əzəmətli bir sahəsidir. Öz inkişafında bu sahə riyaziyyatın digər sahələri ilə əlaqəsini itirməmiş və xüsusilə də, cəbr ilə elə «qaynayıb qarışıb ki», onu cəbrdən ayırmaq çətindir. Tədris prosesində artıq çoxdandır ki, ədədlər nəzəriyyəsi cəbr fənninin tərkib hissəsi kimi öyrənilir. Bunu nəzərə alaraq ədədlər nəzəriyyəsinin bir sıra vacib bölmələri də kitaba daxil edilib.

Cəbrin və ədədlər nəzəriyyəsinin kitabda dərc edilən bəhslərini seçərkən də müəllif yenə də qabaqcıl ali məktəblərin müvafiq tədris proqramlarına istinad etmiş, mövcud dərslik və dərs vəsaitlərini nəzərdən keçirmiş, özünün bu sahədəki uzun illər ərzində pedaqoji fəaliyyətinə, habelə, Respublika Təhsil Nazirliyinin bakalavr pilləsi üçün müəyyən etdiyi tədris planına əsaslanmışdır.

7A. ·· Anın in

FƏSİL 1

CƏBRİN BAŞLANĞIC İDEYALARI, BƏZİ YARDIMÇI MÖVZULAR

§ 1.1. Cəbrdə və ədədlər nəzəriyyəsində işlədilən bəzi riyazi simvollar haqqında

Riyaziyyat, o cümlədən onun tərkib hissəsi olan cəbr elmi başqa elmlərə nisbətən «işarələr dilindən», «simvollardan» daha geniş, daha çox istifadə edir. Bunların kitabda rast gəlinən bir neçə növü ilə tanış olaq.

Riyazi məntiq işarələri. Riyazi məntiqdə məntiqi anlayış və mühakimələri, məntiqi əməliyyatları işarə etmək üçün bir çox vacib işarələr tətbiq edilir ki, bunlardan riyaziyyatın bütün sahələrində də müvəffəqiyyətlə istifadə edilir. İnkar, konyuksiya, dizyunksiya, implikasiya, ekvivalensiya kimi məntiqi əməliyyatlar üçün işlədilən uyğun $\rceil, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ işarələr buna ən yaxşı misaldır.

Əvvəlcə onu qeyd edək ki, doğru və yalan olması barədə fikir söyləmək mümkün olan hər bir nəqli cümlə riyazi məntiqdə mülahizə, hökm və ya müddəa adlanır.

A mülahizəsinin təsdiq etdiyini təkzib edən mülahizəyə, A-nın inkarı deyib onu $\rceil A$ və ya $\overline{A}$ kimi işarə edirlər.

A və B mülahizələrindən «və» bağlayıcısının köməyilə düzəldilən A və B mülahizəsinə A və B mülahizələrinin konyunksiyası deyilir və $A \wedge B$ yaxud $A \& B$ kimi işarə edilir.

A və B mülahizələrinin «yaxud» («və ya») bağlayıcısının köməyi ilə düzəldilmiş «A yaxud B» mülahizəsinə bunların dizyunksiyası deyib, $A \vee B$ kimi işarə edilir.

A və B mülahizəsinin «əgər A-dırsa, onda B-dir» şəklində birləşməsindən alınan mülahizəyə bunların implikasiyası deyilir və

$A \to B$ (yaxud $A \Rightarrow B$) kimi işarə edilir. Burada A - ya şərt, B - yə nəticə, yaxud A - ya antesedent, B - yə isə konsekvent deyirlər.

A və B mülahizələrindən «A yalnız və yalnız onda olur ki, B olsun» kimi düzəldilən mülahizəyə A və B - nin ekvivalensiyası deyilir və $A \Leftrightarrow B$ kimi işarə edilir. Ekvivalensiyada B mülahizəsi A üçün həm zəruri, həm də kafi şərt adlanır.

Riyaziyyatda, xüsusilə də riyazi məntiqdə çox işlədilən işarələrdən biri də kvantorlar adlanan: $\forall$ – ümumilik kvantoru və $\exists$ – varlıq kvantoru işarələridir.

Ümumilik kvantoru $\forall$ «hər hansı», «ixtiyari» mənasında işlənir, varlıq kvantoru $\exists$ isə «var ki» deməkdir. Məsələn: X kəmiyyətinin yanında bunları yazanda $\forall X$ bunu cümlədə «ixtiyari X», «hər hansı X», «istənilən X», «bütün X - lər üçün», $\exists X$ isə «elə bir X var ki» deyə oxuyurlar. $\forall$ və $\exists$ işarələrindən, onların $\forall X$, $\forall Y$, $\exists X$, $\exists Y$ və s. kimi müəyyən bir obyektə istinad edilən yazılışlarında istifadə edilir. $\exists! X$ işarəsi isə «yeganə bir X var ki» deməkdir.

Riyazi məntiq işarələrindən istifadə edilən bir çox ədəbiyyatda $\vdash$, $\rightleftarrows$ işarələrinə də rast gəlinir. Burada $\vdash$ işarəsi «nəticə çıxarmaq», «almaq» mənasında işlədilir. Bunu «təsdiqetmə» simvolu adlandırır və $A \vdash B$ yazılışını «A - dan B alınır», «A - dan B çıxır», «A hökmü B - ni verir» kimi, $A \rightleftarrows B$ işarəsi isə «A elə B deməkdir» kimi mənalandırılır.

$\sum$ ***və*** $\prod$ ***işarələri.*** Bu işarələr uyğun olaraq toplama və vurma əməllərinin nəticələri olan cəm və hasili göstərir. Belə ki, məsələn, $a_1, a_2, \dots, a_n$ ədədlərinin cəmi və hasillərini bu işarələrin köməyilə qısa şəkildə yaza bilərik:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

a_i ədədləri sonlu və sonsuz sayda olarsa, onda uyğun olaraq:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \text{ və } \prod_{i=1}^{\infty} a_i.$$

$\sum$ («siqma») simvolundan istifadə etməklə, cəmin aşağıdakı xassələrini göstərmək olar.

1. Cəmləmə indeksini dəyişdikdə cəm dəyişmir:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{s=1}^{n} a_s.$$

Doğrudan da, məsələn,

həm $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, **həm də** $\sum_{s=1}^{n} a_s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

2. Cəmləmə indeksindən asılı olmayan vuruğu cəm işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Aşkardır ki,

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \dots + c \cdot a_n = c \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

3. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$.

Doğrudan da,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) =$$

$$= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i).$$

4. Toplananları a_{ij} kimi qoşa indeksli toplananlar ($i = 1,2,\dots,n$ və ya $j = 1,2,\dots,m$) olduqda $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ **yəni ikiqat sonlu cəmdə cəm işarələrinin yerini dəyişmək olar, çünki i və j kimi ikiqat indeksə malik olan a_{ij} ədədlərini topladıqda, i indeksini qeyd edib əvvəlcə $j = 1,2,\dots,m$ qiymətlərinə nəzərən**

$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ cəmini, sonra isə $i=1,2,...,n$ qiymətlərinə uyğun olaraq alınan $\sum_{j=1}^{m} a_{1j},...,\sum_{j=1}^{m} a_{nj}$ «cəmlərinin cəmini» tapmaq mümkündür:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{1j} + \sum_{j=1}^{m} a_{2j} + ... + \sum_{j=1}^{m} a_{nj} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right).$$

Lakin a_{ij} toplananlarının ikinci indekslərini qeyd edib, bunları $i=1,2,...,n$ qiymətlərinə nəzərən toplamaqla $\sum_{i=1}^{n} a_{i1}, \sum_{i=1}^{n} a_{i2},..., \sum_{i=1}^{n} a_{im}$ cəmlərini tapdıqdan sonra bu cəmləri toplamaq olar:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1} + \sum_{i=1}^{n} a_{i2} + ... + \sum_{i=1}^{n} a_{im} = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right).$$

Alınan nəticələr göstərir ki,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Xüsusi halda, əgər i və j cəmləmə indekslərinin hər ikisi eyni $j=1,2,...,m$ qiymətlərini alırsa, onda ikiqat cəmi:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}$$

kimi də göstərirlər.

İndi isə $\prod$ («Pi») simvolu haqqında.

Yuxarıda dediyimiz kimi, bu simvolla hasili işarə edirlər. Belə ki:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{1\le i\le n} a_i = \prod_{1}^{n} a_i.$$

Çox asanlıqla göstərmək olur ki:

$$\prod_{i=1}^{k} a_i \cdot \prod_{i=k+1}^{n} a_{k+i} = \prod_{i=1}^{n} a_i,$$

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i \cdot b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i.$$

Cəmdə olduğu kimi, hasildə də $\prod$ – nin indeksindən asılı olmayan vuruğu bu işarənin xaricinə çıxarmaq olar, yəni:

$$\prod_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

$\sum$ və $\prod$ simvollarından riyaziyyatın müxtəlif sahələrində istifadə edilir.

Kroneker simvolu. Bu işarə alman riyaziyyatçısı Leopold Kronekerin adı ilə bağlıdır. Mənası belədir ki, i və k indeksləri üçün

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1, & i=k \ \ olduqda \\ 0, & i\neq k \ \ olduqda \end{cases}$$

Yaxud: $\delta_i^i = 1$; $\delta_k^i = 0$, $k \neq i$. Bunu bəzən «Kroneker» deltası adlandırırlar.

Bəzi riyazi ədəbiyyatda Kroneker simvolunu δ_{ij} kimi də işarə edirlər.

Kroneker simvolundan həm cəbrdə, həm də riyaziyyatın digər sahələrində istifadə edilir.

§ 1.2. Çoxluq və inikas anlayışı

Çoxluq, element, çoxluğun verilmə üsulları. Çoxluq – hər-hansı obyektlərin toplumu, yığımı, məcmusu kimi izah edilən anlayışdır. Çoxluğu əmələ gətirən, onu təşkil edən obyektlərə onun elementləri deyilir.

Çoxluqları adətən iri, onun elementlərini isə kiçik hərflərlə işarə edirlər. Riyaziyyatda bir çox vacib çoxluqlar üçün, məsələn, natural, tam, rasional, həqiqi, kompleks ədədlər üçün uyğun olaraq N, Z, Q, R, C işarələri qəbul edilmişdir.

Hər bir çoxluq onun elementlərinin verilməsi ilə təyin edilir. a elementinin S - ə mənsub olmasını $a \in S$ kimi yazıb «a elementi S çoxluğuna daxildir» kimi oxuyurlar. Bəzən, bunu $S \ni a$ kimi yazıb bunu «S çoxluğu a elementini özünə daxil edir» kimi də oxuyurlar. Əgər a elementi S çoxluğuna daxil deyilsə, onu $a \notin S$ ($S \not\ni a$) yaxud $a \overline{\in} S$ ($S \overline{\ni} a$) kimi yazırlar.

Çoxluq tək bir elementdən, iki və daha çox elementdən ibarət ola bilər. Onları da $A=\{a\}$ - birelementli, $A=\{a_1,a_2\}$ - ikielementli, yaxud ümumiyyətlə n - elementli çoxluğu

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$$

kimi işarə edirlər. Çoxluğun elementləri sonsuz sayda da ola bilər.

Elementləri sayı sonlu olan çoxluğu sonlu, elementləri sonsuz sayda olan çoxluğu isə sonsuz çoxluq adlandırırlar.

Sonlu çoxluğa misal olaraq 10-a qədər natural cüt ədədlər çoxluğu: $\{2,4,6,8\}$, paralleloqramın və ya üçbucağın təpələri çoxluğu, bir patokdakı tələbələr çoxluğu və s. göstərmək olar. Sonsuz çoxluğa $[0,1]$ parçasındakı nöqtələr çoxluğu; natural, rasional, həqiqi və kompleks ədədlər çoxluqları misal ola bilər.

Çoxluq elementlərinin verilməsi ilə təyin edildiyindən buna müvafiq olaraq da çoxluğun iki cür verilmə üsulu var:

1) Çoxluğun elementlərini sadalamaq; 2) elementlərinin hamısı üçün xarakterik olan ümumi xassəni qeyd etmək.

Məsələn, 2 rəqəminin 1 ilə 20 arasındakı mənfi olmayan tam qüvvətləri çoxluğu bunları sadalamaqla belə bir çoxluq kimi yazıla bilər:

$$\{1,2,4,8,16\}.$$

Ümumiyyətlə, elementlərinin sayılması mümkün olan sonlu n - elementli çoxluq $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ kimi göstərilə bilər.

2-ci üsulla, yəni elementlərinin hamısı üçün ümumi olan xassəni göstərmək yolu ilə çoxluğu yazanda onu

$$M=\{x|P(x)\} \text{ yaxud } M=\{x:P(x)\}$$

şəklində yazırlar ki, burada x çoxluğun elementi, P isə onun əlaməti, yəni bütün x - lərin malik olduğu xarakterik xassəni göstərir; o belə oxunur: M elə x - lərin çoxluğudur ki, onlar P əlamətinə, yaxud P xassəsinə malikdirlər. Məsələn, tam ədədlər çoxluğunu

$$\{x|x\text{ - } tam\ ədəddir\} \text{ yaxud } \{x|x\in Z\} \text{ və ya } \{x:x\in Z\},$$

yaxud cüt ədədlər çoxluğunu: $\{x|x\text{ - } tam\ ədəd\ olub\ 2\text{-}yə\ bölünür\}$ və ya e - dən (Nepr ədədi) böyük olmayan həqiqi ədədlər çoxluğunu

$$\{x|x\in R, x\le e\}$$

kimi yazmaq olar.

Aşkardır ki, bir çox cəhətdən 2-ci üsul daha səmərəlidir, çünki bu üsul daha ümumi xarakter daşıyır. Belə ki, 1-ci üsul əsasən sonlu çoxluqların verilməsi üçün xarakterik olduğu halda, 2-ci üsul hər ikisi üçün yararlıdır. Məsələn, onluq say sistemində üçrəqəmli ədədlərin sayı sonludur; bunu ikinci üsulla belə yazmaq olar:

$$\{x|100\le x\le 999, x\in N\}.$$

Bəzi hallarda sonsuz çoxluqlarda da 1-ci üsuldan nöqtələrin köməyi ilə istifadə edilir. Məsələn, natural ədədlər çoxluğu sonsuz çoxluqdur, lakin onu 1-ci üsulla aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$N=\{1,2,3,\ldots,n,n+1,\ldots\}.$$

Bunun kimi də N_0 mənfi olmayan tam ədədlər çoxluğunu (sıfırın qatıldığı natural ədədlər çoxluğunu) belə yazmaq olar:

$$N_0=\{0,1,2,\ldots,n,\ldots\}.$$

Natural ədədlər çoxluğunu 2-ci üsulla belə yazarıq:

$$\{x|x\in N\}.$$

Cüt ədədlər çoxluğunu 1-ci üsulla

$$\{0,2,4,6,8,\ldots\}$$

kimi, 2-ci üsulla

$$\{x|x=2n, n\in N_0\}$$

kimi yazmaq olar.

Aşkardır ki, sonsuz çoxluğu 1-ci üsula əsasən yazanda istifadə edilən nöqtələrin nə ifadə etdiyi məlum olmalıdır.

Riyaziyyatda heç bir elementi olmayan və boş çoxluq adlanan çoxluqdan da danışılır və o $\varnothing$ kimi işarə edilir. Boş çoxluğa misal $x^2+1=0$ tənliyinin həqiqi kökləri çoxluğu, Ayda yaşayan insanlar çoxluğu, eyni bir çevrənin müxtəlif uzunluqlu diametrlər çoxluğu və s. misal olar. Ziddiyyətli xassəli hər bir çoxluğa da boş çoxluq kimi baxılır; məsələn $\{x|x\ne x\}$ – boş çoxluqdur.

Altçoxluq. Çoxluqların bərabərliyi. S çoxluğunun hər bir elementi T çoxluğuna daxildirsə, onda S - ə T - nin altçoxluğu və ya hissəsi deyib $S\subset T$ kimi yazırlar.

Məsələn, natural ədədlər çoxluğu tam ədədlər çoxluğunun altçoxluğudur, çünki hər bir natural ədəd tam ədədlər çoxluğunun da elementidir, yəni: $N\subset Z$.

$A=\{1,3,5,6\}$ çoxluğu $B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ çoxluğunun altçoxluğudur.

Altçoxluq anlayışının tərifini işarələr dili ilə belə ifadə etmək olar:

$$(S\subset T)\Leftrightarrow(\forall x\in S, x\in T).$$

Burada çoxluğun daxil olmasını göstərən $\subset$ işarəsini elementin daxil olması mənada işlədilən $\in$ işarədən fərqləndirmək lazımdır.

$\Leftrightarrow$ işarəsi hər iki tərəfin eyni məna daşıdığını göstərir.

TƏRİF. *Yalnız eyni elementlərdən ibarət olan çoxluqlara bərabər çoxluqlar deyilir.*

Çoxluqların bir-birinə daxil olması, altçoxluq anlayışının köməyi ilə çoxluqların bərabərliyi tərifini işarələrin köməyi ilə belə ifadə etmək olar:

$$(S=T)\Leftrightarrow(S\subset T\wedge T\subset S).$$

Onu da qeyd edək ki, hər bir çoxluq özü-özünün altçoxluğu və ya hissəsidir: $S\subset S$. Boş çoxluq da hər bir çoxluğun altçoxluğu qəbul edilir. Əgər $S\subset T$ və $S\neq\varnothing$, $S\neq T$ olursa onda S-ə T-nin məxsusi altçoxluğu deyirlər.

Çoxluqların kəsişməsi və birləşməsi. **TƏRİF.** *S və T çoxluqlarının ortaq elementlərinin hamısından ibarət olan çoxluğa bunların kəsişməsi deyilir və bu $S\cap T$ kimi işarə edilir*, yəni

$$S\cap T=\{x|x\in S\wedge x\in T\}.$$

Misal. $S=\{3,7,-5,0,12\}, T=\{1,-5,8,12,3,15,20\}, S\cap T=\{-5,12,3\}.$

A və B ortaq elementə malik deyillərsə, yəni $A\cap B=\varnothing$ olarsa, A və B-yə kəsişməyən çoxluqlar deyilir.

Qeyd. Kəsişən çoxluqların sayı 2-dən çox olarsa, onda $S_1,S_2,\dots,S_k$ çoxluqları $(k>2)$ üçün $S=S_1\cap S_2\cap\dots\cap S_k=\{x|\,x\in S_1, x\in S_2,\dots,x\in S_k\}$ olar.

TƏRİF. *S və T çoxluqlarının birləşməsi elə çoxluğa deyilir ki, o bu çoxluqlardan heç olmasa birinin elementlərinin hamısından ibarət olsun*, yaxud: *S və T çoxluqlarının heç olmasa birinin elementlərinin hamısından ibarət olan çoxluğa bunların birləşməsi deyilir.*

Çoxluqların birləşməsini $S\cup T$ ilə işarə edirlər. Onda tərifi belə yaza bilərik:

$$(S\cup T)\Leftrightarrow\{x|x\in S\vee x\in T\}$$

Misal. $S=\{a,b,c,d\},\ T=\{a,b,c,x,y,z\},\ S\cup T=\{a,b,c,d,x,y,z\}.$

Qeyd. Analoji olaraq istənilən (sonlu və ya sonsuz) sayda verilən çoxluqların kəsişməsi və birləşməsi əməllərinə tərif verirlər. Belə ki, sonlu k sayda $A_1,A_2,\dots,A_k$ çoxluqlarının bütün ortaq elementlərindən ibarət olan C çoxluğu bunların kəsişməsi adlanır və belə yazılır:

$$C=A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_k=\bigcap_{i=1}^{k}A_i \text{ (sonlu sayda çoxluqlar üçün)},$$

$$C=A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_k\cap\dots=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i \text{ (sonsuz sayda çoxluqlar üçün)}.$$

Bunun kimi də bu çoxluqların birləşməsi olan C çoxluğunu da aşağıdakı kimi yazırlar:

$$C=A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_k=\bigcup_{i=1}^{k}A_i \text{ (sonlu sayda olanda)},$$

$$C=A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_k\cup\dots=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \text{ (sonsuz sayda olanda)}.$$

Çoxluqların fərqi. Çoxluğun tamamlayıcısı. *A və B çoxluqlarının fərqi elə çoxluğa deyilir ki, onun elementləri A-ya daxil, B-yə isə daxil olmayan elementlərinin hamısından ibarət olsun.* A və B-nin fərqini $A\setminus B$ (bəzən də $A-B$) kimi işarə edirlər. Deməli:

$$A\setminus B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}.$$

Misal. $A=\{1,2,3,4,5\}$ və $B=\{4,2,6,7\}$ çoxluqlarının fərqi

$$A\setminus B=\{1,3,5\},\ B\setminus A=\{6,7\}.$$

TƏRİF. *Əgər B çoxluğu A-nın altçoxluğudursa* ($B\subset A$), *onda $A\setminus B$ fərqinə B-ni A-ya tamamlayan çoxluq deyərək onu B_A, yaxud $\overline{B}_A$ və ya C_AB kimi işarə edirlər.*

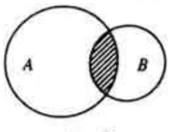
Əgər $M=A\setminus B$ isə bu o deməkdir ki: $M\cap B=\varnothing$, $M\cup A=B$. Məsələn, tək ədədlər çoxluğu cüt ədədlər çoxluğunu tam ədədlər çoxluğuna tamamlayan çoxluqdur.

Çox zaman baxılan bütün çoxluqları hər-hansı bir qeyd edilən çoxluğun altçoxluqları hesab edərək həmin qeyd edilən çoxluğu universal çoxluq adlandırıb, onu adətən U ilə işarə edirlər. Əgər müəyyən bir A çoxluğunun məhz hansı çoxluğa tamamlanması konkret göstərilmirsə, onda çoxluğun tamamlanması onun universal çoxluğa tamamlanması kimi başa düşülür və A_U yaxud sadəcə $\overline{A}$ kimi işarə edilir, onda

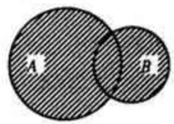
$$\overline{A} = U \setminus A = \{x | x \in U, x \notin A\}.$$

Yeri gəlmişkən burada vacib bir məsələyə – Eyler-Venn diaqramına da diqqət yetirək.

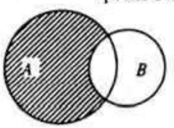
Çoxluqlar üzərində əməlləri daha əyani təsvir etmək üçün onları şərti olaraq dairə və ya düzbucaqlı fiqurlar kimi göstərirlər ki, bu da həmin əməlləri daha yaxşı başa düşməyə kömək edir. Onlarla aşağıdakı şəkillərdə tanış ola bilərsiniz.



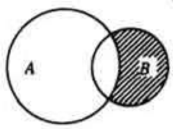
$A \cap B$
Şəkil 1.2.1.



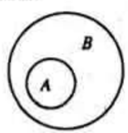
$A \cup B$
Şəkil 1.2.2.



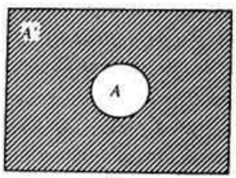
$A \setminus B$
Şəkil 1.2.3.



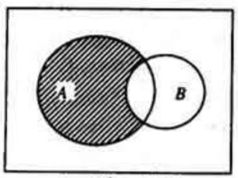
$B \setminus A$
Şəkil 1.2.4.



$A \subset B$
Şəkil 1.2.5.



A'
Şəkil 1.2.6.



$A \cap B' = A \setminus B$
Şəkil 1.2.7.

Qeyd. Şəkil 1.1.2.6-da A' (ştrixlənmiş sahə) universal çoxluq, A onun altçoxluğudur.

Çoxluqlar üzərində tanış olduğumuz əməllərin bir çox xassələri ilə tanış olaq:

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (kommutativlik);

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (assosiativlik);
3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C), A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (distributivlik);
4. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$, $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$.

Bu xassələrin doğruluğunu isbat etmək heç də çətin deyil və çox güman ki, oxucu bu işin öhtəsindən asanlıqla gələ bilər.

Çoxluqların Dekart hasili. İxtiyari A və B çoxluqlarından A-dan bir a elementi ($a \in A$) və B-dən bir b elementi ($b \in B$) götürüb bunlardan $\langle a,b \rangle$ kimi işarə edilən nizamlanmış cütlər düzəldək. Bunu ona görə nizamlanmış adlandırırıq ki, $a \neq b$ olanda $\langle a,b \rangle \neq \langle b,a \rangle$ olur. a və b elementlərini nizamlanmış $\langle a,b \rangle$ cütünün komponentləri (və ya koordinatları) adlandırıb a-ya birinci, b-yə isə ikinci komponent deyirlər.

İki $\langle a_1,b_1 \rangle$ və $\langle a_2,b_2 \rangle$ cütləri yalnız bunların uyğun komponentləri bərabər olduqda bərabər cütlər adlanır, yəni

$$(\langle a_1,b_1 \rangle = \langle a_2,b_2 \rangle) \Leftrightarrow (a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2).$$

TƏRİF. *Birinci komponenti A-dan, ikinci komponenti B-dən olması şərti ilə bütün mümkün $\langle a,b \rangle$ cütləri çoxluğuna A və B çoxluqlarının Dekart hasili (və ya «düz hasili») deyilir və $A \times B$ kimi işarə edilir.* Deməli:

$$A \times B = \{\langle a,b \rangle | a \in A \wedge b \in B\}.$$

Xüsusi halda $A = B$ olarsa $A \times A = \{\langle a_1, a_2 \rangle | a_1 \in A \wedge a_2 \in A\}$ olur ki, bunu A çoxluğunun Dekart kvadratı adlandırırlar: $A \times A = A^2$. Məsələn, R-həqiqi ədədlər çoxluğunun $R \times R = R^2$ Dekart hasili verilən koordinat oxlarına nəzərən müstəvi üzərindəki bütün nöqtələrin koordinatlar çoxluğu olur.

Çoxluqların Dekart hasilini istənilən k sayda $A_1, A_2, \ldots, A_k$ çoxluqları üçün ümumiləşdirib onu

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k = \{\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle, a_i \in A_i, i = 1,2,\ldots,n\}$$

kimi yazırlar. $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = A$ olduqda $A \times A \times \ldots \times A = A^k$, yəni verilən A çoxluğunun k dərəcəli Dekart hasilindən danışmaq olar.

Əgər A və B çoxluqları sonlu olub elementləri sayı uyğun olaraq n və m qədər olarsa bu iki çoxluğun Dekart hasilində nizamlanmış cütlər sayı (yəni $A\times B$ hasilini təşkil edən elementlərin sayı) $n\cdot m$ qədər olur.

Çoxluğun Dekart hasilinə aid misal göstərək.

1. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5\}$, $A\times B=\{\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 3,5\rangle\}$.
2. $A=\{x,7,2\}$,

$A\times A=A^2=\{\langle x,x\rangle,\langle x,7\rangle,\langle x,2\rangle,\langle 7,7\rangle,\langle 7,x\rangle,\langle 7,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,x\rangle,\langle 2,7\rangle\}$.

Nəhayət, çoxluqların Dekart hasili ilə əlaqədar aşağıdakı xassələri qeyd edək.

1. $A\times\varnothing=\varnothing$ qəbul olunur;
2. $A\times B\neq B\times A$, $(A\neq B)$;
3. $A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C$;
4. $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$;
5. $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$.

Uyğunluq.İnikas. *A və B çoxluqlarının $A\times B$ Dekart hasilinin ixtiyari altçoxluqlarına A və B çoxluqları arasında uyğunluq deyilir.*

Verilən çoxluqlar arasında uyğunluq dedikdə əslində bu çoxluqların elementləri arasındakı uyğunluq düşünülür.

A və B çoxluqları arasında hər-hansı bir ρ uyğunluğu bu çoxluqların özlərinin və bir də bunlar arasındakı Dekart hasilinin verilməsi ilə müəyyən edilir.

A-nın x elementinin B-nin y elementi ρ uyğunluğu çox zaman $x\rho y$ kimi işarə edilir. Burada x elementinə ρ-ya nəzərən y elementinin proobrazı, y isə x elementinin ρ-ya nəzərən obrazı adlanır. Cütlərdən ibarət olub uyğunluğu təyin edən ρ çoxluğuna uyğunluğun qrafiki deyilir. A-ya uyğunluğun gəliş oblastı, B-yə isə çıxış oblastı deyirlər.

TƏRİF. *A çoxluğunun B çoxluğuna inikası elə uyğunluqdur ki, bunun sayəsində A çoxluğunun hər bir elementinə B çoxluğunun müəyyən bir elementini qarşı qoymaq olur; burada b elementi a-nın obrazı, a elementi isə öz növbəsində b-nin proobrazı adlanır.*

Başqa sözlə: A çoxluğunun B çoxluğuna f inikası dedikdə A-nın hər bir a elementinə B-nin müəyyən bir elementini qarşı qoyan qayda düşünülür və bu $f:A\to B$, yaxud $A\xrightarrow{f}B$ simvolu ilə işarə edilir.

İnikasın üç növünü fərqləndirirlər. $f:A\to B$ inikasında A-nın elementlərinin obrazları B çoxluğunu «doldurursa» (yəni $f(A)=B$ olarsa), başqa sözlə

$$\forall y\in B \text{ və } \exists x\in A \text{ üçün } (xfy) \quad (1)$$

şərti ödənilirsə, bu süryektiv inikas adlanır, $f:A\to B$ inikasında B-nin hər bir elementi A-nın ən çoxu bir elementinin obrazı olarsa, yəni

$\forall y\in B; x_1,x_2\in A$ üçün

$$(x_1fy)\wedge(x_2fy)\Rightarrow(x_1=x_2) \text{ və ya } (f(x_1)=f(x_2))\Rightarrow(x_1=x_2) \quad (2)$$

şərti ödənildikdə inyektiv inikas adlanır.

Göründüyü kimi, $f:A\to B$ inikası inyektiv olduqda B-nin ixtiyari y ($y\in B$) elementinin A çoxluğunda ən çoxu bir proobrazı, süryektiv olduqda isə y-in ən azı bir proobrazı var.

Həm süryektiv, həm də inyektiv olan inikasa (həm (1), həm (2) şərtləri eyni zamanda ödənərsə) biyektiv inikas deyirlər.

$A\to B$ biyektiv inikasını çox zaman A və B çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq adlandırırlar. Bunu da qeyd edək ki, süryektiv inikası bəzən A-dan B üzərinə, inyektiv inikası isə A-dan B-nin daxilinə inikası da adlandırırlar.

Bəzən uyğunluqdan söhbət gedəndə müxtəlif çoxluqların elementləri arasında deyil, verilən eyni bir çoxluğun öz elementləri arasında da uyğunluqdan bəhs edilir ki, bunu da adətən münasibət adlandırırlar: yəni, məsələn A-nın x_1 və x_2 elementləri ($x_1,x_2\in A$) arasındakı $x_1\rho x_2$ uyğunluğunu x_1 ilə x_2-nin ρ münasibəti adlandırırlar. Belə halda aşkardır ki,

$$x_1\rho x_2=\{\langle x_1,x_2\rangle\}\in A\times A=A^2.$$

Buradan görünür ki, A çoxluğunda bunun elementləri arasında hər hansı münasibətin verilməsi üçün A çoxluğunun özünün elementlərinin bütün $\langle x_1,x_2\rangle$ cütlər çoxluğu verilməlidir.

Münasibətlərin müxtəlif növləri vardır: «unar», «binar», «trinar» və ya daha ümumi n-ar münasibət. Bunlardan ən «işləyi» «binar» adlanan münasibətdir. Bu münasibətdə söhbət verilən çoxluğun $A\times A\longrightarrow A$ inikasından gedir və burada təbii ki, iki elementindən düzələn nizamlanmış cütlər çoxluğundan danışılır («binar» sözü latın sözü «bie» sözündən alınıb «iki» və «iki dəfə», «təkrarən» mənasını verir).

Münasibətlərin bir neçə vacib xassələri ilə tanış olaq.

Refleksivlik. Çoxluğun hər-hansı $\forall x \in A$ bir elementinin özünün özü ilə ρ münasibətində olmasıdır: $x\rho x$. Buna ən sadə misal ədədlərdə bərabərlik münasibəti olar; belə ki, hər bir a ədədi özü-özünə bərabərdir ($a = a$).

Digər bir misal həndəsi fiqurlar çoxluğunda konqruentlik münasibətidir: hər bir fiqur özü-özü ilə konqruentdir.

Simmetriklik. Çoxluğun istənilən x, y elementləri ($x, y \in A$) üçün ($x\rho y \Rightarrow y\rho x$) şərtini ödəyən xassəsidir. Məsələn, müstəvi üzərində verilən iki düz xətt arasındakı paralellik münasibəti simmetrik münasibətdir: $(x \parallel y) \Rightarrow (y \parallel x)$. İki ədədin bərabərliyi də, bir-birinin əksi olması da simmetrik münasibətdir: belə ki, $(a = b) \Rightarrow$ $\Rightarrow (b = a)$ və a ədədi b-nin əksidirsə, b ədədi də a-nın əksidir.

Antisimmetriklik. A çoxluğunun iki müxtəlif $x \neq y$ elementi üçün $x\rho y \neq y\rho x$ olarsa, belə münasibət antisimmetriklikdir. Məsələn, həqiqi ədədlər arasında $a > b$ münasibəti antisimmetrikdir, çünki $a > b$ münasibətindən $a < b$ münasibəti alınmır.

Antisimmetriklik bəzi ədəbiyyatda simvolik şəkildə belə də yazılır: $(x\rho y \wedge y\rho x) \Rightarrow (x = y)$.

Tranzitivlik. A çoxluğunun istənilən $x, y, z \in A$ elementi üçün $(x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow (x\rho z)$ şərti ödənərsə, onda bu elementlər arasında ρ münasibəti tranzitiv münasibətdir. Məsələn, düz xətt parçaları çoxluğunda «x parçası y-dən uzundur» və «y parçası z-dən uzundur» münasibətindən x parçasının z parçasından uzun olması alınır ki, bu da uzunluqlarına nəzərən bu üç parça arasında tranzitivlik xassəsidir.

Baxdığımız bu xassələrin bu və digərlərinin olması binar münasibətinin bəzi tiplərini ayırmağa imkan verir, bunlardan mühüm biri ekvivalentlik münasibətidir.

TƏRİF. *ρ münasibəti eyni zamanda həm refleksivlik, həm simmetriklik və həm də tranzitivlik xassəsinə malikdirsə, onda buna ekvivalentlik münasibəti deyilir.*

Məsələn, həndəsi fiqurlar çoxluğunda oxşarlıq münasibəti bu xassələrin hər üçünü daşıdığı üçün ekvivalentlik münasibətidir.

Bunun kimi də kəsrlər çoxluğunda bərabərlik münasibəti buna misal ola bilər.

Münasibətlərin mühüm bir növü də nizam münasibətidir.

TƏRİF. *Verilən çoxluqdakı binar münasibət tranzitivlik və antisimmetriklik şərtlərini ödəyirsə, onda buna nizam münasibəti deyilir.*

Nizam münasibətinə aid ən yaxşı misal R həqiqi ədədlər çoxluğundakı $x < y$ münasibətidir.

Çoxluqlar nəzəriyyəsi çox genişdir. Biz burada onun yalnız ilkin elementlərini xatırlamaqla kifayətləndik.

§ 1.3. Riyazi induksiya prinsipinin mahiyyəti

Riyazi induksiya prinsipi riyaziyyatda istifadə edilən isbat üsullarından mühüm biridir. Odur ki, bu üsulun mahiyyətini daha yaxşı şərh etmək üçün qısa da olsa, öncə riyaziyyatda ümumiyyətlə isbat prosesi, teoremlərin isbatı məsələsi üzərində dayanaq.

Sözün geniş mənasında isbat dedikdə, bu və ya digər təklifin həqiqiliyini əsaslandırmaq üsulu başa düşülür. İsbatın inandırıcı olması başlıca olaraq bunun üçün məhz hansı vasitələrdən istifadə edilməsi ilə sıx əlaqədardır. Burada müxtəlif elm sahələri üçün müxtəlif vasitələrdən istifadə edilir. Məsələn, təbiət elmlərində adətən müşahidə və eksperiment kimi isbat vasitələrindən geniş istifadə edildiyi halda, riyaziyyat üçün məntiqi mühakimə, məntiqi isbat üsulları xarakterikdir. Başqa sözlə, riyazi isbatın başqa elmlərdəki isbatlardan başlıca fərqi bundadır ki, o biri elmlərdə empirik, təcrübi yaxlamaya geniş yer verildiyi halda, riyaziyyatda teoremlərin doğruluğunun isbatında heç də bilavasitə eksperimentə, təcrübəyə müraciət edilmir; çox zaman isə bu heç mümkün də deyil (məsələn, ancaq ölçüsüz parçaların varlığı barədə teoremi əsla fiziki eksperiment yolu ilə isbat etmək olmaz).

Riyaziyyatda isbat elə bir təfəkkür prosesidir ki, burada hər bir təklifin doğruluğunu əsaslandırmaq naminə ondan əvvəlki məlum təkliflərdən məntiqi ardıcıllıqla nəticə çıxarılır, biri digərinə «söykənir», biri o birini tamamlayır. Nəzərə almaq lazımdır ki, hər bir məntiqi isbat, o cümlədən riyazi isbat üç hissədən ibarətdir: tezis, arqument (dəlil, zəmin), nümayişetdirmə.

Tezis – isbat olunacaq hissədir, həm də elə hissədir ki, o hökmən həqiqi olmalıdır. Əgər tezis yalan olarsa, onda heç bir isbat onu əsaslandıra bilməz.

Arqument – isbatın elə tərkib hissəsidir ki, o, tezisi isbat etmək üçün əsasdır, zəmindir və ya dəlildir. Məlum faktlar haqqında mülahizə, tərif, aksiomlar arqument kimi götürülə bilər. Arqument həqiqilikdən əlavə daha iki tələbi ödəməlidir: 1) tezisin isbatı üçün kifayət qədər əsaslı olmalı; 2) həqiqiliyi müstəqil, tezisdən asılı olmadan təsdiqlənən olmalıdır.

Nümayişetdirmə – isbatın üçüncü tərkib hissəsidir, o elə məntiqi mühakimələrdir ki, bunun sayəsində arqumentdən tezisin doğruluğu alınır. İsbatın forması da məhz tezis ilə arqumentin arasındakı asılılıqla bağlıdır.

İsbatın müvəffəqiyyətlə başa çatması üçün tezisin doğruluğunun əsaslandırılması gedişində isbat qaydasına əməl edilməlidir. İsbat qaydası arqumentin doğruluğundan tezisin doğruluğunun alındığını təmin edən qaydaya deyirlər. Bu qaydalar məntiq qanunları ilə müəyyən edilir. Burada xüsusi olaraq nəzərdən qaçırılmamalıdır ki, ümumiyyətlə isbat edilmiş bir müddəadan digərinə keçmək *əvəzetmə* qaydasına və *nəticə çıxarma* (yəni isbat edilmiş dəlildən nəticə hasil etmək) qaydası ilə əlamətdardır. Əvəzləmə qaydası hələ aristotelçilər tərəfindən formal məntiqdə işlənmiş olan ümumidən xüsusiyə və fərdiyə keçmə qaydasına, nəticə çıxarma isə klassik məntiqin modus ponenus qaydasına (hipotetik sillogizmin birinci formasına) müvafiqdir («əgər p varsa, q də var», «əgər p doğrudursa, q də doğrudur»).

Dedik ki, bütün hallarda tezisin isbatı üçün istifadə edilən isbat forması (nümayişetdirmə hissəsi) tezislə arqumentin (zəminin, dəlilin) mövcud əlaqələri ilə bilavasitə və sıx surətdə bağlıdır; buna müvafiq olaraq da isbatın müxtəlif növlərini fərqləndirirlər.

Teoremin quruluşunu yada salsaq görürük ki, teoremdə arqument, dəlil onun şərti, tezis isə onun nəticəsidir. İsbat üsulu şərtlə nəticənin (arqument ilə tezisin) münasibəti ilə əlaqədar olur.

İndi riyazi induksiya prinsipi, onun mahiyyəti ilə tanış olaq.

Riyazi induksiya prinsipi və ya üsulu[1] teoremlərin, düsturların isbatında geniş surətdə istifadə edilən üsuldur, onların həqiqiliyini təsdiqləyən vasitədir.

Elmi idrakın forma və metodlarından söhbət gedəndə induksiya və deduksiya bir-birinin əksi olub, lakin bir-biri ilə qırılmaz əlaqədə olan və bir-birini tamamlayan idrak vasitəsi adlandırırlar. İnduksiya xüsusidən ümumiyə, deduksiya ümumidən xüsusiyə keçidi səciyyələndirən fikri proses kimi qiymətdirilir.

Riyaziyyatda induksiya prinsipinə isə ümumi elmi idrak vasitələri olan induksiya ilə deduksiyanın məntiqi isbat prosesində spesifik təzahürü kimi baxılır. Amma bu təzahür o dərəcədə spesifikdir ki, burada bəzi məqamlar nəzərdən qaçırılmamalıdır. Belə ki, məlum olduğu üzrə riyaziyyat elmi özü xalis deduktiv metodun həyata keçirildiyi bir elm sahəsinin klassik nümunəsi kimi formalaşmışdır. Riyaziyyatda isbatsız qəbul edilən aksiomlar və təriflər istisna olmaqla onun bütün mülahizələri (teoremlər, təkliflər) məntiqi yolla isbat edilir. Bunların konkret tətbiqləri məhz bu isbatlardan ümumi hallar üçün çıxarılır, alınır ki, bu da məhz deduksiyadır. Amma bu o demək deyil ki, riyaziyyatda induktiv mühakimə üsulu, sezmə, müşahidə etmə guya heç bir rol oynamır, xalis evristik əhəmiyyət kəsb etməsi mənada o, müəyyən əhəmiyyət kəsb edir. Lakin bu üsul ümumini aşkara çıxartmağa kömək edən vasitə kimi çxış edir. Riyazi həqiqət deduktivdir. Bəs belə olan halda riyazi induksiya metodunu isbat üsulu kimi necə qəbul etmək olar? İş burasındadır ki, riyazi induksiya termini şərtidir, bu metod əslində deduktiv metoddur. Məsələyə aydınlıq gətirmək üçün riyazi induksiya metodunun mahiyyəti ilə və onun bəzi tətbiqəri ilə tanış olaq.

Riyazi induksiya prinsipi bir isbat üsulu kimi n natural ədədi ilə bağlı olan mülahizələrdə işlədilir; belə ki, n natural ədədindən asılı olan $A(n)$ mülahizəsi yalnız aşağıdakı hallarda doğru olur: 1) $n=1$ üçün $A(1)$ mülahizəsi doğru olsun; 2) istənilən n üçün doğru olması fərziyyəsindən $A(n+1)$ mülahizəsinin doğruluğu alınsın (çıxsın).

---

[1] Mətndə «riyazi induksiya metodu», «riyazi induksiya üsulu» və «riyazi induksiya prinsipi» terminləri eyni mənada, sinonim kimi işlədilir.

Onu da xatırlayaq ki, $A(1)$ mülahizəsinin (yəni teoremin $n=1$ halı) üçün doğruluğunun yoxlanması riyazi induksiya metodunun başlanğıc mərhələsi olub «induksiyanın bazisi», ixtiyari n üçün teoremin doğruluğunu qəbul etdikdə bu fərziyyədən onun $n+1$ üçün də doğruluğunu almaq (isbat etmək) mərhələsi isə induksion keçid (sıçrayış) adlanır.

Buraya onu əlavə edək ki, əvvələn, əgər mülahizə (teorem) mənfi olmayan tam ədədlər çoxluğu ilə əlaqədardırsa, onda induksiyanın bazisi $A(0)$, yəni $n=0$ halının yoxlanması ilə başlanır. İkinicisi də riyazi induksiya üsulunun ikinci mərhələsini həyata keçirən zaman teoremin n $(n=k)$ üçün doğruluğunu qəbul edib $n+1$ $(n=k+1)$ üçün isbat etmək əvəzinə əksər hallarda teoremin doğruluğunu $n-1$ üçün qəbul edib n üçün isbat edirlər ki, burada heç bir qəbahət yoxdur.

Nəhayət, onu da qeyd edək ki, induksiyanın bazisində çox zaman təkcə $n=0,1$ halı ilə kifayətlənməyib aydınlıq naminə isbatı tələb edilən mülahizənin doğruluğu $n=0,1,2,3$ və s. xüsusi halları üçün yoxlanılır (belə olanda ümumi halı daha asan sezmək olur). Lakin bununla belə təkcə bu birinci mərhələ ilə, yəni induksiyanın bazisi ilə kifayətlənib ikinci mərhələyə (induksion keçidə) etina etməmək yanlış nəticəyə gətirib çıxara bilər. Riyaziyyat tarixində belə hallar az olmamışdır. Bu məsələyə xüsusi diqqət yetirən dahi riyaziyyatçılardan L.Eyler x^2+x+41 üçhədlisinə nəzəri cəlb etmişdir. Burada $x=0$ qiymətində 41 sadə ədədi, $x=1$ qiymətində 43 sadə ədədi alınır. Bunun kimi də $x=2,3,4,5,6,7,8,9,10$ qiymətlərində üçhədlinin qiyməti uyğun olaraq aşağıdakı sadə ədədlər olur:

$$47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151.$$

Bu yoxlanan xüsusi hallara əsasən sanki bu nəticəyə gəlmək olardı ki, «x dəyişəninin bütün mənfi olmayan tam qiymətləri üçün x^2+x+41 üçhədlisi sadə ədəd olur».

Amma təəssüf ki, bu hökm heç də doğru deyil. Eyler göstərir ki, bu hökm ancaq $x=2,3,\dots,39$ qiymətləri üçün doğrudur, $x=40$ qiymətində üçhədli 41^2 ədədi olur ki, bu da sadə ədəd deyil ($x^2+x+41=40^2+40+41=40(40+1)+41=40\cdot 41+41=$
$=41(40+1)=41\cdot 41=41^2$).

Əlbəttə, bəzən xüsusi hallara əsasən düzgün nəticə də almaq olur. Məsələn, aşağıdakı cəmlərə diqqət edin:

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}\ ;\quad S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}\ ;$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}\ ;\quad S_4=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}\ ;$$

$$S_5=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}=\frac{5}{6}\ \text{və s.}$$

Əgər bunu ixtiyari n həddin cəmi üçün yazsaq və

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$$

cəmi üçün xüsusi hallardakı müşahidə etdiyimiz qanunauyğunluğu nəzərə alsaq aşağıdakını yaza bilərik:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}. \qquad (1)$$

Xüsusi hallar üçün müşahidə etdiyimiz qanunauyğunluğa əsasən yazdığımız bu düstur doğrudurmu? Bəli, xoşbəxtlikdən bu doğrudur. Amma belə xoş təsadüflər həmişə olmur.

Məsələn, riyaziyyat tarixində görkəmli yerlərdən birini tutan böyük fransız alimi P.Fermanın adı ilə bağlı olan aşağıdakı ədədə diqqət edək:

$$F_n=2^{2^n}+1. \qquad (2)$$

$n=1,2,3,4$ qiymətlərində bu ədəd sadə olur. Buna əsasən Ferma belə yanlış fikrə gəlibmiş ki, bu ədəd n-in bütün natural qiymətlərində sadə ədəddir. Amma ondan təxminən bir əsr sonra L.Eyler bunu $n=5$ qiymətində qoxlayarkən

$$F_5=2^{2^5}+1=4294967297=641\cdot 6700417$$

ədədinin mürəkkəb olduğunu göstərmişdir.

Buna oxşar hadisə böyük alman alimi Leybnisin adı ilə bağlıdır.

Leybris isbat etdi ki, n^3-n ədədi 3-ə (n – natural ədəddir), n^5-n ədədi 5-ə, n^7-n ədədi 7-yə bölünür. Bu xüsusi hallara əsasən o ixtiyari k tək ədədi və n natural ədədləri üçün n^k-n fərqinin k-ya bölünməsi mülahizəsini irəli sürür. Lakin tezliklə o özü tapdı ki, $2^9-2=510$ ədədi heç də 9-a bölünmür.

Riyazi induksiyanın 2-ci mərhələsini tətbiq etmədikdə baxılan mülahizə və ya teoremin doğruluğunu ancaq yoxlanan xüsusi hallar üçün təsdiq etmək olar. İkinci mərhələ, yəni teoemin n üçün doğruluğunu fərz edib, $n+1$ üçün isbat edə biliriksə onda qəbul etdiyimiz fərziyyə fərziyyəliyindən xilas olub doğru hökm kimi təsdiqlənir, həm də teorem bütün n-lər üçün doğru olur. Deməli, o, ciddi surətdə isbat edilmiş olur.

İndi tutaq ki, induksiyanın bazisinə yox, təkcə ikinci mərhələsinə əməl etmişik. Bu halda yanlış nəticə alınacağına aid misal göstərək.

TEOREM. *Hər bir natural ədəd özündən bilavasitə sonra gələn natural ədədə bərabərdir.*

İSBATI. Fərz edək ki, $k = k+1$, (3)

göstərək ki: $k+1 = k+2$. (4)

Bilirik ki, hər bir sonra gələn natural ədəd özündən əvvəldəki ədəddən bir vahid böyükdür. Onda (3) bərabərliyinin hər tərəfinə 1 əlavə etməklə (4)-ü alırıq. Deməli, belə çıxır ki, $n=k$ üçün doğru olduğunu fərz etdiyimiz hökmdən onun $n=k+1$ üçün doğruluğu alınır: «teorem bütün n-lər üçün doğrudur». Teorem «isbat olunmuş» sayılır. Bu teoremdən isə öz növbəsində belə bir yanlış nəticə alınır: «bütün natural ədədlər bir-birinə bərabərdir». Səhv ondadır ki, burada teoremin doğruluğu n-in bəzi xüsusi qiymətlərində yoxlanmayıb, yəni induksiyanın basizinə məhəl qoyulmayıb.

Belə misalların sayını artırmaq olar. Bunlar onu göstərir ki, həqiqətdə riyaziyyatda xüsusi hallardan müşahidə yolu ilə (adi mənada bu induktiv metoddur) ümumi halın hökm edilməst həmişə doğru olmur. Hər-hansı deduktiv mühakiməni də bütün hallar üçün həmişə doğru qəbul etmək olmur. Burada induktiv və deduktiv metodlar bir-birini tamamlamalıdır. Bunu riyazi induksiya üsuluna aid etdikdə deməliyik ki, riyazi induksiya üsulunun tətbiqi zamanı onun hökmən hər iki mərhələsinə əməl edilməlidir. Ancaq bundan sonra ümumidən bütün xüsusi halların əhatə edə bilməsindən danışmaq olar.

Riyazi induksiyanın prinsipial mahiyyətini yaxşı dərk etmək, onun əhəmiyyətini düzgün qiymətləndirmək üçün bir-neçə misala baxaq.

1. Əvvəlcə yuxarıda baxdığımız misalı xatırlayaq.

Biz orada bir sıra xüsusi halları, yəni

$$S_1=\frac{1}{2},\ S_2=\frac{2}{3},\ S_3=\frac{3}{4},\ S_4=\frac{4}{5},\ S_5=\frac{5}{6}$$

olduğunu nəzərə alaraq

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

cəmi üçün

$$S_n=\frac{n}{n+1}$$

düsturunun doğruluğu barədə danışdıq.

İndi isə şübhə yeri qalmaması naminə riyazi induksiya prinsipinin tələbinə uyğun olaraq n üçün doğru olan bu düsturun doğruluğunun qəbul edilməsindən onun $n+1$ üçün də doğru olduğunu göstərək, yəni göstərək ki,

$$S_{n+1}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}. \quad (5)$$

Deməli, əvvələn $n=1$ üçün düsturun doğruluğunu yoxlayırıq:

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2},$$

sonra düsturun $n=k$ üçün doğruluğunu qəbul edirik, yəni

$$S_k=\frac{k}{k+1}$$

olduğunu fərz edirik və nəhayət düsturun $n=k+1$ üçün doğruluğunu, yəni

$$S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$$

olduğunu isbat edirik, yəni:

$$S_{k+1}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

olduğundan

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)};$$

burada da

$$S_{k+1}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Beləliklə, bizim yuxarıda gəldiyimiz nəticə, yəni $S_n = \frac{n}{n+1}$ düsturu n - in bütün natural qiymətləri üçün doğru imiş.

Burada onu da qeyd edək ki, ikinci mərhələdə (induksion keçiddə) qısa olması naminə bəzən k parametrini daxil etmədən n üçün doğruluğu fərz edilən mülahizədən birbaşa $n+1$ üçün isbata keçilir.

2. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ bərabərliyini isbat edək.

$n=1,2$ üçün yoxlayaq:

$$1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 = 1 \quad , \quad 1^3+2^3 = \left[\frac{2(2+1)}{2}\right]^2 = 9$$

alırıq.

İndi ixtiyari n üçün düsturun doğruluğundan onun $n+1$ üçün doğruluğunun alındığını göstərək.

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 =$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} =$$

$$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{2^2} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

Deməli, $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$.

Qeyd. Əgər burada $S_n^{(1)} = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ olduğunu nəzərə alsaq:

$$S_n^{(3)} = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left[S_n^{(1)}\right]^2.$$

Bəzi riyazi ədəbiyyatda «tam olmayan riyazi induksiya» və «tam riyazi induksiya» terminləri işlədilir. «Tam olmayan riyazi induksiya» termini[1] adətən induksiyanın bazis hissəsinə (mərhələsinə), tam riyazi induksiya isə həm bazis, həm də induksion sıçrayış hissəsinin (mərhələsinə) vəhdətinə aid edilir.

Tam olmayan riyazi induksiya anlayışının işlədilməsi bəraət qazandıran məqam odur ki, yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi tam riyazi induksiya metodunun geniş tətbiqi heç də induktiv metodun evrastik əhəmiyyətini inkar etmir. Bu isə onunla əlaqədardır ki, induktiv metod vasitəsi ilə, yəni xüsusi hallar üzərində aparılan müşahidələrin köməyi ilə çox zaman ümumi qanunauyğunluğu sezmək, ümumi mülahizə, fərziyyə irəli sürmək mümkün olur.

Riyaziyyatda xüsusi halları araşdırmaqla bunların köməyi ilə ümumi qanunauyğunluğu sezib aşkar etmək qabiliyyəti mühüm yaradıcılıq elementi kimi yüksək qiymətləndirilir. Bəzi misallara müraciət edək.

a) $S_n = 1!\cdot 1+2!\cdot 2+3!\cdot 3+\ldots+n!\cdot n$ cəmində aşağıdakı xüsusi hallara diqqət yetirək:

$$S_1 = 1!\cdot 1 = 1;\ S_2 = 1!\cdot 1+2!\cdot 2 = 5;\ S_3 = 1!\cdot 1+2!\cdot 2+3!\cdot 3 = 23;$$

$$S_4 = 1!\cdot 1+2!\cdot 2+3!\cdot 3+4!\cdot 4 = 119 \text{ və s.}$$

Bu xüsusi cəmlərdə belə bir qanunauyğunluq sezmək olur:

$$S_1 = 2!-1;\ S_2 = 3!-1;\ S_3 = 4!-1;\ S_4 = 5!-1 \text{ və s.}$$

Bu qanunauyğunluq aşağıdakı fərziyyəni söyləməyə imkan verir.

$$S_n = (n+1)!-1.$$

Lakin bunun fərziyyə deyil, doğru bir düstur olmasını riyazi induksiya üsulu təsdiq və ya təkzib edə bilər (isbat edin!).

b) Aşağıdakı bərabərliklərə nəzər yetirək:

$$\begin{aligned} 1&=1,\\ 1+3&=4,\\ 1+3+5&=9,\\ 1+3+5+7&=16,\\ 1+3+5+7+9&=25,\\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Tək natural ədədlər ardıcıllığının xüsusi cəmləri olan bu bərabərliklərdən sezmək olar ki:

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = n^2.$$

Siz də bu fərziyyənin doğruluğunu riyazi induksiya üsulu ilə isbat edin.

Belə misallar çoxdur. Xüsusi ilə də ədədlər nəzəriyyəsi tarixində o qədər faktlar var ki, onlar məhz induktiv metod sayəsində kəşf edilib. Məsələn, dahi riyaziyyatçılar L.Eyler, K.Qauss müəyyən bir ədədi qanunauyğunluğu aşkar etmək naminə minlərlə misallar, xüsusi halları araşdırmışlar. Amma bununla belə onlar unutmurdular

[1] Bəzi müəlliflər bunu «empirik induksiya» adlandırırlar (məsələn bax: Курант Р. и Роббин Г. Что такое математика., 1967, стр. 34.

ki, sonlu sayda hallar üçün doğru olan bir hökm sonsuz çoxluğa aid etmək həmişə uğurla nəticələnmir. Odur ki, onlar xüsusi hallarda sezdikləri qanunauyğunluğun isbatı qayğısına da qalırdılar.

Bəzən belə də olub ki, bir alimin induktiv yolla irəli sürdüyü fərziyyə digəri tərəfindən isbat edilib. Məsələn, Fransız riyaziyyatçısı J.Bertran xüsusi hallara əsasən belə bir fərziyyə söyləyib ki, $n>3$ olduqda n ilə $m-1$ natural ədədləri arasında heç olmasa bir sadə ədəd hökmən var. Müşahidələr nəticəsində söylənən bu fərziyyəni 40 il sonra rus riyaziyyatçısı P.L.Çebışev isbat etmişdir.

Riyazi induksiyaya aid daha bir neçə misala baxaq.

1) $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\dfrac{nx}{2}$ düsturunun doğruluğunu isbat edək.

İSBATI. $n=1$ üçün doğrudur, yəni:

$$\sin 1x=\frac{\sin\frac{1+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin x=\sin x.$$

$n=k$ üçün doğruluğunu qəbul edək, yəni:

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin kx=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{kx}{2}.$$

Onda $n=k+1$ üçün

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin kx+\sin(k+1)x=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{kx}{2}+\sin(k+1)x=$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x\cdot\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+2\sin\frac{k+1}{2}x\cdot\cos\frac{k+1}{2}x=\sin\frac{k+1}{2}x\times$$

$$\times\left(\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}+2\cos\frac{k+1}{2}x\right)=\sin\frac{k+1}{2}x\cdot\frac{\sin\frac{kx}{2}+\sin\frac{k+2}{2}x-\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{k+2}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{k+1}{2}x,$$

yəni bərabərlik $n=k+1$ üçün də doğru olur.

2) $n>1$ üçün $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ bərabərsizliyini isbat edin.

İSBATI. $n=2$ üçün yoxlayırıq:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}+\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}-1-2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2};$$

burada $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}>0$ olduğundan $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}>\sqrt{2}$ olur.

Deməli, $n=2$ üçün bərabərsizlik doğrudur, yəni

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}.$$

İndi fərz edək ki, bərabərsizlik $n=k$ üçün doğrudur:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}.$$

Göstərək ki, $n=k+1$ üçün də doğrudur, yəni göstərək ki:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}. \qquad (1)$$

(1)-in hər tərəfinə $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ fərqini əlavə edək:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\sqrt{k+1}-\sqrt{k}>\sqrt{k}+\sqrt{k+1}-\sqrt{k},$$

buradan

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\sqrt{k+1}-\sqrt{k}>\sqrt{k+1},$$

yaxud

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}>\sqrt{k+1}$$

və ya

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}>\sqrt{k+1}$$ alırıq.

Burada

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}<\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$ olduğu üçün

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

alınır.

§ 1.4. Vektor anlayışının cəbrdə ümumiləşdirilməsi, n - ölçülü vektorlar, onlar üzərində əməllər, n – ölçülü vektorların arifmetik fəzası

Vektor anlayışı ilə oxucu məktəb riyaziyyatı kursundan tanışdır: elementar həndəsədə vektor istiqamətlənmiş parçaya deyilir. Amma bununla belə analitik həndəsə ilə tanışlıq göstərir ki, vektor nizamlanmış ədədlərin köməyi ilə də səciyyələnə bilər. Belə ki, bir müstəvi üzərində yerləşən istiqamətlənmiş parçanın – vektorun təyin edilməsi üçün nizamlanmış iki ədəd, fəzada vektor üç nizamlanmış ədədlə – bunun uc nöqtələrinin koordinatları – müstəvinin koordinat oxları üzərindəki proyeksiyaları vasitəsilə təyin edilə bilir.

Vektor anlayışı fizikada kəmiyyətin nəinki təkcə ədədi qiymətini, həm də o kəmiyyətin istiqamətini də xarakterizə edən anlayış kimi səciyyələnir, buraya birinci növbədə sürət və təcil misal olar.

Vektor anlayışının cəbrdə ümumiləşdirilməsi üçün əsas nəzəri zəmin budur ki, əvvələn, hər bir vektor müstəvidə (ikiölçülü fəzada) və fəzada (üçölçülü fəzada) uyğun olaraq müəyyən nizamla götürülən iki və üç dənə həqiqi ədədin köməyi ilə təyin edilə bilir, bu nizamlanmış ədədlərin «cütlüyünü» və «üçlüyünü» adətən müstəvidə $\alpha=(a_1,a_2)$, fəzada $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$ kimi yazıb mötərizədəki nizamlanmış ədədləri onun koordinatları və ya komponentləri adlandırırlar. İkincisi də, bu vektorların toplanmasında və bir λ ədədinə vurulmasında belə bir qanunauyğunluğun şahidi oluruq ki, müstəvidə verilən $\alpha=(a_1,a_2)$ və $\beta=(b_1,b_2)$ vektorları üçün:

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2),$$
$$\lambda\alpha=(\lambda a_1,\lambda a_2),$$

fəzada verilən $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$ və $\beta=(b_1,b_2,b_3)$ vektorları üçün isə,

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3),$$
$$\lambda\alpha=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3).$$

Bu yazılışların hər birində vektoru təyin edən ədədlərin müəyyən nizamla götürülməsi (məsələn fəzada birinci a_1, ikinci a_2, üçüncü a_3) nəzərdən qaçırılmır və aydın olur ki, xüsusi halda müstəvidə vektoru iki ədədin, fəzada isə üç ədədin nizamlanmış sistemi tamamilə təyin edir. Lakin bunu da unutmaq olmaz ki, mexanikada, həndəsənin özündə, fizikada elə məsələlər qarşıya çıxır ki, orada öyrənilən obyektlər daha çox, məsələn dörd, beş, altı və s. həqiqi ədədin nizamlı sistemi ilə təyin edilir. Kürə buna misal olar, belə ki, kürənin vəziyyətini fəzada dörd ədədin nizamlı sistemi təyin edir, bu ədədlərdən üçü onun mərkəzinin koordinatları, dördüncü ədəd isə onun radiusudur. Bərk cisimlərin fəzada vəziyyətini isə altı dənə nizamlanmış həqiqi ədəd təyin edir: burada nizamlanmış üç həqiqi ədəd bu cismin mərkəzinin koordinatları, mərkəzdən keçən hər-hansı qeyd olunan oxun istiqaməti (üç dənə yönəldici kosinuslardan ikisinə aid olan iki ədəd) və nəhayət, həmin ox ətrafında dönmə bucağı. Bu misallar göstərir ki, vektor anlayışını ümumiləşdirmək lazım gəlir və cəbrdə bunu yuxarıda göstərdiyimiz zəmin əsasında onun analoqu kimi ümumiləşdirmək olur.

TƏRİF. *n dənə $a_1,a_2,...,a_n$ həqiqi ədədlərin nizamlanmış sisteminə n - ölçülü vektor, həmin ədədlərə bu vektorun koordinatları (və ya komponentləri) deyilir və*

$$\alpha=(a_1,a_2,...,a_n)$$

kimi işarə edilir.

Cəbrə aid ədəbiyyatlarda n - ölçülü $(a_1,a_2,...,a_n)$ vektorunu çox zaman «uzunluğu n olan sətir vektor», yaxud onu «hündürlüyü n olan sütun vektor» adlandırıb aşağıdakı kimi işarə edirlər:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Bəzən bunlara «n - ölçülü ədədi vektor» əvəzinə sadəcə olaraq «uzunluğu n olan sətir» (və ya «sütun») da deyirlər.

Bəzi müəlliflər n - i, yəni koordinatların sayını şərti olaraq vektorun «ölçüsü» də adlandırırlar. Qeyd edək ki, n - ölçülü vektorlar üzərində əməllər, onların xassələrini, tətbiqlərini öyrənmək baxımından bu adlar şərtidir və hansı adı qəbul etmək mahiyyətə heç də xələl gətirmir.

n - öçülü vektora aid misal göstərək.

Həqiqi əmsallı n - məchullu

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=b$$

xətti cəbri tənliyin hər-hansı bir

$$x_1=c_1,\quad x_2=c_2,\quad \dots,\quad x_n=c_n$$

həlli, yəni məchulların tənliyi ödəyən $c_1,c_2,...,c_n$ qiymətlərinə n dənə həqiqi ədədin nizamlanmış sistemi kimi baxıb bu həlli $\alpha=(a_1,a_2,...,a_n)$ kimi yaza bilərik. Aydındır ki, bunu n uzunluqlu sətir, yaxud sadəcə ədədi və ya «sətir vektor» adlandırsaq da məsələnin mahiyyəti dəyişməz, yəni $\alpha=(a_1,a_2,...,a_n)$ bu tənliyin həllinin yazılış şəkli olur.

Daha bir orijinal misal n məchullu xətti bircins

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=0$$

tənliyinin sol tərəfi olub, $a_1,a_2,...,a_n$ ədədləri ilə $x_1,x_2,...,x_n$ dəyişənlərinin köməyi ilə düzəldilən və cəbrdə «xətti forma» adlanan

$$f=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n$$

bircins xətti ifadəni göstərmək olar. Bu xətti forma koordinatları bu formanın əmsalları olan $(a_1,a_2,...,a_n)$ vektoru vasitəsilə birqiymətli olaraq tamamilə təyin edilə bilir. Əksinə, hər bir n-ölçülü vektor yeganə bir xətti formanı təyin edir. Bunların xassələri bir-biri vasitəsilə öyrənilə bilir.

İndi isə n-ölçülü vektorlar üzərində təyin edilən toplama və ədədə vurma əməlləri və onların xassələri ilə tanış olaq.

TƏRİF 1. *Uyğun koordinatları bir-birinə bərabər olan iki $\alpha=(a_1;a_2;...;a_n)$ və $\beta=(b_1;b_2;...;b_n)$ vektorlarına bərabər vektorlar deyilir*, yəni

$$(\alpha=\beta)\Leftrightarrow(a_i=b_i),\quad i=\overline{1,n}.$$

Tərifdən bilavasitə aydın olur ki, yalnız eyni ölçülü (eyni uzunluqlu) vektorların bərabərliyindən danışmaq olar.

TƏRİF 2. $\alpha=(a_1;a_2;...;a_n)$ *və* $\beta=(b_1;b_2;...;b_n)$ *vektorlarının uyğun koordinatlarının cəmindən ibarət olan vektora bu vektorların cəmi deyilir və $\alpha+\beta$ kimi işarə edilir*, yəni:

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1;a_2+b_2;...;a_n+b_n) \quad (1)$$

Bu tərifdən də aydın olur ki, yalnız eyni ölçülü vektorları toplamaq olar.

TƏRİF 3. $\alpha=(a_1;a_2;...;a_n)$ *vektorunun ixtiyari λ ədədi ilə hasili koordinatlarının hamısının bu ədədlə hasillərindən ibarət olan vektora deyilir və bu $\lambda\cdot\alpha$ kimi işarə edilir*, yəni:

$$\lambda\alpha=(a_1;a_2;...;a_n)=(\lambda a_1;\lambda a_2;...;\lambda a_n).$$

n-ölçülü vektorlar çoxluğunda sıfır vektor və verilən vektorun əksi adlanan vektor anlayışları vardır.

Koordinatları sıfırlardan ibarət olan vektora sıfır vektor deyilir. Sıfır vektoru adətən θ ilə işarə edirlər:

$$\theta=(0;0;\dots;0).$$

Koordinatları $\alpha=(a_1;a_2;...;a_n)$ vektorunun əks işarəli koordinatlarından ibarət olan vektora α-nın əksi deyilir və $-\alpha$ ilə işarə edilir, yəni:

$$-\alpha=(-a_1;-a_2;...;-a_n).$$

Buradan n-ölçülü vektorlar üzərində toplama əməlinin tərsi olan çıxma əməlinin varlığı ilə rastlaşırıq, yəni: $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$, yaxud: $\alpha-\beta=(a_1-b_1;a_2-b_2;\dots;a_n-b_n)$.

Vektorlar üzərində təyin edilən əməllərlə tanışlıq onlarda aşağıdakı xassələrin olduğunu aşkar etməyə imkan verir:

$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	(1)	toplamada kommutativlik (yerdəyişmə) xassəsi;
$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma$	(2)	toplamada assosiativlik (qruplaşdırma) xassəsi;
$\alpha+\theta=\alpha$	(3)	sıfır vektorun xassəsi;
$\alpha+(-\alpha)=\theta$	(4)	əks vektorun xassəsi;
$\lambda(\alpha\pm\beta)=\lambda\alpha\pm\lambda\beta$	(5)	ədədin vektorların cəbri cəminə nəzərən distributivlik (paylaşdırma) xassəsi;
$(\lambda_1\pm\lambda_2)\alpha=\lambda_1\alpha\pm\lambda_2\alpha$	(6)	ədədlərin cəbri cəminin vektorla hasili ilə distributivlik xassəsi;
$(\lambda_1\lambda_2)\alpha=\lambda_1(\lambda_2\alpha)$	(7)	ədədlərlə vektorun hasilində assosiativlik xassəsi;
$1\cdot\alpha=\alpha$	(8)	vahidlə hasili.

Bu xassələrin doğruluğunu bilavasitə yoxlamaq yolu ilə isbat etmək olar. Məsələn, toplamada kommutativlik, yaxud yerdəyişmə qanununu yoxlayaq. Bərabərliyin sol tərəfi:

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1;a_2+b_2;\ldots;a_n+b_n);$$
bərabərliyin sağ tərəfi:
$$\beta+\alpha=(b_1+a_1;b_2+a_2;\ldots;b_n+a_n).$$

Bu vektorların koordinatları uyğun olaraq a_i və b_i $(i=\overline{1,n})$ ədədləridir və bunlar üçün $a_i+b_i=b_i+a_i$ $(i=\overline{1,n})$ xassəsi doğrudur, ona görə $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

$(\lambda_1\pm\lambda_2)\alpha=\lambda_1\alpha\pm\lambda_2\alpha$ xassəsinin doğruluğunu isbat edək.

Bərabərliyin sol tərəfində
$$(\lambda_1\pm\lambda_2)\alpha=(\lambda_1\pm\lambda_2)(a_1;a_2;\ldots;a_n)=$$
$$=((\lambda_1\pm\lambda_2)a_1;(\lambda_1\pm\lambda_2)a_2;\ldots;(\lambda_1\pm\lambda_2)a_n)=$$
$$=(\lambda_1a_1\pm\lambda_2a_1;\lambda_1a_2\pm\lambda_2a_2;\ldots;\lambda_1a_n\pm\lambda_2a_n),$$
sağ tərəfdə isə
$$\lambda_1\alpha\pm\lambda_2\alpha=\lambda_1(a_1;a_2;\ldots;a_n)\pm\lambda_2(a_1;a_2;\ldots;a_n)=$$
$$=(\lambda_1a_1;\lambda_1a_2;\ldots;\lambda_1a_n)\pm(\lambda_2a_1;\lambda_2a_2;\ldots;\lambda_2a_n)=$$
$$=(\lambda_1a_1\pm\lambda_2a_1;\lambda_1a_2\pm\lambda_2a_2;\ldots;\lambda_1a_n\pm\lambda_2a_n)$$
alarıq. Deməli, hər iki tərəfdə eyni vektor alınır. Bununla da xassə isbat olunur.

Sıfır və əks vektorlarla əlaqədar olan aşağıdakı xassələrin doğruluğunu da göstərək.
$$\alpha+\theta=(a_1;a_2;\ldots;a_n)+(0;0;\ldots;0)=$$
$$=(a_1+0;a_2+0;\ldots;a_n+0)=(a_1;a_2;\ldots;a_n)=\alpha,$$
$$\alpha+(-\alpha)=(a_1;a_2;\ldots;a_n)+(-a_1;-a_2;\ldots;-a_n)=$$
$$=(a_1-a_1;a_2-a_2;\ldots;a_n-a_n)=(0;0;\ldots;0)=\theta.$$

TƏRİF. *Toplama və ədədə vurma əməllərinin təyin edildiyi bütün n-ölçülü vektorlar çoxluğuna n-ölçülü vektorlar fəzası və ya vektorların arifmetik fəzası deyirlər.*

Yuxarıda göstərilən xassələrin köməyi ilə n-ölçülü vektorların arifmetik fəzasında
$$0\cdot\alpha=\theta \qquad (11)$$
$$(-1)\cdot\alpha=-\alpha \qquad (12)$$
$$\alpha\cdot\theta=\theta \qquad (13)$$
bərabərliklərinin, habelə
$$\lambda\alpha=\theta \text{ olduqda ya } \lambda=0, \text{ ya da } \alpha=\theta \qquad (14)$$

olduğunu asanlıqla isbat etmək olar.

n-ölçülü vektorların arifmetik fəzasında vektorların vurulması əməli təyin edilməmişdir.

§ 1.5. Matrislər haqqında ilkin məlumat

TƏRİF. *$s\cdot n$ sayda ədədlər çoxluğundan düzbucaqlı şəklində düzəldilmiş cədvələ matris deyilir və onu*
$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{Vmatrix} \text{ yaxud } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{bmatrix} \text{ və yaxud da } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix}$$
kimi işarə edirlər.[1]

Cədvəli təşkil edən və a_{ij} şəklində işarə edilən ədədlərə matrisin elementləri deyilir (bu element «a i-ji» kimi oxunur).

Üfüqi vəziyyətdə yerləşən elementlər matrisin sətir, şaquli vəziyyətdə düzülən elementlər isə onun sütun elementləri adlanır.

Matrisin elementlərini işarə etmək üçün istifadə edilən a hərfinin i,j indeksləri (yəni, onları fərqləndirmək üçün onun aşağısında kiçik yazılan i,j ədədləri) uyğun olaraq onun sətir və sütun nömrələrini göstərir. Məsələn, a_{35} elementi (burada i=3, j=5) matrisin 3-cü sətir və 5-ci sütun elementi olduğunu, başqa sözlə, o 3-cü sətir ilə 5-ci sütunun kəsişdiyi yerdə durur.

s sətir və n sütuna malik olan matrisin ixtiyari a_{ij} elementi üçün i və j indeksləri $i=1,2,\ldots,s$ və $j=1,2,\ldots,n$ qiymətlərini alır. Qısa olması üçün bəzən matrisi $\|a_{ij}\|$ və ya $[a_{ij}]$, yaxud (a_{ij}) $(i=1,2,\ldots,s;\ j=1,2,\ldots,n)$ kimi işarə edirlər.

Şərtləşək ki, $i=1,2,\ldots,s$ və $j=1,2,\ldots,n$ yazılışlarını da qısa olması naminə uyğun olaraq $i=\overline{1,s}$, $j=\overline{1,n}$ kimi işarə edək.

Adətən matrisləri A,B,C,M,S,T və s. iri latın hərfləri, bunların uyğun elementlərini isə $a_{ij},b_{ij},c_{ij},m_{ij},s_{ij},t_{ij}$ və s. kiçik latın hərfləri ilə işarə edirlər.

---
[1] Matrisin elementləri ədədlər deyil başqa riyazi obyektlər də (funksiya və onun inteqralı və s.) ola bilər. Biz hələlik elementləri həqiqi ədədlər olan matrislər barədə ilkin anlayışlarla tanış olacağıq.

Matris üçün qəbul edilən işarələrdən bizim kitabda birindən, məsələn,

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{Vmatrix}, \text{ yaxud qısaca: } A=\|a_{ij}\| \quad (i=\overline{1,s},\ j=\overline{1,n})$$

istifadə etməyi şərtləşək.

Elementləri ədədlər olan matrisləri ədədi matris adlandırırlar.

Matris s dənə sətir, n dənə sütundan ibarətdirsə, buna $s\times n$ ölçulu düzbucaqlı matris deyərək onu $A_{s\times n}=\|a_{ij}\|$ kimi yazırlar. Məsələn,

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix} a & x \\ b & y \\ c & z \\ d & u \\ e & v \end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & 7 & 0 \end{Vmatrix}$$

matrisləri uyğun olaraq $3\times 4, 5\times 2, 2\times 6$ ölçülü düzbucaqlı matrislərdir və bunları uyğun olaraq $A_{3\times 4}, B_{5\times 2}, C_{2\times 6}$ kimi işarə etmək olar.

Sətirləri ilə sütunları sayı eyni olan (yəni $s=n$) matrisə kvadrat matris, n-ə isə bunun tərtibi deyilir.

Məsələn,

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{Vmatrix}.$$

A matrisi iki-tərtibli, B isə beş-tərtibli matrislərdir.

Xüsusi halda matris bir sətirdən və ya bir sütundan ibarət ola bilər:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix}.$$

Bunları uyğun olaraq «sətir matris» və «sütun matris» də adlandırırlar.

Belə xüsusi hal bizi matrislərlə sıx əlaqəsi olan «n-ölçülü» vektor anlayışını bir daha xatırlamağa sövq edir. Belə ki,

$$A_{s\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

matrisinin hər bir sətrinə koordinatları bu sətrin uyğun elementləri olan n-ölçülü vektor, hər bir sütununa isə koordinatları bu sütunun uyğun elementləri olan s-ölçülü vektor kimi baxa bilərik, çünki sütunlar n dənə ədədin, sətirlər isə s dənə ədədin nizamlanmış sistemidir.

Bütövlükdə $A_{s\times n}$ matrisinin özünə sn ölçülü ədədi vektor kimi baxa bilərik.

Xüsusi halda n-tərtibli kvadrat matrisə n^2 ölçülü vektor və $\alpha=(a_{11};a_{12};\dots;a_{1n})$ vektoruna $1\times n$ ölçülü bir matris kimi də baxa bilərik.

Deməli, yalnız bir sətir və yaxud bir sütundan ibarət olan matrislər üçün bəzən «sətir-vektor» və «sütun-vektor» terminlərinin işlədilməsi təəccüb doğurmamalıdır. Bu baxımdan hər-hansı $s\times n$ ölçülü

$$A_{s\times n}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{Vmatrix}$$

matrisinin hər bir sətri onun n uzunluqlu sətir-vektoru olub hamısı bütövlükdə bu matrisin s dənə vektordan ibarət olan n-ölçülü

$$\alpha_1=(a_{11};a_{12};\dots;a_{1n}),$$
$$\alpha_2=(a_{21};a_{22};\dots;a_{2n}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha_s=(a_{s1};a_{s2};\dots;a_{sn})$$

sətir-vektorlar sisteminin, s uzunluqlu n dənə n-ölçülü

$$\beta_1=(a_{11};a_{21};\dots;a_{s1}),$$
$$\beta_2=(a_{12};a_{22};\dots;a_{s2}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\beta_n=(a_{1n};a_{2n};\dots;a_{sn})$$

vektorları isə bu matrisin sütun-vektorlar sistemini təşkil edirlər.

Onu da qeyd edək ki, əyanilik naminə bu sütun vektorları bəzi ədəbiyyatlarda aşağıdakı kimi yazmağı daha məqsədəuyğun sayırlar:

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{bmatrix}, \ \beta_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{bmatrix}, \ldots, \ \beta_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{bmatrix}.$$

TƏRİF. *Ölçüləri və uyğun elementləri bir-birinə bərabər olan matrislərə bərabər matrislər deyilir.*

Kitabın müvafiq bölmələrində matrislərin bəzi xüsusi növləri, matrislər üzərində əməllər, bunların xassələri, tətbiqləri, matrislər üzərində çevirmələr və s. məsələlər üzərində nisbətən ətraflı bəhs ediləcək. Lakin burada biz zərurət üzündən hələlik matrislərin bəzi vacib növləri, habelə onlar üzərində aparılan bir çox çevirmələr barədə qısa məlumatla kifayətlənirik. Bu zərurət onunla bağlıdır ki, burada tanış olacağımız bilgilərdən istifadə edəcəyimizin tezliklə şahidi olacaqsınız.

TƏRİF. *Elementlərinin hamısı yalnız sıfırlardan ibarət olan matrisə sıfır matris deyilir.*

Sıfır matrisi adətən θ *ilə işarə edirlər*:

$$\theta = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Göründüyü üzrə sıfır matrisin sətir və sütunları sıfır vektor əmələ gətirir.

Matrisin hər hansı bir sətrinin (sütununun) elementləri hamısı sıfırlardan ibarətdirsə çox zaman həmin sətri (sütunu) qısaca olaraq «sıfır-sətir» («sıfır-sütun») adlandırırlar.

Deməli, sıfır matrisin sətirləri (sütunları) hamısı sıfır-sətirdir (sıfır-sütundur).

Matrislərin vacib növlərindən biri *«pilləli matris»* və onun bəzi xüsusi hallarıdır.

TƏRİF. *Aşağıdakı şərtləri ödəyən matrisə pilləli matris deyilir:*

1) i-ci sətrində ilk sıfırdan fərqli element k-cı yerdədirsə (yəni, bu sətrin k-cı sütun ilə kəsişdiyi yerdədirsə: $a_{ik} \neq 0$), onda onun sonrakı $(i+1)$-ci sətrindəki ilk k dənə ardıcıl düzülən elementlər sıfırlardır ($a_{i+1,1} = a_{i+1,2} = \ldots = a_{i+1,k} = 0$) (başqa sözlə, məsələn, i-ci və $(i+1)$-ci sətrində ilk sıfırdan fərqli elementlər uyğun olaraq k_i və k_{i+1}-ci sütunlarda yerləşirlər və onda $k_i < k_{i+1}$).

2) i**-ci sətrin elementləri hamısı sıfırlardan ibarətdirsə, onda onun sonrakı** $(i+1)$ **-ci sətir elementləri hamısı sıfırlardan ibarətdir.**

Tərifi daha da əyaniləşdirsək, deyilən şərtlərin ödənməsi o deməkdir ki, pilləli matrisdə sıfır sətirdən sonra gələn sətirlər sıfır sətirlər olur və hər-hansı bir sətrində sıfırdan fərqli elementdən bilavasitə solda, həm də yuxarıda dayanan element sıfır olur, yəni məsələn, burada $a_{ik} \neq 0$ **isə, onda** $a_{i-1,k} = 0$, $a_{i,k+1} = 0$ **olmalıdır.**

Məsələn,

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

burada $i = 1,2,3$ **və** $k_1 = 2$, $k_2 = 4$, $k_3 = 5$.

Tərifə əsasən aşağıdakı A_1, A_2, A_3, A_4 **matrislərinin də pilləli matris olduğunu yoxlaya bilərsiniz:**

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \ A_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{Vmatrix}, \ A_4 = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Xüsusi halda sıfır matris də pilləli matris sayılır.

Matrislərin bir növü də pilləli matrisin xüsusi halı olan «trapesşəkilli» matrisdir; o belədir:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,k-1} & a_{3k} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} & a_{k-1,k+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix},$$

burada $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, $a_{k+1,j} = 0$, $j = \overline{1,n}$.

Pilləli matrisin digər növü n - tərtibli «üçbucaqşəkilli» matris və diaqonal matrislərdir.

Üçbucaqşəkilli (və ya «üçbucaq-matris») belədir:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{Vmatrix} \text{ yaxud } \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{Vmatrix},$$

burada $a_{ii} \neq 0$, $i=\overline{1,n}$, $a_{ij}=0$, $i<n+1-j$ (yaxud $i>n+1-j$).

n - tərtibli kvadrat matrisin sol yuxarı küncündən başlayaraq sağ aşağı küncünə doğru düzülən $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ elementlərinə onun *baş diaqonal elementləri* deyilir.

Deməli, üçbucaq-matris elə kvadrat matrisə deyilir ki, onun baş diaqonal elementlərindən bir tərəfdə yerləşən elementlər (ya aşağıda, yaxud da yuxarıdakı elementlər hamısı) sıfırlardan ibarətdir.

Baş diaqonal elementlərdən həm yuxarıda, həm də aşağıda yerləşən elementlərinin hamısı sıfır olan kvadrat matrisə *diaqonal matris* deyib, onu $diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ kimi işarə edirlər, yəni:

$$diag(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}) = \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix},$$

burada $(i \neq j) \Rightarrow a_{ij} = 0$, $i, j = \overline{1,n}$.

Xüsusi halda diaqonal matrisdə $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \dots = a_{nn} = a$ olarsa, buna *skalyar matris* və $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \dots = a_{nn} = 1$ olarsa, buna *vahid matris* deyilir, yəni:

$$\begin{Vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{Vmatrix} \text{ skalyar matris, } \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} \text{ } n\text{ - tərtibli vahid matris.}$$

Deməli, baş diaqonal elementləri bir-birinə bərabər, qalan elementləri hamısı sıfır olan matris skalyar, baş diaqonal elementləri vahidlər, qalan bütün elementləri sıfır olan matris vahid matris adlanır.

n - tərtibli sıfır matrisi θ_n, n - tərtibli vahid matrisi isə E_n ilə işarə edək.

Aşkar görünür ki, üçbucaq, diaqonal, skalyar, vahid matris pilləli matrisin xüsusi hallarıdır.

Pilləli matrisin bir xüsusi halı da «kanonik» matrislərdir.

$s \times n$ ölçülü matrisdə $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{rr}$ $(0 \leq r \leq \min(s,n))$ elementləri 1-ə bərabər ($a_{11} = a_{22} = a_{33} = \dots = a_{nn} = 1$), qalan elementləri hamısı sıfırlardan ibarətdirsə buna kanonik matris deyirlər. Məsələn,

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

matrisləri uyğun olaraq 3×4, 3×2 ölçülü kanonik matrislərdir.

Nəhayət, matrislərin «kvazi-üçbucaq» adlanan xüsusi bir növü ilə də tanış olaq.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \text{yaxud}$$

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

* * *

İndi isə matrislər üzərində aparılan bəzi çevirmələrlə tanış olaq.

1. A matrisinin bütün sətirlərini verildiyi ardıcıl nömrə üzrə bütün sütunları ilə əvəz edilməsinə onun transponirə edilməsi deyilir və o ${}^{T}A$, yaxud A' ilə işarə edilir, yəni $A=\|a_{ij}\|$ matrisi üçün:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{Vmatrix} \text{ üçün: } A'=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{s2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{sn} \end{Vmatrix}.$$

Misal. $$A=\begin{Vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 5 \end{Vmatrix},\ A'=\begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Yaxud: $$B=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix},\ B'=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{Vmatrix}.$$

Matrislər üzərində transponirə əməliyyatını icra etmək üçün verilən matrisin elementlərinin indeksləri üzərində yerdəyişmə aparmaq gərəkdir (yada salaq ki, I indekslər elementin sətir, II indekslər sütun nömrələridir), belə ki: $A=\|a_{ij}\|$, $A'=\|a_{ji}\|$.

Göründüyü kimi matrisi transponirə etmək, onu 180° döndərməkdir.

Onu da qeyd edək ki, bir sətirdən ibarət olan

$$A=\|a_{11}\ \ a_{12}\ \ \dots\ \ a_{1n}\|$$

matrisini transponirə edib onu aşağıdakı

$$A'=\begin{Vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{Vmatrix}$$

sütun matrisə çevirmək olar.

2. Matrislər üzərində çevirmələrin bir növü də onun sətirləri və sütunları üzərində aparılan elementar çevirmələrdir. Bunlar əsasən üçdür: 1) İki sətrin (sütunun) yerini dəyişmək; 2) Sətri (sütunu) sıfırdan fərqli bir ədədə vurmaq; 3) Sətrin (sütunun) birini ixtiyari bir ədədə vurub digər sətrin (sütunun) üzərinə əlavə etmək.

Çox zaman sıfır-sətri və sıfır-sütunu matrisdən kənar etmək, yaxud matrisə sıfır-sətir və sıfır-sütun əlavə etməyi də 4-cü elementar çevirmə kimi qeyd edirlər.

Verilən A matrisi üzərində elementar çevirmələr aparanda aşkardır ki, matris dəyişəcək və yeni bir A_1 matrisi alınacaq, $A\neq A_1$ olduğundan bu faktı $A\to A_1$ kimi işarə edəcəyik.

Məsələn, $A=\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$ matrisinin sətirləri üzərində elementar çevirmələr aparaq; əvvəlcə 1-ci və 3-cü sətirlərin yerini dəyişək, alınan matris A_1 olsun.

$$A\to A_1=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{Vmatrix};$$ 2-ci sətri $\lambda=2$ ədədinə vuraq, yeni A_2 matrisini alarıq: $A_2=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2 & -10 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{Vmatrix}$; 3-cü sətri $\lambda=-1$ ədədinə vurub 2-cinin üzərinə əlavə edək. Alınan matris A_3 olsun:

$$A_3=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & -2 & -10 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{Vmatrix}$$

Deməli, A matrisinin sətirləri üzərində göstərilən elementar çevirmələr aparmaqla A matrisindən A_3 alırıq: $A_1\to A_2\to A_3$, yəni:

$$\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}\to\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{Vmatrix}\to\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2 & -10 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{Vmatrix}\to\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & -2 & -10 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Aydındır ki, bu çevirmələri davam etdirmək olar.

Başqa bir misal.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & -5 \end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & -5 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

İndi isə belə bir teorem isbat edək.

TEOREM. *Hər hansı matrisi sonlu sayda elementar çevirmələrin köməyi ilə pilləli matrisə çevirmək olar.*

İSBATI. Əgər verilən matris sıfır matrisdirsə, o pilləli sayılır. Tutaq ki, verilən $A_{s\times n}$ matrisi sıfır matris deyil:

$$A_{s\times n}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & a_{s3} & \dots & a_{sn} \end{Vmatrix}\neq\theta .$$

Onda bu matrisin heç olmasa sıfırdan fərqli bir elementi var. Teoremi isbat etmək üçün riyazi induksiya üsulunu tətbiq edək.

1×1 ölçülü matris üçün $A=\|a_{11}\|$ teorem doğrudur (bir elementli matris də pilləli matrisdir).

İndi fərz edək ki, ölçüsü $s\times n$-dən kiçik olan matrislər üçün teorem doğrudur.

Tutaq ki, a matrisinin sıfırdan fərqli elementi onun m-ci sətrində və k-cı sütunundadır: $a_{mk}\neq 0$.

m-ci sətri 1-ci sətrin yerinə gətirək. Onda matris aşağıdakı şəklə gələr.

$$B=\begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k} & b_{1,k+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & b_{2k} & b_{2,k+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{sk} & b_{s,k+1} & \dots & b_{sn} \end{Vmatrix}$$

burada $b_{1k}\neq 0$. Bu matrisin 1-ci sətrini növbə ilə $-\frac{b_{2k}}{b_{1k}}$, $-\frac{b_{3k}}{b_{1k}}$, ..., $-\frac{b_{sk}}{b_{1k}}$ ədədlərinə vurub uyğun olaraq ikinci, üçüncü və s. ... s-ci sətirlər üzərinə əlavə edək, onda

$$B_1=\begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k} & b_{1,k+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b'_{2,k+1} & \dots & b'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b'_{s,k+1} & \dots & b'_{sn} \end{Vmatrix}$$

alarıq. Bu matrisin elementlərindən düzələn

$$B_2=\begin{Vmatrix} b'_{2,k+1} & \dots & b'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b'_{2,k+1} & \dots & b'_{sn} \end{Vmatrix}$$

matrisinin ölçüsü A-nın $s\times n$ ölçüsündən kiçikdir. Onda fərziyyəmizə görə B_2 matrisini elementar çevirmələr yolu ilə pilləli matris şəklinə gətirə bilərik. Aydındır ki, B_2-nin

$$B_1=\begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k} & b_{1,k+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \boxed{\quad B_2 \quad} & & \\ 0 & \dots & 0 & & & & \end{Vmatrix}$$

sətirləri üzərində aparılan elementar çevirmələrə B_1-in 1-ci sətrinin iştirak etmədiyi, amma digər sətirləri üzərində aparılan elementar çevirmələr kimi baxa bilərik. Beləliklə, B_2 matrisinin və deməli B_1 matrisinin sətirləri üzərində aparılan elementar çevirmələr nəticəsində pilləli şəklə gətirilir. Bu da o deməkdir ki, A matrisi elementar çevirmələr vasitəsilə pilləli şəklə gətirilə bilir. Deməli, 1×1 ölçülü üçün teoremin doğruluğu, habelə ölçüsü $s\times n$-dən kiçik matrislər üçün teoremin doğruluğunu fərz etməkdən $s\times n$ ölçülü matrislər üçün də doğru olur. Onda riyazi induksiya prinsipinə görə teorem istənilən sonlu ölçülü matrislər üçün isbat edilmiş olur. Teorem isbat olundu.

NƏTİCƏ. *Hər-hansı matrisin onun sətirləri və sütunları üzərində elementar çevirmələr aparmaqla onu kanonik şəklə gətirmək olar.*

Misal göstərək.

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{Vmatrix} .$$

matrisini elementar çevirmələr vasitəsilə kanonik şəklə gətirək.

Matrisin 1-ci sətrini 2-yə vurub ikincidən çıxaq, 1-ci sətri 2-yə vurub 3-cü sətrə əlavə edək, 4-cü sətrindən 1-cini çıxaq. Nəticədə aşağıdakı A_1 matrisini alarıq:

$$A_1=\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \end{Vmatrix}$$

İndi isə A_1 - in 1-ci sütununu 3-ə vurub 2-cidən çıxaq, 1-ci sütunu 2-yə vurub 3-cüdən çıxaq, 1-ci sütunu 5-ə vurub 5-ci sütundan çıxaq; nəticədə A_2 matrisini alarıq:

$$A_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \end{Vmatrix}$$

İndi də A_2 - nin 4-cü sətirdən 3-cü sətri çıxaq və 2-ci ilə 3-cü sətirlərin yerini dəyişməklə

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

İndi isə A_3 matrisinin 2-ci sütununu 6, 4, 15 ədədlərinə vurub uyğun olaraq 3-cü, 4-cü və 5-ci sütundan çıxaq. A_4 matrisini alarıq:

$$A_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Nəhayət, A_4 matrisində 3-cü sütunu $\frac{1}{5}$ - ə vuruvuq, sonra isə 3-cü sütunu uyğun olaraq 7 və 2-yə vurub 4-cü və 5-ci sütunlardan çıxmaqla nəticədə

$$A_5 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

matrisini alırıq ki, bu da kanonik matrisdir.

* * *

Biz matrislər barədə verilən bu ilkin məlumatı verməklə bir daha xüsusi vurğulamaq istəyirik ki, matris ədəd deyil, o ədədlərdən düzələn cədvəldir; bu cədvəl üzərində aparılan hər-hansı çevirmə onun dəyişilməsinə səbəb olur. Odur ki, hər bir çevirmədən sonra alınan matrislə əvvəlki arasında bərabərlik işarəsi qoymaq olmaz; burada adətən $\rightarrow$ işarəsindən istifadə edilir. Bizim baxdığımız misal üçün yaza bilərik ki:

$$A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 .$$

Amma, matris ədəd olmadığı halda *hər bir kvadrat matrisə müəyyən qayda ilə bunun determinantı* adlanan bir ədəd qarşı qoyulur. Biz ixtiyari sonlu n - tərtibli matrislərin determinantı anlayışı ilə və bunun tətbiqi ilə tezliklə yaxından tanış olacağıq.

§ 1.6. Xətti cəbri tənliklər sistemi, onun növləri. Ümumi və xüsusi həll anlayışları

n dənə məchulu, s dənə tənliyi olan xətti cəbri tənliklər sisteminin (XCTS) ümumi şəkli belədir:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Burada $x_1, x_2, \ldots, x_n$ məchullar a_{ij} $(i = \overline{1,s},\ j = \overline{1,n})$ əmsallar, b_i $(i = \overline{1,s})$ isə sərbəst hədlərdir. Əmsallardakı birinci indeks tənliyin, ikinci indeks isə məchulun nömrəsini göstərir.

(1) sisteminin hər bir tənliyi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ məchullarına nəzərən birdərəcəli tənlik olduğundan o xətti sistem adlanır.

Sistemdəki məchulların əmsallarından düzəldilən aşağıdakı $s \times n$ ölçülü

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{Vmatrix}$$

matrisinə (1) sisteminin matrisi, sərbəst hədləri də buraya qoşmaqla alınan

$$B = \left\Vert \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} & b_s \end{array} \right\Vert$$

matrisinə isə sistemin genişlənmiş matrisi deyilir. Bu matrisləri qısa olaraq $A = \|a_{ij}\|$, $B = \| a_{ij} \mid b_i \|$ kimi də yazırlar (burada $i = \overline{1,s}$, $j = \overline{1,n}$).

TƏRİF. *Sistemdəki* x_i *məchullarının onun tənliyinin hamısını eyniliyə çevirə bilən* $x_i = c_i$ $(i=\overline{1,n})$ *qiymətlərinə sistemin həlli deyilir.*

Deməli, sistemi həll etmək elə $c_1, c_2, \ldots, c_n$ kimi nizamlanmış ədədlər sistemi tapmaqdır ki, bunları uyğun olaraq məchulların yerinə yazdıqda $(x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n)$ sistemin hər bir tənliyi eyniliyə çevrilir; tənliklərin eyniliyə çevrilməsi onların bu müvafiq qiymətlərdə ödənməsi adlanır.[1]

Həllin tərifindən bilavasitə aydın olur ki, XCTS-nin həlli olan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ədədləri uyğun olaraq $x_1, x_2, \ldots, x_n$ məchullarının tənlikləri ödəyən qiymətləri olduğundan bu ədədlər nizamlanmış sistemdir və biz bu həllə n-ölçülü vektor kimi baxaraq onu şərti olaraq $\alpha = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ kimi göstərə bilərik.

Qeyd edək ki, verilən tənliklər sisteminin həlli olmaya da bilər, həll sonsuz çox sayda da ola bilər, o yeganə həllə də malik ola bilər.

Məsələn,

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 1, \\ x_1 + 4x_2 = 5. \end{cases}$$

sisteminin həlli yoxdur, çünki sistemin hər iki tənliyinin sol tərəfləri eyni olduğu halda sağ tərəfləri müxtəlifdir, ona görə də aydındır ki, x_1 və x_2 məchullarının sistemin hər iki tənliyini eyni zamanda ödəyən qiymətləri ola bilməz.

Sistemin tənlikləri içərisində

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots 0 \cdot x_n = 0$$

şəklində tənlik varsa, aşkardır ki, bu tənlik məchulların istənilən qiymətlərində ödənir, bu eynilikdir. Lakin

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots 0 \cdot x_n = b \neq 0$$

tənliyi isə məchulların heç bir qiymətində ödənməz. Belə tənliyin həlli yoxdur: burada alınan $0 = b \neq 0$ mənasızlığı olduqda müvafiq tənliyi ziddiyyətli tənlik adlandırırlar.

TƏRİF. *Tənliklər sisteminin həlli varsa, ona birgə (yaxud uyuşan), həlli yoxdursa ona birgə olmayan (və ya uyuşmayan) sistem*

[1] Şərtləşək ki, burada biz tənliklər sisteminin əmsallarını və həllərini, həmçinin bu məsələlərlə əlaqədar istifadə etdiyimiz və rast gələcəyimiz ədədləri hələlik ancaq həqiqi ədədlər hesab edirik.

deyilir. Uyuşan sistemin yeganə həlli varsa ona müəyyən sistem, birdən çox sayda həlli olarsa ona qeyri-müəyyən sistem deyilir.

XCTS öyrənilməsi, araşdırılması prosesi aşağıdakı məsələləri aydınlaşdırmaqla əlaqədardır:

1) Verilən sistemin həllinin olub-olmadığını (yəni sistemin birgə olub-olmadığını) təyin etmək;

2) Əgər verilən sistem birgədirsə, onda onun müəyyən və qeyri-müəyyən olmasına, başqa sözlə, onun yeganə, yaxud birdən çox sayda həllinin olub-olmadığını təyin etmək;

3) Əgər sistem birgədirsə, onun bütün həllərini tapmaq.

Verilən sistemin zahiri görünüşünə görə onu «düzbucaqşəkilli» (və ya «düzbucaq-sistem»), «kvadratşəkilli» (və ya «kvadrat-sistem»), «üçbucaqşəkilli» (və ya «üçbucaq-sistem»), «trapesşəkilli» (və ya «trapes-sistem») adlanan növlərini fərqləndirirlər (trapesşəkilliyə bəzən «pilləli-sistem» də deyirlər).

Başqa sözlə s və n ixtiyari müsbət tam ədədləri üçün

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1k}x_k + a_{1,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2k}x_k + a_{2,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3k}x_k + a_{3,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{3,n-1}x_{n-1} + a_{3n}x_n = b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + a_{s3}x_3 + \ldots + a_{sk}x_k + a_{s,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{s,n-1}x_{n-1} + a_{sn}x_n = b_s. \end{array}\right\} (1)_{\square}$$

sistemi «düzbucaq-sistem», xüsusi halda $s = n$ olanda

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array}\right\}$$

«kvadrat-sistem»,

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1k}x_k + a_{1,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2k}x_k + a_{2,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{33}x_3 + \ldots + a_{3k}x_k + a_{3,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{3,n-1}x_{n-1} + a_{3n}x_n = b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{kk}x_k + a_{k,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{k,n-1}x_{n-1} + a_{kn}x_n = b_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1}, \\ a_{nn}x_n = b_n. \end{array}\right\} (1)_{\Delta}$$

sistemi «üçbucaq-sistem» (burada $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$),

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1k}x_k + a_{1,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2k}x_k + a_{2,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n &= b_2, \\ a_{33}x_3 + \ldots + a_{3k}x_k + a_{3,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{3,n-1}x_{n-1} + a_{3n}x_n &= b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{kk}x_k + a_{k,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{k,n-1}x_{n-1} + a_{kn}x_n &= b_k. \end{aligned}\right\} (1)_{⏢}$$

sistemi isə «trapes-sistem» adlanır (burada $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, $k \leq n$).

Tənliklərdə iştirak etməyən məchulların əmsalları sıfır sayılır.

Aşkardır ki, bu sistemlərin əmsallarından düzələn matrislər də düzbucaqlı, üçbucaq və trapesşəkilli matrislər olacaq. Belə ki, məsələn, bu sistemlərin genişlənmiş matrisləri uyğun olaraq

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} & b_s \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{kk} & \ldots & a_{kn} & b_k \end{array} \right\|.$$

Aşkardır ki, $(1)_{\square}$ sisteminə (eləcə də «kvadrat-sistemə») nisbətən əmsallardan xeyli sayda hissəsi sıfır olan $(1)_{\triangle}$ və $(1)_{⏢}$ sistemlərini həll etmək bir çox cəhətdən daha sadədir. Belə ki, məsələn,

$(1)_{\triangle}$ üçbucaqşəkilli sistemi həll etmək üçün sonuncu tənlikdən $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} = c_n$ -i tapıb özündən əvvəlki tənlikdə yazsaq

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}c_n = b_{n-1},$$

buradan isə

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - c_n a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} = c_{n-1}$$

tapırıq. Tapdığımız $x_{n-1} = c_{n-1}$, $x_n = c_n$ qiymətlərini axırdan üçüncü tənlikdə yazmaqla $x_{n-2} = c_{n-2}$ qiymətini və bu qayda ilə sistemin ikinci və birinci tənliklərindən uyğun olaraq $x_2 = c_2$, $x_1 = c_1$ qiymətlərini tapırıq. Bununla «üçbucaq-sistemin» $x_i = c_i$ və ya $(c_1; c_2; \ldots; c_n)$ kimi yazıla bilən yeganə həllini tapmış oluruq.

Əgər sistem «trapesşəkillidirsə» onda onu aşağıdakı kimi həll etmək mümkündür. Sistemdə $x_1, x_2, \ldots, x_k$ məchullarını «əsas məchullar», qalan $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ kimi $n-k$ sayda məchulları isə «sərbəst məchullar» adlandırıb axırıncı tənlikdən x_k -nı sərbəst məchullardan asılı olaraq təyin edək:

$$x_k = \frac{b_k - a_{k,k+1}x_{k+1} - a_{k,k+2}x_{k+2} - \ldots - a_{kn}x_n}{a_{kk}} =$$

$$= \frac{b_k}{a_{kk}} - \frac{a_{k,k+1}}{a_{kk}}x_{k+1} - \frac{a_{k,k+2}}{a_{kk}}x_{k+2} - \ldots - \frac{a_{kn}}{a_{kk}}x_n,$$

burada sərbəst məchullara $x_{k+1} = d_{k+1}$, $x_{k+2} = d_{k+2}$, …, $x_{n-1} = d_{n-1}$, $x_n = d_n$ qiymətlərini verməklə x_k məchulu üçün uyğun

$$x_k = \frac{b_k}{a_{kk}} - \frac{a_{k,k+1}}{a_{kk}}d_{k+1} - \frac{a_{k,k+2}}{a_{kk}}d_{k+2} - \ldots - \frac{a_{kn}}{a_{kk}}d_n = d_k$$

qiymətini tapırıq. Bundan sonra həm sərbəst məchullara verdiyimiz qiymətləri, həm də x_k əsas məchulu üçün hesabladığımız uyğun d_k qiymətini sistemin axırdan ikinci tənliyində yerinə yazıb x_{k-1} əsas məchulu üçün

$$x_{k-1} = \frac{b_{k-1} - a_{k-1,k}d_k - a_{k-1,k+1}d_{k+1} - \ldots - a_{k-1,n}d_n}{a_{k-1,k-1}} = d_{k-1}$$

qiymətini tapırıq.

Bu qayda ilə davam edərək, axırda sistemin ikinci və birinci tənliklərindən uyğun olaraq x_2 və x_1 əsas məchulları üçün $x_2 = d_2$, $x_1 = d_1$ qiymətlərini hesablaya bilərik. Bununla biz «trapesşəkilli» sistemin

$$d = (d_1; d_2; \ldots; d_k; d_{k+1}; \ldots; d_n)$$

kimi bir həllini tapmış oluruq.

Aydındır ki, sərbəst məchullara verilən qiymətlər ixtiyari olduğundan burada həllin yeganəliyindən danışmaq olmaz. Çünki sərbəst məchullara istənilən qədər müxtəlif qiymətlər verməklə, buna uyğun olaraq sistemin əsas məchulları üçün çoxsaylı uyğun qiymətlər tapa bilərik; deməli, bu halda sistemin istənilən qədər həlli vardır, yəni sistem qeyri-müəyyəndir.

Qeyri-müəyyən sistemlərdə ümumi və xüsusi həll anlayışları vardır.

Daha aydın olması üçün trapesşəkilli sistemi həll etdikdə əvvəlcə axırıncı tənlikdən x_k əsas məchulunu $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ sərbəst məchulları vasitəsilə belə ifadə edirik:

$$x_k = \frac{b_k}{a_{kk}} - \frac{a_{k,k+1}}{a_{kk}} x_{k+1} - \frac{a_{k,k+2}}{a_{kk}} x_{k+2} - \ldots - \frac{a_{kn}}{a_{kk}} x_n .$$

Göründüyü kimi burada sağ tərəfdəki ifadə sərbəst məchullardan asılı cəbri ifadədir; biz bunu $f_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ kimi işarə etsək, deməli, x_k məchulu üçün sərbəst məchullarla ümumi şəkildə $x_k = f_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ ifadəsini alırıq ki, burada

$$f_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) = \frac{b_k}{a_{kk}} - \frac{a_{k,k+1}}{a_{kk}} x_{k+1} - \ldots - \frac{a_{kn}}{a_{kk}} x_n .$$

İndi biz x_k - nın bu ifadəsini yuxarıdakı tənlikdə yazıb x_{k-1} əsas məchulunun sərbəst məchullarla cəbri ifadəsini, sonra isə bu ifadələri bundan yuxarıdakı tənlikdə yazıb x_{k-2} əsas məchulunun sərbəst məchullarla ifadəsini və s. nəhayət, birinci tənlikdə x_1 məchulunu $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ sərbəst məchulları ilə ifadə edə bilərik. Alınan nəticələri

$$x_i = f_i(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n}$$

kimi göstərə bilərik.

İndi $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ sərbəst məchulları $\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots, \xi_n$ parametrləri ilə əvəz edərək aşağıdakı bərabərlikləri alırıq:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = f_1(\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots, \xi_n), \\ x_2 = f_2(\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots, \xi_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k = f_k(\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots, \xi_n), \\ x_{k+1} = \xi_{k+1}, \\ x_{k+2} = \xi_{k+2}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = \xi_n \end{array}\right\} \qquad (*)$$

(*) bərabərliklər sisteminə trapesşəkilli qeyri-müəyyən tənliklər sisteminin ümumi həlli deyirlər. Burada sərbəst məchulları üçün yazılan $\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots, \xi_n$ parametrləri ixtiyari qiymətlər ala bilər (onu da qeyd edək ki, çox zaman məhz bu ixtiyari parametrlərin mövcudluğunu nəzərdə tutmaq şərtilə əsas məchulların sərbəst məchullarla olan $f_i(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ ifadələrini $(i = \overline{1, n})$ ümumi həll kimi səciyyələndirirlər).

Ümumi həlldəki sərbəst məchullara verilən konkret qiymətlərlə bunlara uyğun olaraq əsas məchullara tapılan qiymətlərlə birlikdə sistemin xüsusi həlli deyirlər.

Aşkardır ki, sərbəst məchullara ξ_i parametrinin vasitəsilə $(i = \overline{k+1, n})$ istənilən qədər qiymətlər verməklə qeyri-müəyyən sistemin istənilən sayda xüsusi həllərini tapa bilərik.

Qısa desək, xüsusi həllər odur ki, onlara ümumi həlldən sərbəst məchullara ixtiyari qiymətlər vermək yolu ilə alırlar.

Nəhayət, XCTS-nin bircins adlanan növü ilə də tanış olaq. Sərbəst hədləri hamısı sıfra bərabər olan

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = 0. \end{array}\right\}$$

sisteminə bircins XCTS deyilir.

Yeri gəlmişkən bu sistemin belə bir aşkar xüsusiyyətini qeyd edək: bircins sistem həmişə birgədir və onun heç olmasa bir sıfır adlanan

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

həlli həmişə var (bu həlli çox zaman «trivial həll» də adlandırırlar). Doğrudan da, sistemə ötəri bir nəzər salsaq aşkar görünür ki, orada $x_i = 0$ $(i = \overline{1, n})$ yazanda sistemin bütün tənlikləri ödənir. Bu həlli sıfır vektor adlanan (0;0;...;0) kimi n - ölçülü vektor kimi göstərə bilərik.

§ 1.7. Tənliklər sistemində ekvivalentlik münasibəti və elementar çevirmə anlayışı

TƏRİF. *Həllər çoxluqları tamamilə üst-üstə düşən iki XCTS-nə ekvivalent sistemlər deyilir.*

Həlli olmayan sistemlər bir-birinə ekvivalent sayılır, çünki bunların həllər çoxluğu eyni olub boş çoxluqdur.

Riyaziyyatda iki obyektin (və ya obyektlər) ekvivalentlik münasibəti ~ kimi işarə edilir və o aşağıdakı xassənin vəhdətini nəzərdə tutur:

1) Refleksivlik xassəsi: $A \sim A$ (A obyekti özü özünə ekvivalentdir;

2) Simmetriklik xassəsi: $(A \sim B) \Rightarrow (B \sim A)$ (yəni A obyekti B-yə ekvivalentdirsə, onda B də A-ya ekvivalentdir);

3) Tranzitivlik xassəsi: $((A \sim B) \wedge (B \sim C)) \Rightarrow (A \sim C)$ (A obyekti B-yə ekvivalentdirsə və B isə C ilə ekvivalentdirsə, onda A obyekti C ilə ekvivalentdir.

Tənliklər sisteminin ekvivalentliyi tərifindən bilavasitə aşkar olur ki, bu üç xassə burada da doğrudur. Burada maraq doğuran mühüm bir məsələ bundan ibarətdir ki, verilən tənliklər sistemi üzərində hansı çevirmələr aparaq ki, yeni alınan sistem əvvəlkinə ekvivalent olsun. «Elementar çevirmə» anlayışı da məhz bu məsələ ilə əlaqədardır. Belə çevirmələr çoxdur, lakin adətən əsas etibarilə elementar çevirmə dedikdə aşağıdakılar düşünülür:

1) Sistemdəki tənliklərdən hər-hansı birini sıfırdan fərqli bir ədədə vurmaq;

2) Sistemin hər-hansı bir tənliyini ixtiyari bir ədədə vurub nəticəni sistemin digər tənliyi ilə toplamaq;

3) Sistemdə iştirak edən tənliklərdən ixtiyari ikisinin yerini dəyişmək (tənlikləri sistemdə yenidən nömrələmək).

Buraya bəzən məchulları yenidən nömrələmək, sistemdə $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$ eyniliyi varsa, onu sistemdən kənar etmək kimi ənənəvi çevirmələri də aid edirlər. Biz burada əsas elementar çevirmələr dedikdə yuxarıdakı 3 çevirməni nəzərdə tuturuq (onu da qeyd etməyi lazım bilirik ki, 3-cü çevirməni birinci və ikincinin köməyi ilə də icra etmək mümkündür).

Belə bir vacib məsələdən də yan keçməyək: *hər bir elementar çevirmənin özünə məxsus tərs elementar çevirməsi var*. Bu da ona səbəb olur ki, verilən sistem üzərində hər-hansı bir elementar çevirmə aparıb ondan ikinci bir sistem alınqsa, onda ikinci sistem üzərində buRaya tətbiq edilən elementar çevirmənin tərsini aparıb yenidən birinci sistemə qayıda bilərik. Belə ki, məsələn birinci sistemdə 1-ci elementar çevirmə aparıb, yəni onun hər-hansı bir i-ci tənliyini λ ədədinə $(\lambda \neq 0)$ vurmaqla ikinci bir sistem almışıqsa, onda ikinci sistemdə həmin i-ci tənliyi $\frac{1}{\lambda}$ ədədinə vurub yenidən (1) sistemini ala bilərik. Yaxud birinci sistemin hər-hansı bir k-cı tənliyini ixtiyari λ ədədinə vurub i-ci tənliyin üzərinə əlavə etməklə yeni sistem almışıqsa, onda bu yeni sistemin i-ci tənliyinin üzərinə bunun k-cı tənliyini $-\lambda$ ədədinə vurub i-ci ilə

toplasaq yenə də əvvəlki sistemə qayıda bilərik. Nəhayət, verilən sistemdə i-ci və k-cı nömrəli tənliklərin yerini dəyişməklə alınan yeni sistemdə k-cı tənliklə i-ci tənliyin yerini dəyişib yenə əvvəlki sistemi almış olarıq. Deməli, yuxarıda sadaladığımız elementar çevirmələrin tətbiq edildiyi sistemlər «geri qayıda bilmək» xassəsinə malikdirlər.

İndi isə belə bir teorem isbat edək.

TEOREM. *XCTS üzərində elementar çevirmə aparanda yeni alınan sistem əvvəlkinə ekvivalent olur.*

İSBATI. 3-cü elementar çevirmə üçün teorem aydındır, belə ki, sistemdə hansı nömrəli tənlik olursa olsun, onun nömrəsini dəyişsək əvvəlki sistemi ödəyən ədədlər (həllər) eyni zamanda ikinci sistemin (və tərsinə!) olacaq.

1-ci və 2-ci elementar çevirmələrə baxaq.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s. \end{array}\right\} \quad (1)$$

sistemi verilir. Bu sistemin hər-hansı tənliyini, məsələn, birincini sıfırdan fərqli λ $(\lambda \neq 0)$ ədədinə vuraq:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda a_{11}x_1 + \lambda a_{12}x_2 + \ldots + \lambda a_{1n}x_n = \lambda b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s. \end{array}\right\} \quad (1')$$

Biz elementar çevirməni birinci tənlik üzərində aparmaqla teoremin ümumiliyinə xələl gətirmirik. Çünki sistemin tənliklərinin yerini dəyişməklə, onları yenidən nömrələməklə istənilən tənliyi birincinin yerinə gətirə bilərik.

$(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ (1) sisteminin həlli olsun. Onda $x_i = c_i$ $(i = \overline{1,n})$ yazıb aşağıdakı eynilikləri alarıq:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}c_1 + a_{s2}c_2 + \ldots + a_{sn}c_n = b_s. \end{array}\right\}$$

İndi $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ədədlərinin $(1')$ sisteminin tənliklərini də ödədiyini göstərməliyik (və tərsinə!).

(1) və $(1')$ sistemləri yalnız birinci tənlikləri ilə fərqlənir, odur ki, $x_i = c_i$ ədədlərinin $(i = \overline{1,n})$ $(1')$ sisteminin həlli olmasını yoxlamaq üçün birinci tənliklərə diqqət yetirmək kifayətdir (çünki $(1')$-in ikincidən başlayaraq sonrakı tənlikləri bu qiymətlərdə eyniliyə çevriləcəyi aşkardır).

$(1')$-də $x_i = c_i$ $(i = \overline{1,n})$ yazanda birinci tənlikdən

$$\lambda a_{11}x_1 + \lambda a_{12}x_2 + \ldots + \lambda a_{1n}x_n = \lambda\overbrace{(a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n)}^{b_1} = \lambda b_1$$

alarıq ki, bu da onu göstərir ki, birinci tənlik də məchulların $x_i = c_i$ qiymətlərində ödənir. Deməli, (1)-in həlli $(1')$-in həllidir.

İndi tutaq ki, $\alpha = (c_1; c_2; \ldots; c_n)$ vektoru $(1')$-in həllidir (yəni məchulların yerinə bu n-ölçülü vektorun koordinatlarını yazsaq $(x_i = c_i, i = \overline{1,n})$, sistemin hər bir tənliyi ödənər). $(1')$ sisteminin birincidən başqa bütün tənlikləri (1) ilə eyni olduğundan təkcə birinciyə diqqət yetirmək kifayətdir. Belə ki, eyniliyə çevrilmiş olan

$$\lambda a_{11}c_1 + \lambda a_{12}c_2 + \ldots + \lambda a_{1n}c_n = \lambda b_1$$

bu bərabərliyi λ^{-1}-ə vuraq. Onda (1) sisteminin $x_i = c_i$ qiymətləri yazılmış olan birinci tənliyi alınır ki, bu da eynilikdir. Deməli, (1)-in hər bir həlli $(1')$-in, $(1')$-in də hər bir həlli (1)-in həlli olur. Bu o deməkdir ki, bu sistemlərin həllər çoxluğu üst-üstə düşür.

İndi ikinci elementar çevirməni aparaq. Yenə də ümumiliyi pozmadan verilən sistemin 1-ci tənliyini λ ədədinə vurub onu ikincinin üzərinə əlavə edək; aşağıdakı sistemi alarıq.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ (a_{21} + \lambda a_{11})x_1 + (a_{22} + \lambda a_{12})x_2 + \ldots + (a_{2n} + \lambda a_{1n})x_n = b_2 + \lambda b_1, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s. \end{array}\right\} \quad (1'')$$

Bu sistem verilən (1) sistemindən yalnız ikinci tənliyi ilə fərqlənir. Ona görə də əgər $\alpha = (c_1; c_2; \ldots; c_n)$ (1) sisteminin həlli isə onda aşkardır ki, $x_i = c_i$ ədədləri $(1'')$-in ikincidən başqa bütün tənliklərini ödəyəcək.

İndi $(1'')$-in ikinci tənliyində $x_i = c_i$ qiymətlərini yazaraq sol tərəfdə alınan aşağıdakı ifadəyə baxaq:

$$(a_{21} + \lambda a_{11})c_1 + (a_{22} + \lambda a_{12})c_2 + \ldots + (a_{2n} + \lambda a_{1n})c_n. \qquad (2)$$

Göstərək ki, bu eynilik olmalıdır, yəni bunun sağ tərəfi məhz $b_2 + \lambda b_1$ olmalıdır. (2)-dən

$$a_{21}c_1 + \lambda a_{11}c_1 + a_{22}c_2 + \lambda a_{12}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n + \lambda a_{1n}c_n =$$
$$= \underbrace{(a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n)}_{b_2} + \underbrace{(a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n)}_{b_1}\lambda = b_2 + \lambda b_1$$

alırıq.

$x_i = c_i$ ədədləri (1)-in həlli olduğundan buradakı birinci mötərizədəki cəm b_2, ikinci mötərizədəki cəm isə b_1-i verməlidir. Deməli, fərqlənən 2-ci tənliyi də eyniliyə çevrilir. Deməli, (1)-in həlli $(1'')$-in həllidir.

Tərsinə, $(1'')$-in həllinin də (1)-in həlli olduğunu göstərmək də çətin deyil. Belə ki, əgər $c_1, c_2, \ldots, c_n$ $(1'')$-in həllidirsə, onda $(1'')$-də $x_i = c_i$ $(i = \overline{1,n})$ yazıb elə eyniliklər alırıq ki, bunlar təkcə ikincidən başqa (1)-in də tənliklərinin hamısını ödəyir, onları eyniliyə çevirir. $(1'')$-də alınan

$$(a_{21} + \lambda a_{11})c_1 + (a_{22} + \lambda a_{12})c_2 + \ldots + (a_{2n} + \lambda a_{1n})c_n = b_2 + \lambda b_1$$

eyniliyini isə yenidən

$$(a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n) + (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n)\lambda = b_2 + \lambda b_1$$

kimi yazıb $(1'')$-dəki birinci

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1$$

$-\lambda$-ya vurub ikincinin üzərinə əlavə etməklə

$$a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2$$

eyniliyini alırıq ki, bu da (1)-in ikinci tənliyinin $x_i = c_i$ qiymətlərində ödədiyini göstərir. Deməli, (1)-in hər-hansı bir həlli $(1'')$-in həlli olduğu kimi, öz növbəsində $(1'')$-in də hər-hansı bir həlli (1)-in həllidir. Deməli, $(1) \sim (1'')$ alırıq.

Teorem isbat olundu.

Elementar çevirmələr apardıqda alınan yeni sistemi çox zaman əvvəlkinin «nəticə sistemi» adlandırırlar. Verilən iki tənliklər sisteminin ekvivalent olmaları üçün ikinci sistem birincinin, birinci sistem isə ikincinin nəticəsi olmalıdır.

Tənliklər sistemlərini həll etmək işində elementar çevirmələrin əhəmiyyəti böyükdür. Belə ki, verilən sistemi həll etmək üçün elementar çevirmələr aparıb onu özünə ekvivalent olan daha sadə sistem şəklinə salmaq olur. Tənliklər sisteminin həllində əlverişli üsullardan biri sayılan Qauss üsulu məhz buna əsaslanır. Növbəti paraqrafda bu üsulla tanış olacaqsınız.

§ 1.8. Xətti cəbri tənliklər sisteminin həlli üçün Qauss üsulu

Qauss[1] üsulunu çox zaman məchulları ardıcıl yoxetmə üsulu da adlandırırlar. Bu da təsadüfi deyil, çünki burada elə prosesdən söhbət gedir ki, verilən sistemin tənlikləri üzərində elementar çevirmələr aparmaq yolu ilə məchulları yoxetmək məsələsi önəmli yer tutur. Öncə bu prosesin gedişində qarşıya çıxa bilən iki halı xüsusi qeyd edək.

1-ci hal. Məchulları ardıcıl yoxetmə üçün aparılan elementar çevirmə prosesində

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=0$$

eyniliyi ilə rastlaşmaq olar.

Göründüyü kimi, bu eynilik $x_1,x_2,\ldots,x_n$ məchullarının istənilən qiymətlərində ödəndiyi üçün bunu sistemdən kənar etsək yeni alınan sistemin əvvəlkinə ekvivalent olmasına heç bir xələl gətirməz, ona görə də hər dəfə belə bir hal qarşıya çıxdıqda bu eyniliyi kənar edib prosesi davam etdirmək lazımdır.

2-ci hal. Məchulları ardıcıl yoxetmə prosesində

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=b\neq 0$$

mənasız hal ilə də qarşılaşmaq mümkündür. Aydındır ki, bu mənasız münasibət x_i məchullarının $(i=\overline{1,n})$ heç bir qiymətində ödənə bilməz. Deməli, sistemdə ziddiyyətli tənlik vardır. Hər dəfə belə halın qarşıya çıxması o deməkdir ki, sistemin bütün tənliklərini ödəyən ədədlər tapmaq mümkün deyil və deməli, sistem özü bütövlükdə ziddiyyətlidir, yəni sistemin həlli yoxdur.

İndi Qauss üsulunun mahiyyətini izah edək.

[1] Karl Fridrix Qauss (1777-1855) – böyük alman riyaziyyatçısıdır.

Tutaq ki, bizə s dənə tənliyi, n dənə məchulu olan aşağıdakı düzbucaqşəkilli sistem verilib:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\ldots+a_{3n}x_n=b_3,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+a_{s3}x_3+\ldots+a_{sn}x_n=b_s. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

$a_{11}\neq 0$ olduğunu fərz edək. Əgər $a_{11}=0$ olardısa, onda sistemin hansı tənliyində x_1 məchulunun əmsalı sıfır deyilsə, o tənliyi birincinin yerinə gətirə bilərik (aydındır ki, sistemin x_1-in əmsalının sıfır olmadığı heç olmasa bir tənliyi olmalıdır, əks halda sistem n yox, $n-1$ dənə məchullu sistem olardı).

Birinci addım olaraq sistemin 1-ci tənliyinin köməyi ilə sonrakı tənliklərdən x_1 məchulunu yox edək. Bunun üçün 1-ci tənliyi $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ ədədinə vurub ikinci tənliyin, $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$-ə vurub 3-cü tənliyin və s. nəhayət $-\frac{a_{s1}}{a_{11}}$ ədədinə vurub s-ci tənliyin üzərinə əlavə edirik; aşkardır ki, bu proses nəticəsində ikincidən başlayaraq sonrakı tənliklərdən x_1 məchulu yox olar. Birinci tənliyin özünü olduğu kimi yazmaqla çevirmədən sonra nəticədə

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a'_{22}x_2+a'_{23}x_3+\ldots+a'_{2n}x_n=b'_2,\\ a'_{32}x_2+a'_{33}x_3+\ldots+a'_{3n}x_n=b'_3,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a'_{m2}x_2+a'_{m3}x_3+\ldots+a'_{mn}x_n=b'_m. \end{array}\right\} \qquad (1)_1$$

sistemini alırıq (burada $m\leq s$).

Burada tənliklərin sayını ona görə m $(m\leq s)$ dənə yazmışıq ki, çevirmə prosesində $0=0$ eyniliyi alına bilər və onu da kənarlaşdıranda tənliklərin sayı azalardı.

Sistemdəki alınan yeni əmsalların nəyə bərabər olduğunu da başa düşmək çətin deyildir. Məsələn, bu əmsalların (1)-in əmsalları ilə ifadələri aşağıdakı kimi olar:

$$a'_{22}=a_{22}-a_{12}\cdot\frac{a_{21}}{a_{11}},\quad a'_{32}=a_{32}-a_{12}\cdot\frac{a_{31}}{a_{11}},\quad b'_2=b_2-b_1\cdot\frac{a_{21}}{a_{11}}\quad \text{və s.}$$

Elementar çevirmələrə aid isbat etdiyimiz teoremə əsasən aşkardır ki, (1) sistemi üzərində aparılan bu elementar çevirmələr nəticəsində alınan yeni $(1)_1$ sistemi verilən (1) sistemi ilə ekvivalentdir. Əgər bu proses zamanı $0=b\neq 0$ halı alınsa onda məsələ bitmiş olar, yəni sistemin həlli olmur.

Əgər $0=b\neq 0$ mənasızlığı ilə rastlaşmamışıqsa ikinci addım yeni sistemin birinci və ikinci tənliklərini saxlayıb ikincinin köməyi ilə ikincidən sonrakı tənliklərdən x_2 məchulunu yox etməkdir. Bunun üçün $a'_{22}\neq 0$ fərz edib $(1)_1$ sisteminin ikinci tənliyini ardıcıl olaraq $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}},-\frac{a'_{12}}{a'_{22}},\ldots,-\frac{a'_{m2}}{a'_{22}}$ ədədlərinə vurub uyğun olaraq sistemin üçüncü, dördüncü və s. nəhayət m-ci tənliklə toplayırıq, onda üçüncüdən başlayaraq sonrakı tənliklərdən x_2 məchulu yox olar və nəticədə

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\
a'_{22}x_2+a'_{23}x_3+\ldots+a'_{2n}x_n&=b'_2,\\
a''_{33}x_3+\ldots+a''_{3n}x_n&=b''_3,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a''_{t3}x_3+\ldots+a''_{tn}x_n&=b''_t
\end{aligned}\right\}\qquad (1)_2$$

sistemini alarıq (burada $t\leq m\leq s$). Aydındır ki, bu sistem $(1)_1$ ilə ekvivalentdir. Tranzitivlik xassəsinə görə bu aldığımız yeni $(1)_2$ sistemi verilmiş (1) sistemi ilə də ekvivalent olur.

Ziddiyyətli hal olmasa növbəti addımda 1-ci və 2-ci tənlikləri, habelə 3-cü tənliyi saxlayıb, 3-cüdən başlayaraq bu tənlik vasitəsilə sonrakılardan elementar çevirmələr yolu ilə x_3 məchulunu, sonra isə 4-cü tənliyin köməyi ilə sonrakılardan x_4 məchulunu və s. yox edirik.

Aydındır ki, bu proses sonsuz davam etməyəcək və burada ziddiyyətli hal qarşıya çıxmasa (belə halla rastlaşsaq prosesi davam etdirməyə dəyməz, çünki onda bu sistem və deməli, verilən sistem özü ziddiyyətli olur və ona görə də bunun həlli yoxdur) aşağıdakı şəkildə sistem alırıq:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1,k-1}x_{k-1}+a_{1k}x_k+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\
a'_{22}x_2+a'_{23}x_3+\ldots+a'_{2,k-1}x_{k-1}+a'_{2k}x_k+\ldots+a'_{2n}x_n&=b'_2,\\
a''_{33}x_3+\ldots+a''_{3,k-1}x_{k-1}+a''_{3k}x_k+\ldots+a''_{3n}x_n&=b''_3,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a^{(k-2)}_{k-1,k-1}x_{k-1}+a^{(k-2)}_{k-1,k}x_k+\ldots+a^{(k-2)}_{k-1,n}x_n&=b^{(k-2)}_{k-1},\\
a^{(k-1)}_{kk}x_k+\ldots+a^{(k-1)}_{kn}x_n&=b^{(k-1)}_k.
\end{aligned}\right\}\qquad (1)_k$$

(burada $a_{11}\neq 0, a'_{22}\neq 0,\ldots,a^{(k-2)}_{k-1,k-1}\neq 0, a^{(k-1)}_{kk}\neq 0, k\leq s, k\leq n$). Göründüyü kimi bu sistem trapesşəkillidir və ziddiyyətli hal olmadığından sistem birgədir. Əgər $k=n$ olarsa sistem müəyyən, $k<n$ olarsa sistem qeyri-müəyyən olur. Xüsusi halda $k=n$ halında sistem

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\
a'_{22}x_2+\ldots+a'_{2n}x_n&=b'_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a^{(k-1)}_{nn}x_n&=b^{(k-1)}_k.
\end{aligned}\right\}\qquad (1)_{k+1}$$

kimi üçbucaqşəkilli sistem olur. Aydındır ki, istər $(1)_k\sim(1)$, istərsə də $(1)_{k+1}\sim(1)$. Trapesşəkilli $(1)_k$ sistemi və üçbucaqşəkilli $(1)_{k+1}$ sistemlərinin həlli haqqında isə yuxarıdakı paraqrafda məlumat verilib.

Burada daha bir məsələyə aydınlıq gətirək.

Çox zaman cəbrə aid dərslik və dərs vəsaitlərində Qauss üsulundan söhbət gedəndə məchulları yox etmək üçün aparılan elementar çevirmələrin nəticəsində alınan son, nəticə-sistemi belə də yazırlar:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1k}x_k+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\
a'_{22}x_2+a'_{23}x_3+\ldots+a'_{2k}x_k+\ldots+a'_{2n}x_n&=b'_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a^{(k-1)}_{kk}x_k+\ldots+a^{(k-1)}_{kn}x_n&=b^{(k-1)}_k,\\
0&=b^{(k-1)}_{k+1},\\
0&=b^{(k-1)}_{k+2},\\
\ldots\ldots&\\
0&=b^{(k-1)}_s.
\end{aligned}\right\}$$

(burada $a_{11}, a'_{22}, \dots, a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$, $1 < \dots < k < \dots < s$). Bunu bəzən «pilləli sistem» də adlandırırlar. İş bundadır ki, bu yazılışda $0=0$, $0=b\neq 0$ hallarının varlığı istisna edilmir, yəni $(k+1)$-ci «bərabərlikdən» sonra bərabərliklərdən $0=0$ hallar kənar edilə bilər, $0=b\neq 0$ halları varsa onda sistemin birgə olmadığı qeyd edilir. Biz isə yuxarıda prosesin gedişi zamanı hər bir mərhələdə belə halları nəzərə aldığımız üçün hər dəfə aldığımız yeni tənlik sistemlərində, o cümlədən də yazdığımız sonuncu $(1)_k$ sistemində $0=0$ və $0=b\neq 0$ halları yoxdur, onlar istisna olunur.

Beləliklə biz Qauss üsulunun mahiyyətindən doğan belə bir yekun nəticəyə gəlirik:

1) Qauss üsulu istənilən XCTS-nə tətbiq edilə bilir; 2) Qauss üsulunun tətbiqi verilən sistemdəki məchulları elementar çevirmə yolu ilə yox etməklə onu sonda ya üçbucaq, ya da trapesşəkilli sistemə gətirməyə imkan verir; 3) Qauss üsulunun tətbiqi gedişində sistemin tərkibində $0=b\neq 0$ (xüsusi halda $0=1$) mənasızlığına rast gəliriksə, onda bu o deməkdir ki, sistem ziddiyyətlidir, onun həlli yoxdur, yəni o birgə deyil, əgər belə bir ziddiyyətə rast gəlmiriksə, deməli verilən sistem birgədir; 4) Birgə sistem elementar çevirmə nəticəsində üçbucaq sistemə çevrilirsə o müəyyən (yəni yeganə həllə malikdir), əgər trapesşəkilli şəklə gətirilirsə, onda sistem qeyri-müəyyəndir (onun sonsuz çox sayda həlli var).

Qauss üsuluna aid misallar göstərək.

Misal 1.

$$\left.\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3+x_4&=1,\\ 2x_1+4x_2+x_3-2x_4&=4,\\ 3x_1+9x_2+10x_3+15x_4&=-1,\\ -x_1-3x_2-4x_3-9x_4&=3.\end{aligned}\right\}$$

Sistemin birinci tənliyini növbə ilə -2-yə, -3-ə, 1-ə vurub uyğun olaraq ikinci, üçüncü, dördüncü tənliklərin üzərinə əlavə etsək verilmiş sistem ilə ekvivalent olan

$$\left.\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3+x_4&=1,\\ -2x_2-3x_3-4x_4&=2,\\ 4x_3+12x_4&=-4,\\ -2x_3-8x_4&=4.\end{aligned}\right\}$$

sistemini alırıq. İndi bu sistemin 3-cü tənliyini $\frac{1}{2}$-ə vurub 4-cü tənliyin üzərinə əlavə etsək (bunu 4-cü tənliyi 2-yə vurub 3-cü ilə toplamaq kimi də icra etmək olar) əvvəlki sistem, həm də verilmiş sistemə ekvivalent olan aşağıdakı üçbucaqşəkilli sistem alarıq:

$$\left.\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3+x_4&=1,\\ -2x_2-3x_3-4x_4&=2,\\ 4x_3+12x_4&=-4,\\ -2x_4&=2.\end{aligned}\right\}$$

Bu sistem birgədir və müəyyən sistemdir. Bu sistemi həll etmək verilən sistemə nisbətən daha asandır. Belə ki, axırıncı tənlikdən başlayaraq ardıcıl olaraq «yuxarıya doğru» hərəkət edərək $x_4=-1$, $x_3=2$, $x_2=-2$, $x_1=-1$ və deməli sistemin $(-1,-2,2,-1)$ həllini tapırıq.

Burada bir vacib məsələni də qeyd edək.

Qauss üsulunun praktik tətbiqi üçün verilən sistemin genişlənmiş matrisindən istifadə etmək əlverişli olmaq mənada daha məqsədəuyğundur. Bunun üçün sistemin genişlənmiş matrisini yazıb, sistem üzərində aparılacaq elementar çevirmələri matrisin sətirləri üzərində aparıb onu «üçbucaq» və ya «trapesiya» şəklinə gətirirlər. Sonradan bu matrisə uyğun sistemi yazıb onu həll etmək asan olur. Burada bir elementar çevirmədən sonra matris dəyişdiyindən çevirmə zamanı matrislər arasında ya ox $\to$ və yaxud da ekvivalentlik işarəsi – qoyurlar.

Misal 2.

$$\left.\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3+x_4&=1,\\ 2x_1+4x_2+x_3-2x_4&=4,\\ 3x_1+3x_2+x_3+3x_4&=5,\\ x_1-3x_2-3x_3+x_4&=3.\end{aligned}\right\}.$$

İndi bu sistemin genişlənmiş matrisini yazıb onun sətirləri üzərində elementar çevirmələrin köməyi ilə onu «üçbucaq», yaxud «trapesşəkilli» hala gətirək.

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 1 & -2 & 4\\ 3 & 3 & 1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -3 & 1 & 3\end{array}\right\| \to \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2\\ 0 & -6 & -5 & 0 & 2\\ 0 & -6 & -5 & 0 & 2\end{array}\right\| \to \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 4 & 12 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right\| \to \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1\end{array}\right\|.$$

Proses zamanı matrisdə elementlərinin hamısı sıfır olan sətrini kənar edirik; aşkardır ki, bu, sistemdə çevirmə zamanı alınan $0=0$ eyniliyini kənar etmək deməkdir. Sonda aldığımız matris aşağıdakı «trapesşəkilli» sistemin matrisidir:

$$\left.\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3+x_4&=1,\\ -2x_2-3x_3-4x_4&=2,\\ x_3+3x_4&=-1.\end{aligned}\right\}$$

Bu sistem qeyri-müəyyəndir. Axırıncı tənlikdən, məsələn, x_4-ü sərbəst məchul adlandırıb onu sağ tərəfə keçirərək x_3-ü bundan asılı olaraq $x_3=-1-3x_4$ kimi təyin edə bilərik; sonra bunu özündən yuxarıdakı tənlikdə yazıb x_2 məchulu üçün $x_2=\dfrac{1+5x_4}{2}$ ifadəsini tapırıq. Nəhayət, x_3 və x_2 - nin bu ifadələrini birinci tənlikdə yazıb $x_1=\dfrac{3-5x_4}{2}$ olduğunu tapırıq. Beləliklə, biz bu qeyri-müəyyən tənliklər sisteminin x_1, x_2, x_3 əsas məchullarının x_4 sərbəst məchulu ilə aşağıdakı ifadəsini tapırıq.

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{3-5x_4}{2},\\ x_2&=\frac{1+5x_4}{2},\\ x_3&=-(1+3x_4).\end{aligned}\right\}$$

Burada sərbəst məchul $x_4=\xi$ qəbul etməklə bu sistemin

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\xi,\\ x_2&=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\xi,\\ x_3&=1-3\xi,\\ x_4&=\xi.\end{aligned}\right\}$$

kimi ümumi həllini tapırıq. Burada ξ parametrinə (və ya x_4 məchuluna) ixtiyari qiymətlər verməklə, bu sistemin sonsuz sayda xüsusi həllərini tapa bilərik. Məsələn, $x_4=\xi=0$ qiyməti versək $x_1=\dfrac{3}{2}$, $x_2=\dfrac{1}{2}$, $x_3=-1$, $x_4=0$, yaxud $\xi=-1$ qiymətini versək $x_1=4$, $x_2=-2$, $x_3=4$, $x_4=-1$

xüsusi həllərini alırıq. Yəni verilən sistemin $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2},-1,0\right)$ və $(4,-2,4,-1)$ kimi iki xüsusi həllini tapmış oluruq.

Misal 3.

$$\left.\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3+x_4&=1,\\ 2x_1+4x_2+x_3-2x_4&=4,\\ 3x_1+3x_2+x_3+3x_4&=5,\\ x_1-3x_2-3x_3+x_4&=2.\end{aligned}\right\}$$

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1&3&2&1&1\\ 2&4&1&-2&4\\ 3&3&1&3&5\\ 1&-3&-3&1&2\end{array}\right\| \to \left\|\begin{array}{cccc|c} 1&3&2&1&1\\ 0&-2&-3&-4&2\\ 0&-6&-5&0&2\\ 0&-6&-5&0&1\end{array}\right\| \to \left\|\begin{array}{cccc|c} 1&3&2&1&1\\ 0&-2&-3&-4&2\\ 0&0&1&3&-1\\ 0&0&0&0&-1\end{array}\right\|$$

Əgər sonuncu matrisə uyğun tənliklər sistemini yazsaq, matrisin axırıncı sətrindən göründüyü kimi sistemin sonuncu tənliyində $0=-1$ ziddiyyətlidir və onun həlli yoxdur.

Qauss üsulunun praktik tətbiqi ilə əlaqədar olan və bir çox hallarda daha faydalı, səmərəli nəticə verən bir mülahizəni də burada qeyd edək.

Artıq bilirik ki, sistem birgə və həm də müəyyəndirsə, onu elementar çevirmələr yolu ilə verilən sistemə ekvivalent olan üçbucaqşəkilli sistemə gətirib bu sistemin yeganə həllini tapırıq. Bu da aydındır ki, bu çevirmələri sistemin uyğun genişlənmiş matrisinin sətirləri üzərində apardıqda sərbəst hədləri ayırmaq üçün istifadə edilən şaquli xətdən solda üçbucaq matris alınacaq. İndi biz bu matrisin sətirləri üzərində müvafiq çevirmələr aparıb onu diaqonal matrisə, yaxud bunun xüsusi halları olan skalyar və ya vahid matrisə gətirsək, onda uyğun sistemin həllini daha tez tapmış olarıq.

Bunu misal üzərində aydınlaşdıraq.

Misal 4.

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+2x_4+3x_5&=5,\\ 2x_1+4x_2-x_3+5x_4+4x_5&=-1,\\ x_1+3x_2+5x_4+2x_5&=-3,\\ 3x_1+7x_2-3x_3+9x_4+2x_5&=-14,\\ 2x_1+8x_2-4x_3+2x_4+7x_5&=-10.\end{aligned}\right\}$$

Bu sistemin matrisini yazıb sətirləri üzərində müvafiq çevirmələri aparaq.

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 3 & 7 & -3 & 9 & 2 & -14 \\ 2 & 8 & -4 & 2 & 7 & -10 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & -11 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & -7 & -23 \\ 0 & 6 & -4 & -2 & 1 & -20 \end{Vmatrix} \to$$

$$\to \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 7 & 13 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 12 \end{Vmatrix}.$$

Göründüyü kimi, nəticədə üçbucaq matris alındı ki, buna da uyğun üçbucaqşəkilli sistem aşağıdakı olur:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 + 3x_5 &= 5, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= -11, \\ x_3 + 2x_4 + x_5 &= 3, \\ 3x_4 - 2x_5 &= -4, \\ 6x_5 &= 21. \end{aligned}\right\}$$

Bu üçbucaq sistemi bildiyimiz qayda üzrə həll edib bunun $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$ kimi yaxud $(2,-3,1,0,2)$ kimi yeganə həllini tapa bilərik. Lakin biz müvafiq çevirmələrdən sonra axırda tapdığımız matrisin sətirləri üzərində elementar çevirmələri davam etdirərək onu diaqonal matris yaxud onun xüsusi halları olan skalyar yaxud vahid matris şəklinə gətirək (aparılan əməllər göstərilib):

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 12 \end{Vmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ + \\ + \\ \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \quad -\frac{1}{6} \quad -\frac{1}{3} \quad -\frac{2}{3} \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ + \\ \frac{1}{3} \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad -\frac{2}{3} \\ \end{matrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ 1 \quad -\frac{1}{2} \\ \\ \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Göründüyü kimi axırda şaquli xətdən solda vahid matris alınıb. Buna uyğun sistemi yazsaq dərhal $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$ alırıq, yəni onun $(2,-3,1,0,2)$ kimi yeganə həllini tapmış oluruq.

* * *

Biz Qauss üsulu ilə tanış olduq və bununla birlikdə matris anlayışının burada gərəkli bir vasitə kimi istifadə olunmasının da şahidi olduq. Deməli, matrislərlə ilkin tanışlığımız heç də hədər getmədi.

Nəhayət, bir şeyi də qeyd edək ki, məktəb riyaziyyatında tənliklər sisteminin həllində işlədilən «əmsalları bərabərləşdirmə» və ya «cəbri toplama» adlanan üsullar məhz Qauss üsulunun sadə sistemlər üçün xüsusi halıdır.

§ 1.9. Qauss üsulunun bircins xətti cəbri tənliklər sisteminə tətbiqi

Bilirik ki, bircins XCTS-i sərbəst hədləri sıfırlardan ibarət olan

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \end{aligned}\right\}$$

sistemə deyilir və bunun $(0,0,\ldots,0)$ həlli həmişə var.

Qauss üsulunun bircins XCTS-nə tətbiqi bu tənliklər sisteminin aşağıdakı teoremlə ifadə olunan xassəsini aşkar etməyə imkan verir.

TEOREM. *Bircins XCTS-də tənliklərin sayı məchulların sayından az $(s<n)$ olarsa, onda bu sistemin sıfır həllindən əlavə sıfır olmayan sonsuz sayda həlli vardır.*

İSBATI. Doğrudan da əgər verilmiş bircins XCTS-də tənliklərin sayı s, məchulların sayı n-dən kiçikdirsə $(s<n)$, onda aydındır ki, Qauss üsulunu bu sistemə tətbiq edəndə onu heç cür üçbucaq sistemə gətirmək olmur. Çünki elementar çevirmələr zamanı sistemdə tənliklərin sayı arta bilməz, əksinə azala bilər. Deməli, burada ancaq nəticədə trapesşəkilli sistem alına bilər. Trapesşəkilli sistem isə bildiyimizə görə qeyri-müəyyəndir, bunların istənilən qədər həlli var. Bu həllərdən ancaq biri sıfır həll $(0,0,\ldots,0)$, qalanı isə sərbəst məchullara verdiyimiz qiymətlər çoxluğuna əsasən tapılan həllər olacaq ki, bunlar da sistemin sıfır həllindən əlavə sıfırdan fərqli həlləri olacaq.

Teorem isbat olundu.

Misal.

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2-x_3-3x_4-x_5&=0,\\ 2x_1-x_2+2x_3+x_4-5x_5&=0,\\ x_1+2x_2-2x_3-5x_4&=0,\\ -x_1+x_2-2x_3-2x_4+3x_5&=0.\end{aligned}\right\}$$

Əvvələn, aşkar görünür ki, $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$, yəni bu sistemin bir (0,0,0,0,0) həlli var. Lakin digər tərəfdən də görünür ki, bu bircins xətti tənliklər sisteminin tənlikləri sayı 4, məchulları sayı isə 5-dir. Deməli, bunu həll etmədən də deyə bilərik ki, bu birgə (uyuşan) sistemə Qauss üsulunu tətbiq etdikdə aparılan elementar çevirmələr onu ancaq trapesşəkilli sistemə gətirəcək. Bu isə o deməkdir ki, bu sistemin sıfır (0,0,0,0,0) həllindən əlavə istənilən sayda başqa həlləri də vardır.

Sistemi Qauss üsulu ilə həll edək.

$$\left\|\begin{array}{rrrrr|r} 1&1&-1&-3&-1&0\\ 2&-1&2&1&-5&0\\ 1&2&-2&-5&0&0\\ -1&1&-2&-2&3&0\end{array}\right\|\to\left\|\begin{array}{rrrrr|r} 1&1&-1&-3&-1&0\\ 0&-3&4&7&-3&0\\ 0&1&-1&-2&1&0\\ 0&2&-3&-5&2&0\end{array}\right\|\to$$

$$\to\left\|\begin{array}{rrrrr|r} 1&1&-1&-3&-1&0\\ 0&1&-1&-2&1&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&-1&-1&0&0\end{array}\right\|\to\left\|\begin{array}{rrrrr|r} 1&1&-1&-3&-1&0\\ 0&1&-1&-2&1&0\\ 0&0&1&1&0&0\end{array}\right\|.$$

Deməli, verilən bircins sistem özünə ekvivalent olan aşağıdakı trapesşəkilli sistemə gətirilir:

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2-x_3-3x_4-x_5&=0,\\ x_2-x_3-2x_4+x_5&=0,\\ x_3+x_4&=0.\end{aligned}\right\}$$

x_1,x_2,x_3-i əsas, x_4 və x_5-i sərbəst məchul qəbul edib bunların aşağıdakı ifadələrini tapa bilərik:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x_4+2x_5,\\ x_2&=x_4-x_5,\\ x_3&=-x_4.\end{aligned}\right\}$$

Əgər burada $x_4=\xi_1$ və $x_5=\xi_2$ ixtiyari parametrlərini daxil edərək verilən sistemin ümumi həllini

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x_4+2x_5,\\ x_2&=x_4-x_5,\\ x_3&=-x_4,\\ x_4&=\xi_1,\\ x_5&=\xi_2.\end{aligned}\right\}$$

kimi təyin edərik. Buradakı ξ_1 və ξ_2 ixtiyari parametrlərinə istənilən qiymətlər verməklə verilən tənliklər sisteminin istənilən sayda sıfırdan fərqli həllərini alarıq. Məsələn, $\xi_1=1$, $\xi_2=0$ qiymətlərini verib sistemin $(1,1,-1,1,0)$ xüsusi həllini, $\xi_1=1$, $\xi_2=-2$ qiymətlərini verib sistemin $(-3,3,-1,1,-2)$ kimi xüsusi həllini tapa bilərik.

§ 1.10. Birləşmələr və onların növləri haqqında ümumi məlumat. Permutasion, onun sinfi (tək-cütlüyü). Transpozisiya

Məlumdur ki, birləşmələrin aranjeman, kombinezon və permutasion kimi növləri var[1].

---

[1] Kitabda elementləri təkrar olunmayan birləşmələrdən danışılır.

Yada salaq ki, n-elementli $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sonlu çoxluğunun k elementli nizamlanmış hər-hansı altçoxluğuna (və ya hissəsinə) n elementdən hər birində k element iştirak edən aranjeman, çoxluğun k elementli ixtiyari hissəsinə n elementdən hər birində k element olan kombinezon, verilən n-elementli çoxluğun elementlərinin hamısının nizamlanmasına isə n elementli permutasion deyilir.

Bu təriflərdən aşkar olur ki, verilən n elementli çoxluqdan düzəldilən n elementli aranjeman birləşmələrin elə növüdür ki, bunlar bir-birindən ya burada iştirak edən elementləri, və ya elementlərinin düzülüşü ilə fərqlənir, kombinezonlar isə bir-birindən elementlərinin düzülüşü ilə deyil, bunlarda iştirak edən k elementlərin heç olmasa biri ilə fərqlənir (bəzən deyirlər ki, kombinezon bir-birindən elemenetlərinin tərkibi ilə fərqlənirlər), permutasionlar isə elementlərinin tərkibi ilə deyil, yalnız orada çoxluğun burada iştirak edən bütün elementlərinin düzülüşü ilə fərqlənir (buna görə də permutasionları çox zaman sadəcə olaraq «yerdəyişmə» adlandırırlar). Göründüyü kimi permutasion aranjemanın elə xüsusi halıdır ki, burada $n = k$, yəni nizamlamada çoxluğun bütün elementləri iştirak edir.

n elementdən hər birində k element iştirak edən aranjemanlar sayını A_n^k, kombinezonlar sayını C_n^k və ya $\binom{n}{k}$, n-elementli permutasionlar sayını P_n kimi işarə edirlər. Bunların müvafiq düsturlarını xatırlayaq:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1); \qquad (1)$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot n}; \qquad (2)$$

$$P_n = 1\cdot 2\cdot \dots \cdot n = n! \qquad (3)$$

Qeyd edək ki, $0! = 1$ qəbul edilir.

Bunlar arasındakı əlaqələrə də nəzər yetirək.

$$A_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}}, \quad C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n}, \quad P_n = A_n^n;$$

Yaxud:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}; \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \quad A_n^n = P_n = n!.$$

Göründüyü üzrə bu düsturlar, bunlar arasındakı əlaqələrdə $n!$ (n faktorial), yəni natural ədədlərin 1-dən n-ə qədər olan ardıcıl hasili ($1\cdot 2\cdot \dots \cdot n = n!$) mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Bu hasilin xüsusiyyəti belədir ki, əvvələn, bu hasil n-in artması ilə böyük sürətlə artır; belə ki, məsələn,

$$\begin{aligned}
1! &= 1, \\
2! &= 1\cdot 2 = 2, \\
3! &= 1\cdot 2\cdot 3 = 6, \\
4! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24, \\
5! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120, \\
6! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720, \\
7! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 5040, \\
8! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40320, \\
9! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 362880 \text{ və s.}
\end{aligned}$$

İkincisi də aşkardır ki: $n! = (n-1)!n$. Misaldakı ədədlərin hər biri uyğun olaraq 1,2,3,4,5, 6,7,8,9 elementli çoxluğun elementlərindən düzələn permutasionlar sayıdır. Xüsusi halda $\{a,b,c\}$ çoxluğunun elementlərindən düzələn permutasionlar $3! = 6$ dənə olub aşağıdakılardan ibarətdir:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

TƏRİF. *Permutasionda digər elementlərin öz yerində qalması şərti ilə onun yalnız ixtiyari iki elementinin qarşılıqlı yerini dəyişməsinə transpozisiya deyilir.*

Permutasionda i və j elementlərinin transpozisiyasını (i, j) kimi işarə edirlər. Məsələn, 3415672 permutasionunda (4,6) transpozisiyasını aparsaq onda 3615472 permutasionunu alırıq. Yaxud (2,5) transpozisiyası nəticəsində verilən 3415672 permutasiyasından 3412675 permutasiyasını alırıq və s. Beləliklə, transpozisiyanın permutasionlar üçün əhəmiyyətindən söhbət gedəndə hər şeydən əvvəl onu qeyd edək ki, transpozisiya vasitəsilə eyni çoxLuğun elementlərindən düzələn hər-hansı bir permutasiondan bu elementlərdən ibarət olan digər istənilən permutasiyaya keçmək olur. Bununla əlaqədar olaraq asanlıqla belə bir təklif isbat etmək olur ki:

***n** elementdən ibarət olan bütün mümkün **n!** sayda müxtəlif permutasiyaları elə düzmək olar ki, bunların hansı birindən başlan-*

masından asılı olmayaraq hər bir sonrakı permutasiyanı əvvəlkindən bir transpozisiya vasitəsi ilə almaq olar.

Məsələn, $\{1,2,3\}$ elementlərindən düzələn $3!=6$ dənə 123, 213, 231, 321, 312, 132 permutasionları elə düzülüb ki, birincidən başlayaraq bunları birindən bundan sonra gələnə keçmək üçün hər dəfə bir transpozisiya aparmaq lazım gəlir; belə ki:

123-dən	213-ə	(1,2) vasitəsilə,
213-dən	231-ə	(1,3) vasitəsilə,
231-dən	321-ə	(2,3) vasitəsilə,
321-dən	312-ə	(2,1) vasitəsilə,
312-dən	132-ə	(3,1) vasitəsilə,
132-dən	123-ə	(2,3) vasitəsilə

olurlar.

Lakin transpozisiyanın permutasion üçün əhəmiyyəti təkcə bununla bitmir.

Transpozisiyanın permutasion üçün daha bir əhəmiyyəti də onun sinfi ilə əlaqədardır, yəni transpozisiya permutasionun sinfinə də təsir edə bilir.

Permutasionun sinfi nədir? Bu inversiya inlayışı ilə bağlıdır.

Tərifə görə permutasion sonlu çoxluğun elementlərinin düzülüşü (nizamlanması) ilə səciyyələnir və deməli burada elementin fərdi xüsusiyyəti yox, düzülüşdə hansı elementin hansı yerdə durması başlıca əhəmiyyət kəsb edir. Bu müxtəlif düzülüşlərdəki elementləri tutduğu yerə görə $1,2,\ldots,n$ ədədləri vasitəsilə nömrələmək mümkündür. Ona görə də verilən çoxluğun elementləri əvəzinə onların düzülüş nömrələrini göstərən çoxluğa, yəni qısası $A=\{1,2,\ldots,n\}$ çoxluğuna baxmağı şərtləşək.

Bu da məlumdur ki, hər-hansı çoxluq üçün onun elementlərinin $\{\ \}$ simvolu daxilində hansı nizamla düzülüşünün elə bir əhəmiyyəti yoxdur. Bu, verilən A çoxluğu üçün də doğrudur, yəni məsələn, $M=\{1,2,3,4\}$ çoxluğunu $M=\{3,1,2,4\}$, $M=\{1,2,4,3\}$, $M=\{4,3,1,2\}$ və s. kimi yaza bilərik. Lakin bu çoxluqdan düzəldilən permutasionlar üçün buradakı elementlərin hansı düzülüşlə yazılışı əsas məsələdir, çünki eyni çoxluqdan düzələn permutasionlar bir-birindən yalnız elementlərinin hansı nizamla düzülüşü ilə fərqlənir.

Permutasionların elementlərinin nömrələnməsində iştirak edən natural ədədlər çoxluğu özü nizamlanmış çoxluqdur, onun elementləri arasında böyüklük-kiçiklik münasibəti var.

Bəzi riyazi ədəbiyyatda $\{1,2,\ldots,n\}$ çoxluğundan düzəldilən n-elementli permutasionu şərti olaraq $[i_1,i_2,\ldots,i_n]$ kimi də işarə edirlər.

n-elementli $\{1,2,\ldots,n\}$ çoxluğunun elementləri olan natural ədədlərin təbii artma qaydası ilə ardıcıl düzülüşündən alınan permutasionu onun «normal şəkli», yaxud «baş permutasionu» adlandıraq. Məsələn $\{4,3,2,1,5,6,8,7\}$ çoxluğu üçün permutasionun normal şəkli (baş permutasion) aşağıdakı olacaq:

$$[1,2,3,4,5,6,7,8] \tag{1}$$

Verilən bu şərti adın əhəmiyyəti burasındadır ki, buna istinad edərək bu elementlərin hər-hansı permutasiondakı tutduğu yerin nömrəsini, hansı elementin hansından sonra və ya əvvəl dayandığını müəyyən edə bilərik. Məsələn, 41832765 (1′) permutasionunda 12345678 baş permutasiondakı nizam pozulmuşdur. Belə ki, burada 1 rəqəmi II yerdə 2 rəqəmi V yerdə, 3 rəqəmi IV yerdə, 5 rəqəmi VIII yerdə və s. yerlərdə dayanırlar. Göründüyü kimi, bəzi rəqəmlər kiçik olduğu halda böyükdən irəlidə və əksinə dayanır. Məsələn, burada 8 rəqəmi 3,2,7,6,5-dən böyük olduğu və buna görə də permutasionun (1) normal şəklində sonda olduğu halda (1′)-də III yerdə durub. Belə pozğunluq halını «inversiya» anlayışı ilə səciyyələndirirlər.

TƏRİF. *Permutasionda iki i və j elementindən $i>j$ olub düzülüşdə i elementi j-dən əvvəl gəlirsə, onda deyirlər ki, i və j elementləri inversiya əmələ gətirir.*

Məsələn, 132 permutasionunda 1 ilə 3 və 1 ilə 2 inversiya əmələ gətirmir, çünki, $3>1$ və $2>1$ olub həm 3, həm də 2 elementi 1-dən sonra gəlir. Lakin 3 ilə 2 üçün bunu demək olmaz. Çünki $3>2$ olduğu halda 3 elementi 2-dən əvvəl yazılıb. Deməli, 3 ilə 2 elementləri invesiya əmələ gətirir. Beləliklə, 132 permutasionunda uyğun 123 baş permutasionunda nəzərən bir inversiya vardır. 312 permutasiyasında isə artıq iki inversiya vardır. Belə ki, $3>2$ və $3>1$ olmasına baxmayaraq 3 elementi həm 2-dən, həm də 1-dən əvvəl yazılıb. 321 permutasiyasında isə üç inversiya var və s.

Permutasiyada[1] inversiyaların sayını daha asan müəyyən etmək üçün aşağıdakı qaydadan istifadə etmək əlverişlidir: əvvəlcə 1-dən əvvəl neçə elementin olduğunu sayırıq; tutaq ki, 1-in qarşısında k_1 sayda element var, permutasiyada 1-i pozub və ya üstündən bir xətt çəkib, sonra 2-dən əvvəlki elementləri sayırıq, bu zaman üstündən xətt çəkilmiş 1 elementi sayılmamalıdır; tutaq ki, 2-nin qarşısında pozulmuş 1-dən başqa k_2 sayda element qalır; sonra isə pozulmuş 1 ilə 2-ni saymamaq şərtilə 3-ün qarşısında duran elementləri sayırıq, tutaq ki, bu k_3 saydadır və s. Bu qayda ilə $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n$ ədədlərini tapıb bunları toplayıb;

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_n;$$

cəmdə k alırıq ki, bu da permutasiondakı inversiyaların ümumi sayı olur.

Riyazi ədəbiyyatda $i_1, i_2, \dots, i_n$ permutasionundakı inversiyalar sayını adətən $inv[i_1, i_2, \dots, i_n]$ kimi işarə edirlər.

Misal. $[1,2,3,4,5,6,7]$ permutasionuna nəzərən $[6,3,1,4,2,7,5]$ permutasionundakı inversiyaların ümumi sayını tapaq:

$$inv[6,3,1,4,2,7,5] = ?$$

Əvvəlcə 1-i pozaq: 6,3,1,4,2,7,5; 1-dən əvvəl iki element (6 və 3) durur (deməli $k_1 = 2$). Sonra 2-ni pozuruq: 6,3,1,4,2,7,5; 2-dən əvvəl pozulmayan üç element (6, 3 və 4) dayanır ($k_2 = 3$). İndi 3-ü pozaq: 6,3,1,4,2,7,5; 3-dən əvvəl pozulmayan bir element (6) dayanır ($k_3 = 1$). 4-ü pozaq: 6,3,1,4,2,7,5; 4-dən əvvəldə pozulmayan bir element (6) dayanır ($k_4 = 1$). 5-i pozaq: 6,3,1,4,2,7,5; 5-dən əvvəl pozulmayan elementlər sayı ikidir (6 və 7); deməli $k_5 = 2$. 6-nı pozuruq: **6,3,1,4,2,7,5**; 6-dan əvvəl pozulmayan element yoxdur, deməli $k_6 = 0$. Nəhayət, 7-ni pozuruq: **6,3,1,4,2,7,5**. 7-dən əvvəldə pozulmamış element yoxdur, yəni $k_7 = 0$. Deməli, $inv[6314275] = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 + k_7 = 2+3+1+1+2+0+0 = 9$ olur (çox zaman elementlər arasındakı vergülləri nəzərdən atmaq da olar).

İnversiyalar sayının tək və cüt olmasından asılı olaraq permutasionlar tək və cüt sinfə daxil olur.

[1] «Permutasion» termini əvəzinə bəzən «permutasiya» termini də istifadə edilir.

TƏRİF. *İnversiyalar sayı tək olan permutasiyaya tək, inversiyalarının sayı cüt olan permutasiyaya cüt permutasion deyilir; yaxud deyirlər ki, bunlar uyğun olaraq tək və cüt sinfə daxildir (bəzən permutasiyanın sinfi əvəzinə onun «cütlüyü» termini də işlədilir).*

Məsələn, 25314 permutasiyası tək, lakin 45312 isə cütdür, çünki uyğun olaraq bunlardakı inversiyalar sayı:

$$inv[25314] = 5 \text{ tək ədəd}, \; inv[45312] = 8 \text{ cüt ədəddir}.$$

Xüsusi halda $1,2,3,\dots,n$ normal şəkilli permutasionu istənilən n üçün cütdür (burada inversiyaların sayı sıfırdır).

İndi transpozisiyanın permutasionun sinfinə təsirinə aid olan aşağıdakı teoremi isbat edək.

TEOREM. *Hər hansı bir transpozisiya nəticəsində permutasiya sinfini dəyişir.*

İSBATI. Əvvəlcə o hala baxaq ki, permutasionda transpozisiyaya uğrayan elementlər qonşudur: $\dots, i, j, \dots$; burada i-dən əvvəl j-dən sonra gələn elementlərin əvəzinə nöqtələr qoyulmuşdur. i-dən əvvəl gələn elementlər qrupunu A, j-dən sonra gələn elementlər qrupunu isə B ilə işarə etsək onda permutasion

$$A, i, j, B \tag{1}$$

şəklində olar. Əgər burada (i, j) transpozisiyası aparsaq

$$A, j, i, B \tag{2}$$

permutasionunu alırıq. Aydındır ki, istər transpozisiyaya qədər, istərsə də transpozisiyadan sonra i və j elementlərinin A elementlər və B elementlər qrupu ilə əmələ gətirdikləri inversiyalar sayı dəyişməyəcək.

İndi tutaq ki, (1)-də i və j elementləri baş permutasiondakı düzülüşə uyğun olaraq təbii artma qaydasındadır, yəni $i < j$. Onda aydındır ki, (2)-də bu elementlər bir inversiya əmələ gətirər; çünki (1)-də i elementi j-dən kiçik və ondan əvvəl gəldiyi halda, (2)-də j-dən kiçik olan i elementi j-dən sonra gəlir. Əgər (1)-də $i > j$ olardısa, onda bu elementlər (1)-də bir inversiya əmələ gətirirdisə transpozisiyadan sonra bu inversiya yox olacaq. Deməli, $i < j$ və $i > j$ kimi hər iki vəziyyətdə inversiyaların sayı ± 1 qədər, yəni tək ədəd sayda dəyişəcək. Onda aydındır ki, (1) və in-versiyalarının sayı ± 1 qədər fərqlənən (2) permutasiyaları müxtəlif siniflərə mənsubdurlar.

İndi o halı nəzərdən keçirək ki, transpozisiyada iştirak edən i və j elementləri qonşu deyil, bunlar arasında $k_1, k_2, \dots, k_m$ kimi m sayda ($m > 0$) element var:

$$A, i, k_1, k_2, \dots, k_m, j, B. \qquad (3)$$

Burada əvvəlcə i-ni j-yə qonşu gətirmək lazımdır və bunun üçün özündən sonrakı $k_1, k_2, \dots, k_m$ elementləri ilə $(i,k_1),(i,k_2),\dots(i,k_m)$ kimi m sayda transpozisiyalar, j-ni i-nin yerinə gətirmək üçün isə $(j,k_m),(j,k_{m-1}),\dots(j,k_1),(j,i)$ kimi $m+1$ sayda transpozisiyaları aparmaq gərəkdir. Onda

$$A, j, k_1, k_2, \dots, k_m, i, B. \qquad (4)$$

Deməli, (3)-dən (4)-ə keçib i və j elementlərinin qarşılıqlı yerdəyişməsi (transpozisiyası) üçün qonşu elementlərlə cəmisi $m+m+1=2m+1$ sayda, yəni tək ədəd transpozisiyalar aparmaq lazım gəlmişdir. Deməli, burada (3) permutasionu (4)-ə keçid prosesində (3) permutasionu tək ədəd dəfə öz sinfini dəyişmiş olur. Ona görə də (3) ilə (4) müxtəlif adlı siniflərə aid olmalıdır.

Teorem isbat olundu.

İsbat etdiyimiz teoremdən çıxan iki vacib nəticəni qeyd edək.

NƏTİCƏ 1. *Bir permutasiondan həmin elementlərdən ibarət olan və bununla eyni adlı sinfə malik olan permutasiona keçmək üçün cüt sayda, əks adlı sinfə keçmək üçün isə tək sayda transpozisiya aparmaq lazımdır.*

Nəticənin doğruluğu aydındır. Belə ki, eyni sinfə malik olan ədədlərin cəmi cüt, müxtəlif sinfə mənsub olan ədədlərin cəmi isə tək sinfə aiddir.

NƏTİCƏ 2. *$1,2,\dots,n$ elementdən $(n \geq 2)$ düzəldilməsi mümkün olan bütün permutasiyaların yarısı cüt, yarısı isə tək sinfə aid olub, hər sinifdəkinin sayı $\frac{1}{2}n!$-dır.*

İSBATI. Bilirik ki, n elementdən düzəldilməsi mümkün olan bütün permutasionlar sayı $n!$-dır. Bunların cütlərinin sayı p, təklərinin sayı isə q olsun: $p+q=n!$

İndi hər bir cüt permutasion üzərində eyni bir transpozisiya aparaq. Aydındır ki, isbat etdiyimiz teoremə görə 1 transpozisiya sayəsində bu cüt permutasionlar sinfini dəyişər və nəticədə p sayda müxtəlif tək permutasionlar alarıq, onda $q \geq p$ olar.

İndi də tək permutasionların hər biri üzərində həmin transpozisiyanı aparaq. Onda q sayda müxtəlif permutasionlar alarıq ki, bu halda da $p \geq q$ alarıq.

$q \geq p$ və $p \geq q$ münasibətlərindən isə $p = q$ olduğu alınır, yəni

$$(q \geq p) \wedge (p \geq q) \Rightarrow (p = q).$$

Nəticə isbat olundu.

Qeyd. Nəticənin doğruluğu bir də ondan aydın olur ki, yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi n elementdən ibarət olan $(n \geq 2)$ permutasionları elə ardıcıl düzmək mümkündür ki, hər biri özündən əvvəlkindən ancaq bir transpozisiya aparmaqla alınar. Onda aydındır ki, tək və cüt permutasionlar ardıcıl olaraq növbələşəcək. Bunların ümumi sayı $n!$ isə cüt ədəd olduğundan ($n \geq 2$ olanda hasildə həmişə 2 vuruq kimi iştirak etdiyindən $n!$ cüt ədəd olur) aşkardır ki, bunların yarısı tək, yarısı cüt olub hər biri $\frac{n!}{2}$ dənədir.

§ 1.11. Əvəzləmələr və onların sinfi. Əvəzləmələrin hasili

Sonlu $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ çoxluğunun verildiyini fərz edək. Bilirik ki, bu çoxluqdan $n!$ sayda müxtəlif permutasionlar düzəltmək mümkündür. Aydındır ki, bu permutasionlar bir-birlərindən yalnız elementlərinin yerdəyişmələri ilə fərqlənəcəklər. Odur ki, burada elementlərin bilavasitə özləri deyil, onların permutasionlardakı tutduğu nömrələr mühüm əhəmiyyət kəsb etdiyindən M çoxluğunun

$$M = \{1, 2, \dots, n\}$$

şəkildə verildiyini təsəvvür edək.

İndi çoxluqlarda inikas anlayışını yada salaq.

Məlumdur ki, A çoxluğunun B çoxluğuna f inikası dedikdə bunlar arasında elə uyğunluqdan söhbət gedir ki, M çoxluğunun hər bir elementinə B-nin müəyyən bir elementini qarşı qoyan qayda düşünülür və bu da $f:A\to B$ yaxud $A\xrightarrow{f}B$ kimi işarə edilir.

Xatırlayaq ki, A-nın elementlərini B-nin uyğun elementlərinin proobrazları, B-nin bunlara uyğun elementlərini isə A-nın elementlərinin obrazları adlandırırlar.

f inikasına nəzərən a elementinin proobrazı, b-nin isə bunun obrazı olması faktını bəzən qısaca olaraq «afb», yaxud $f(a)=b$ və ya $af=b$ kimi işarə edirlər.

Bildiyimiz kimi, inikasın üç növunu fərqləndirirlər: inyektiv, süryektiv, biyektiv:

$f:A\to B$ inyektiv inikasında B-nin hər bir elementinin A-da birdən çox sayda obrazı olmaz, yəni ən çoxu bir dənə ola bilər. Yaxud başqa cür: $a_1,a_2\in A$, $b_1,b_2\in B$ və $\varphi(a_1)=b_1$, $\varphi(a_2)=b_2$ üçün $(a_1\neq a_2)\Rightarrow(\varphi(a_1)\neq\varphi(a_2))$ olarsa bu inyektiv inikas adlanır.

Süryektiv inikas odur ki, A-nın elementlərinin obrazları B çoxluğunu «doldurur», başqa sözlə: B-nin hər bir elementinin A-da ən azı bir proobrazı var.

İnikas eyni zamanda həm inyektiv, həm də süryektiv olarsa, ona biyektiv inikas deyirlər. Başqa sözlə, biyektiv inikasda B-nin hər bir elementinin A-da yalnız bir proobrazı olur.

Xüsusi halda çoxluq özü də özünə inikas ola bilər ($A=B$ halı). Bunu bəzən A çoxluğunun çevrilməsi də adlandırırlar.

İndi verilən $M=\{1,2,\dots,n\}$ sonlu çoxluğuna qayıdaq.

TƏRİF. $M=\{1,2,\dots,n\}$ *sonlu çoxluğunun özünün-özünə biyektiv inikasına n tərtibli və ya n dərəcəli əvəzləmə deyilir.*

Bu tərifdən aydın olur ki, verilən n elementli çoxluqdan düzəldilmiş əvəzləməyə eyni bir çoxluğun elementlərindən düzələn permutasionların elementləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq kimi baxa bilərik. Bu əsasla da əvəzləməni inikasda iştirak edən hər bir proobrazın altında buna uyğun yeganə obrazı yazmaqla onu aşağıdakı şəkildə işarə edirlər:

$$S=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n\\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n\end{pmatrix};$$

Burada $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ və $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ sətirləri eyni bir M çoxluğunun elementlərindən düzəldilən permutasionlardır.

Daha əyani şəkildə desək $M=\{1,2,\dots,n\}$ çoxluğundan düzələn hər-hansı bir S əvəzləməsinə $i\to S(i)$ inikası kimi baxıb, onu

$$S=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ i_1 & i_2 & \dots & i_n\end{pmatrix}$$

kimi yazırlar və bunu S inikası

$$S:\begin{array}{cccc}1 & 2 & \dots & n\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ i_1 & i_2 & \dots & i_n\end{array}$$

kimi mənalandırırlar, hansı ki, burada $i_k=S(k)$, $k=1,2,\dots,n$.

Sözün qısası, sadə dildə desək: $S=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ i_1 & i_2 & \dots & i_n\end{pmatrix}$ yazılışında ikinci sətrin elementləri $i_1,i_2,\dots,i_n$ (obrazlar) düzümü birinci sətirdəki elementlərdən, yəni $1,2,\dots,n$ proobrazlardan düzəldilən permutasiondur.

Əvəzləməyə aid misal göstərək.

Məsələn, aşağıdakı S və T

a) $S=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2 & 1 & 6 & 5\\ 5 & 2 & 4 & 6 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 5 & 3 & 4\end{pmatrix}$ uyğun olaraq $M_1=\{1,2,3,4,5,6\}$ və $M_2=\{1,2,3,4,5\}$ çoxluqlarından düzələn altı və beş tərtibli əvəzləmələrdir.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

əvəzləməsi də M_2-dən düzələn əvəzləmədir.

Lakin $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8\end{pmatrix}$ əvəzləməsi $\{1,2,3,4,5\}$ çoxluğundan düzələn əvəzləmə deyildir, çünki burada ikinci sətirdəki 8 elementi əvəzləmənin düzəldiyi $\{1,2,3,4,5\}$ çoxluğundan deyil (tərifdəki «özünün-özünə inikası» şərti pozulub).

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$ əvəzləmə deyil, çünki burada birinci sətirdəki iki müxtəlif (2 və 5) proobrazlarına eyni bir ortaq (2) uyğundur (biyektiv inikas şərti, yəni qarşılıqlı birqiymətlilik şərti pozulmuşdur).

Bunun kimi də $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ əvəzləmə deyil (izah edin!).

Deməli, $M = \{1,2,\ldots,n\}$ çoxluğundan düzələn hər-hansı S əvəzləməsinin birinci sətrini təkrarsız permutasion olmaqla istənilən düzülüşlə yazmaq olar, lakin bunun ikinci sətrindəki uyğun obrazı hökmən öz altında yazmaq gərəkdir. Ona görə də M - dən düzələn eyni bir əvəzləməni bunun «sütunlarının» yerini dəyişməklə onun mənası dəyişmir və onu $n!$ sayda, o cümlədən 1-ci sətrini təbii artma qaydası ilə nizamlayıb

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

kimi yaza bilərik ki, bunu da bəzən əvəzləmənin «normal şəkli» adlandırırlar.

Beləliklə, aydın olur ki, verilən n elementli çoxluqdan $n!$ sayda n tərtibli müxtəlif əvəzləmələr düzəltmək mümkündür və bunların hər birini də mənasını dəyişməmək şərtilə bir-birinə bərabər olan $n!$ şəkildə yazmaq olar. Xüsusi halda məsələn,

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ və s.}$$

Permutasionlarda olduğu kimi, əvəzləmələri də bunun sətirlərindəki inversiyalar sayına görə tək və cüt siniflərə bölürlər. Belə ki, hər *iki sətirdəki inversiyaların ümumi sayı təkdirsə əvəzləmə tək, cütdürsə əvəzləmə cüt sinfə aid edilir, yaxud burada qısaca olaraq bunları tək və cüt əvəzləmə adlandırırlar (bəzən bunlara uyğun olaraq «mənfi və müsbət işarəli» əvəzləmə də deyirlər).*

Deməli,

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}$$

əvəzləməsinin sinfi $s = inv[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, $t = inv[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$ olduqda $s+t$ cəmi təkdirsə əvəzləmə tək, cütdürsə cüt olur. Əvəzləmənin sinfi $s+t$ cəmindən asılı olduğu üçün əvəzləmənin sinfini s və t toplananlarının eyni adlı və müxtəlif adlı olması, yəni hər ikisinin ya tək, ya hər ikisinin cüt ədəd olmasının, yaxud birinin tək, digərinin cüt olması) baxımından da təyin etmək olar, çünki, biri tək və o biri cüt olan iki ədədin cəmi tək, iki tək və iki cüt ədədlərin cəmi cütdür. Onda

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}$$

əvəzləməsinin hər iki sətri tək, yaxud hər iki sətri cütdürsə əvəzləmə cüt, sətirlər müxtəlif adlı sinfə mənsub olan permutasionlardırsa əvəzləmə tək olar. Xüsusi halda əvəzləmə normal şəkildə olarsa, aşkardır ki, onun 1-ci sətrindəki permutasionlarda inversiya sayı sıfır olur və onun sinfi ikinci sətirdəki permutasionun sinfi ilə eyni adlı olur. Belə ki:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

əvəzləməsinin sinfi $inv[i_1, i_2, \ldots, i_n]$ ilə müəyyən edilir. Buradan isə aşkar olur ki, eyni bir n elementli çoxluqdan düzəldilməsi mümkün olan $n!$ sayda müxtəlif n tərtibli əvəzləmənin yarısı tək, yarısı cüt olub hər biri $\frac{n!}{2}$ dənə olacaq. Çünki, məlum olduğu üzrə $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$ kimi $n!$ sayda permutasionun yarısı tək, yarısı isə cütdür.

İndi belə bir sadə teoremlə tanış olaq.

TEOREM. *Əvəzləmənin sütunları üzərində hər-hansı bir transpozisiya aparsaq onun mənası dəyişmədiyi kimi sinfi də dəyişmir.*

İSBATI. Tutaq ki,

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_i & \ldots & \alpha_j & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_i & \ldots & \beta_j & \ldots & \beta_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

cüt əvəzləməsi verilib. Bunun i-ci və j-ci sütunları arasında transpozisiya aparaq; aydındır ki, bu yenə də S əvəzləməsi olub aşağıdakı şəklə düşəcək:

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_j & \ldots & \alpha_i & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_j & \ldots & \beta_i & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

S cüt olduğundan onun hər iki sətri eyni adlı sinfə aiddir. Əgər bunun i-ci və j-ci sütunlarının yerlərini qarşılıqlı surətdə dəyişsək, onda bu o deməkdir ki, onun birinci sətrindəki $[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i\ldots\alpha_j\ldots\alpha_n]$ permutasionunda (α_i,α_j) transpozisiyası, ikinci sətrindəki $[\beta_1\beta_2\ldots\beta_i\ldots\beta_j\ldots\beta_n]$ permutasiyasında isə (β_i,β_j) transpozisiyası aparmış oluruq və nəticədə bu sətirlərin hər ikisi əks sinfə mənsub olacaqdır, amma sətirlərdəki eyniadlılıq saxlanacaq. Bu isə o deməkdir ki, transpozisiyadan sonra alınan (2) əvəzləməsinin sətirləri eyni adlı sinfə aid olur. Deməli, (1) cütdürsə (2) də cüt olacaq.

Analoji mühakimə aparmaqla asanlıqla göstərmək olar ki, (1) təkdirsə (2) də tək olacaq (bunu oxucuya həvalə edirik).

Teorem isbat olur.

Burada bir faktı da unutmayaq ki, *əvəzləmə transpozisiyanın ümumiləşməsidir*. Belə ki, məsələn (i,j) transpozisiyası məhz

$$S=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n\\ 1 & 2 & \ldots & j & \ldots & i & \ldots & n\end{pmatrix}$$

əvəzləməsi deməkdir.

Əvəzləmələrin hasili. Bilirik ki, hər bir n tərtibli S əvəzləməsi n elementli sonlu çoxluğun özünün özünə biyektiv inikasıdır, odur ki, n tərtibli S və T əvəzləmələrinin hasilinə də eyni bir sonlu çoxluqdakı *biyektiv inikasların hasili, başqa sözlə bu inikasların ardıcıl tətbiqinin nəticəsində alınan inikas kimi baxmalıyıq*. Deməli, qısa desək:

n dərəcəli iki S və T əvəzləmələrinin ardıcıl tətbiqinin nəticəsində alınan yenə n dərəcəli U əvəzləməyə bunların hasili deyilir və

$$U=ST$$

kimi işarə edilir.

Tutaq ki, $S=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n\end{pmatrix}$ və $T=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n\end{pmatrix}$.

Bilirik ki, burada hər ikisindəki

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \qquad (\alpha)$$
$$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n \qquad (\beta)$$

sətirləri $1,2,\ldots,n$ ədədlərindən düzəldilən permutasionlardır. T əvəzləməsinin sütunları üzərində elə transpozisiyası aparaq ki, onun 1-ci sətrində $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ permutasiyası alınsın (məlumdur

ki, bunu həmişə etmək olar!). Onda onun 2-ci sətrində (β) permutasiyası əvəzinə $1,2,\ldots,n$ elementlərindən düzəldilmiş olan $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n$ kimi yeni permutasiya alınar, yəni T əvəzləməsi belə olar:

$$T=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n\end{pmatrix}.$$

İndi S və T-nin ardıcıl tətbiqinin necə bir əvəzləmə olduğu aşkar görünür, belə ki, əgər ST hasilini U ilə işarə etsək:

$$ST=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n\end{pmatrix}=U.$$

Bu o deməkdir ki, S və T-nin ardıcıl ifadə etdiyi iki biyektiv inikası U «birdəfəlik» ifadə edir. Məsələn

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ və $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5\end{pmatrix}$ əvəzləmələrinin hasilini

tapmaq üçün

$$1\xrightarrow{A}5\xrightarrow{B}5 \text{ deməli, } 1\xrightarrow{AB}5$$
$$2\xrightarrow{A}4\xrightarrow{B}3 \text{ deməli, } 2\xrightarrow{AB}3$$
$$3\xrightarrow{A}1\xrightarrow{B}2 \text{ deməli, } 3\xrightarrow{AB}2$$
$$4\xrightarrow{A}2\xrightarrow{B}1 \text{ deməli, } 4\xrightarrow{AB}1$$
$$5\xrightarrow{A}3\xrightarrow{B}4 \text{ deməli, } 5\xrightarrow{AB}4$$

inikaslarına diqqət yetirərək AB hasil əvəzləməsini alarıq:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

İki aşkar faktı da qeyd edək: 1) Yalnız eyni çoxluqdan olan və eyni tərtibli (eyni dərəcəli) əvəzləmələri vurmaq olar; 2) vurma əməlində iştirak edən əvəzləmələrin «normal şəkildə» verilməsi də məcburi deyil.

Tutaq ki, $S=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n\end{pmatrix}$ və $T=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n\end{pmatrix}$ kimi eyni tərtibli və elementləri də eyni bir $\{1,2,\ldots,n\}$ çoxluğundan olan iki əvəzləmə verilib. Məlumdur ki, burada

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \qquad (\alpha)$$

həm də

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \qquad (\beta)$$

sətrləri $1,2,\ldots,n$ ədədlərindən düzəlmiş permutasionlar olmalıdır.

T əvəzləməsinin sütunları üzərində elə transpozisiya aparaq ki, onun 1-ci sətrində $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ düzülüşlə permutasion alınsın (bəllidir ki, *bunu həmişə etmək olar!*). Onda onun 2-ci sətrində (β) permutasion əvəzinə $1,2,\ldots,n$ ədədlərindən düzəldilmiş olan

$$\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n \qquad (\beta')$$

kimi yeni permutasiya alınar, yəni nəticədə

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \ldots & \beta'_n \end{pmatrix}$$

əvəzləməsini alarıq. Onda S ilə T - nin hasili

$$ST = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \ldots & \beta'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \ldots & \beta'_n \end{pmatrix} = U \quad \text{olar.}$$

Misal 1. $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ və $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ əvəzləmələrinin hasilini tapaq.

Əgər T əvəzləməsinin sütunları arasında yerdəyişmə aparıb, məsələn onu $T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ şəklində yazsaq:

$$ST = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lakin praktikada heç də T əvəzləməsinin sütunları üzərində transpozisiya aparıb onun 1-ci sətrini hökmən S - in ikinci sətri kimi göstərməyə ehtiyac yoxdur. Əlavə olaraq onu da qeyd edək ki, vurma əməli üçün S - in də normal şəkildə oması da vacib deyil. Məsələn:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{S}\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}}_{T} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{U'},$$

yaxud

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{U''},$$

və ya

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{U'''}.$$

Buradan görünür ki: $U' = U'' = U'''$.

Əvəzləmələrin vurulmasında bəzi xassələri qeyd edək.

1. *Əvəzləmələrin hasilində $n \geq 3$ olduqda kommutativlik xassəsi pozulur:*

$$S_1S_2 \neq S_2S_1.$$

Vurmada kommutativalik xassəsinin, ümumiyyətlə, pozulmasını göstərmək üçün aşağıdakı misalı nəzərdən keçirək.

$$S_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ və } S_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

əvəzləmələri üçün S_1S_2 və S_2S_1 hasillərini tapaq:

$$S_1S_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad S_2S_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Göründüyü kimi $S_1S_2 \neq S_2S_1$.

Lakin onu da qeyd edək ki, təsadüfən bəzi əvəzləmələrin hasilində $ST = TS$ bərabərliyi doğru olur. Məsələn, $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ və $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ əvəzləmələri $ST = TS$ xassəsinə malikdir. Belə əvəzləmələr *kommutativ tipli əvəzləmə* adlanır. Əlbəttə, belə tip əvəzləmələrin olması heç də bütün əvəzləmələr üçün vurmada kommutativlik qanununun doğru olduğuna dəlalət etmir.

2. *Əvəzləmələrin vurulmasında assosiativlik qanunu doğrudur:*

$$(S_1S_2)S_3 = S_1(S_2S_3).$$

İSBATI. $1,2,\ldots,n$ elementlərindən düzəldilən ixtiyari

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}, \; S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix} \text{ və } S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n \end{pmatrix}$$

əvəzləmələrini götürək.Aşkardır ki, S_2 və S_3 əvəzləmələrini asanlıqla

$$S_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \ldots & \beta'_n \end{pmatrix} \quad , \quad S_3 = \begin{pmatrix} \beta' & \beta'_2 & \ldots & \beta'_n \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 & \ldots & \gamma'_n \end{pmatrix}$$

şəklində yaza bilərik. İsbat edəcəyimiz bərabərliyin sol tərəfini, yəni $(S_1S_2)S_3$ hasilini tapaq. Əvvəlcə:

$$S_1S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \beta_1' & \beta_2' & \dots & \beta_n' \end{pmatrix}$$

hasilini taparıq, sonra isə:

$$(S_1S_2)S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \beta_1' & \beta_2' & \dots & \beta_n' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1' & \beta_2' & \dots & \beta_n' \\ \gamma_1' & \gamma_2' & \dots & \gamma_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \gamma_1' & \gamma_2' & \dots & \gamma_n' \end{pmatrix}.$$

İndi isə sağ tərəfdəki $S_1(S_2S_3)$ hasilini tapaq. Yenə də əvvəlcə

$S_2S_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \gamma_1' & \gamma_2' & \dots & \gamma_n' \end{pmatrix}$ hasilini taparıq. Bundan sonra

$$S_1(S_2S_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \gamma_1' & \gamma_2' & \dots & \gamma_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \gamma_1' & \gamma_2' & \dots & \gamma_n' \end{pmatrix}.$$

Deməli,

$$(S_1S_2)S_3 = S_1(S_2S_3).$$

Onu da qeyd etmək lazımdır ki, burada yenə də əvəzləmələrin normal şəkildə verilməsi heç də məcburi deyildir və teoremin isbatı üçün bunun əhəmiyyəti yoxdur. Məsələn, tutaq ki, ixtiyari şəkildə verilmiş S, U, T əvəzləmələrində S əvəzləməsi ixtiyari α elementini β-ya, T əvəzləməsi β-nı γ-ya, U isə γ-nı δ-ya çevirir. Yaxud qısa olması üçün şərti olaraq $S = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ və

$U = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ ilə işarə etsək, aşkardır ki, $(ST)U = S(TU)$, yəni həm

$(ST)U = \begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix}$, həm də $S(TU) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix}$.

Xassə isbat olunur.

Bu xassəni istənilən sonlu sayda əvəzləmələrin hasili üçün ümumiləşdirmək olar. Belə ki, k sayda $S_1S_2\dots S_k$ əvəzləmələrinin hasilində vuruqların yerini dəyişmədən onları ixtiyari qaydada mötərizəyə almaq olar. Xüsusi halda,

$$S_1S_2S_3S_4 = S_1(S_2S_3S_4) = (S_1S_2S_3)S_4 = (S_1S_2)(S_3S_4).$$

Bu xassəyə əsaslanaraq əvəzləmə üçün müsbət tam qüvvət anlayışını vermək olar.

S əvəzləmə, m isə natural ədəd olarsa, S^m dedikdə, S əvəzləməsinin m dəfə özünün özünə hasili başa düşülür.

3. Assosiativlik xassəsinə əsasən asanlıqla göstərmək olar ki, *eyni bir əvəzləmənin qüvvətləri hasili kommutativdir*, yəni

$$S^kS^l = S^lS^k = S^{k+l}.$$

Əvəzləmələrin bəzi xüsusi növləri. Əvəzləmələr sırasında eynilik (yaxud vahid) əvəzləmə, verilən əvəzləmənin tərsi, dövri adlanan əvəzləmələr xüsusi yer tutur.

TƏRİF. *Hər bir elementini ancaq özünə çevirən (inikas etdirən)*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

əvəzləməsinə eynilik (yaxud vahid) əvəzləmə deyilir.

Belə əvəzləmə üçün zahiri görünüşünə görə «eynilik əvəzləmə» adı özünü tamamilə doğruldur. Belə ki, burada hər bir ixtiyari element ancaq özünə çevrilir: $a_i \xrightarrow{I} a_i$. «Vahid əvəzləmə» deyilməsi isə bu əvəzləmənin aşağıdakı xassəyə malik olması ilə əlaqədardır:

İxtiyari A əvəzləməsi ilə I əvəzləməsinin hasili üçün $AI = IA = A$ bərabərliyi doğrudur. Bu xassənin doğruluğunu adi yoxlama yolu ilə yəqin etmək olar. Doğrudan da, ixtiyari $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$

əvəzləməsi verilmişsə, onda

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} = A.$$

İndi vahid əvəzləməni $I = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ kimi yazsaq (bunu həmişə etmək mümkündür), yenə də

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} = A.$$

İsbat olunan bu xassədən görünür ki: *Vahid əvəzləmə istənilən əvəzləmə ilə kommutativdir.*

İndi tərs əvəzləmə anlayışı ilə tanış olaq.

TƏRİF. *S əvəzləməsinin yerinə yetirdiyi çevirmənin (inikasın) tərsini yerinə yetirən əvəzləməyə S-in tərsi deyilir və S^{-1} ilə işarə edilir.*

Tərifdən bilavasitə aydın olur ki,

$$S=\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_n \end{pmatrix}$$

əvəzləməsinin tərsi:

$$S^{-1}=\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

şəklində olacaq. Xüsusi halda, əgər S əvəzləməsi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

şəklində verilmişsə, bunun tərsi

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

olmalıdır.

Aşkardır ki, *iki müxtəlif əvəzləmənin tərs əvəzləmələri də müxtəlif olacaq*, yəni $S_1 \neq S_2$ olduqda $S_1^{-1} \neq S_2^{-1}$.

Vahid əvəzləmə üçün $IA = AI = A$ xassəsi xarakterik olduğu halda, tərs əvəzləmə üçün aşağıdakı xassə xarakterikdir:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Doğrudan da,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}=I$$

və

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}=I.$$

Misal 3. $S=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ əvəzləməsinin tərsini tapaq və $SS^{-1} = S^{-1}S = I$ olduğunu yoxlayaq.

Aşkardır ki:

$$S^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 5 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

İndi SS^{-1} və $S^{-1}S$ hasillərini tapaq:

$$SS^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}=I.$$

$$S^{-1}S=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 5 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}=I.$$

Misal 4. $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ **tənliyindən X məchul əvəzləməsini tapaq.**

Verilən əvəzləmələri A və B ilə işarə edək:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Onda tənlik $XA = B$ şəklini alar. Bu bərabərliyin hər tərəfini sağdan A^{-1}-ə vuraq: $XAA^{-1} = BA^{-1}$, burada $X(AA^{-1}) = BA^{-1}$, $AA^{-1} = I$ və $XI = X$ olduğundan $X = BA^{-1}$. Bizim misalda

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

olduğu üçün

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Yoxlayaq:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vahid və tərs əvəzləmənin sinifləri məsələsinə gəldikdə isə bunlar üçün aşağıdakı təklif doğrudur:

I vahid əvəzləməsi cüt sinfə, S əfəzləməsinin tərsi isə S-in özü ilə eyni sinfə daxildir.

Bu təklifin isbat edilməsini oxuculara məsləhət görürük.

İndi isə əvəzləmələrin digər maraqlı bir növü olan dövri əvəzləmə ilə tanış olaq.

TƏRİF. *$1,2,\dots,n$ ədədlərindən düzəldilmiş əvəzləmədə α_1 ədədi α_1-dən fərqli α_2-yə, α_2 ədədi özündən və α_1-dən fərqli α_3-ə və s. α_{k-1} ədədi $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{k-2}$ ədədlərindən fərqli olan α_k-ya çevrilirsə, nəhayət, α_k ədədi isə $(k \le n)$ yenidən ilkin α_1-ə çevrilirsə (inikas olunursa) və $k<n$ halı üçün qalan elementlər dəyişməz saxlanırsa*

belə əvəzləmələrə k-hədli dövrü əvəzləmə, yaxud k-hədli dövr deyirlər.

Məsələn, $1,2,\dots,n$ elementlərini n dərəcədən

$$S=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n\\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n & \alpha_1\end{pmatrix}$$

əvəzləməsində α_1-dən başlayaraq hər bir element özündən fərqli olan sonrakı ardıcıl $n-1$ dənə elementlərə, axırda isə sonuncu α_n yenidən α_1 elementinə çevrilmişdir. Bu, məhz n hədli dövri əvəzləmədir (burada $k=n$).

Misallar. a) $S=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}$ əvəzləməsi 5 hədli dövr təşkil edir; çünki burada:

$$1\xrightarrow{S}2,\ 2\xrightarrow{S}3,\ 3\xrightarrow{S}4,\ 4\xrightarrow{S}5 \text{ və } 5\xrightarrow{S}1.$$

b) $T=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&5&4&1\end{pmatrix}$ əvəzləməsi də [1,2,3,4,5] çoxluğunun elementlərinin 3 hədli dövrüdür.

Dövrdəki elementlərin sayına bəzən *dövrün uzunluğu* da deyirlər. Xüsusi halda əvəzləmə α_i elementini yenə də α_i-yə çevirirsə ($\alpha_i\to\alpha_i$), bu əvəzləməyə birhədli dövr kimi baxıb (α_i) kimi işarə edirlər (burada $k=1$).

Dövri əvəzləmələri adətən bir sətirdə yazırlar. Məsələn:

$$S=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{k-1} & \alpha_k\\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_k & \alpha_1\end{pmatrix}$$

kimi k hədli dövri əvəzləməni $S=(\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_k)$ kimi işarə edirlər. Məsələn:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&5&4&1\end{pmatrix}=(1\ 3\ 5),\ \begin{pmatrix}1&2&4&6&5&3\\1&4&6&3&5&2\end{pmatrix}=(2\ 4\ 6\ 3) \text{ və s.}$$

Xüsusi halda, dövr bircə elementdən ibarətdirsə (α) onda bu, o deməkdir ki, əvəzləmədə (α) elementi dəyişməz qalır. Bu mənada eynilik əvəzləməyə birhədli dövri əvəzləmə kimi baxılır, burada α elementi $1,2,\dots,n$ ədədlərindən ixtiyari biridir.

Biz əvəzləmələr bəhsinin əvvəlində qeyd etdik ki, əvəzləmə transpozisiyanın ümumiləşməsidir. İndi bunun mənası tamamilə

aydındır; belə ki: *hər bir transpozisiya ikihədli dövrdür*, yəni hər bir transpozisiyanı ixtiyari n sayda elementdən ibarət elə normal şəkilli əvəzləmə kimi göstərmək olar ki, bu əvəzləmənin ikinci sətri birincidən ancaq bir cüt elementin öz aralarındakı transpozisiyası nəticəsində alınmış olsun. Məsələn, (2, 4) transpozisiyasını 1,2, 3,4,5 elementlərindən düzəlmiş beşdərəcəli əvəzləmə vasitəsi ilə

$$(2,4)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&3&2&5\end{pmatrix}$$

şəklində göstərə bilərik. Göründüyü kimi bu əvəzləmə normal şəkildədir və bunun ikinci sətri birincidən (2, 4) transpozisiyanın köməyi ilə alınmışdır.

Transpozisiyanın eynilik əvəzləməsi ilə müqayisəsindən görünür ki:

Transpozisiya, eynilik əvəzləməsinin ikinci (aşağı) sətrində aparılan bir transpozisiya nəticəsində alınmışdır, yəni:

$$\tau=(i,j)=\begin{pmatrix}1&2&\dots&i&\dots&j&\dots&n\\1&2&\dots&j&\dots&i&\dots&n\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Burada nöqtələrin yerində dəyişməyən (özü-özünə çevrilən) elementlər başa düşülür.

Aydındır ki, belə əvəzləmə həmişə tək sinfə daxildir. Çünki bunun birinci sətri cüt (inversiyanın sayı burada sıfırdır, bu isə cüt sinif hesab edilir); ikinci sətri isə birincidən ancaq bir transpozisiya vasitəsi ilə alınmışdır. Deməli, *transpozisiya tək əvəzləmədir*.

Əvəzləmələrin transpozisiyalara və dövrlərə ayrılışı. Dekrement anlayışı. Əvvəlcə əvəzləmənin transpozisiyalara ayrılışını və bu ayrılış vasitəsi ilə onun sinfinin necə təyin edildiyini öyrənək.

TEOREM. *Hər hansı bir əvəzləməni bir çox müxtəlif üsulla transpozisiyaların hasili kimi göstərmək olar, lakin hər dəfə hasildəki transpozisiyaların sayını göstərən ədədin sinfi, əvəzləmənin sinfi ilə eyni olur.*

İSBATI. Teoremin birinci hissəsini isbat edək; göstərək ki, ixtiyari əvəzləməni transpozisiyaların hasili şəklində göstərmək mümkündür.

Əvvəlcə belə bir faktı nəzərdən keçirək: tutaq ki,

$$S=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\ \alpha_1&\alpha_2&\dots&\alpha_n\end{pmatrix}$$

əvəzləməsi verilmiş və bunun transpozisiyaya hasilinin nə demək olduğu soruşulur. Oxucu heç bir çətinlik çəkmədən aydın başa düşür ki, S əvəzləməsinin ikinci sətrində hər hansı bir (i, j) transpozisiyası aparmaq, əslində həmin əvəzləməni sağdan $\tau = (i, j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$ əvəzləməsinə vurmaq deməkdir. Doğrudan da, S əvəzləməsini τ əvəzləməsinə vurmaq bu əvəzləmələrin ardıcıl tətbiqidir və bunun nəticəsində alınan $S\tau$ hasil əvəzləməsi S əvəzləməsindən ancaq onun ikinci sətrindəki permutasiyada məhz (i, j) transpozisiyasının aparılması ilə fərqlənəcəkdir. İndi görəcəyik ki, teoremin isbatında bu faktı nəzərə almaq mühüm əhəmiyyətə malikdir.

Bilirik ki, normal şəkildə verilmiş S əvəzləməsinin ikinci sətrindəki $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ permutasiyası, verilmiş $1, 2, \dots, n$ elementlərindən düzələn ixtiyari permutasiyadır. Məlumdur ki, sonlu sayda transpozisiyalar vasitəsi ilə n elementli permutasiyaların birindən, məsələn, elə məhz $1, 2, 3, \dots, n$ permutasiyasından qalanlarının hamısını ala bilərik. Buradan aydın olur ki, verilən ixtiyari S əvəzləməsini $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ eynilik əvəzləməsinin ikinci sətrində ardıcıl transpozisiyalar aparmaqla ala bilərik. Bu isə I əvəzləməsinin sonlu sayda transpozisiyalara, yəni (3) şəklində olan əvəzləmələrə vurmaq deməkdir. Bu transpozisiyalar vasitəsi ilə $1, 2, \dots, n$ permutasiyasından $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ permutasiyasına keçirik və nəticədə I-dən S əvəzləməsi alınır. Əgər bu transpozisiyaları $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ ilə işarə etsək, onda:

$$I \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_m = S, \qquad (4)$$

burada I – vahid əvəzləmə, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ isə (3) şəklində olan əvəzləmələrdir (transpozisiyalardır). Vahid əvəzləmə isə vurmada özünü ədədlərdəki vahid kimi apardığından (4) bərabərliyini

$$S = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_m \qquad (5)$$

kimi yazmaq olar. Aydındır ki, bu ayrılış yeganə deyildir. Bu ondan irəli gəlir ki, bir permutasiyadan (məsələn, $1, 2, \dots, n$ permutasiyasından) o birinə (məsələn, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ permutasiyasına) olduqca

müxtəlif transpozisiyalar aparmaqla keçmək mümkündür. Digər tərəfdən isə hər hansı τ transpozisiyanın özünün özü ilə hasili vahid əvəzləmə verdiyindən (doğrudan da, $\tau^2 = \tau \cdot \tau = (i, j)(j, i) = I$), S əvəzləməsinin (5) ayrılışını:

$$S = \tau^2 \tau_1 \tau_2 \dots \tau_m$$

kimi də yaza bilərik. Beləliklə, eyni bir S əvəzləməsinin transpozisiyalar hasilinə ayrılışı istənilən qədər müxtəlif şəkillərdə ola bilər.

Bununla teoremin birinci hissəsi isbat olunur. İndi teoremin ikinci hissəsini isbat edək. Bunun üçün hər hansı m sayda transpozisiyanın hasilindən alınan əvəzləmənin sinfi ilə m ədədinin eyni sinfə daxil olduğunu göstərmək kifayətdir.

Riyazi induksiya üsulunu tətbiq edək. $m = 1$ üçün teorem doğrudur. Bu, o deməkdir ki, hasildəki transpozisiyaların sayı birdir. Biz bilirik ki, transpozisiya tək sinifli əvəzləmədir.

İndi tutaq ki, teorem $m-1$ sayda transpozisiya üçün doğrudur. m sayda transpozisiya üçün teoremi isbat edək.

Aydındır ki, $m-1$ vuruqdan (transpozisiyadan) ibarət olan əvəzləməni yeni bir m-ci transpozisiyaya vurmaq, onun ikinci sətrində həmin transpozisiyanı aparmaq deməkdir; bunun sayəsində isə əvvəlcə $m-1$ ədədi ilə eyni sinfə malik olar əvəzləmə öz sinfini dəyişəcək və m hansı sinfə daxildirsə, əvəzləmə də həmin sinfə daxil olacaqdır (aydındır ki, $m-1$ ilə m ədədləri müxtəlif cütlüyə malikdir).

Bununla teorem tamamilə isbat olunur.

Bir misal göstərək.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

əvəzləməsini transpozisiyalar hasilinə ayırıb, sinfini təyin edək.

Əvvəlcə verilən S əvəzləməsinin $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ vahid əvəzləməsindən nə cür alındığına diqqət yetirək. Bu isə S-in ikinci sətrindəki 45231 permutasiyasının 12345 permutasiyasından hansı transpozisiyalar vasitəsi ilə alındığını aydınlaşdırmaqdan ibarətdir. Məsələn, bu, aşağıdakı transpozisiyalar vasitəsi ilə alına bilər: $\tau_1 = (1, 4)$, $\tau_2 = (2, 5)$, $\tau_3 = (3, 2)$, $\tau_4 = (1, 3)$. Bu proses başqa sözlə o deməkdir ki, S əvəzləməsinin alınması üçün I eynilik əvəzləməsinin ikinci sətrində $\tau_1=(1,4)$, $\tau_2=(2,5)$, $\tau_3=(3,2)$ və $\tau_4=(1,3)$ transpozisiyaları aparılmışdır; yəni S-i almaq üçün biz I əvəzləməsini ardıcıl olaraq:

$$\tau_1=(1,4)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&3&1&5\end{pmatrix},\ \tau_2=(2,5)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&3&4&2\end{pmatrix},$$

$$\tau_3=(3,2)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&2&4&5\end{pmatrix},\ \tau_4=(1,3)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&4&5\end{pmatrix},$$

əvəzləmələrinə vurmuşuq. Doğrudan da:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}}_{I}\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&3&1&5\end{pmatrix}}_{\tau_1}\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&3&4&2\end{pmatrix}}_{\tau_2}\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&2&4&5\end{pmatrix}}_{\tau_3}\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&4&5\end{pmatrix}}_{\tau_4}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&2&3&1\end{pmatrix}=S.$$

Beləliklə:

$$S=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&2&3&1\end{pmatrix}=(1,4)(2,5)(3,2)(1,3).$$

Bu əvəzləmə dörd transpozisiyanın hasili şəklində göstərilmişdir. Deməli, bu əvəzləmə cütdür. Əgər bu əvəzləmənin sinfini adi qayda ilə tapsaq (yəni sətirlərindəki inversiyalar sayını hesablamaqla təyin etsək), yenə də bunun cüt olduğunu yəqin edə bilərik (ikinci sətrindəki inversiyalar sayı $inv[45231]=8$, yəni cütdür).

Əlbəttə, misalda verilən əvəzləmənin transpozisiyalara ayrılışını başqa şəkillərdə də göstərə bilərik. Lakin teorem təsdiq edir ki, ayrılışından asılı olmayaraq hasildəki transpozisiyalar sayı bu misal üçün cüt ədəd olmalıdır.

Əvəzləmələrin sinfinin onun ayrıldığı dövrlərin sayı ilə əlaqəsi də diqqəti cəlb edir.

İndi həmin məsələyə keçək.

Biz dövri əvəzləmə ilə tanışıq və bilirik ki, k hədli dövri əvəzləməni $S=(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k)$ kimi işarə edirlər. İndi bu dövri əvəzləmənin tərifindən bilavasitə aydın olan belə bir xassəni qeyd edək:

S dövri əvəzləməsinin yazılışını buna daxil olan hər hansı elementdən başlamaq olar.

Xüsusi halda, ikihədli dövrü əvəzləmə, yəni (i,j) transpozisiyası üçün $(i,j)=(j,i)$.

Ortaq elementləri olmayan dövrlərə *asılı olmayan dövrlər* deyilir. Məsələn,(123), (456), (7,8,9,10) asılı olmayan dövrlərdir; çünki ixtiyari ikisini götürsək, bunların ortaq elementləri olmayacaq.

Asanlıqla göstərmək olar ki, *asılı olmayan dövrlərin hasili kommutativlik xassəsinə malikdir*.

Verilən n-dərəcəli əvəzləmə, əlbəttə, n hədli dövr təşkil etməyə də bilər. Məsələn,

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&3&4&1&7&5&6&9&8\end{pmatrix}$$

əvəzləməsi heç də dövr əmələ gətirmir. Lakin ixtiyari bir əvəzləmədə onun elementlərini elə qruplara ayırmaq olar ki, bu qrupların hər birindəki elementlər öz aralarında dövr təşkil edər. Məsələn, A əvəzləməsinin elementlərinin hamısını: a) 1,2,3,4; b) 5,6,7; c) 8,9 kimi üç qrupa ayırsaq, asanlıqla görərik ki, A əvəzləməsi, hər qrupdakı elementləri ancaq həmin qrupun elementlərinə çevirir və nəticədə əvəzləmənin (1234), (576) və (89) kimi asılı olmayan üç dövrü alınır. Vacib məsələ budur ki:

Hər bir əvəzləməni asılı olmayan dövrlərin hasili kimi göstərmək mümkündür.

Misal 1. $S=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&3&5&1&8&9&4&2&6\end{pmatrix}$ əvəzləməsini asılı olmayan dövrlərin hasili şəklində yazaq.

Dövrlərin ayırma prosesini istənilən elementdən başlamaq olar, məsələn, 1-dən başlayaq. Görürük ki, S əvəzləməsində $1\xrightarrow{S}7$, $7\xrightarrow{S}4$, $4\xrightarrow{S}1$; burada (174) dövrü alındı. Bu dövr «qapandıqdan» sonra bu dövrə daxil olmayan başqa bir elementdən, məsələn, 2-dən başlayaq:

$$2\xrightarrow{S}3,\ 3\xrightarrow{S}5,\ 5\xrightarrow{S}8,\ 8\xrightarrow{S}2;$$

burada isə (2358) dövrü alınır. İndi görürük ki, alınan bu iki dövrə daxil olmayan ancaq iki element: 6 və 9 qalır ki, bunlar da $6\xrightarrow{S}9$, $9\xrightarrow{S}6$, yəni (69) dövrünü əmələ gətirir. Beləliklə, S əvəzləməsi aşağıdakı kimi asılı olmayan $S_1=(174)$, $S_2=(2358)$ və $S_3=(69)$ dövrlərinin hasilinə ayrılır, deməli,

$$S=(174)(2358)(69).$$

Misal 2. $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&2&1&7&6&4&5\end{pmatrix}$ əvəzləməsini asılı olmayan dövrlərin hasilinə ayıraq.

Asanlıqla görünür ki:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&2&1&7&6&4&5\end{pmatrix}=(13)(2)(4756).$$

Onu da qeyd etmək lazımdır ki, eynilik əvəzləməni aşağıdakı kimi n sayda birhədli dövrlərin hasili kimi də göstərmək olar:

$$I=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\1&2&\dots&n\end{pmatrix}=(1)\,(2)\dots(n).$$

Əgər əvəzləmə asılı olmayan dövrlərin hasili şəklində verilmişsə, onda həmin əvəzləmənin dərəcəsini bilmək şərti ilə onu yenidən adi yazılış şəklində ifadə etmək mümkündür. Məsələn, $S=(1372)\,(45)$ əvəzləməsinin dərəcəsinin 7 olduğu məlum olduqda, onu asanlıqla:

$$(1372)\,(45)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&7&5&4&6&2\end{pmatrix}$$

şəklində göstərmək olar. Burada dövrlərə ayırmaq üsulu tərsinə aparılır.

Aydındır ki, hasilə birhədli dövrlərin hamısı daxil edilibsə, onda dövrlər hasili şəklindən adi yazılışa qayıdanda dərəcəni bilməyə ehtiyac olmur.

İndi isə dövrlərə ayrılmış iki əvəzləmənin vurulmasına aid misal göstərək. Tutaq ki,

$$A=(152)\,(3746)\text{ və } B=(17)\,(2456)\,(3)$$

kimi iki A və B əvəzləmələrini vurmaq tələb olunur.

Məsələn, 1 elementindən başlayaq. Göründüyü kimi: $1\xrightarrow{A}5,\ 5\xrightarrow{B}6$, onda $1\xrightarrow{AB}6$. İndi 6 elementini götürək: $6\xrightarrow{A}3,\ 3\xrightarrow{B}3$, onda $6\xrightarrow{AB}3$; bunun kimi də: $3\xrightarrow{A}7$, $7\xrightarrow{B}1$. Onda $3\xrightarrow{AB}1$. Biz bununla AB hasil əvəzləməsinin (163) dövrünü tapırıq.

İndi (163) dövrünə daxil olmayan bir elementdən, məsələn, 2-dən başlayaraq yuxarıdakı kimi mühakimə aparmaqla, AB hasilinin ikinci (2754) dövrünü tapırıq. Deməli: $AB=(163)\,(2754)$. Bu ayrılışdan adi yazılış şəklinə qayıtsaq, onda:

$$AB=\begin{pmatrix}1&6&3&2&7&5&4\\6&3&1&7&5&4&2\end{pmatrix}.$$

A və B əvəzləmələrini adi şəkildə yazdıqdan sonra bir-birinə vurduqda yenə də eyni nəticə alınır:

$$AB=\begin{pmatrix}1&5&2&3&7&4&6\\5&2&1&7&4&6&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7&2&4&5&6&3\\7&1&4&5&6&2&3\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1&5&2&3&7&4&6\\6&4&7&1&5&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&6&3&2&7&5&4\\6&3&1&7&5&4&2\end{pmatrix}.$$

Onu da qeyd edək ki, əvəzləmələri dövrlərə ayırdıqda çox zaman birhədli dövrləri yazmırlar; çünki birhədli dövr eynilik əvəzləməsidir və hasilə təsir etmir. Məsələn

a) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&2&1&6&4&7&9&5&8\end{pmatrix}=(13)\,(2)\,(467985)=(13)\,(467985)$;

b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\6&4&8&2&5&1&7&9&3\end{pmatrix}=(16)(24)(389)(5)(7)=(16)(24)(389)$.

İndi ***əvəzləmənin sinfi məsələsinə yenidən qayıdaq.***

Əvəzləmələrin transpozisiyalara ayrılışına aid teoremdə isbat etdik ki, əvəzləmənin sinfi onun transpozisiyalara müxtəlif cür ayrılışındakı transpozisiyaların sayı ilə eyni sinfə daxildir. İndi əvəzləmələrin dövrlərə ayrılışını öyrəndikdən sonra bunların sinfini həmin yolla təyin etmək daha da sadələşir. Bu dövrlərin özlərinin transpozisiyalara ayrıla bilməsi ilə əlaqədardır.

TEOREM. *k hədli dövr həmişə $k-1$ sayda transpozisiyasının hasili şəklində göstərilə bilir.*

İSBATI. $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$ elementlərinin

$$(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k)=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\dots&\alpha_{k-1}&\alpha_k\\\alpha_2&\alpha_3&\dots&\alpha_k&\alpha_1\end{pmatrix}$$

kimi k hədli dövrü verilmişdir. Göründüyü kimi, $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{k-1},\alpha_k$ permutasiyasından (birinci sətrdən) $\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_k,\alpha_1$ permutasiyasına (ikinci sətrə) keçmək üçün α_1 elementinin özündən sonrakı $\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_k$ kimi $k-1$ sayda element ilə ardıcıl transpozisiyası lazımdır: $(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_2,\alpha_3),\dots,(\alpha_1,\alpha_k)$. Bu isə o deməkdir ki, verilən k hədli dövri əvəzləmə

$$(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k-1}\alpha_k)=(\alpha_1,\alpha_2)\,(\alpha_2,\alpha_3)\dots(\alpha_1,\alpha_k)$$

kimi $k-1$ sayda transpozisiyasının hasilinə bərabərdir. Xüsusi halda

$$(123\ldots n)=(12)(13)\ldots(1n).$$

Teorem isbat olunur. Bu teoremdən dövri əvəzləmənin sinfinin müəyyən edilməsindən faydalı olan aşağıdakı nəticə alınır:

NƏTİCƏ. *k hədli dövr k ədədi ilə əks siniflərə aiddir (yəni, k təkdirsə dövr cüt, k cütdürsə dövr tək sinfə aiddir).*

Doğrudan da, belə olmalıdır. Çünki k hədli dövr $k-1$ sayda transpozisiyanın hasili şəklində göstərilə bilirsə, məlum teoremə görə əvəzləmə $k-1$ ədədi ilə eyni adlı sinfə aiddir. Lakin k və $k-1$ ədədləri müxtəlif sinfə aid olduğundan k hədli dövri əvəzləmə ilə k ədədi müxtəlif siniflərə aid olmalıdır.

Misal 1. a) (135); b) (2714) dövrlərini transpozisiyaların hasili kimi göstərək və siniflərini təyin edək.

Bunlar, uyğun olaraq, 3 və 4 hədli dövri əvəzləmələrdir. Teoremə və ondan alınan nəticəyə əsasən $(135)=(13)(5)$ cüt, $(2714)=(27)(21)(24)$ tək sinfə aiddir.

Hər hansı bir əvəzləmənin sinfini bunun ayrıla bildiyi transpozisiyalar sayı vasitəsi ilə təyin etmək üçün əvvəlcə onu asılı olmayan dövrlərin hasili şəklində göstərib, sonra bu dövrləri transpozisiyalara ayırmaq daha asan olur. Məsələn,

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&7&1&5&6&4&3\end{pmatrix}$$

əvəzləməsinin sinfini bu qayda ilə təyin edək. Əvvəlcə bunu asılı olmayan dövrlərin hasili şəklində göstərək: $A=(1273)\,(456)$. İndi A əvəzləməsini transpozisiyalar hasili kimi göstərmək asandır. Belə ki, isbat etdiyimiz teoremə görə:

$$A=(1,2)\,(1,7)\,(1,3)\,(4,5)\,(4,6).$$

Burada transpozisiyalar sayı 5-dir; deməli, əvəzləmə təkdir. Əlbəttə, bu, verilən əvəzləmənin transpozisiyalar hasilinə ayrılışı yeganə deyildir. Məsələn, A əvəzləməsini transpozisiyalar vasitəsi ilə

$$A=(1,5)\,(1,7)\,(1,2)\,(1,6)\,(1,4)\,(1,3)\,(2,3)\,(2,5)\,(6,7)$$

kimi də göstərmək olar. Lakin göründüyü kimi, bu ayrılışda da transpozisiyalar sayı yenə tək ədəddir.

Burada əsas bir cəhəti də nəzərə almaq lazımdır: dövrlərin transpozisiyalara ayrılmasə, əvəzləmənin asılı olmayan dövrlərə ayrılışı deyildir və burada alınan ikihədli dövrlər asılı dövrlər ol-

duğundan transpozisiyaların hansı nizamla götürülməsi, hansı ardıcıllıqla yerinə yetirilməsi mühüm əhəmiyyətə malikdir (yəni, kommutativlik xassəsi doğru deyil).

Maraqlı məsələlərdən biri də, əvəzləmə transpozisiyaların hasili şəklində verildirdə onun bu şəklindən adi yazılış şəklinə qayıtmaqdır. Nəzəri cəhətdən bu aydın məsələdir: ayrılışdakı transpozisiyaların hər biri dövrü iki olan əvəzləmədir və bu əvəzləmələri bir-birinə vurmaqla verilən əvəzləmənin adi yazılış şəklini alarıq.

İndi də misal olaraq (2356) dövrünə baxaq. Bilirik ki, $(2356)=(23)(25)(26)$. Alınan transpozisiyaları $\tau_1=(2,3), \tau_2=(2,5)$, $\tau_3=(2,6)$ kimi işarə edərək, $\tau_1\tau_2\tau_3$ ayrılışından (2356) dövrünün necə alındığını göstərək.

Aşkardır ki, $2\xrightarrow{\tau_1}3$ və τ_2 ilə τ_3 isə 3 elementini dəyişmir: $3\xrightarrow{\tau_2}3$, $3\xrightarrow{\tau_3}3$. Deməli, $\tau_1\tau_2\tau_3$ hasili 2 elementini 3-ə çevirir: $2\xrightarrow{\tau_1\tau_2\tau_3}3$.

3 elementini isə τ_1 transpozisiyası 2-yə çevirir: $3\xrightarrow{\tau_1}2$. Bundan sonra isə transpozisiyası 2-ni 5-ə çevirir: $2\xrightarrow{\tau_2}5$. Lakin $\tau_3=(2,6)$ transpozisiyası 5 elementinə təsir etmir. Deməli, $\tau_1\tau_2\tau_3$ hasili 3 elementini 5-ə çevirir: $3\xrightarrow{\tau_1\tau_2\tau_3}5$. Həmçinin $\tau_1=(2,3)$ transpozisiyası da 5 elementinə təsir etmir, lakin $\tau_2=(2,5)$ transpozisiyası nəticəsində $5\xrightarrow{\tau_3}2$ olur və bundar sonra isə 2 elementini $\tau_3=(2,6)$ transpozisiyası nəticəsində 6-ya çevrilir: $2\xrightarrow{\tau_3}6$. Beləliklə, $5\xrightarrow{\tau_1\tau_2\tau_3}6$. Nəhayət, $\tau_1=(2,3)$ və $\tau_2=(2,5)$ transpozisiyası 6 elementini dəyişmir, $\tau_3=(2,6)$ isə 6-nı 2-yə çevirir: $6\xrightarrow{\tau_3}2$. Deməli, $6\xrightarrow{\tau_1\tau_2\tau_3}2$, yəni $\tau_1\tau_2\tau_3$ hasili 6 elementini yenidən birinci elementə, yəni 2-yə çevirir. Bu mühakimənin nəticəsində $(23)(25)(26)=(2356)$ dövrü alınır.

Bunun kimi də nəzərdən keçirdiyimiz A əvəzləməsinin

$$A=(12)\,(17)\,(13)\,(45)\,(46)$$

transpozisiyalar hasili şəklindən onun

$$A=(1273)\,(456)$$

dövrlər hasili şəklinə və deməli,

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&7&1&5&6&4&3\end{pmatrix}$$

adi yazılışına qayıtmaq olar. Bunun isbat edilməsini oxucuya tapşırırıq.

TƏRİF. *Əvəzləmənin dərəcəsi n, onun birhədli dövrləri də daxil olmaqla ayrıldığı asılı olmayan dövrlərin sayı r olarsa, $d=n-r$ fərqinə onun dekrementi deyilir.*

TEOREM. *Əvəzləmə öz dekrementi ilə eyniadlı sinfə aiddir.*

İSBATI. Tutaq ki, n dərəcəli

$$S=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\\alpha_1&\alpha_2&\dots&\alpha_n\end{pmatrix}$$

əvəzləməsi verilmiş və bu, aşağıdakı kimi r sayda asılı olmayan dövrlər hasilinə ayrılmışdır:

$$S=(i_1 i_2 \dots i_{k_1})(j_1 j_2 \dots j_{k_2})\dots(t_1 t_2 \dots t_{k_r}). \tag{6}$$

Xüsusi halda, bu dövrlər birhədli də ola bilər. Aydındır ki, bu əvəzləmənin dekrementi $d=n-r$ olacaq. İndi göstərməliyik ki, əvəzləmənin sinfi ilə onun $d=n-r$ dekrementinin sinfi eynidir.

Bilirik ki, hər bir k hədli dövr $k-1$ sayda transpozisiyalar hasili kimi göstərilə bilər. Onda (6) ayrılışından transpozisiyalar ayrılışına keçərkən, alınan transpozisiyalar sayı aşağıdakı kimi olacaqdır:

$$(k_1-1)+(k_2-1)+\dots+(k_r-1)=(k_1+k_2+\dots+k_r)-(1+1+\dots+1)=n-r.$$

Deməli, verilmiş S əvəzləməsinin transpozisiyalara mümkün ayrılışlarının birində $n-r$ sayda transpozisiya iştirak etməlidir. Məlum teoremdən isə bilirik ki, bu transpozisiyalar sayı ilə əvəzləmə eyniadlı sinfə aiddir. $n-r$ fərqi isə dekrementdir. Deməli, verilən əvəzləmə öz dekrementi ilə eyni sinfə aiddir.

Qeyd. Mühakiməni başqa cür də aparmaq olardı. Əgər normal şəkildə verilmiş S əvəzləməsi $n-r$ sayda transpozisiyaya ayrıla bilirsə, bu o deməkdir ki, S əvəzləməsinin ikinci sətrindəki $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ permutasiyası onun birinci sətrindəki $1,2,\dots,n$ permutasiyasından $n-r$ sayda transpozisiya aparmaqla alınmışdır. Onda $n-r$ ədədi ilə $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ permutasiyasındakı inversiyalar sayı eyniadlı sinfə aid olmalıdır. Bu inversiyalar sayı isə məlum olduğu kimi normalşəkilli S əvəzləməsinin sinfini təyin edir.

Teorem isbat olundu.

Dekrement anlayışını öyrəndikdən sonra əvəzləmələrin sinfini asan təyin edə bilərik. Məsələn, yuxarıda baxdığımız əvəzləmələrdən bəzisinin sinfini dekrement vasitəsi ilə təyin edək.

1) $S=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&3&4&1&7&5&6&9&8\end{pmatrix}=(1234)(576)(89).$

Burada dekrement $d=9-3=6$, deməli əvəzləmə cütdür.

2) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&7&1&5&6&4&3\end{pmatrix}=(1273)(456),$

$d=7-2=5$, əvəzləmə təkdir.

FƏSİL 2

DETERMİNANTLAR NƏZƏRİYYƏSİNİN ELEMENTLƏRİ. DETERMİNANT ANLAYIŞININ XƏTTİ CƏBRİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİNƏ TƏTBİQİ

§ 2.1. İki və üç tərtibli determinantlar, bunların iki və üç məchullu xətti cəbri tənliklər sistemləri həllinə tətbiqi

Biz matris anlayışı ilə tanış olduqda dedik ki, hər bir kvadrat matrisə müəyyən qayda ilə düzəldilmiş və determinant adlandırılan bir ədəd qarşı qoymaq olur. İki və üç tərtibli matrislər üçün bu qayda daha sadədir.

Tutaq ki, iki tərtibli

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

matrisi verilib. Bunun determinantını adətən D, $|A|$, $\det A$, yaxud D_A işarələrindən istifadə edirlər.

TƏRİF. $$|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

kimi təyin edilən ədədə A matrisinin determinantı deyilir və o

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

kimi işarə edilir.

Bu determinant A matrisinə aid olub iki tərtibli determinant adlanır və A matrisinə xas olan bir çox anlayışlar buna da aid edilir (belə ki, bunun da iki sətri, iki sütunu var, a_{11} və a_{22} elementləri bunun baş diaqonal elementləri, a_{12} və a_{21} determinantın yan diaqonal elementləri adlanır, elementin birinci indeksi onun sətir, ikinci indeksi isə onun tutduğu sütun nömrələrini göstərir). $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ ifadəsindəki $a_{11}a_{22}$ və $-a_{12}a_{21}$ toplananları determinantın hədləridir. İki tərtibli determinantın

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

şəklində işarə edilməsi onun tərifdə göstərilən $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ ifadəsinin A matrisindən bilavasitə necə alınmasına əyani surətdə görməyə imkan verir. Belə ki,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

yəni, A matrisinin D ikitərtibli determinantını hesablamaq üçün onun baş diaqonal elementləri hasilindən yan diaqonal elementləri hasilini çıxmaq lazımdır.

Misallar. a) $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}=-3-28=-31$, b) $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=28-15=13$,

c) $$\begin{vmatrix} a^2 & -b^2 \\ \frac{b\sqrt{c}}{2} & \frac{d}{a} \end{vmatrix}=a^2\cdot\frac{d}{a}-\left(-b^2\cdot\frac{b\sqrt{c}}{2}\right)=ad+\frac{b^3\sqrt{c}}{2}$$

İndi tutaq ki, üç tərtibli matris verilib:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

TƏRİF.

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (2)$$

cəbri cəminin təyin etdiyi ədədə bu üç tərtibli matrisinin determinantı deyilir və o

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

kimi işarə edilir.

(2) ifadəsinin sağ tərəfindəki toplananlara üçtərtibli determinantın hədləri, a_{11}, a_{22}, a_{33} elementlərinə baş diaqonal, a_{12}, a_{22}, a_{31} elementlərinə yan diaqonal, a_{21}, a_{32} və a_{12}, a_{23} elementlərinə şərti olaraq «sol yarımdiaqonal», a_{12}, a_{21} və a_{23}, a_{32} elementlərinə «sağ yarımdiaqonal» elementləri deyirlər. Burada üç sətir, üç sütun var. Birinci indekslər elementin sətir, ikincisi isə sütun nömrələrini göstərir.

(2)-dən göründüyü kimi üç tərtibli determinant üç tərtibli müvafiq matrisə qarşı qoyulan elə bir ədəddir ki, o aşağıdakı qayda ilə hesablanır: bu ədədi təyin edən üç müsbət toplananın biri baş diaqonal elementlərinin hasili, qalan iki həddi isə baş diaqonala paralel olan iki «sol yarımdiaqonal» elementlərinin hasillərinin qarşı tərəfdəki künc elementlərinə vurulmasından alınan hədlərdir; mənfi işarəli üç hədd isə yan diaqonal elementlərinə və «sağ yarımdiaqonal» elementlərinə nəzərən həmin qayda ilə düzələn hasillərdən ibarətdir.

Şərh olunan bu qaydanı üçtərtibli determinantları hesablamaq üçün Sarrius üsulu, bəzən də üçbucaq qaydası adlandırırlar.

Misal.

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ k & m & n \\ p & q & t \end{vmatrix} = amt + kqc + bnp - cmp - bkt - anq\,;$$

$$\text{b)}\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ -5 & 6 & -8 \end{vmatrix} = -64 + 90 + 5 + 100 - 24 - 12 = 95\,.$$

Üçtərtibli determinantların hesablanmasında bəzən «diaqonal üsulu» adlanan üsul belədir:

Üçtərtibli determinantın birinci və ikinci sətrini özünə paralel olaraq üçüncü sətirdən aşağıya, yaxud birinci və ikinci sütunu özünə paralel olaraq sağa – üçüncü sütundan sonraya köçürməklə, alınan üç «sol tam diaqonal» elementləri hasilini müsbət işarə ilə, alınmış üç «sağ tam diaqonal» elementləri hasilini isə mənfi işarə ilə götürməklə onun (2) ifadəsindəki altı həddini asanlıqla almaq olur. Belə ki:

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{array} \qquad , \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

Misal.

$$D = \begin{vmatrix} 8 & -5 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 9 \end{vmatrix}$$

determinantını Sarriusun üçbucaq qaydası ilə hesablayaq.

$$D = 216 - 8 + 25 - 6 + 180 - 40 = 367$$

İndi isə bunu «diaqonal üsulu ilə» hesablayaq.

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 8 & -5 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 9 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 8 & -5 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \end{matrix} \end{array} = 216 - 8 + 25 - 6 - 40 + 180 = 367\,;$$

yaxud:

$$\begin{vmatrix} 8 & -5 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 8 & -5 \\ 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{matrix} = 216 - 8 + 25 - 6 - 40 + 180 = 367\,.$$

Onu da qeyd edək ki, determinantın ikinci və üçüncü sətirlərini özünə paralel yuxarıya, yaxud ikinci və üçüncü sütunları özünə paralel sola köçürməklə də bu üsuldan istifadə etmək olar.

İndi isə iki və üç tərtibli tənliklər sistemlərinin həllinə iki və üç tərtibli determinantların necə tətbiq edildiyini öyrənək.

İkiməchullu xətti cəbri tənliklər sistemi. Belə sistemin ümumi şəkli aşağıdakı kimidir:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Sistemin əmsallarının əmələ gətirdiyi $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$ matrisinə bu sistemin matrisi və bunun uyğun $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ikitərtibli determinantına isə (3) sisteminin determinantı deyilir.

(3) sistemini məktəb cəbrindən bizə bəlli olan üsullardan biri ilə, məsələn, «əmsalları bərabərləşdirmə» və ya «cəbri toplama» üsulu ilə həll edək.

Əvvəlcə sistemin birinci tənliyini a_{22}-yə, ikincini $(-a_{12})$-ə vurub tərəf-tərəfə toplayaq (burada məqsəd x_2 məchulunu yox etməkdir).Onda x_2 məchulu yox olar və nəticədə $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$ birməchullu tənliyini alarıq.

İndi isə sistemin birinci tənliyini $(-a_{22})$-ə, ikincini isə a_{11}-ə vurub tərəf-tərəfə toplasaq, bu dəfə x_1 məchulu yox olar və nəticədə aşağıdakı birməchullu $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$ tənliyini alarıq.

Göründüyü kimi hər iki elementar çevirmədən sonra qalan məchulların əmsalları eyni olub

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ifadəsinə bərabər oldu. Burada $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ olarsa, onda (3) sisteminin aşağıdakı kimi yeganə həllini taparıq:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 &= \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Buradan görünür ki, (4) bərabərliklərindən məxrəclərdəki ifadə (3) sisteminin $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ikitərtibli determinantıdır. Amma surətdəki ifadələrində uyğun olaraq aşağıdakı determinantlar olduğu görünür:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Deməli, hər iki məxrəcdəki D determinantı sistemin matrisinin determinantı olduğu halda surətdə alınan D_1 və D_2 determinantları həmin matrisin uyğun olaraq birinci və ikinci sütun elementlərinin sistemin sərbəst hədlərindən ibarət sütunla əvəz edildikdən sonra alınan matrislərin determinantlarıdır. Onda (4) düsturların müvafiq iki tərtibli determinantları vasitəsilə aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \qquad (5)$$

(5) düsturları iki məchullu iki xətti tənliklər sisteminin determinantlar üsulu ilə həlli adlanır. Göründüyü kimi bu üsul $D \neq 0$ halında tətbiq edilə bilir (cəbrin sarsılmaz bir qanununu yada salaq: «sıfra bölmək olmaz!»).

Misal.

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 - 7x_2 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 7 = -3 \neq 0.$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3};\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

Deməli, $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, bu sistemin yeganə həllidir.

Üçməchullu üç xətti tənliklər sistemi. Belə sistem ümumi şəkildə aşağıdakı kimidir:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Göründüyü kimi bu sistemin matrisi və determinantı aşağıdakılardır:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu sistemi həll etmək üçün bunun tənliklərini elə seçilmiş uyğun ədədlərə vurmalıyıq ki, hər dəfə məchullardan ikisi yox olsun və nəticədə birməchullu tənlik alınsın.

Birinci dəfə sistemin 1-ci, 2-ci, 3-cü tənliklərini uyğun olaraq aşağıdakı λ_1, λ_2, λ_3 ədədlərinə

$$\lambda_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \qquad \lambda_2 = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33},$$

$$\lambda_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$$

vurub tərəf-tərəfə toplayıb oxşar hədləri islah etdikdən sonra sistemdən x_2 və x_3 məchulları yox olur (bunu oxucu asanlıqla yoxlaya bilər) və nəticədə

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1 = \\ &= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32} \end{aligned} \qquad (7)$$

bərabərliyini alırıq.

Sonra sistemin 1-ci, 2-ci, 3-cü tənliklərini uyğun olaraq

$$\lambda_1' = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}, \qquad \lambda_2' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31},$$

$$\lambda_3' = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}$$

ədədlərinə vurub tərəf-tərəfə toplayıb oxşar hədlərini islah etsək sistemdən x_1 və x_3 məchulları yox olar və nəticədə

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_2 = \\ &= a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3 \end{aligned} \qquad (8)$$

alırıq.

Nəhayət, sistemin 1-ci, 2-ci, 3-cü tənliklərini uyğun olaraq

$$\lambda_1'' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}, \qquad \lambda_2'' = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32},$$

$$\lambda_3'' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ədədlərinə vurub topladıqda x_1 və x_2 məchulları yox olar və nəticədə

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_3 =$$

$$= a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32} \qquad (9)$$

alırıq.

Diqqət etsək hər üç halda aldığımız bərabərliklərdə x_1, x_2, x_3 məchullarının əmsalının eyni olub sistemin D determinantına bərabər olduğunu görürük:

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Əgər $D \neq 0$ olarsa, onda (7), (8), (9) bərabərliklərindən verilmiş (6) üçməchullu üç xətti tənliklər sisteminin aşağıdakı yeganə həllini tapırıq:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}, \\ x_2 &= \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}, \\ x_3 &= \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}. \end{aligned}\right\} (10)$$

(10) həllində x_1, x_2, x_3 - ün ifadələrində kəsrlərin surətlərinə diqqət yetirsək, surət və məxrəcdəki toplananları, bunlardakı vuruqları müqayisə etsək görərik ki, surətlərin hər biri üç tərtibli elə determinantlardır ki, bunlar sistemin D determinantından uyğun olaraq birinci, ikinci və üçüncü sütun elementlərini (yəni x_1, x_2, x_3 məchullarının əmsallarının) sərbəst hədlərlə əvəz edilməsindən alınırlar. Bunlar aşağıdakı üç tərtibli «yardımçı» determinantlar olacaq:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Onda verilmiş (6) sisteminin üç tərtibli determinantlarla həllini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}. \qquad (11)$$

Misal.

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z=7, \\ x-3y+2z=5, \\ x+y+z=3. \end{aligned}\right\}$$

sistemini determinantlar üsulu ilə həll edək.

Əvvəlcə sistemin determinantını hesablayırıq:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3+3+4+9-2-2 = 9 \neq 0.$$

Deməli, (11) düsturlarını tətbiq edə bilərik. Yardımçı D_1, D_2, D_3 determinantlarını hesablayaq.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 18.$$

Buradakı məchullar $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ olduğundan $x = \frac{9}{9} = 1$, $y = \frac{0}{9} = 0$, $z = \frac{18}{9} = 2$. Beləliklə sistemin (1,0,2) kimi yeganə həllini tapırıq.

Qeyd edək ki, iki məchullu və üç məchullu xətti cəbri tənliklər sistemini determinantlar vasitəsilə həll etmək üçün çıxardığımız (4) və (10) düsturları irəlidə öyrənəcəyimiz ümumi halın – Kramer düsturlarının xüsusi hallarıdır. Burada bir cəhətə diqqət edin ki, əvvələn, *baxdığımız bu sadə tənliklər sistemlərində tənliklərin sayı ilə məchulların sayı bərabərdir, ikincisi də bu sistemlərin determinantları sıfırdan fərqlidir. Əks halda determinantlar üsulu tətbiq edilə bilməz.*

§ 2.2. *n* - tərtibli determinant, onun konstruktiv tərifi

Riyaziyyatda obyektə birbaşa quruluşu («konstruksiyası») ilə bağlı olan tərifləri adətən bilavasitə və ya konstruktiv tərif adlandırırlar. İndi biz n - tərtibli determinantın konstruktiv tərifi ilə tanış olaq.

Tutaq ki, n - tərtibli $A = (a_{ij})$ matrisi verilib:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

TƏRİF (*Konstruktiv*). $A=(a_{ij})$ *matrisinin hər sətir və hər sütunundan yalnız bir element götürməklə bu n dənə vuruqdan düzəldilməsi mümkün olan bütün*

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_nj_n} \tag{1}$$

n! sayda hasillərin elə cəbri cəminə n - tərtibli determinant deyilir ki, bu hasillərin işarələri buradakı vuruqların indekslərindən düzəldilən və hər bir hasilə qarşı qoyulan

$$S=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

əvəzləməsinin sinfi (və ya işarəsi) ilə təyin edilir, əvəzləmə təkdirsə hasil mənfi, əvəzləmə cütdürsə hasil müsbət olur.

2 və 3 tərtiblidə olduğu kimi, verilən $A=(a_{ij})$ kvadrat matrisinin determinantını bəzən qısaca olaraq $|A|$, bəzən $\det A$, bəzən isə D_A kimi işarə edərək onu aşağıdakı kimi yazırlar:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Çox zaman daha qısa yazılış şəkillərinə də müraciət edirlər:

$$\det A=|a_{ij}|,\quad |A|=|a_{ij}|,\quad D_A=|a_{ij}|.$$

(1) şəklində düzələn hasillərə müvafiq işarə qoymaqla onu determinantın ümumi həddi adlandırırlar. Tərifdən aydındır ki, (1) hasilinin işarəsi buna uyğun (2) əvəzləməsinin sinfi, yəni onun cütlüyü və təkliyi ilə müəyyən edilir. Belə ki, onun işarəsi $\underbrace{inv[i_1i_2\dots i_n]}_{t_1}+\underbrace{inv[j_1j_2\dots j_n]}_{t_2}=t_1+t_2$ ədədinin sinfindən, cüt və təkliyindən asılı olaraq $(-1)^{t_1+t_2}$-nin işarəsi ilə eyni olur. Onda (1) hasilinin (3) determinantının həddi olması üçün onu aşağıdakı şəkildə yazmaq lazımdır:

$$(-1)^{t_1+t_2}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_nj_n}. \tag{4}$$

(4) həddi n - tərtibli determinantın ümumi həddi adlanır.

Burada vuruqların yerini elə dəyişmək olar ki, birinci $i_1,i_2,\dots,i_n$ indeksləri təbii artma qaydası ilə nizamlanmış olsun (sətir və sütunlardan vuruqları seçəndə də buna nail olmaq mümkündür). Onda determinantın ümumi həddini aşağıdakı kimi

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n} \tag{5}$$

kimi yazmaq olar və bunun işarəsi isə buna uyğun normal şəkilli

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

əvəzləməsinin sinfi ilə təyin edilə bilər, burada $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ isə $1,2,\dots,n$ ədədlərindən düzəldilmiş permutasiondur. Əgər $inv[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n]=t$ işarə etsək onda $\sum$ cəm simvolunun köməyi ilə n - tərtibli determinantı belə yaza bilərik:

$$\det A(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n]}(-1)^t a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}. \tag{6}$$

Burada cəmləmə bütün mümkün $[\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n]$ permutasionları üzrə aparılır ki, bunların da sayı $n!$ olacaq.

Bütün bu deyilənlər artıq bizə bəlli olan 2 və 3 tərtibli determinantlara da aiddir.

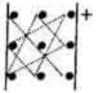
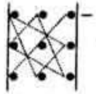
Əvvələn, diqqət yetirsək ki, iki tərtibli və üç tərtibli determinantlarda uyğun olaraq iki hədd ($2!$), altı hədd ($3!=6$) var. Bu determinantların hesablanma qaydaları da tərifin belə bir tələbatına uyğundur ki, hər həddi düzəldəndə bunun hər sətir və hər sütunundan hasilə təkcə bir element düşə bilib, hər bir həddində iki vuruq və üç vuruq iştirak edir.

Nəhayət, hər bir həddin işarəsi bunların indekslərindən düzəldilən əvəzləmənin tək və cütlüyünə uyğun gəlir. Məsələn, üç tərtibli determinantlara yenidən fikir verək.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Burada hədlərin alınması qaydasına nəzər yetirin:

 , 

Göründüyü kimi sxema elədir ki, burada hər bir hədd 3 vuruqdan ibarət olur (determinantın tərtibi qədər), hər bir həddəki vuruqlar da determinantın hər sətir və hər sütunundan ancaq bir element seçilməklə düzəlir, digər tərəfdən də bu qayda ilə düzələn bütün mümkün müxtəlif hədlərin sayı 6 olur (determinantın tərtibinin faktorialı: $3!=6$). Hədlərin işarələri isə bunlara qarşı qoyulan uyğun

$$S_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}-\text{cüt},\ S_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}-\text{cüt},\ S_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}-\text{cüt},$$

$$S_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}-\text{tək},\ S_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}-\text{tək},\ S_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}-\text{tək}.$$

əvəzləmələrin cüt və təkliyindən asılı olur.

Bir məsələyə də diqqət yetirin: determinantın hədlərindəki birinci indekslər təbii artma qaydası ilə nizamlanmış (1,2,3) şəkildə yazılanda, onun ikinci indeksləri bu 1,2,3 rəqəmlərindən düzəldilməsi mümkün olan, təkrarsız permutasionlardır, belə ki: 123, 312, 231, 321, 213, 132. Bilirik ki, bunların da yarısı tək, yarısı isə cüt sinfə mənsub olurlar.

(6) düsturlarına əsasən iki və üç tərtibli determinantları aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}$, burada $[\alpha_1\alpha_2]$ 1, 2 elementlərindən düzələn 12, 21 permutasionları,

$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}a_{3\alpha_3}$, burada $[\alpha_1\alpha_2\alpha_3]$ isə 1, 2, 3 rəqəmlərindən düzələn yuxarıda göstərdiyimiz 6 dənə təkrarsız permutasionlardır. Σ - cəm işarəsi isə bu permutasionlara nəzərən düzələn bunların cəmini göstərir ($n=2$ üçün iki ($2!=2$), $n=3$ üçün altı ($3!=6$) dənə müxtəlif hədlər), t isə müvafiq inversiyalar sayıdır.

Tərifi daha yaxşı başa düşmək naminə bir neçə misala baxaq.

a) $a_{13}a_{22}a_{35}a_{41}a_{54}$ hasili 5 tərtibli determinanta daxildir, çünki 1-ci və 2-ci indekslərin (1,2,3,4,5 və 3,2,5,1,4) hamısı müxtəlifdir

(təkrarsız permutasionlardır). Həddin işarəsini tapaq. Bunun üçün uyğun əvəzləməni yazaq:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&5&1&4\end{pmatrix}$$

Bunun işarəsini tapaq:

$inv[1,2,3,4,5]=0$, $inv[3,2,5,1,4]=3+1+0+1+0=5$ təkdir. Deməli bu hədd 5 tərtibli determinanta $(-1)^5=-1$, yəni mənfi işarə ilə daxil olur.

b) $a_{21}a_{35}a_{24}a_{42}a_{53}a_{66}$ hasili 6 vuruqdan ibarət olsa da 6 tərtibli determinantın həddi deyil, çünki buraya 2-ci sətirdən iki vuruq (a_{21} və a_{24}) daxildir, tərifin şərti pozulur (bu ondan görünür ki, 1-ci indekslərdə $[232456]$ permutasionunda 2 rəqəmi təkrar olunub.

c) $a_{31}a_{23}a_{11}a_{44}$ hasili 4 vuruqdan ibarət olsa da, o 4 tərtibli determinantın həddi deyil, çünki buraya hasilə 1-ci sütundan iki element (a_{31} və a_{11}) daxildir (ikinci indekslərin əmələ gətirdiyi $[1,3,1,4]$ permutasionunda 1 elementi təkrar olunub).

* * *

n-tərtibli determinantın tanış olduğumuz konstruktiv tərifi ciddi nəzəri əhəmiyyətə malik olduğu halda, bəzi xüsusi halları nəzərə almasaq bu tərifə əsasən yüksək ($n>3$) tərtibli determinantları hesablamaq praktik cəhətdən əlverişli deyildir. Belə ki, məsələn, $n=4,5,6$ və s. tərtibli determinantları göstərilən tərifə əsasən hesablamaq üçün uyğun olaraq verilən kvadrat matrisdən uyğun olaraq $4!=24$, $5!=120$, $6!=720$ sayda deyilən qaydada hasillər dü-zəldib bunların işarələrini tapmalıyıq. Determinantın tərtibi artdıqca onun hədləri sayı da sürətlə artır (məsələn 10 tərtibli deter-minantda $10!=3628800$ hədd vardır). Buna görə də determinantların hesablanmasında onun xassələrindən və bəzi xüsusi üsullardan istifadə edilir.

§ 2.3. Determinantın əsas xassələri

XASSƏ 1. *Determinantın bütün sətirlərini onun uyğun nömrəli sütunları ilə əvəz etsək determinant dəyişməz (bunu «determinantın transponirə olunma» xassəsi adlandırırlar).*

İSBATI. Tutaq ki, D verilən, D' isə onun transponirə edilmişidir:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Göstərməliyik ki: $D = D'$

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \qquad (1)$$

hasili verilən D determinantının hər-hansı həddi olsun. Bu o deməkdir ki, burada iştirak edən vuruqlar hər sətir və hər sütundan bir element seçilməklə düzəlib. İş burasındadır ki, bu həmin hasilə aid olan bu sözləri D' determinantı üçün də deyə bilərik, yəni həmin hasil həmçinin D'-in də hər sətir və hər sütunundan bir element olmaqla düzələn hasildir. Lakin (1)-dəki $i_1, i_2, \ldots, i_n$ indeksləri D-nin sətir nömrələri olduğu halda bunlar D'-in sütun nömrələri, D-dəki $j_1, j_2, \ldots, j_n$ sütun nömrələri D'-in sətir nömrələridir. Ona görə də (1) hasili verilən D determinantı ilə onun transponirə olunmuş D' determinantına eyni bir

$$(1)^{inv[i_1,i_2,\ldots,i_n]+inv[j_1,j_2,\ldots,j_n]}$$

vuruğu ilə daxil olacaqlar.

Odur ki, D ilə D' eyni hədlərin cəbri cəmindən ibarət olacaqlar, odur ki, $D = D'$ olur.

Bu xassə onu göstərir ki, determinantın sətir və sütunları eyni hüquqludur, yəni sətirlər üçün söylənən hər bir xassə eyni ilə sütunlara da aid edilə bilir (və tərsinə!).

XASSƏ 2. *Determinantın bir sətri (sütunu) sıfırlardan ibarətdirsə o determinant sıfra bərabərdir.*

İSBATI. Tutaq ki, determinantın hər-hansı i-ci sətir elementləri sıfırlardan ibarətdir. Aydındır ki, bu determinantın hər bir həddində i-ci sətirdən hökmən bir element vuruq kimi iştirak edəcək. Onda determinantın hədlərinin hamısı, yəni bütün $n!$ sayda hasillərin hamısı sıfra çevriləcək və determinant özü sıfra bərabər olacaq.

XASSƏ 3. *Determinantın iki sətrinin (iki sütununun) bir-biri ilə yerini dəyişsək onun yalnız işarəsi dəyişər.*

İSBATI. Verilən D-nin i-ci və k-cı sətirlərinin yerini dəyişək:

$$D=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ (i) \\ \\ (k) \\ \\ \\ \end{array}, \qquad \Delta=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ (i) \\ \\ (k) \\ \\ \\ \end{array}$$

(determinant işarəsi kənarında mötərizələrdə yeri dəyişilən i-ci və k-cı sətirlərin nömrələri göstərilib).

Tutaq ki,

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n} \qquad (2)$$

hasili D determinantının ixtiyari həddidir. Aydındır ki, buradakı vuruqlar eyni zamanda Δ determinantının da müxtəlif sətir və sütunlarında yerləşir. Deməli, belə hasillər Δ-nın da hədləridir. Ona görə də D və Δ eyni hədlərdən düzəlmiş determinantlardır. Lakin bu hədlər D və Δ-ya müxtəlif işarə ilə daxildir. Belə ki, (1) həddinə D determinantında

$$S_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & k & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_i & \ldots & \alpha_k & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

əvəzləməsi uyğun gəldiyi halda, Δ determinantında

$$S_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & i & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_i & \ldots & \alpha_k & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

əvəzləməsi uyğun gəlir. S_2 əvəzləməsi isə S_1-in birinci sətrində (i,k) transpozisiyası vasitəsilə alınıb. Ona görə də S_1 ilə S_2 əvəzləmələri müxtəlif siniflərə aiddirlər. Bu isə onu göstərir ki, D-nin bütün hədləri Δ-da özünün əks işarəsi ilə iştirak edir. Odur ki, D ilə Δ determinantları ancaq işarəsi ilə fərqlənir: $\Delta = -D$.

XASSƏ 4. *İki sətri (iki sütunu) eyni olan determinant sıfra bərabərdir.*

İSBATI. Tutaq ki, D determinantının i-ci və k-cı $(i \neq k)$ sətrinin elementləri bir-birinə bərabərdir. Əgər bu iki sətrin bir-biri ilə yerini dəyişsək, bu sətirlər eyni olduğundan determinant dəyişməyəcək. Lakin digər tərəfdən isə 3-cü xassəyə görə determinantın işarəsi əksinə çevrilir, yəni $D = -D$ olur ki, buradan da $D = 0$ alınır.

XASSƏ 5. *Determinantın hər-hansı bir sətir (və ya sütun) elementlərinin hamısını ixtiyari λ ədədinə vurduqda determinantın qiyməti λ ədədinə vurulur.*

İSBATI. Tutaq ki, D determinantının i-ci sətir elementlərini λ ədədinə vurmaqla D_1 determinantını almışıq:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$D_1=\lambda D$ olduğunu göstərməliyik.

Aydındır ki, D determinantının hər-hansı bir həddi

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{i\alpha_i}\ldots a_{n\alpha_n} \tag{3}$$

kimi hasillərdən ibarətdirsə, D-nin i-ci sətir elementlərini λ-ya vurduqdan sonra alınan D_1 determinantının uyğun həddi

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots(\lambda a_{i\alpha_i})\ldots a_{n\alpha_n} \tag{4}$$

kimi olacaq, çünki hər iki determinantın ixtiyari bir həddində i-ci sətirdən hökmən bir vuruq olmalıdır. Deməli, D_1-in hər bir həddində bir λ vuruğu iştirak edir. Bu isə o deməkdir ki, D determinantı λ ədədinə vurulub, yəni $D_1=\lambda D$.

Bu xassədən bilavasitə belə bir nəticə alınır:

Determinantın hər-hansı bir sətrinin (sütunun) elementlərindən determinant xaricinə ortaq vuruq çıxarmaq olar.

Məsələn:

$$\begin{vmatrix} 8 & 24 & 36 \\ 1 & 3 & 0 \\ 7 & -9 & 5 \end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & 0 \\ 7 & -9 & 5 \end{vmatrix}=4\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \end{vmatrix};$$

bu misalda birinci sətirdən 4, ikinci sütundan isə 3 ortaq vuruqları determinant xaricinə çıxarılmışdır.

Növbəti 6-cı xassə sətir və ya sütunların mütənasibliyi ilə bağlıdır.

Bir sətrin (sütunun) elementləri digər bir sətrin (sütunun) uyğun elementlərindən eyni bir λ vuruğu ilə fərqlənirsə bunlara mütənasib sətirlər (sütunlar) deyirlər.

XASSƏ 6. *İki sətri (iki sütunu) mütənasib olan determinant sıfra bərabərdir.*

İSBATI. Tutaq ki, D determinantının i-ci və k-cı sətirlərinin uyğun elementləri mütənasibdir, yəni i-ci sətir elementləri k-cı sətrin uyğun elementlərindən eyni bir λ vuruğu ilə fərqlənir. Onda aydındır ki:

$$\frac{a_{i1}}{a_{k1}}=\frac{a_{i2}}{a_{k2}}=\ldots=\frac{a_{in}}{a_{kn}}=\lambda.$$

Yaxud da:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \cdots & \lambda a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (k) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Əvvəlki xassəyə görə bu determinantın i-ci sətirlərindən λ ortaq vuruğunun determinant xaricinə çıxarmaq olar. Onda iki sətri eyni olan determinant alınır, bu da 4-cü xassəyə görə sıfra bərabərdir.

Qeyd. Göründüyü kimi həm 4-cü, həm də 2-ci ($n>1$ olduqda) xassələr 6-cı xassənin xüsusi hallarıdır.

XASSƏ 7. *Determinantın ixtiyari i-ci sətir (sütun) elementləri $a_{ik}=b_{ik}+c_{ik}$ ($n=1,2,\ldots,n$) iki toplananın cəmindən ibarətdirsə, onda bu determinant elə iki determinantın cəmindən ibarətdir ki, bunların birində i-ci sətir elementləri b_{ik} toplanından, o birisində isə c_{ik} toplananından ibarət olub qalan sətirləri (sütunları) isə verilmiş determinantda olduğu kimi qalır.*

İSBATI. Tutaq ki,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}(i)$$

Onda bu determinantın hər-hansı bir həddini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{i\alpha_i}\ldots a_{n\alpha_n} = a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots(b_{1\alpha_1}+c_{1\alpha_1})\ldots a_{n\alpha_n} =$$
$$= a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots b_{1\alpha_1}\ldots a_{n\alpha_n} + a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots c_{1\alpha_1}\ldots a_{n\alpha_n}.$$

Aydındır ki, bu cəmdə alınan toplananlar işarələri ilə birlikdə uyğun olaraq

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{i1} & b_{i2} & \ldots & b_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{və} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{i1} & c_{i2} & \ldots & c_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinantlarının ixtiyari hədləridir. Ona görə də $D = D_1 + D_2$ olur.

Qeyd. Əgər D-nin i-ci sətrinin elementləri $a_{ik} = \lambda_1 b_{1k} + \lambda_2 c_{2k}$ ($k = 1,2,\ldots,n$) şəkildə olarsa, onda asanlıqla isbat etmək olar ki, $D = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$. Buna determinantın «xəttilik xassəsi» də deyirlər.

Bu xassəni istənilən sonlu sayda toplananlar üçün də ümumiləşdirmək olar (bunu edin!).

XASSƏ 8. *Determinantın hər-hansı sətir (sütun) elementlərini eyni bir ədədə vurub, başqa sətrin (sütunun) uyğun elementləri ilə toplasaq determinant dəyişməz.*

İSBATI. Verilən D determinantının hər-hansı i-ci sətir elementlərini ixtiyari bir λ ədədinə vurub k-cı sətrinin uyğun elementləri üzərinə əlavə etdikdən sonra alınan determinanta 7-ci xassəni tətbiq edək:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{k1}+\lambda a_{i1} & a_{k2}+\lambda a_{i2} & \ldots & a_{kn}+\lambda a_{in} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \ldots & \lambda a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{0} = D + 0 = D.$$

Yəni, cəmdə ikinci determinantın iki sətri mütənasib olduğundan o sıfır olur və verilən determinantın özü qalır.

Növbəti xassə determinantın sətir və ya sütun elementlərinin xətti asılılıq anlayışı ilə əlaqədardır.

Əvvələn bunu qeyd edək ki, determinantın hər-hansı sətrini (sütununu) bir ədədə vurmaq dedikdə bu sətrin bütün elementlərini həmin ədədə vurmaq düşünülür. İkincisi də sətirləri (sütunları) toplamaq dedikdə isə toplanan sətirlərin uyğun elementlərinin cəmini tapmaq başa düşülür. Əgər determinantın i-ci sətrindən (sütunundan) fərqli olan istənilən $k = 1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n$ nömrəli sətirlərini uyğun olaraq hər-hansı $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\ldots\lambda_n$ ədədləri ilə hasilləri cəmi i-ci sətrə bərabər olarsa, onda deyirlər ki, i-ci sətir qalan sətirlərin xətti kombinasiyasından ibarətdir. Burada λ_k ($k = 1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n$) əmsallarından bir çoxu sıfır da ola bilər. Xüsusi halda, λ_k əmsallarından ancaq biri sıfırdan fərqli olarsa onda iki sətri (sütunu) mütənasib olan determinant alınır, əgər bir sətrinin elementləri hamısı sıfır olan determinant verilibsə, onda bu sətir (sütun) qalan sətirlərin (sütunların) xətti kombinasiyası olar. Çünki, bu halda λ_k əmsallarının hamısının sıfır olduğu haldır.

XASSƏ 9. *Determinantın bir sətri (sütunu) digər sətirlərin (sütunların) xətti kombinasiyasından ibarətdirsə, bu determinant sıfra bərabərdir.*

İSBATI. Tutaq ki, i-ci sətir s sayda ($1 \le s \le n-1$) başqa sətirlərin xətti kombinasiyasıdır. Onda i-ci sətrin hər bir elementi s sayda toplananın cəmindən ibarətdir. 7-ci xassəyə əsasən biz bu determinantı elə s dənə determinantın cəmi şəklində yaza bilərik ki, bunların hər birinin i-ci sətri onun başqa bir sətri ilə mütənasib olar. 6-cı xassəyə görə bu determinantlar hamısı sıfır olar, deməli verilən determinant özü sıfra bərabər olur.

Qeyd edək ki, bu əlamət determinantların sıfra bərabər olması üçün həm zəruri, həm də kafi şərtdir (§ 3.6-ya bax).

§ 2.4. Minor və cəbri tamamlayıcı

n-tərtibli determinantların hesablanmasında və tətbiqində onların müvafiq xassələri ilə yanaşı minor və cəbri tamamlayıcı anlayışları da mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

TƏRİF. *n-tərtibli D determinantında k sayda $(1 \le k \le n)$ sətir və k sayda sütunun kəsişməsindəki elementlərin nisbi vəziyyətini dəyişmədən əmələ gətirdiyi n-tərtibli matrisin determinantına D-nin k tərtibli minoru deyilir.*

n-tərtibli D determinantının hər-hansı k tərtibli minorunu praktiki olaraq almaq üçün bu determinantın k sayda sətir və sütununu seçib qeyd etmək və qalan $n-k$ sətir və sütunu nəzərdən atmaq lazımdır. Əyanilik naminə seçilmiş k dənə sətrin və k dənə sütunun üzərindən xətt çəkib bunların kəsişdiyi elementlərin nisbi vəziyyətinə xələl gətirmədən yazır və elementlər bir-birindən uzaq olanda onları ancaq «sürüşdürüb» matris şəklinə salırlar.

Məsələn, aşağıdakı 5-tərtibli determinantın 2-tərtibli minorlarından birini yazaq:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Bu determinantın iki sətrini (3-cü və 4-cü) və iki sütunu (2-ci və 5-ci) seçib qeyd edirik (üzərindən xətt çəkirik). Göründüyü kimi, qeyd edilmiş bu iki sətir və iki sütunun kəsişdiyi yerdə duran elementlərin əmələ gətirdiyi iki tərtibli matrisin

$$M_1 = \begin{vmatrix} a_{32} & a_{35} \\ a_{42} & a_{45} \end{vmatrix}$$

kimi iki tərtibli determinantı D determinantının iki tərtibli minorlarından biridir. Əgər başqa iki sətir və iki sütun seçib bunların kəsişməsindəki elementləri determinantdakı nisbi vəziyyətini dəyişmədən yazsaq D-nin digər ikitərtibli minorunu alarıq. Məsələn, əgər 1-ci, 2-ci sətri və 2-ci, 4-cü sütunları götürsək aşağıdakı başqa bir iki tərtibli minor alarıq:

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}.$$

Bu qayda ilə D-dən üç sətir və üç sütun seçib qeyd etməklə D-nin üç tərtibli minorlarını düzəltmək olar.

Minoru çox zaman

$$M_{\substack{i_1 i_2 \ldots i_k \\ j_1 j_2 \ldots j_k}} \qquad \text{yaxud} \qquad M^{\,i_1 i_2 \ldots i_k}_{\,j_1 j_2 \ldots j_k}$$

kimi işarə edirlər. Burada $i_1, i_2, \ldots, i_k$ bu minoru düzəltmək üçün seçilən sətir, $j_1, j_2, \ldots, j_k$ isə sütun nömrələridir. Məsələn, əgər yuxarıda verilmiş beş tərtibli D determinantında 2, 4, 5 nömrəli sətirləri və 1, 2, 4 nömrəli sütunları qeyd edərək müvafiq $k=3$ tərtibli minor düzəltsək, bu minor

$$M_{\substack{2,4,5 \\ 1,2,4}} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}$$

şəklində olar.

Xüsusi halda, əgər n-tərtibli determinantın təkcə bir sətrini və bir sütununu ($k=1$ halı) qeyd edib bunların üzərindən xətt çəksək kəsişmədə bir dənə element olar. Deməli, D determinantının hər bir elementi onun bir tərtibli minorudur. $k=n$ olanda, yəni determinantın bütün sətir və sütunlarını qeyd edib buradan minor düzəltsək determinantın özü alınar. Deməli, hər bir n-tərtibli determinant özü-özünün n-tərtibli minorudur. Sıfır tərtibli minor 1-ə bərabər qəbul edilir.

TƏRİF 2. *n-tərtibli determinantın ixtiyari k dənə $(1 \le k \le n)$ sətrini və k dənə sütununu qeyd edib, bunların kəsişməsində duran elementlərdən k tərtibli M minoru düzəltdikdə yerdə qalan $n-k$ sətir və $n-k$ sütunun kəsişməsindən duran $n-k$ tərtibli minora M-in tamamlayıcı minoru deyilir.*

M-in tamamlayıcı minorunu adətən $\overline{M}$ kimi işarə edirlər. Məsələn, yuxarıda beştərtibli determinantın $M_{\substack{2,4,5 \\ 1,2,4}}$ üç tərtibli minorunu yazmışdıq. Bunun üçün onun 2, 4, 5 nömrəli sətir və 1, 2, 4 nömrəli sütunları qeyd edib, onların üzərindən xətt çəkirik:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Qeyd olunan sətir və sütunların kəsişməsindən D - nin yuxarıda yazdığımız üç tərtibli $M_{\substack{2,4,5\\1,2,4}}$ minoru alınır. Bu zaman üstdən xətt çəkilməyən iki sətir (1-ci və 3-cü) və iki sütun (3-cü və 5-ci) pozulmayan elementləri verilən determinantın aşağıdakı

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{15} \\ a_{33} & a_{35} \end{vmatrix}$$

iki tərtibli $(n-k=5-3=2)$ minorunu əmələ gətirir ki, bu da $M_{\substack{2,4,5\\1,2,4}}$ minorunun $\overline{M}_{\substack{2,4,5\\1,2,4}}$ tamamlayıcı minoru olur, yəni

$$\overline{M}_{\substack{2,4,5\\1,2,4}} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{15} \\ a_{33} & a_{35} \end{vmatrix}.$$

Əgər determinantda, əksinə, tamamlayıcı $\overline{M}$ minorunu əmələ gətirən sətirlərin və sütunların üzərindən xətt çəksək, aşkardır ki, üstündən xətt çəkilməyən sətir və sütunların kəsişməsində duran elementlər M minorunu əmələ gətirəcək. Bu isə o deməkdir ki, *M və $\overline{M}$ - i qarşılıqlı tamamlayıcı minorlar* adlandırmaq olar.

Xüsusi halda determinantın hər-hansı bir i - ci sətrini və j - ci sütununu qeyd edib üstündən xətt çəksək, aydındır ki, kəsişmədə onun a_{ij} elementi (birtərtibli minoru) alınar. Bu halda üstündən xətt çəkilməyən sətir və sütunların pozulmayan elementləri isə $(n-1)$ tərtibli tamamlayıcı minor əmələ gətirər. Adətən $(n-1)$ tərtibli minoru M_{ij} kimi işarə edirlər. Deməli, a_{ij} elementi ilə $(n-1)$ tərtibli M_{ij} minoru qarşılıqlı tamamlayıcı minor olur (çünki, M_{ij} - ni əmələ gətirən $n-1$ dənə sətri və $n-1$ dənə sütunu pozsaq, pozulmayan ancaq a_{ij} elementi qalır).

Əgər söhbət təkcə bir elementin, məsələn a_{ij} -nin tamamlayıcısı olan $(n-1)$ tərtibli M_{ij} minorundan gedirsə, adətən onu sadəcə olaraq determinantın a_{ij} elementinin minoru adlandırıb «tamamlayıcı» sözünü işlətmirlər.

İndi isə tutaq ki, k tərtibli M minoru $i_1, i_2, \dots, i_k$ nömrəli sətirlərdən və $j_1, j_2, \dots, j_k$ nömrəli sütunlardan alınmışdır. Bunun tamamlayıcısı $\overline{M}_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_k\\j_1,j_2,\dots,j_k}}$ olsun.

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) + (j_1, j_2, \dots, j_k) = S_M$$

ilə işarə edək.

TƏRİF 3. $(-1)^{S_M}\overline{M}_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_k\\j_1,j_2,\dots,j_k}}$ *ifadəsinə* $M_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_k\\j_1,j_2,\dots,j_k}}$ *minorunun cəbri tamamlayıcısı (yaxud «adyunktu») deyilir.*

Əgər M - in cəbri tamamlayıcısını A ilə işarə etsək, onda

$$A = (-1)^{S_M}\overline{M} \tag{1}$$

alırıq.

Bu düsturdan aşkar görünür ki, M minorunun cəbri tamamlayıcısı onun tamamlayıcı minorundan ancaq işarəsi ilə fərqlənə bilər (S_M - in tək və cüt ədəd olmasından asılıdır).

Xüsusi halda təkcə bir a_{ij} elementinin cəbri tamamlayıcısı

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

olur.

Misal. Yuxarıda baxdığımız beştərtibli determinantın

$$M_{\substack{3,4\\2,5}} = \begin{vmatrix} a_{32} & a_{35} \\ a_{42} & a_{45} \end{vmatrix}$$

ikitərtibli minorunun cəbri tamalayıcısı

$$A_{\substack{3,4\\2,5}} = (-1)^{3+4+2+5}\overline{M}_{\substack{3,4\\2,5}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}$$

Həmin determinantda $M_{\substack{3,4,5\\1,2,4}}$ minorunun $A_{\substack{3,4,5\\1,2,4}}$ cəbri tamamlayıcısı:

$$A_{\substack{3,4,5\\1,2,4}} = (-1)^{3+4+5+1+2+4} M_{\substack{3,4,5\\1,2,4}} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{15} \\ a_{23} & a_{25} \end{vmatrix}$$

olur.

Xüsusi halda a_{32} elementinin cəbri tamamlayıcısı:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

olar.

İndi isə n - tərtibli determinantın minoru və cəbri tamamlayıcısı haqqında aşağıdakı teoremi isbat edək.

TEOREM. *n-tərtibli D determinantının ixtiyari k tərtibli minoru ilə onun cəbri tamamlayıcısının hasilindən alınan hədlər öz işarələri ilə determinantın hədləridir («determinanta daxildirlər»).*

İSBATI. Teoremi iki hal üçün isbat edək.

Birinci hal (xüsusi hal). Tutaq ki, k tərtibli M minoru D determinantında sol yuxarı küncdə yerləşir (yəni onu düzəltmək üçün ilk ardıcıl $1,2,\dots,n$ nömrəli sətir və sütunlar seçilib).

$$D=\left|\begin{array}{cccc:cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & M & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ \hdashline a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \overline{M} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|$$

Aşkardır ki, belə halda M minorunun tamamlayıcı minoru $\overline{M}$ isə determinantda sağ aşağı küncdə yerləşəcək. Aydındır ki, burada

$$S_M=(1+2+\dots+k)+(1+2+\dots+k)=2(1+2+\dots+k)$$

cüt ədəd olduğundan

$$A=(-1)^{S_M}\overline{M}=\overline{M}$$

olar. Deməli, göstərməliyik ki, $MA=M\overline{M}$ hasilinin bütün hədləri öz işarələri ilə determinanta daxildirlər.

M minorunun ixtiyari bir həddini götürək. Bu k-tərtibli determinant olduğundan bunun ümumi həddi

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{k\alpha_k} \qquad (1)$$

şəklində hasil, işarəsi isə bildiyimizə görə

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix}$$

əvəzləməsinin sinfi vasitəsilə, yəni $t=inv[\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k]$ olduqda $(-1)^t$-nin işarəsi ilə eyni olacaq.

İndi $(n-k)$ tərtibli tamamlayıcı $\overline{M}$ minorunun ixtiyari bir həddini yazaq:

$$a_{k+1\beta_{k+1}}a_{k+2\beta_{k+2}}\dots a_{n\beta_n} \qquad (2)$$

Bu hasil $\overline{M}$ tamamlayıcı minoruna $(-1)^{t'}$ işarəsi ilə daxil olmalıdır, hansı ki, $t'=inv[\beta_{k+1}\beta_{k+2}\dots\beta_n]$, yəni (2) həddinə qarşı qoyulan

$$T'=\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \dots & n \\ \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$$

əvəzləməsinin ikinci sətrindəki inversiyalar sayıdır.

Deməli, (1) və (2) hədlərini işarələri ilə yazsaq:

$$(-1)^t a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{k\alpha_k} \qquad (1')$$

$$(-1)^{t'} a_{k+1\beta_{k+1}}a_{k+2\beta_{k+2}}\dots a_{n\beta_n} \qquad (2')$$

olacaq. Aydındır ki, bunların hasilinin işarəsi $(-1)^{t_1+t_2}$-nin işarəsi ilə eyni olacaq.

(1) və (2) hədlərini vuraraq n vuruqdan ibarət

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{k\alpha_k}a_{k+1\beta_{k+1}}a_{k+2\beta_{k+2}}\dots a_{n\beta_n} \qquad (3)$$

hasilini alırıq. Buradakı vuruqlar verilən determinantın müxtəlif sətir və sütunlarından olduğu üçün (3) hasili D-nin həddidir və bunun işarəsi isə $(-1)^t\cdot(-1)^{t'}=(-1)^{t+t'}$-in işarəsi ilə eynidir. Doğrudan da (3) hasili D determinantında buna uyğun

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & k+2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k & \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$$

«normal şəkilli» əvəzləməsi vasitəsilə təyin edilir, yəni bunun 2-ci sətrindəki $[\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\beta_{k+1}\beta_{k+2}\dots\beta_n]$ permutasionunun inversiyalar sayının tək və cütlüyündən asılı olur, buradakı inversiyalar sayı da məhz $t+t'$ olur, çünki, buradakı α-ların heç biri β-ların heç birindən böyük deyil (α_i-lərin hamısı k-dan, β_j-lərin hamısı isə $(k+1)$-dən az deyil), ona görə də α_i-lər β_j-lərlə inversiya əmələ gətirmir və:

$$inv[\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\beta_{k+1}\beta_{k+2}\dots\beta_n]=\underbrace{inv[\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k]}_{t}+\underbrace{inv[\beta_{k+1}\beta_{k+2}\dots\beta_n]}_{t'}.$$

Deməli, (3) həddi özünün $(-1)^{t+t'}$ işarəsi ilə

$$(-1)^{t+t'}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{k\alpha_k}a_{k+1\beta_{k+1}}a_{k+2\beta_{k+2}}\dots a_{n\beta_n}$$

D-nin həddi olur.

İkinci hal (ümumi hal). Tutaq ki, n-tərtibli M minoru ixtiyari $i_1, i_2, \dots, i_k$ nömrəli sətirlərdən və $j_1, j_2, \dots, j_k$ nömrəli sütunlardan düzəldilib, burada $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ və $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

Bu halı isbat etmək üçün bunu I-ci hala gətirirlər, yəni M minorunu düzəltmək üçün düzəldilən ixtiyari nömrəli sətir və sütunların yerini dəyişməklə M minorunu yenə də sol yuxarı küncə gətirmək lazımdır. Bu məqsədlə i_1-ci sətri özündən əvvəl daya-nan $(i_1 - 1)$ dənə, i_2-ni özündən əvvəlki $(i_2 - 2)$ dənə və s. i_k sətrini özündən əvvəlki $(i_k - k)$ dənə sətirlə transpozisiya apararaq onları uyğun olaraq $1, 2, \dots, k$ nömrəli sətirlərin yerinə gətiririk. Həmin çevirməni $j_1, j_2, \dots, j_k$ nömrəli sütunlar üzərində aparırıq. İndi sətirlər və sütunlar üzərində aparılan transpozisiyaların ümumi sayları uyğun olaraq

$$(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \dots (i_k - k) = (i_1, i_2, \dots, i_k) - (1 + 2 + \dots + k) \qquad (4)$$

$$(j_1 - 1) + (j_2 - 2) + \dots (j_k - k) = (j_1, j_2, \dots, j_k) - (1 + 2 + \dots + k) \qquad (5)$$

olur. Aşkardır ki, məlum xassəyə görə determinantın işarəsi də-yişəcək və yeni alınan D' determinantında M minoru sol yuxarı küncdə yerləşəcək. D ilə D' determinantından isə

$$(-1)^{\overbrace{(i_1, i_2, \dots, i_k) + (j_1, j_2, \dots, j_k)}^{S_M} - 2(1+2+\dots+k)} = (-1)^{S_M - 2(1+2+\dots+k)} = (-1)^{S_M}$$

işarəsi ilə fərqlənəcək. Bu isə o deməkdir ki, $(-1)^{S_M} M \overline{M}$ hasilindəki hədlər D determinantında öz işarələri ilə iştirak edirlər. Burada

$$(-1)^{S_M} M \overline{M} = M \cdot \left[(-1)^{S_M} \overline{M}\right] = MA$$

oluğunu nəzərə alsaq teoremin isbatı tamamlanır.

§ 2.5. Determinantların minorlar üzrə ayrılışı. Laplas teoremi

Minor və cəbri tamamlayıcı haqqında əvvəlki paraqrafda tanış olduğumuz teorem təsdiq edir ki, verilən determinantın ixtiyari bir minorunun öz cəbri tamamlayıcısı ilə (yəni, MA hasilində) determinantın hədlərinin hamısı yox, bunların bir qismi iştirak edir. İndi tanış olacağımız Laplas teoremi buradakı «qüsuru» düzəldir, yəni burada elə ayrılışdan söhbət gedir ki, determinantın **bütün** hədləri iştirak edir.

TEOREM (*Laplas*). *n-tərtibli D determinantının ixtiyari k sayda ($1 \le k \le n-1$) sətrini (sütununu) seçib bunların nisbi vəziyyətini dəyişmədən bunlardan mümkün olan bütün müxtəlif k tərtibli minorlar düzəltsək, onda bu minorların öz cəbri tamamlayıcıları ilə hasilləri cəmi determinantın özünə bərabər olar.*

İSBATI. Tutaq ki, n-tərtibli D determinantında hər-hansı $i_1, i_2, \dots, i_k$ nömrəli sətirləri qeyd edib, həmin sətirlərdən bunların nisbi vəziyyətini dəyişmədən alınan $k \times n$ ölçülü matrisdən buradakı $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$ sütunlarının köməyi ilə bütün mümkün ola bilən müxtəlif k-tərtibli $M_1, M_2, \dots, M_s$ minorlarını düzəltmişik (bunun üçün «kombinezon sayağı» qaydadan istifadə edirlər, yəni seçilmiş k dənə $i_1, i_2, \dots, i_k$ nömrəli sətirlərin nisbi vəziyyətini dəyişmədən bunların hər dəfə heç olmasa bir nömrəsi ilə fərqlənən müxtəlif ardıcıl nömrəli sütunlarla kəsişmələrinə baxmaq gərəkdir). Bu yolla düzəldilən $M_1, M_2, \dots, M_s$ minorlarının cəbri tamamlayıcıları $A_1, A_2, \dots, A_s$ olsun. Göstərməliyik ki:

$$D = M_1 A_1 + M_2 A_2 + \dots M_s A_s = \sum_{i=1}^{s} M_i A_i \qquad (1)$$

Əvvəlki paraqrafdakı teoremə görə $M_i A_i$ hasilinin hər hədləri öz işarələri ilə verilən D determinantının hədləridir. Həmçinin buradakı $M_1, M_2, \dots, M_s$ minorları bir-birindən heç olmasa bir sütunu ilə fərqləndiyi üçün (1) cəmindəki toplananlar da ortaq həddə malik olmamalıdır. Deməli, (1) cəmində iştirak edən hasillərdən alınan hədlər hamısı verilən n-tərtibli determinantın müxtəlif hədləridir. Teoremin isbatını tamamlamaq üçün bu hədlərin sayının $n!$ olduğunu göstərməliyik.

M_i $(i = \overline{1, s})$ minorlarının hər biri k tərtibli olduğundan bunların hədləri sayı $k!$, cəbri tamamlayıcıları isə $(n-k)$ tərtibli olduğundan bunlardakı hədlərin sayı $(n-k)!$ olur. $M_i A_i$ hasilinin hər birində determinantın $k!(n-k)!$ sayda həddi olmalıdır. (1) cəmində s sayda toplanan olduğundan burada iştirak edən müxtəlif hədlərin sayı $s \cdot k!(n-k)!$ dənə olmalıdır. Buradakı s əmsalı determinantın k sayda sətrindən düzəldilməsi mümkün ola bilən k

tərtibli minorların sayıdır. Bu minorların düzəldilməsi qaydası və quruluşu elədir ki, onlar bir-birindən ancaq sütunlar ilə fərqlənirlər (heç olmasa bir sütunu ilə). Onda belə minorların sayı $s = C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ olmalıdır. Deməli, (1) cəmində olan hədlərin ümumi sayı

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot k!(n-k)! = n!$$

olur, yəni bu cəmdə determinantın təkrar olunmamaq şərti ilə bütün $n!$ sayda hədlərinin hamısı iştirak edir.

Teorem isbat olundu.

(1) bərabərliyini «Laplas düsturu» adlandırırlar.

Teoremi k sayda sütun seçməklə də isbat etmək olar.

İndi Laplas teoreminə aid bir misal göstərək. Tutaq ki, 4-tərtibli

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

determinantı verili. Burada, məsələn 1-ci və 2-ci sətri seçib qeyd edək. Aydındır ki, determinantın bu sətirləri eyni zamanda aşağıdakı

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

2×4 ölçülü matrisi əmələ gətirir. Bu iki sətirdən «kombinezon sayağı» yolla bütün mümkün iki tərtibli minorlar düzəldək (bunların sayı $C_4^2 = 6$ olacaq):

$$M_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix},$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad M_5 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}, \quad M_6 = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}.$$

Verilən determinantda bu minorların cəbri tamamlayıcıları uyğun olaraq:

$$A_1 = (-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad A_2 = (-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_3 = (-1)^{1+2+1+4}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}, \quad A_4 = (-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_5 = (-1)^{1+2+2+4}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}, \quad A_6 = (-1)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}.$$

Onda bu determinantın həmin ikitərtibli minorlara nəzərən ayrılışı: $D = M_1A_1 + M_2A_2 + M_3A_3 + M_4A_4 + M_5A_5 + M_6A_6 =$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}.$$

Laplas teoreminin determinantların hesablanmasına tətbiqində sıfır elementləri çox olan sətirləri (sütunları) seçmək və determinantın məhz bu sıfırı çox olan minorlara nəzərən ayrılışından istifadə etmək, onun hesablanmasını xeyli sadələşdirir. Məsələn,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

determinantının ikinci və beşinci sətirlərində sıfır elementləri vardır. Əgər bu sətirlərdən ikitərtibli minorlar düzəltsək, bunların sayı $C_5^2 = 10$ olar; bunlardan ancaq üçü sıfırdan fərqli olacaq. Ona görə də determinantın həmin iki sətirlə əlaqədar olan ayrılışı:

$$D = (-1)^{10}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{12}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{13}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4.$$

§ 2.6. Determinantların sətir və sütun elementlərinə nəzərən ayrılışı

Determinantlarda minor və cəbri tamamlayıcı anlayışı ilə tanış olanda qeyd etmişdik ki, determinantın hər bir elementi onun bir tərtibli minorudur. Odur ki, determinantın bir sətir (bir sütun) elementlərinə nəzərən ayrılışına ayrıca baxmaq bir çox cəhətdən özünü doğruldur. Bununla əlaqədar aşağıdakı teoremi isbat edək.

TEOREM. *n-tərtibli determinantın hər-hansı bir sətrinin (sütununun) bütün elementlərinin öz cəbri tamamlayıcıları ilə hasil-*

lərinin cəmi determinantın özünə, bu elementlərin başqa sətrin (sütunun) uyğun elementlərilə cəbri tamamlayıcıları ilə hasillərinin cəmi isə sıfra bərabərdir, yəni

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}=D \qquad (1)$$

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}=0, \quad i\neq n \qquad (2)$$

$$(i=1,2,\ldots,n, \quad k=1,2,\ldots,n).$$

İSBATI. (1) bərabərliyi Laplas teoreminin xüsusi halı kimi alınır. Belə ki, burada $k=1$ halı, yəni determinantın hər-hansı bir sətrini seçsək, aydındır ki, bu sətirdə onun n dənə elementi (bir tərtibli minorları) var və deməli bu hal üçün Laplas düsturunda

$$s=n, M_1=a_{i1}, M_2=a_{i2},\ldots,M_n=a_{in}$$

və bu elementlərin cəbri tamamlayıcıları isə

$$A_{i1}, A_{i2},\ldots,A_{in}$$

olur ki, nəticədə də

$$D=\sum_{i=1}^{s}M_iA_i=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in} \qquad (3)$$

olur. Bununla teoremin 1-ci hissəsi Laplas teoreminin xüsusi halı kimi isbat olunur.

İndi teoremin ikinci hissəsini, yəni (2) bərabərliyini isbat edək.

Verilmiş D determinantına və yardımçı Δ determinantına diqqət edək.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (i)\\ \\ (k)\\ \\ \\ \end{matrix}, \qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (i)\\ \\ (k)\\ \\ \\ \end{matrix}$$

Göründüyü kimi Δ determinantı D-dən ancaq k-cı sətir elementləri ilə fərqlənir və həm də Δ-da i-ci və k-cı sətir elementləri eynidir. İki sətri eyni olduğundan $\Delta=0$ olmalıdır. Əgər Δ determinantını k-cı sətir elementlərinə nəzərən ayrılışını yazsaq:

$$\Delta=a_{i1}B_{k1}+a_{i2}B_{k2}+\ldots+a_{in}B_{kn} \qquad (4)$$

Burada B_{ks} $(s=\overline{1,n})$ vuruqları Δ-nın k-cı sətir elementlərinin cəbri tamamlayıcılarıdır. Aşkardır ki, bu cəbri tamamlayıcılar D-nin

də k-cı sətir elementlərinin cəbri tamamlayıcıları ilə eyni olmalıdır. Çünki, bu cəbri tamamlayıcıların hər birini düzəltdikdə Δ-nı D-dən fərqləndirən yeganə k-cı sətir nəzərdən atılır və buna görə də $B_{k1},B_{k2},\ldots,B_{kn}$ cəbri tamamlayıcıları uyğun olaraq D-nin $a_{k1},a_{k2},\ldots,a_{kn}$ elementlərinin $A_{k1},A_{k2},\ldots,A_{kn}$ cəbri tamamlayıcıları ilə üst-üstə düşür:

$$B_{k1}=A_{k1}, B_{k2}=A_{k2},\ldots,B_{kn}=A_{kn}.$$

Dəməli, (4) cəmində $B_{ks}=A_{ks}$ $(s=1,2,\ldots,n)$ əvəz etsək cəm dəyişməyəcək, yenə də sıfra bərabər olacaq, yəni

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}=0 \quad (i\neq k).$$

Bununla teorem isbat olundu.

Teoremin hər iki hissəsini aşağıdakı bir düsturla ifadə etmək də olar:

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases} D, & i=k \quad \textit{olanda}\\ 0, & i\neq k \quad \textit{olanda}\end{cases}$$

Determinantın sətir və sütunları eyni hüquqlu olduğundan isbat etdiyimiz bərabərlikləri onun hər-hansı j-ci və m-ci sütunlarına nəzərən ayrılışını belə yazmaq olar:

$$a_{1j}A_{1m}+a_{2j}A_{2m}+\ldots+a_{nj}A_{nm}=\begin{cases} D, & j=m \quad \textit{olanda}\\ 0, & j\neq m \quad \textit{olanda}\end{cases}$$

NƏTİCƏ. *Determinantda hər-hansı bir i-ci sətrin (j-ci sütunun) bir elementindən başqa qalanları sıfırdırsa, onda bu determinant həmin sıfırdan fərqli elementlə onun cəbri tamamlayıcısı hasilinə bərabərdir.*

İSBATI. Tutaq ki, verilən determinantda a_{im} elementindən başqa i-ci sətrin qalan elementləri hamısı sıfırdır. Onda bu determinantın i-ci sətir elementlərinə nəzərən ayrılışını yazsaq və alınan cəmdə

$$a_{i1}=a_{i2}=\ldots=a_{i,m-1}=a_{i,m+1}=\ldots=a_{in}=0$$

olduğunu nəzərə alsaq, $D=a_{im}\cdot A_{im}$ olar.

Həm teorem, həm də nəticə yüksək tərtibli determinantların hesablanmasında mühüm rol oynayır. Belə ki, bir determinantı hər hansı sətir (sütun) elementlərinə nəzərən ayırdıqda onun tərtibini bir vahid azaldırıq. Bu zaman elə sətir (sütun) seçmək lazımdır ki, orada mümkün qədər sıfırlar çox olsun, çünki, bu, hesablamanı xeyli asanlaşdırır (sıfır olan elementlərin cəbri tamamlayıcılarını hesablamağa ehtiyac qalmır).

Məsələn, aşağıdakı 4-tərtibli determinantı sətir (sütun) elementlərinə nəzərən ayırmaqla hesablayaq:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 8 & 7 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Bu determinantı, məsələn 2-ci sətir elementlərinə nəzərən ayırsaq, bunun hesablanması aşağıdakı kimi üçtərtibli dörd dənə determinantın hesablanmasına gətirilir:

$$D=2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & 7 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}+(-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}+$$

$$+4(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix}+(-2)(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 8 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Bildiyimiz kimi sətir və sütunlarda sıfırların olması hesablama prosesini asanlaşdırır, ona görə də determinantların məlum xassəsindən istifadə edib, sətir və sütunlar üzərində elə çevirmə aparırıq ki, determinant özü dəyişmədən orada sıfır elementlərin sayı çoxalsın.

Verilmiş misalda 3-cü sütunun bir elementi sıfırdır. Həmin sütunu götürüb, onun bir elementindən, məsələn, -1-dən başqa qalanlarını sıfra çevirək. Bunun üçün axırıncı sətri 4-ə vurub 2-cinin, 8-ə vurub 3-cünün üzərinə gələk. Bu çevirmə nəticəsində məlum xassəyə görə determinantın qiyməti dəyişməz, lakin hesablamaq üçün əlverişli şəklə düşər:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ -6 & 15 & 0 & -2 \\ -13 & 37 & 0 & 7 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Göründüyü kimi, üçüncü sütunda $a_{43}=-1$ elementindən başqa qalanlarının hamısı sıfra çevrilmişdir. Onda nəticəyə əsasən:

$$D=a_{43}A_{43}=(-1)\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -6 & 15 & -2 \\ -13 & 37 & 7 \end{vmatrix}.$$

n - tərtibli iki D_1 və D_2 determinantlarının verildiyini fərz edək:

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Məqsədimiz bu iki determinantın hasilini yeni bir n - tərtibli determinant şəklində axtarmaqdır. Bunun üçün «determinantların vurulma qaydası» var ki, bu da aşağıdakı teoremə əsaslanır:

TEOREM. *n - tərtibli iki D_1 və D_2 determinantlarının hasili elə bir n - tərtibli D determinantına bərabərdir ki, D - nin ixtiyari c_{ij} elementi D_1 - in i - ci sətir elementləri ilə D_2 - nin j - ci sütununun uyğun elementlərinin hasilləri cəmindən ibarətdir*, yəni:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}, \quad (i,j=1,2,\ldots,n). \qquad (1)$$

Burada c_{ij} elementi hasil D determinantının ixtiyari elementidir.

İSBATI. D_1 - in sol yuxarı, D_2 - nin sağ aşağı küncdə yerləşməsi şərti ilə aşağıdakı $2n$ tərtibli yarımparçalanan və ya kvazi-üçbucaq şəkilli aşağıdakı Δ determinantına baxaq:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Aydındır ki, bu determinant üçün dərhal aşağıdakı bərabərliyi yaza bilərik:

$$\Delta=D_1\cdot D_2. \qquad (1)$$

İndi Δ determinantı üzərində elə çevirmələr aparaq ki, onun sağ aşağı küncündə yerləşən $b_{ij}\,(i,j=1,2,\ldots,n)$ elementləri sıfra çev-

rilsin. Bunun üçün 1-ci, 2-ci, ..., n-ci sütunları uyğun olaraq $b_{11}, b_{21}, \dots, b_{n1}$ ədədlərinə vurub hamısını $(n+1)$-ci sütunun üzərinə əlavə etsək, nəticədə D_2-nin birinci sütunu, yəni Δ-nın $(i+1)$-ci sütun elementləri olan $b_{11}, b_{21}, \dots, b_{n1}$ elementləri sıfra çevrilərlər və ümumiyyətlə həmin ilk ardıcıl sütunları uyğun olaraq $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$ ədədlərinə vurub hamısını D_2-nin 2-ci sütun (yəni Δ-nın $(n+j)$-ci sütunu) elementləri üzərinə əlavə etsək $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$ elementləri sıfra çevrilər və s. bu qayda ilə D_2-nin bütün elementlərini sıfra çevirsək, onda Δ-nın qiyməti dəyişməyəcək, lakin onun sağ yuxarı küncündə yerləşən sıfırların yerində müvafiq cəmlər alınar və determinant aşağıdakı şəklə düşər:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Bu determinantı axırıncı n sütunlarına nəzərən ayırsaq, bu ayrılışda sıfırdan fərqli ancaq

$$M = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

minoru qalır və

$$\Delta = MA \tag{2}$$

olur.

Δ üzərində aparılan çevirməyə görə burada

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

M - in cəbri tamamlayıcısını tapaq:

$$A = (-1)^{1+2+\dots+(n+1)+(n+2)+\dots+2n}\overline{M} = (-1)^{n(2n+1)} \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}}_{\overline{M}} =$$

$$= (-1)^{n(2n+1)} \cdot (-1)^n = (-1)^{2n(n+1)} = 1.$$

Deməli:

$$\Delta = MA = M \cdot 1 = M \tag{3}$$

Bunu (1) bərabərliyi ilə müqayisə etsək, taparıq ki,

$$\Delta = D_1 \cdot D_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

Burada $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

Teorem isbat olunur.

Bu qaydanı adətən «sətrin sütuna vurulması» adlandırırlar. Lakin hasildə vuruqların birini, məsələn, 1-ci vuruğu transponirə etsək «sütunun sütuna vurulması», 2-ci vuruğu transponirə etsək «sətrin sətrə vurulması», nəhayət, hər iki vuruğu transponirə etsək «sütunun sətrə vurulması» kimi daha üç üsulu qeyd edərək hasil determinantın hədlərini təyin etmək olar.

Qeyd. Bu üsullardan ancaq determinantların vurulmasında istifadə edilir. Aşağıda görəcəyik ki, matrislərin vurulması əməlində yalnız «sətrin sütuna vurulması» qaydası yararlıdır.

§ 2.8. Determinantların bəzi xüsusi növləri, onların müxtəlif hesablanma qaydaları

Üçbucaq matrisin determinantı. Baş diaqonal elementlərindən bir tərəfdə yerləşən elementlərinin hamısı sıfır olan determinanta üçbucaq matrisin determinantı deyilir (şərti olaraq bunu «üçbucaq determinant» adlandırırlar).

«Üçbucaq determinant» baş diaqonal elementlərinin hasilinə bərabərdir:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$$ (aşağı üçbucaq determinantı),

yaxud

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$ (yuxarı üçbucaq determinantı).

Bunu riyazi induksiya üsulunun köməyi ilə asanlıqla isbat etmək olur. Belə ki, əvvələn, $n=1,2$ üçün bərabərlik doğrudur:

$$|a_{11}|=a_{11},\ \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}.$$

İndi bərabərliyin $(n-1)$ tərtibli üçbucaq determinant üçün doğruluğunu qəbul edib n $(n\geq 3)$ tərtibli üçbucaq determinant üçün isbat edək.

Əgər verilmiş n tərtibli determinantın birinci sətir elementlərinə nəzərən ayrılışını yazsaq:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}.$$

Alınan M_{11} minoru $(n-1)$ tərtibli üçbucaq determinant olduğundan o baş diaqonal elementlərinin hasilinə bərabər olmalıdır:

$$M_{11}=a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

Ona görə də: $D=a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ olur.

Bir çox determinantlar üçbucaq matrisin determinantına gətirilərək hesablanır. Misal göstərək.

Misal 1.

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+(n-1)b & b & b & \dots & a \end{vmatrix},$$

burada birinci sütunun üzərinə qalan bütün sütunları əlavə edirik.

İndi isə bütün sonrakı sətirlərdən birinci sətri çıxsaq bizə məlum olan «üçbucaq determinantı» alarıq, yəni:

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

Misal 2.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Burada 1-ci sətri -1-ə vurub qalan sətirlərin üzərinə əlavə edək:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3-1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n-1 \end{vmatrix}=(a_2-1)(a_3-1)\dots(a_n-1).$$

Misal 3.

$$D=\begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Bu determinantın 1-ci sətrindən $(n-1)$-i ortaq vuruq kimi determinant işarəsi xaricinə çıxarıb, sonra isə vahidlərdən ibarət birinci sətri qalanlarından çıxaq. Onda alarıq ki:

$$D=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1).$$

Kvazi-üçbucaq matrisin determinantı. Bilirik ki, ilk ardıcıl k sətri ilə $(k+1)$-cidən başlayaraq $n-k$ dənə ardıcıl gələn sütunların kəsişməsindəki elementləri sıfırlardan ibarət olan

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinantı kvazi-üçbucaq matrisin determinantı və ya sadəcə olaraq «kvazi-üçbucaq» determinant adlandırırlar.

«Kvazi-üçbucaq» matrisi çox zaman «yarımparçalanan matris» də adlandırırlar. Bunun determinantının başqa şəkli belədir:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Buna «aşağı yarımparçalanan», əvvəlkinə isə «yuxarı yarımparçalanan» matrisin determinantı deyirlər.

Belə determinantı hesablamaq üçün bunun sıfır elementlərinin iştirak etdiyi sətirləri (sütunları) seçib Laplas teoremini tətbiq edək; aydındır ki, D-nin ilk ardıcıl k nömrəli sətirlərindən mümkün olan müxtəlif k tərtibli minorlardan ancaq sol yuxarı küncdə dayanan $M_{\substack{1,2,\dots,k\\1,2,\dots,k}} \neq 0$ olar, çünki digər minorların həmişə heç olmasa bir sütunu sıfırlardan ibarət olduğundan onlar sıfır olurlar. Sıfırdan fərqli M minorunun tamamlayıcısı $\overline{M}$ isə D-nin sağ aşağı küncündə yerləşəcək, onda

$$A_{\substack{1,2,\dots,k\\1,2,\dots,k}}=(-1)^{2(1+2+\dots+k)}\overline{M}_{\substack{1,2,\dots,k\\1,2,\dots,k}}=\overline{M}_{\substack{1,2,\dots,k\\1,2,\dots,k}}.$$

Onda Laplas teoreminə görə:

$$D=MA=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Yəni verilən D determinantı biri k tərtibli, digəri isə $(n-k)$ tərtibli iki determinantın hasilinə bərabərdir.

Çəpsimmetrik determinant. Çəpsimmetrik determinant da çəpsimmetrik matrisin determinantına deyirlər, yəni: *baş diaqonala nəzərən simmetrik yerləşən elementlər bir-birindən ancaq işarələri ilə fərqlənirsə buna çəpsimmetrik determinant deyilir.*

Tərifdən aydındır ki, çəpsimmetrik determinantın elementləri $a_{ji}=-a_{ij}$ $(i,j=\overline{1,n})$ şərtini ödəməlidir və burada $a_{ii}=-a_{ii}$ və ya $a_{ii}=0$. Deməli, çəpsimmetrik determinantı aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & a_{33} & \dots & a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Bu determinantın hər sətrini -1-ə vursaq, bir tərəfdə D-nin transponirə edilmişini alırıq, digər tərəfdən isə determinant $(-1)^n$-ə vurulmuş olar (determinantların 5-ci xassəsi), onda deməli

$$(-1)^n D = D$$

alırıq. Buradan isə görünür ki, n tək ədəd olanda $-D=D$, yəni $D=0$ alırıq.

Beləliklə alırıq ki: *tək tərtibli çəpsimmetrik determinant həmişə sıfra bərabərdir.*

Vandermond determinantı. Aşağıdakı şəkildə olan determinanta Vandermond determinantı deyilir:

$$W_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Buna çox zaman qüvvət determinantı da deyirlər.

Vandermond determinantı x_i-x_j şəklində bütün mümkün ola bilən fərqlərin hasilinə bərabərdir (burada $1\le j<i\le n$).

Əgər riyaziyyatda hasilləri işarə etmək üçün qəbul olunan $\prod$ simvolundan istifadə etsək, Vandermond determinantının hesablanma düsturunu

$$W_n=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j) \tag{1}$$

şəklində yazmaq olar.

Düsturun doğruluğunu isbat etmək üçün riyazi induksiya prinsipindən istifadə edək.

$n=2$ üçün (1) düsturu doğrudur, belə ki:

$$W_2=\begin{vmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1.$$

İndi $(n-1)$ tərtibli Vandermond determinantı üçün (1) düsturunun doğruluğunu qəbul edib, n-tərtibli ($n\geq 2$) üçün isbat edək.

n-tərtibli W_n determinantı üzərində belə bir çevirmə aparaq: $(n-1)$-ci sütunu x_1-ə vurub n-ci sütundan, $(n-2)$-ci sütunu x_1-ə vurub $(n-1)$-ci sütundan və bu qayda ilə davam edərək, nəhayət 1-ci sütunu yenə də x_1-ə vurub 2-ci sütundan çıxaq. Onda:

$$W_n=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 1 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1x_2 & \dots & x_2^{n-1}-x_1x_2^{n-2}\\ 1 & x_3-x_1 & x_3^2-x_1x_3 & \dots & x_3^{n-1}-x_1x_3^{n-2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & x_n-x_1 & x_n^2-x_1x_n & \dots & x_n^{n-1}-x_1x_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

Bu determinantın birinci sətir elementlərinə nəzərən ayrılışını yazıb, həm də ortaq vuruqları determinant işarəsi xaricinə çıxarsaq:

$$W_n=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2-x_1)\\ x_3-x_1 & x_3(x_3-x_1) & \dots & x_3^{n-2}(x_3-x_1)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_n-x_1 & x_n(x_n-x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}=$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)\underbrace{\begin{vmatrix}1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2}\\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}}_{W_{n-1}}.$$

Burada axırıncı W_{n-1} vuruğu yenə də Vandermond determinantıdır, lakin tərtibi $(n-1)$-dir. $(n-1)$ tərtibli belə determinant üçün (1) düstunun doğruluğunu qəbul etmişik. Bu o deməkdir ki:

$$W_{n-1}=\prod_{2\leq j<i\leq n}(x_i-x_j).$$

Onda: $W_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)\prod_{2\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)=\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)$.

Düstur isbat olunur.

NƏTİCƏ. *Vandermond determinantının sıfra bərabər olması üçün hasildə iştirak edən vuruqlardan, yəni x_i-x_j $(1\leq j<i\leq n)$ fərqlərindən heç olmasa birinin sıfra bərabər olması həm zəruri, həm də kafidir.*

Elementini dəyişdirmək üsulu ilə determinantı hesablamaq. Bu üsul aşağıdakı xassəyə asaslanır: *əgər D determinantının bütün elementləri üzərinə eyni bir b ədədini əlavə etsək, bu determinant, öz elementlərinin hamısının cəbri tamamlayıcıları cəminin b ədədi ilə hasili qədər artmış olar*; belə ki:

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix},\quad D'=\begin{vmatrix}a_{11}+b & a_{12}+b & \dots & a_{1n}+b\\ a_{21}+b & a_{22}+b & \dots & a_{2n}+b\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1}+b & a_{n2}+b & \dots & a_{nn}+b\end{vmatrix}$$

olduqda

$$D'=D+b\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}. \qquad (1)$$

Doğrudan da, əgər D' determinantını məlum xassəyə əsasən hər bir sətrinə görə iki determinantın cəmi kimi göstərsək, toplanan determinantların bir çoxunun birdən artıq sətirləri ancaq b-lərdən ibarət olacaq və belə determinantların sıfra bərabər olmasını isə bilirik. Ancaq bir sətri b-lərdən ibarət olan determinantlar qalır ki, bunları da həmin sətrə nəzərən ayırsaq, məhz (1) düsturu alınar.

Göstərilən üsulun tətbiqi o zaman əlverişlidir ki, D-nin bütün elementlərini eyni bir ədəd qədər dəyişdirdikdə alınan determinantın elementlərinin cəbri tamamlayıcılarını hesablamaq asan olsun.

Misal.

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1 & x & x & \dots & x\\ x & a_2 & x & \dots & x\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ x & x & x & \dots & a_n\end{vmatrix}.$$

Bu determinantın hər bir elementindən x-i çıxaq:

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1-x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2-x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{vmatrix}.$$

Göründüyü kimi, bu determinantının baş diaqonal elementlərindən başqa qalan elementlərinin cəbri tamamlayıcıları sıfra bərabərdir. Baş diaqonal elementlərindən hər birinin cəbri tamamlayıcıları isə o biri elementlərin hasilinə bərabərdir. Ona görə də:

$$D_n=(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)+x\sum_{i=1}^{n}(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_{i-1}-x)(a_{i+1}-x)\dots\times$$
$$\times(a_n-x)=x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\dots+\frac{1}{a_n-x}\right).$$

Verilmiş determinantın bütün sütun (sətir) elementlərini uyğun olaraq $b_1,b_2,\dots,b_n$ qədər artırmaqla bu xassəni aşağıdakı kimi ümumiləşdirmək olar:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D'=\begin{vmatrix} a_{11}+b & a_{12}+b & \dots & a_{1n}+b \\ a_{21}+b & a_{22}+b & \dots & a_{2n}+b \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n1}+b & a_{n2}+b & \dots & a_{nn}+b \end{vmatrix}$$

olduqda

$$D'=D+b_1\sum_{i=1}^{n}A_{i1}+b_2\sum_{i=1}^{n}A_{i2}+\dots+b_n\sum_{i=1}^{n}A_{in}. \qquad (2)$$

Doğrudan da, əgər n-tərtibli D'-i bütün sütunlara nəzərən determinantlar cəminə ayırsaq, onda 2^n sayda n-tərtibli determinantın cəmindən ibarət olacaq. Bunlardan $2^n-(n+1)$ sayının iki sütunu mütənasib olduğundan sıfra bərabərdir və nəticədə:

$$D'=D+\underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_1 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{Db_1}+\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & b_2 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_2 & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{Db_2}+\dots+$$
$$+\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & b_n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & b_n \end{vmatrix}}_{Db_n}.$$

Bu cəmdəki $Db_1, Db_2,\dots,Db_n$ determinantlarını uyğun olaraq birinci, ikinci və s. n-ci sütunlara görə açsaq, (2) bərabərliyini alarıq:

$$D'=D+(b_1A_{11}+b_1A_{21}+\dots+b_1A_{n1})+(b_2A_{12}+b_2A_{22}+\dots+b_2A_{n2})+\dots+$$
$$+(b_nA_{1n}+b_nA_{2n}+\dots+b_nA_{nn})=D+b_1\sum_{i=1}^{n}A_{i1}+b_2\sum_{i=1}^{n}A_{i2}+\dots+b_n\sum_{i=1}^{n}A_{in}.$$

Bu qayda ilə aşağıdakı bərabərliyin doğru olduğunu isbat etmək olar:

$$D''=\begin{vmatrix} a_{11}-b_1 & a_{12}-b_2 & \dots & a_{1n}-b_n \\ a_{21}-b_1 & a_{22}-b_2 & \dots & a_{2n}-b_n \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n1}-b_1 & a_{n2}-b_2 & \dots & a_{nn}-b_n \end{vmatrix}=$$
$$=D-b_1\sum_{i=1}^{n}A_{i1}-b_2\sum_{i=1}^{n}A_{i2}-\dots-b_n\sum_{i=1}^{n}A_{in}. \qquad (3)$$

(2) və (3) bərabərliklərini toplasaq:

$$D'+D''=2D,$$

buradan da

$$D=\frac{D'+D''}{2}. \qquad (4)$$

Xüsusi halda, D' və D'' determinantlarında $b_1=b_2=\dots=b_n=c$ olarsa, onda verilmiş determinant üçün:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_{11}+c & a_{12}+c & \dots & a_{1n}+c \\ a_{21}+c & a_{22}+c & \dots & a_{2n}+c \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n1}+c & a_{n2}+c & \dots & a_{nn}+c \end{vmatrix}+$$
$$+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_{11}-c & a_{12}-c & \dots & a_{1n}-c \\ a_{21}-c & a_{22}-c & \dots & a_{2n}-c \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n1}-c & a_{n2}-c & \dots & a_{nn}-c \end{vmatrix} \qquad (6)$$

bərabərliyini alarıq.

Determinantların vurulmasına aid teoremin tətbiqi ilə hesablama üsulu. Bu üsula əsasən verilmiş D determinantını xüsusi seçilmiş və D ilə eyni tərtibə malik olan bir Δ determinantına vurduqdan sonra D-ni hasildən tapırlar.

Misal.

a) $$D=\begin{vmatrix} (b_0+a_0)^n & (b_1+a_0)^n & \dots & (b_n+a_0)^n \\ (b_0+a_1)^n & (b_1+a_1)^n & \dots & (b_n+a_1)^n \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ (b_0+a_n)^n & (b_1+a_n)^n & \dots & (b_n+a_n)^n \end{vmatrix}.$$

Göründüyü kimi, bu determinantın hər bir elementi n - dərəcəli binomdur:

$$(b_i+a_j)^n = b_i^n + C_n^1 b_i^{n-1} a_j + C_n^2 b_i^{n-2} a_j^2 + \ldots + C_n^2 b_i^2 a_j^{n-2} + C_n^1 b_i a_j^{n-1} + a_j^n$$

$$(i=0,1,2,\ldots,n \text{ və } j=0,1,2,\ldots,n).$$

Verilən determinantı aşağıdakı iki determinantın hasili kimi göstərmək olar:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 a_0 & C_n^2 a_0^2 & \ldots & a_0^n \\ 1 & C_n^1 a_1 & C_n^2 a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & C_n^1 a_n & C_n^2 a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0^n & b_1^n & \ldots & b_n^n \\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & \ldots & b_n^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Birinci determinantda müvafiq sütunlardan $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$ vuruqlarını çıxardıqdan sonra, həm buradan alınan determinant və həm də ikinci determinant Vandermond tipli determinantdır. Ona görə də:

$$D = C_n^1 C_n^2 \ldots C_n^n \prod_{0\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_j-b_i).$$

b) $$D=\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ -y & x & u & -z \\ -z & -u & x & y \\ -u & z & -y & x \end{vmatrix}.$$

Bu determinantın özünü özünə vurduqda diaqonal elementləri $x^2+y^2+z^2+u^2$ cəmindən ibarət olan üçbucaq determinant alınar.

Deməli,

$$D^2=\left(x^2+y^2+z^2+u^2\right)^4,$$

buradan isə

$$D=\pm\left(x^2+y^2+z^2+u^2\right)^2.$$

$\pm$ işarələrinin seçilməsi belə müəyyənləşdirilir. Determinantın ifadəsində baş diaqonal elementlərin hasili olan x^4 həddi determinanta müsbət işarə ilə daxildir. Ona görə də:

$$D=\left(x^2+y^2+z^2+u^2\right)^2.$$

İndi isə

$$D=\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}$$

determinantını götürək. Bu determinantı:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}\neq 0$$

determinantına vuraq. Determinantların vurulması qaydasına görə:

$$D\cdot\Delta=\begin{vmatrix} -a+b+c+d & a-b+c+d & a+b-c+d & a+b+c-d \\ b-a+d+c & -b+a+c+d & -b-a-d+c & -b-a+d-c \\ c+d-a+b & -c-d-a+b & -c+d+a+b & -c+d-a-b \\ d+c+b-a & -d-c+b-a & -d+c-b-a & -d+c+b+a \end{vmatrix}.$$

Birinci sütundan $(b+c+d-a)$, ikincisindən $-(a+c+d-b)$, üçüncüsündən $-(a+b+d-c)$, dördüncüsündən isə $-(a+b+c-d)$ vuruqlarını mötərizə xaricinə çıxaraq:

$$D\cdot\Delta=-(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)\times$$

$$\times\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Sağ tərəfdə Δ determinantı yenidən vuruq kimi iştirak edir. Hər tərəfi Δ - ya $(\Delta\neq 0)$ ixtisar edək:

$$D=-(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d).$$

Çox zaman isə verilən D determinantı mürəkkəb olduqda onu sadə determinantların hasili şəklində göstərib, vuruqları hesablamaqla D - nin özünü tapırlar.

§ 2.9. Determinantın n məchullu n xətti tənliklər sisteminə tətbiqi. Kramer teoremi, Kramer qaydası

Tutaq ki, n məchullu n xətti cəbri tənliklər sistemi verilmişdir:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1j}x_j+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2j}x_j+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{in}x_n=b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nj}x_j+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Məqsədimiz bu sistemin həllini n tərtibli determinantlar vasitəsilə verməkdir.

Bu sistemin məchullarının əmsallarından düzələn

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinantını sistemin «əsas determinantı» və ya sadəcə olaraq «sistemin determinantı», lakin bu determinantın 1-ci, 2-ci, ..., n-ci sütunlarının elementlərinin ardıcıl olaraq sistemin $b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_n$ sərbəst hədləri ilə əvəz edilməsindən alınan $D_1, D_2, \dots, D_j, \dots, D_n$ determinantlarını isə sistemin «yardımçı determinantları» adlandırırlar. Sistemin ixtiyari D_j $(1\le j\le n)$ determinantı aşağıdakı kimi olar:

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i,j-1} & b_i & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1,2,\dots,n).$$

Burada D-nin j-ci sütununun $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ elementləri uyğun olaraq $b_1, b_2, \dots, b_n$ ilə əvəz edilmişdir. Məsələn, xüsusi halda

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \dots, \ D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

İndi n məchulu n tənliyi olan (1) sisteminin həllinə aid Kramer teoremi ilə tanış olaq.

TEOREM. *n məchullu n xətti sistemin D determinantı sıfırdan fərqlidirsə, onda onun yeganə həlli var və onlar*

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n=\frac{D_n}{D} \qquad (K)$$

düsturları ilə tapılır.

İSBATI. Əvvəlcə fərz edək ki, sistem birgədir və onun $\alpha=(\alpha_1;\alpha_2;\dots;\alpha_n)$ həlli var. Onda aydındır ki, $x_i=\alpha_i$ $(i=\overline{1,n})$ yazsaq aşağıdakı doğru bərabərliklər alınacaq:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\dots+a_{1j}\alpha_j+\dots+a_{1n}\alpha_n=b_1, \\ a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\dots+a_{2j}\alpha_j+\dots+a_{2n}\alpha_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\dots+a_{ij}\alpha_j+\dots+a_{in}\alpha_n=b_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\dots+a_{nj}\alpha_j+\dots+a_{nn}\alpha_n=b_n. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Bu bərabərliklərin hər tərəfini uyğun olaraq D determinantının j-ci sütun elementlərinin cəbri tamamlayıcılarına, yəni $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{nj}$ ədədlərinə vurub alınan nəticələri toplayaq:

$$(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\dots+a_{n1}A_{nj})\alpha_1+(a_{12}A_{1j}+a_{22}A_{2j}+\dots+a_{n2}A_{nj})\alpha_2+\dots+$$
$$+(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{nj}A_{nj})\alpha_j+\dots+(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+\dots+a_{nn}A_{nj})\alpha_n=$$
$$=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\dots+b_nA_{nj}. \qquad (3)$$

Məlum teoremə görə alınan bərabərliyin sol tərəfində yalnız α_j-nin əmsalı D-yə, qalan α_s-lərin $(s=1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,n)$ hər birinin əmsalı sıfra bərabər olar. (3) bərabərliyinin sağ tərəfi isə D_j-nin j-ci sütun elementlərinə nəzərən ayrılışıdır. Deməli, (3) bərabərliyi $D\alpha_j=D_j$ şəklinə düşür ki, burada da şərtə görə $D\neq 0$ olduğundan aşağıdakı kimi birqiymətli təyin edilən

$$\alpha_j=\frac{D_j}{D} \quad (j=\overline{1,n})$$

alırıq. Deməli, (1) sistemi birgədirsə, onda o

$$\alpha_1=\frac{D_1}{D}, \quad \alpha_2=\frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad \alpha_n=\frac{D_n}{D} \qquad (K')$$

yeganə həllə malikdir.

İndi göstərək ki, (K') kimi təyin edilən $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ədədləri həqiqətən (1) tənliklər sisteminin həllidir.

(1) sisteminin ixtiyari

$$a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\dots+a_{ij}\alpha_j+\dots+a_{in}\alpha_n=b_i. \ (i=1,2,\dots,n)$$

tənliyində bunu yoxlaya bilərik.

Aydınlıq və sadəlik naminə bunu verilən sistemin birinci tənliyində yoxlayaq, yəni göstərək ki:

$$a_{11}\frac{D_1}{D}+a_{12}\frac{D_2}{D}+\ldots+a_{1n}\frac{D_n}{D}=b_1,$$

yaxud: $\frac{1}{D}\left[a_{11}D_1+a_{12}D_2+\ldots+a_{1n}D_n\right]=b_1$.

Sol tərəfdəki $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$ yardımçı determinantlarının müvafiq sütun elementləri üzrə ayrılışlarından istifadə etməklə aşağıdakını alarıq:

$$\frac{1}{D}[a_{11}(b_1A_{11}+b_2A_{12}+b_3A_{13}+\ldots+b_nA_{1n})+a_{12}(b_1A_{21}+b_2A_{22}+b_3A_{23}+\ldots+b_nA_{2n})+$$
$$+a_{13}(b_1A_{31}+b_2A_{32}+b_3A_{33}+\ldots+b_nA_{3n})+\ldots+a_{1n}(b_1A_{n1}+b_2A_{n2}+b_3A_{n3}+\ldots+b_nA_{nn})]=$$
$$=\frac{1}{D}[(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+\ldots+a_{1n}A_{1n})b_1+(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}+\ldots+a_{1n}A_{2n})b_2+$$
$$+(a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}+\ldots+a_{1n}A_{3n})b_3+\ldots+(a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+a_{13}A_{n3}+\ldots+a_{1n}A_{nn})b_n]$$

Burada məlum teoremə əsasən yalnız b_1 - in əmsalı D determinantının özünə, qalanları isə, yəni b_2 - nin, b_3 - ün, ..., b_n - in əmsalları sıfra çevrilən cəmlərdir. Onda $\frac{1}{D}\cdot Db_1=b_1$ alarıq. Deməli, birinci tənlik ödənir. Bu qayda ilə (K') ədədləri (1) sisteminin qalan tənliklərini də ödədiyini yoxlamaq olar.

Beləliklə, tənliklərinin sayı məchullarının sayı ilə eyni olan (1) sisteminin determinantı $D\neq 0$ olanda onun $x_j=\alpha_j=\frac{D_j}{D}$ kimi tapılan yeganə həlli var və o: $x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \ldots,\ x_n=\frac{D_n}{D}$ (K) düsturları vasitəsilə təyin edilir.

Teorem isbat olunur.

(K) düsturları Kramer düsturları və ya Kramer qaydası adı ilə məşhurdur.

Qeyd. Xatırlayaq ki, bu düsturların xüsusi halları ($n=2,3$) ilə biz yuxarıda 2 və 3 tərtibli determinantlarla tanış olanda rastlaşmışdıq. Orada, məsələn, üçməchullu tənliklər sistemi üçün $x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}$,

$x_3=\frac{D_3}{D}$ düsturlarının çıxarışında tənlikləri seçilmiş müəyyən ədədlərə vurub tərəf-tərəfə toplayırdıq. İndi o vuruqların seçilməsi sirri aşkar olur, yəni aydın olur ki, x_1 - i tapanda tənliklərin hər iki tərəfini uyğun olaraq D - nin x_1 - in əmsallarından ibarət olan birinci sütun elementlərinin, yəni a_{11}, a_{21}, a_{31} - in A_{11}, A_{21}, A_{31} cəbri tamamlayıcılarına; x_2 - ni tapanda bu məchulun D_2 - nin 2-ci sütununda dayanan a_{12}, a_{22}, a_{32} elementlərinin A_{12}, A_{22}, A_{32} cəbri tamamlayıcılarına; nəhayət, x_3 - ü tapanda x_3 - ün əmsallarının D determinantının 3-cü sütunundakı a_{13}, a_{23}, a_{33} elementlərinin cəbri tamamlayıcılarına vurub tənlikləri tərəf-tərəfə toplayırdıq. Bu yolla hər dəfə məchulların ikisi yox olur, biri qalırdı və üç məchullu tənliklər sistemi üçün asanlıqla Kramer düsturlarını alırdıq (iki məchullu iki tənliklər sistemi üçün də buna oxşar izahat vermək olar).

* * *

Sonda Kramer qaydasının n məchullu n xətti bircins tənliklər sisteminə tətbiqinə baxaq.

Əvvələn, bunu bilirik ki,

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0, \end{array}\right\} \qquad (4)$$

bircins tənliklər sisteminin heç olmasa $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ kimi bir sıfır (və ya trivial) həlli həmişə var.

Digər tərəfdən isə göründüyü kimi bu sistem üçün yardımçı D_j ($j=1,2,\ldots,n$) determinantlarının hamısı sıfra bərabərdir (belə ki, bu determinantların hökmən bir sütun elementləri hamısı sıfırlardan ibarətdir). İndi əgər bu sistemin determinantı $D\neq 0$ olarsa onda Kramer qaydasına görə bunun yeganə bir sıfır həlli var: $x_1=0, x_2=0, \ldots, x_n=0$.

İndi belə bir suala cavab verməyə çalışaq ki, bu bircins sistemin sıfırdan fərqli həlli də varsa, bu hansı halda mümkündür?

Əgər sistemin $x_1=\alpha_1, x_2=\alpha_2, \ldots, x_n=\alpha_n$ sıfır olmayan həlli olsa, yəni $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ədədlərindən heç olmasa biri, məsələn, $\alpha_s\neq 0$ ($1\leq s\leq n$) olsa, onda bir anlığa Kramer düsturunu xatırlayaq.

$\alpha_s \cdot D = D_s$ bərabərliyini yaza bilərik. Burada $\alpha_s \neq 0$ və $D_s = 0$ olduğundan hökmən bu bərabərlikdən $D = 0$ alırıq. Bu isə o deməkdir ki, əgər (4) bircins sisteminin sıfırdan fərqli həlli varsa bu yalnız $D = 0$ olanda mümkündür.

Buradan isə bu nəticəyə gəlmək olur ki: *n məchullu n xətti bircins tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli («qeyri-trivial») həlli olması üçün onun determinantının sıfra bərabər olması zəruri şərtdir.*

Növbəti fəsildə görəcəyik ki, bu şərt həm də kafidir, yəni $D = 0$ olduqda (4) sisteminin sıfırdan fərqli həlləri var.

FƏSİL 3

XƏTTİ CƏBRİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN ÜMUMİ NƏZƏRİYYƏSİ

§ 3.1. n-ölçülü vektorlar sisteminin xətti asılılığı

Tutaq ki, n-ölçülü vektorların arifmetik fəzasında hər biri n-ölçülü olan

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \tag{1}$$

s dənə sayda vektorların sistemi verilib. Bunları koordinatlarla yazaq:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \\ \alpha_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_s &= (a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn}). \end{aligned}\right\}$$

TƏRİF 1. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ *vektorlar sistemi üçün heç olmasa biri sıfırdan fərqli olan və*

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_s\alpha_s = \theta \tag{*}$$

bərabərliyini ödəyən $c_1, c_2, \ldots, c_s$ *ədədləri varsa, onda verilmiş vektorlar sisteminə xətti asılı sistem, əksinə, bu vektorlar sistemi üçün* (*) *bərabərliyi yalnız* $c_1 = c_2 = \ldots = c_s = 0$ *olduqda ödənərsə, onda sistemə xətti asılı olmayan və yaxud da «qeyri-asılı» sistem deyilir.*

Qısa yazılış şəklindən istifadə etsək, (1) sisteminin xətti asılı olmasını

$$\sum_{i=1}^{s} c_i\alpha_i = \theta \quad \text{və} \quad \exists c_i \neq 0, \ i \in \{1, 2, \ldots, s\}$$

kimi də yaza bilərik.

TƏRİF 2. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *kimi s dənə ixtiyari ədədlərlə* (1) *vektorlar sisteminin uyğun hasilləri cəminə, yəni*

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_s\alpha_s \qquad (2)$$

ifadəsinə (1) *vektorlar sisteminin xətti kombinasiyası,* λ_i *ədədlərinə* $(i=\overline{1,s})$ *xətti kombinasiyanın əmsalları deyilir.*

Aydındır ki, (2) cəmi bir n-ölçülü vektor verir. Bu vektoru β ilə işarə etsək, onda

$$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_s\alpha_s \qquad (3)$$

bərabərliyi alınır ki, bu halda deyirlər ki, β *vektoru* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ *vektorlarının xətti kombinasiyasından ibarətdir.*

Çox zaman β vektorunun $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ vektorlarının xətti kombinasiyasından ibarət olması faktını β vektorunun $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ vektorları vasitəsilə xətti ifadə olunması adlandırırlar. (3) bərabərliyi β-nın $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ vektorları vasitəsilə xətti ifadə olunması deməkdir.

İndi vektorlar sisteminin xətti asılılığı ilə əlaqədar olan aşağıdakı vacib bir teorem ilə tanış olaq.

TEOREM. $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ $(s\ge 2)$ *vektorlar sisteminin xətti asılı olması üçün bu sistemin vektorlarının birinin digərləri ilə xətti ifadə edilə bilməsi həm zəruri, həm də kafidir.*

İSBATI. Tutaq ki, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ n-ölçülü vektorlar sistemi xətti asılıdır. Göstərməliyik ki, onda bunların biri sistemin qalan vektorlarının xətti kombinasiyasından ibarətdir.

Əgər (1) sistemi xətti asılıdırsa, onda tərifə görə heç olmasa biri sıfırdan fərqli olan və

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_s\alpha_s = \theta$$

bərabərliyini ödəyən $c_1,c_2,\ldots,c_s$ ədədləri vardır. Ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, $c_s \ne 0$. Onda n-ölçülü vektorlar üzərində toplama və ədədə vurma əməllərinin təyin edilməsi və bu əməllərlə əlaqədar olan xassələrin köməyi ilə taparıq ki:

$$c_s\alpha_s = -c_1\alpha_1 - c_2\alpha_2 - \ldots - c_{s-1}\alpha_{s-1},$$

və ya

$$\alpha_s = -\frac{c_1}{c_s}\alpha_1 - \frac{c_2}{c_s}\alpha_2 - \ldots - \frac{c_{s-1}}{c_s}\alpha_{s-1}$$

alarıq. Burada $-\frac{c_i}{c_s} = \lambda_i$ işarə etsək $(i=1,2,\ldots,s-1)$

$$\alpha_s = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_{s-1}\alpha_{s-1} \qquad (4)$$

alarıq. Yəni taparıq ki, α_s vektoru qalan $s-1$ dənə vektor vasitəsilə xətti ifadə edilir.

Aşkardır ki, biz c_s əvəzinə c_i əmsallarından istənilən birini sıfırdan fərqli fərz etsək yenə də bu nəticəyə gələrdik.

İndi fərz edək ki, vektorlardan biri sistemin qalan vektorları ilə xətti ifadə olunub, yəni, məsələn, (4) bərabərliyi doğrudur. Göstərək ki, (1) sistemi xətti asılıdır.

(4)-dən alarıq ki:

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_1\alpha_2 + \ldots + \lambda_{s-1}\alpha_{s-1} - \alpha_s = \theta \qquad (5)$$

İndi əgər buradakı $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{s-1}$ əmsalları içərisində sıfırdan fərqlisi olmasa belə α_s-in -1 əmsalı sıfır deyil. Deməli, sistem xətti asılıdır (tərifdəki c_i əmsalları yerində burada λ_i əmsalları dayanır və bunlardan birinin, yəni α_s-in əmsalı $\lambda_s = -1 \ne 0$).

Çox zaman bu teoremi n-ölçülü vektorların xətti asılılığının digər bir tərifi kimi də qəbul edirlər; belə ki: $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ $(s\ge 2)$ *vektorlar sisteminin vektorlarından hər-hansı biri sistemin qalan vektorlarının xətti kombinasiyası olarsa, sistemə xətti asılı, əksinə, bu sistemin vektorlarının heç birisi qalanları vasitəsilə xətti ifadə edilə bilməzsə ona xətti asılı olmayan (qeyri-asılı) sistem deyilir.*

Teoremin isbatı göstərir ki, bu tərif əvvəlki tərif ilə $s\ge 2$ olduqda ekvivalentdir.

Tərif və teoremdən xüsusi hal kimi alınan aşağıdakı nəticələri bilmək də faydalıdır.

NƏTİCƏ 1. *Sistem təkcə bir vektordan ibarətdirsə, onda bunun xətti asılı olması üçün bu vektorun sıfır olması həm zəruri, həm də kafidir.*

Bu nəticənin doğruluğu tərifdən aydındır; belə ki, sistem təkcə bir α vektorundan ibarətdirsə, onda tərifə görə onun xətti asılı olması üçün $c\alpha=\theta$ bərabərliyində $c\ne 0$ olmalıdır; buradan isə $\alpha=\theta$ alınır. Əksinə, əgər $c\alpha=\theta$ bərabərliyində $\alpha\ne\theta$ isə onda $c=0$ olmalıdır ki, bu da α-nın xətti asılı olmadığını dələlət edir.

Digər bir nəticə vektorların mütənasibliyi ilə əlaqədardır.

$$\alpha=(a_1;a_2;\ldots;a_n), \qquad \beta=(b_1;b_2;\ldots;b_n)$$

vektorları arasında $\alpha=\lambda\beta$, yəni

$$(a_1;a_2;\ldots;a_n)=(\lambda b_1;\lambda b_2;\ldots;\lambda b_n)$$

münasibəti varsa, bunlara mütənasib vektorlar deyirlər, burada λ - ixtiyari ədəd olub mütənasiblik əmsalı adlanır.

Biz burada vektorlar arasında xətti ifadə edilmə anlayışının mütənasibliyin ümumiləşməsi ilə üzləşirik.

NƏTİCƏ 2. *Sistem iki α və β vektorlarından ibarətdirsə, onda sistemin xətti asılı olması üçün bu iki vektorun mütənasib olması həm zəruri, həm də kafidir.*

İSBATI. Nəticənin doğruluğu teoremdən (və ya xətti asılılığın tərifindən) aydın olur. Belə ki, əgər bunlar xətti asılıdırsa onda bunlardan biri digəri vasitəsilə xətti ifadə olunmalıdır: $\alpha=\lambda\beta$, yəni α və β mütənasibdir (burada λ ədədi mütənasiblik əmsalıdır). Əksinə, bunların mütənasib olması, yəni $\alpha=\lambda\beta$ bərabərliyinin ödənməsi bunların birinin digəri ilə xətti ifadə olunması və deməli xətti asılılıq münasibətində olmaları deməkdir.

Xətti asılılığa aid misal göstərək.

Misal 1. $\alpha_1=(18,11,5,-2)$ vektoru $\alpha_2=(2,4,1,-1)$, $\alpha_3=(-2,0,3,0)$, $\alpha_4=(4,1,2,0)$ vektorlarının xətti kombinasiyasıdır, yəni:

$$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3+3\alpha_4 \qquad \text{(Yoxlayın!)}.$$

Deməli, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ vektorlar sistemi xətti asılıdır. Bu həm də o deməkdir ki:

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3+c_4\alpha_4=\theta$$

bərabərliyini ödəyən c_1, c_2, c_3, c_4 əmsallarından heç olmasa biri sıfırdan fərqli olmalıdır. Doğrudan da, $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3+3\alpha_4$ bərabərliyindən $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3-3\alpha_4=\theta$ bərabərliyindən aşkar görünür ki:

$$c_1=1,\ c_2=-2,\ c_3=1,\ c_4=-3.$$

Misal 2. $\alpha_1=(2;1;0)$, $\alpha_2=(0;-2;1)$, $\alpha_3=(1;2;-1)$ vektorlar sisteminin xətti asılı olub olmadığını təyin edək.

Tərifə görə bu sistemin xətti asılı olub olmaması

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3=\theta \tag{*}$$

bərabərliyini ödəyən c_1,c_2,c_3 ədədlərinin sıfra bərabər olub olmamaları ilə bağlıdır. Aşkardır ki, verilən misal üçün bərabərlik münasibəti

$$(2c_1+c_3;c_1-2c_2+2c_3;c_2-c_3)=(0;0;0)$$

şəklində olacaq. Buradan iki vektorun bərabərliyindən

$$\left.\begin{aligned}&2c_1+c_3=0,\\&c_1-2c_2+2c_3=0,\\&c_2-c_3=0.\end{aligned}\right\}$$

bircins tənliklər sistemi alırıq. Bilirik ki, bu sistemin sıfır həlli həmişə var. Lakin bunun determinantı

$$D=\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-2&2\\0&1&-1\end{vmatrix}\neq 0$$

sıfır olmadığı üçün Kramer teoreminə görə bu sistemin yeganə həlli olmalıdır, yəni $c_1=c_2=c_3=0$. Deməli, verilən vektorlar sistemi üçün (*) bərabərliyi buradakı əmsalların yalnız $c_1=0,c_2=0,c_3=0$ qiymətlərində ödənə bilir. Odur ki, verilən vektorlar sistemi xətti asılı deyil.

Aşağıdakı misalları həll edin:

1. Aşağıdakı n - ölçülü vektorlan fəzasının «vahid vektorları» adlanan

$$\varepsilon_1=(1;0;0;\ldots;0)$$
$$\varepsilon_2=(0;1;0;\ldots;0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varepsilon_n=(0;0;0;\ldots;1)$$

sisteminin xətti asılı sistem olmadığını göstərin.

2.
$$\alpha_1=(a_{11};a_{12};a_{13};\ldots;a_{1k};\ldots;a_{1n}),$$
$$\alpha_2=(a_{21};a_{22};a_{23};\ldots;a_{2k};\ldots;a_{2n}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_k=(a_{k1};a_{k2};a_{k3};\ldots;a_{kk};\ldots;a_{kn}).$$

şəklində olan vektorlar sisteminin $a_{ii}\neq 0$ $(i=\overline{1,k})$ olduqda xətti asılı sistem olmadığını isbat edin.

§ 3.2. Altsistem anlayışı. Xətti asılılığın əsas xassələri

TƏRİF. *n - ölçülü*

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s \tag{1}$$

vektorlar sisteminin vektorlarından ibarət olan

$$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_k} \quad (k\le s) \tag{2}$$

sisteminə (1)*-in altsistemi, yaxud hissəsi deyilir.*

Xüsusi halda sistemi əmələ gətirən hər bir vektor və sistemin özü də bu sistemin altsistemi (başqa sözlə, hissəsi) olur.

Sistemi, onun hissəsinin vektorlarının necə nömrələnməsinin onların xətti asılılığına və qeyri-asılılığına təsiri olmadığından orada yenidən nömrələmə aparıb altsistemi həmişə

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \quad (k \le s) \qquad (1')$$

kimi yaza bilərik (bunun mümkünlüyü xətti asılılığın tərifindən bilavasitə aşkardır).

İndi isə altsistem və xətti asılılıq anlayışlarına bilavasitə aid olan aşağıdakı xassələr ilə tanış olaq.

XASSƏ 1. *Hər-hansı bir vektor verilən vektorlar sisteminin hissəsi ilə xətti ifadə olunursa, onda sistemin özü ilə də xətti ifadə olunur.*

İSBATI. Tutaq ki, β vektoru (1) sisteminin (1′) altsistemi vasitəsilə

$$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_k\alpha_k \qquad (3)$$

xətti ifadə edilib. Onda sistemin (1′)-ə daxil olmayan $s-k$ sayda vektorlarını sıfır əmsalların köməyi ilə (2) cəminə əlavə etməklə alırıq ki:

$$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_k\alpha_k + 0\cdot\alpha_{k+1} + \dots + 0\cdot\alpha_s. \qquad (2')$$

Bu isə (1) sistemi, yəni $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ vektorları ilə xətti ifadə olunduğunu göstərir.

XASSƏ 2. *Xətti asılı altsistemə malik olan n-ölçülü vektorlar sisteminin özü də xətti asılı olur.*

İSBATI. Tutaq ki, (1) vektorlar sisteminin (1′) altsistemi xətti asılıdır. Onda tərifə görə heç olmasa biri sıfırdan fərqli olan elə $c_1, c_2, \dots, c_k$ ədədləri var ki, onlar

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_k\alpha_k = \theta$$

bərabərliyini ödəyir.

İndi bu cəmi sistemin (1′)-ə daxil olmayan $s-k$ dənə vektorlarının və $c_{k+1} = c_{k+2} = \dots = c_s = 0$ sıfır əmsallarının köməyi ilə aşağıdakı kimi «tamamlasaq», onda

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_k\alpha_k + 0\cdot\alpha_{k+1} + \dots + 0\cdot\alpha_s = \theta$$

cəmini alarıq. Buradan $c_1, c_2, \dots, c_k$ əmsallarından heç olmasa biri sıfırdan fərqli olduğu üçün tərifə görə (1) sistemi xətti asılıdır.

NƏTİCƏ. *Xətti asılı olmayan* (1) *vektorlar sisteminin altsistemi də xətti asılı deyil.*

İSBATI. Əksini fərz edək: tutaq ki, (1) vektorlar sistemi özü xətti asılı olmadığı halda onun (1′) altsistemi xətti asılıdır. Onda

yuxarıdakı xassədən belə çıxır ki, (1) özü xətti asılıdır. Bu isə şərtə ziddir. Deməli, (1′) altsistemi xətti asılı deyil.

Qeyd. 2-ci xassənin əksi doğru deyil, yəni *xətti asılı sistemin altsisteminin də xətti asılı olduğunu həmişə demək olmaz; belə ki, xətti asılı vektorlar sistemindən elə altsistem seçmək olar ki, altsistem heç də xətti asılı olmaz.*

XASSƏ 3. *s dənə vektordan ibarət olan, n-uzunluqlu («n-ölçülü») vektorları sistemində $s > n$ olarsa (yəni, vektorların sayı bunların uzunluğundan çoxdursa) onda sistem xətti asılı olur.*

İSBATI. Tutaq ki,

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = (a_{11}; a_{12}; \dots; a_{1n}), \\ \alpha_2 = (a_{21}; a_{22}; \dots; a_{2n}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_s = (a_{s1}; a_{s2}; \dots; a_{sn}). \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Şərtə görə $s > n$-dir. Xassənin doğruluğunu isbat etmək üçün göstərməliyik ki, heç olmasa biri sıfırdan fərqli olan elə $c_1, c_2, \dots, c_s$ ədədləri var ki,

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_s\alpha_s = \theta \qquad (4)$$

bərabərliyi ödənir.

(4) bərabərliyini koordinatlarla yazıb iki vektorun bərabərliyi şərtini nəzərə alsaq aşağadakı alınır:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \dots + a_{s1}c_s = 0, \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{s2}c_s = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \dots + a_{sn}c_s = 0. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

(5) bərabərlikləri məchulları $c_1, c_2, \dots, c_s$ olan s məchullu n sayda tənliyi olan bircins xətti cəbri tənliklər sistemidir. Bildiyimizə görə tənliklərinin sayı məchullarının sayından az olan belə sistemin isə sıfırdan fərqli həlləri vardır. Deməli, (4) bərabərliyini ödəyən heç olmasa biri sıfırdan fərqli olan $c_1, c_2, \dots, c_s$ əmsalları vardır. Bu isə onu göstərir ki, (1) sistemi xətti asılıdır.

Maraqlı, həm də çox mühüm əhəmiyyət kəsb edən bir xassə də «vektorların kəsikləri» və ya «qısaldılmış vektorlar» anlayışı ilə bağlıdır.

TƏRİF. *$\alpha' = (a_1; a_2; \dots; a_k)$ vektoruna $\alpha = (a_{k+1}; a_{k+2}; \dots; a_i; \dots; a_s)$ vektorunun k uzunluğa $(k < n)$ və $\alpha'' = (a_{k+1}; a_{k+2}; \dots; a_n)$ vektoruna isə onun $n-k$ uzunluğa $(k > 1)$ malik olan kəsikləri deyilir.*

Tərsinə: α *vektoruna həm α'-in, həm də α''-in «uzadılmış vektoru» deyilir.*

α-ya α'-in k-ya nəzərən ($k<n$) və ya «sağa doğru», α''-ə isə $n-k$-ya nəzərən ($k>1$) yaxud «sola doğru» uzadılmış vektoru adlandırmağı şərtləşək.

XASSƏ 4. *n-uzunluqlu*

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1=(a_{11};a_{12};\ldots;a_{1k};a_{1,k+1};\ldots;a_{1n}),\\ \alpha_2=(a_{21};a_{22};\ldots;a_{2k};a_{2,k+1};\ldots;a_{2n}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_s=(a_{s1};a_{s2};\ldots;a_{sk};a_{s,k+1};\ldots;a_{sn}).\end{array}\right\} \quad (1)$$

vektorlar sistemində xətti asılılıq varsa, bu cür asılılıq, eynilə onun uyğun k və $n-k$ uzunluqlu kəsiklərindən ibarət olan aşağıdakı «qısaldılmış» sistemlərdərdə də vardır:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1'=(a_{11};a_{12};\ldots;a_{1k}),\\ \alpha_2'=(a_{21};a_{22};\ldots;a_{2k}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_s'=(a_{s1};a_{s2};\ldots;a_{sk}).\end{array}\right\}(1') \qquad \left.\begin{array}{l}\alpha_1''=(a_{1,k+1};a_{1,k+2};\ldots;a_{1n}),\\ \alpha_2''=(a_{2,k+1};a_{2,k+2};\ldots;a_{2n}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_s''=(a_{s,k+1};a_{s,k+2};\ldots;a_{sn}).\end{array}\right\}(1'')$$

İSBATI. (1) sistemi xətti asılıdırsa, onda aydındır ki, heç olmasa biri sıfır olmayan elə $c_1,c_2,\ldots,c_s$ ədədləri var ki,

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\ldots+c_s\alpha_s=\theta \quad \textbf{(2)}$$

bərabərliyi ödənir.

(2) bərabərliyindən alırıq ki:

$$\left.\begin{array}{l}(3')\begin{cases}c_1a_{11}+c_2a_{21}+\ldots+c_sa_{s1}=0,\\ c_1a_{12}+c_2a_{22}+\ldots+c_sa_{s2}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ c_1a_{1k}+c_2a_{2k}+\ldots+c_sa_{sk}=0,\end{cases}\\ (3'')\begin{cases}c_1a_{1,k+1}+c_2a_{2,k+1}+\ldots+c_sa_{s,k+1}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ c_1a_{1,n}+c_2a_{2n}+\ldots+c_sa_{sn}=0.\end{cases}\end{array}\right\}(3)$$

(3) bərabərliklər sisteminin (3′) və (3″) «hissələrini» yenidən vektorlar vasitəsilə yazsaq uyğun olaraq

$$c_1\alpha_1'+c_2\alpha_2'+\ldots+c_s\alpha_s'=\theta \quad \textbf{(4)}$$

$$c_1\alpha_1''+c_2\alpha_2''+\ldots+c_s\alpha_s''=\theta \quad \textbf{(5)}$$

bərabərliklərini alırıq (burada $\exists c_i\neq 0,\ i\in\{\overline{1,s}\}$), bu isə onu göstərir ki, verilən (1) sisteminin malik olduğu xətti asılılıq eynilə onun (1′) və (1″) qısaldılmış sistemlərinə də aiddir.

Xassədən çıxan vacib bir nəticəni də qeyd edək.

NƏTİCƏ. *n-uzunluqlu vektorlar sisteminin hər-hansı kəsiklər sistemi xətti asılı deyilsə sistem özü xətti asılı deyil.*

Başqa sözlə: xətti asılı olmayan vektorlar sisteminin «sağa» və ya «sola» doğru uzadılmış sistemləri də xətti asılı deyil.

Nəticənin doğruluğunu göstərmək üçün (1)-in (1′) və yaxud (1″) kəsiklər sisteminin xətti asılı olmaması şərtindən uyğun olaraq (4) yaxud (5) bərabərliklərinin yalnız $c_1=c_2=\ldots=c_s=0$ olduqda ödənə biləcəyi faktına diqqət yetirilməlidir. Buradan isə (2) bərabərliyinin yalnız $c_i=0$ ($i=\overline{1,s}$) olduqda ödənməsi çıxır ki, bu da (1)-in xətti asılı olmamasını göstərir.

§ 3.3. Vektorlar sisteminin xətti ekvivalentliyi. Xətti asılılıqla əlaqədar olan «əsas teorem»

Tutaq ki,

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s, \quad (1)$$

$$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m, \quad (2)$$

$$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_t, \quad (3)$$

n-uzunluqlu vektorlar sistemi verilib.

TƏRİF 1. $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ vektorlar sisteminin hər bir vektoru $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$ vektorlar sisteminin xətti kombinasiyasından ibarətdirsə, onda deyirlər ki, (1) sisteminin vektorları (2) sisteminin vektorları ilə xətti ifadə olunur.

Qeyd. Qısa olması naminə «(1) sisteminin vektorları (2) sisteminin vektorları ilə xətti ifadə olunub» əvəzinə «(1) sistemi (2) vasitəsilə xətti ifadə olunub» sözlərini işlətməyi şərtləşək.

TƏRİF 2. (1) *sistemi* (2) *vasitəsilə və tərsinə* (2) *sistemi də* (1) *vasitəsilə xətti ifadə edilirsə, onda vektorlar sisteminə «xətti ekvivalent» və ya qısaca «ekvivalent» sistemləri deyib bunu* (1) ~ (2) *kimi işarə edirlər.*

Xatırlayaq ki, riyaziyyatda ekvivalentlik münasibəti refleksivlik, simmetriklik və tranzitivlik adlanan xassələri özündə cəmləşdirir. Belə ki, məsələn, A, B və C obyektlər sistemində ρ münasibəti: 1) $A\rho A$ (refleksivlik); 2) $(A\rho B)\Rightarrow(B\rho A)$ (simmetriklik); 3) $((A\rho B)\wedge(B\rho C))\Rightarrow(A\rho C)$ (tranzitivlik) xassələrini daşıyırsa, onda ρ münasibəti ekvivalentlik münasibəti olur: $A\sim B$.

(1), (2), (3) vektorlar sistemi arasındakı xətti ekvivalentlik münasibəti üçün də bu üç xassənin doğruluğunu asanlıqla göstərmək olar.

Vektorlar sistemlərinin birinin digəri ilə xətti ifadə olunması ilə əlaqədar olan, habelə, ekvivalentlik münasibətinin xassələrinə xeyli aydınlıq gətirən və sonrakı şərhlərimizdə bizə gərək olacaq tranzitivlik xassəsinin doğruluğunu göstərək, yəni aşağıdakı teoremi isbat edək.

TEOREM. (1) *vektorlar sistemi* (2) *və* (2) *vektorlar sistemi də* (3) *vasitəsilə xətti ifadə oluna bilirsə, onda* (1) *sistemi* (3) *ilə xətti ifadə oluna bilir.*

İSBATI. (1) sistemi (2) ilə xətti ifadə olunduğundan

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{m}\xi_{ij}\beta_j,\quad i=\overline{1,s}. \tag{4}$$

Öz növbəsində (2) isə (3) ilə xətti ifadə olunduğundan

$$\beta_j=\sum_{k=1}^{t}\eta_{jk}\gamma_k,\quad j=\overline{1,m}. \tag{5}$$

yaza bilərik.

İndi β_j - nin (5) ifadəsini (4)-də yerinə yazıb

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{m}\xi_{ij}\sum_{k=1}^{t}\eta_{jk}\gamma_k=\sum_{k=1}^{t}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m}\xi_{ij}\eta_{jk}\right)}_{\lambda_k}\gamma_k=\sum_{k=1}^{t}\lambda_k\gamma_k$$

alırıq.

Bu isə göstərir ki, α_i - lər $(i=\overline{1,s})$ γ_k - lar $(k=\overline{1,t})$ ilə xətti ifadə olunmuşlar.

Yuxarıda deyilənlərdən aşkar olan aşağıdakı nəticələri qeyd edək.

NƏTİCƏ 1. *Hər-hansı bir vektor bir-biri ilə ekvivalent olan iki vektorlar sisteminin birisi ilə xətti ifadə oluna bilirsə, onda o vektor o biri sistem ilə də xətti ifadə oluna bilir.*

Doğrudan da, məsələn, hər-hansı bir γ_0 vektoru (1) sistemi ilə xətti ifadə edilə bilirsə və $(1)\sim(2)$ isə onda tranzitivlik haqqında indicə isbat etdiyimiz teoremə görə həmin γ_0 vektoru (2) ilə də ifadə olunacaqdır.

NƏTİCƏ 2. *İki vektorlar sistemi ayrı-ayrılıqda üçüncü bir vektorlar sistemi ilə ekvivalentdirsə, onda onlar öz aralarında da ekvivalentdirlər.*

Doğrudan da, məsələn, $(1)\sim(3)$ və $(2)\sim(3)$ isə onda simmetriklik və tranzitivlik xassəsinə görə

$$\left.\begin{array}{l}(2)\sim(3)\Rightarrow(3)\sim(2)\\(1)\sim(3)\Rightarrow(3)\sim(1)\end{array}\right\}((1)\sim(3))\wedge((3)\sim(2))\Rightarrow(1)\sim(2).$$

İndi isə xətti ifadə olunma və xətti asılılıqla əlaqədar olan və adətən «əsas teorem» adlandırılan teorem ilə tanış olaq.

TEOREM. *n - ölçülü vektorların*

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s, \tag{1}$$

$$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m \tag{2}$$

sistemlərindən (1) *xətti asılı deyilsə və* (2) *sistemi vasitəsilə xətti ifadə olunursa, onda* (1) *sistemindəki vektorların sayı* (2)*-dəki vektorların sayından çox deyil:* $s\le m$.

İSBATI. Əksini fərz edək: $s>m$ olsun. Şərtə görə (1)-in hər bir vektoru (2)-nin vektorları vasitəsilə xətti ifadə olunur:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1=\lambda_{11}\beta_1+\lambda_{12}\beta_2+\ldots+\lambda_{1m}\beta_m,\\ \alpha_2=\lambda_{21}\beta_1+\lambda_{22}\beta_2+\ldots+\lambda_{2m}\beta_m,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_s=\lambda_{s1}\beta_1+\lambda_{s2}\beta_2+\ldots+\lambda_{sm}\beta_m.\end{array}\right\} \tag{3}$$

Qısa yazsaq: $$\alpha_i=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}\beta_j,\quad i=\overline{1,s}. \tag{3'}$$

(3) ifadələrinin hər birinin əmsalları nizamlanmış ədədlər sistemidir, bunlara m - ölçülü vektorlar kimi baxaraq aşağıdakı s sayda m - ölçülü

$$\left.\begin{array}{l}\gamma_1=(\lambda_{11};\lambda_{12};\ldots;\lambda_{1m}),\\ \gamma_2=(\lambda_{21};\lambda_{22};\ldots;\lambda_{2m}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \gamma_s=(\lambda_{s1};\lambda_{s2};\ldots;\lambda_{sm}).\end{array}\right\} \tag{4}$$

vektorlar sistemi alırıq. Fərziyyəmizə görə $s>m$, deməli, (4) sistemində vektorların sayı uzunluqdan çoxdur, ona görə də əvvəlki paraqrafdan (xətti asılılığın 3-cü xassəsi) aydındır ki, (4) sistemi xətti asılıdır. Onda

$$c_1\gamma_1+c_2\gamma_2+\ldots+c_s\gamma_s=\theta \tag{5}$$

bərabərliyini ödəyən heç olmasa biri sıfırdan fərqli olan $c_1,c_2,\ldots,c_s$ ədədləri vardır. Vektorların cəmi və bərabərliyinə əsasən (5)-dən (4) vektorlarının koordinatları üçün

$$\sum_{i=1}^{s}c_i\lambda_{ij}=\theta,\quad j=\overline{1,m} \tag{6}$$

alırıq.

İndi verilmiş (1) sisteminin vektorlarının

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\ldots+c_s\alpha_s$$

xətti kombinasiyasına diqqət edək. (3) və (5) bərabərliklərindən istifadə edərək

$$\sum_{i=1}^{s}c_i\alpha_i=\sum_{i=1}^{s}c_i\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}\beta_j=\sum_{j=1}^{m}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{s}c_i\lambda_{ij}\right)}_{0}\beta_j=\theta$$

alırıq; Beləliklə $\sum_{i=1}^{s}c_i\alpha_i=\theta$ bərabərliyi alınır ki, buradakı c_i əmsallarından $(i=\overline{1,s})$ heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir; buradan isə belə çıxır ki, (1) sistemi xətti asılıdır, bu isə teoremin şərtinə ziddir. Bu ziddiyyətə səbəb bizim $s>m$ əks fərziyyəmizdir. Deməli, əks fərziyyəmiz düz deyil, $s\le m$ olmalıdır.

Teorem isbat olunur.

Əsas teoremdən çıxan vacib bir nəticəni qeyd edək.

NƏTİCƏ. *Xətti asılı olmayan hər-hansı iki ekvivalent sistem eyni sayda vektorlardan ibarətdir.*

İSBATI. Doğrudan da əsas teoremdə baxdığımız (1) və (2) sistemlərinin hər ikisi xətti asılı deyilsə və bir-biri ilə xətti ifadə olunursa (yəni ekvivalentdirlərsə) onda (1) sisteminin (2) ilə xətti ifadə olunmasından $s\le m$ və əksinə, (2) sisteminin (1) ilə xətti ifadə olunmasından isə $m\le s$ alınır. $s\le m$ və $m\le s$ münasibətlərindən isə $s=m$ alınır.

§ 3.4. Vektorlar sisteminin bazisi və ranqı

Öncə n-ölçülü vektorlar sisteminin maksimal xətti asılı olmayan altsistemi anlayışı ilə tanış olaq.

TƏRİF. *n-ölçülü*

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s \tag{1}$$

vektorlar sisteminin

$$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r} \tag{1$'$}$$

altsistemi xətti asılı deyilsə, lakin (1) sistemindən ixtiyari bir vektoru (1)$'$-ə qoşduqda o xətti asılı sistemə çevrilirsə, onda (1)$'$-ə (1)-in maksimal xətti asılı olmayan altsistemi deyilir.

Bu tərifdən bilavasitə aşağıdakı aşkar nəticə alınır:

(1)-in o altsistemi maksimal xətti asılı olmayan altsistemidir ki, o özü xətti asılı deyil və (1)-in hər bir vektoru onun vasitəsilə xətti ifadə oluna bilir.

TƏRİF. *Vektorlar sisteminin maksimal xətti asılı olmayan altsistemindəki vektorlarına onun bazis vektorları (və ya bazis vektorlar sistemi), buradakı vektorların sayına isə verilən vektorlar sisteminin ranqı deyilir.*[1]

Deməli, (1)$'$ sistemi (1)-in maksimal xətti asılı olmayan altsistemidirsə, onda (1)$'$ bazis, buradakı vektorların sayı r isə (1)-in ranqıdır.

Ranqı adətən $rank(1)=r$ kimi işarə edirlər.

(1) vektorlar sisteminin $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$ bazisindəki vektorları yenidən nömrələsək burada maksimal xətti asılı olmazlıq şərtinin saxlanılmasını nəzərə almaqla bu bazisi $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ kimi yazmağı şərtləşək.

Bazis barədə aşağıdakı teoremi isbat edək.

TEOREM. *n-ölçülü vektorlar sistemi özünün hər-hansı bazisi ilə ekvivalentdir.*

İSBATI. Tutaq ki, n-ölçülü

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s \tag{1}$$

vektorlar sistemi verilib və

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r \tag{1$'$}$$

[1] «Bazis vektorlar sistemini» qısaca olaraq «sistemin bazisi» də adlandırırlar.

isə bunun bazisidir. Göstərməliyik ki: $(1)\sim(1')$. Bunun üçün (1) ilə $(1')$ - in bir-biri ilə xətti ifadə edilə bilməsini göstərməliyik.

Əvvələn, diqqət yetirək ki, $(1')$ bazis vektorlar sistemi (1)-in maksimal xətti asılı olmayan altsistemi olduğu üçün (1)-in istənilən vektoru, o cümlədən sistemin $\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\dots,\alpha_s$ kimi $n-s$ sayda hər bir vektoru $(1')$ - in xətti kombinasiyasından ibarət olmalıdır, yəni

$$\alpha_i=\lambda_{i1}\alpha_1+\lambda_{i2}\alpha_2+\ldots+\lambda_{ir}\alpha_r=\sum_{j=1}^{r}\lambda_{ij}\alpha_j,\quad i=r+1,r+2,\dots,s$$

olduğunu nəzərə alsaq, onda

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1=1\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\ldots+0\cdot\alpha_r,\\ \alpha_2=0\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2+\ldots+0\cdot\alpha_r,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_r=0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\ldots+1\cdot\alpha_r,\\ \alpha_{r+1}=\lambda_{r+1,1}\alpha_1+\lambda_{r+1,2}\alpha_2+\ldots+\lambda_{r+1,r}\alpha_r,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_s=\lambda_{s1}\alpha_1+\lambda_{s2}\alpha_2+\ldots+\lambda_{sr}\alpha_r.\end{array}\right\}\qquad(2)$$

bərabərlikləri (1)-in $(1')$ vasitəsilə xətti ifadə olunduğunu göstərir.

Aşkardır ki, tərsinə, $(1')$ sistemi də öz növbəsində (1) vasitəsilə xətti ifadə olunur, yəni

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1=1\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\ldots+0\cdot\alpha_r+\ldots+0\cdot\alpha_s,\\ \alpha_2=0\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2+\ldots+0\cdot\alpha_r+\ldots+0\cdot\alpha_s,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_r=0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\ldots+1\cdot\alpha_r+\ldots+0\cdot\alpha_s.\end{array}\right\}\qquad(3)$$

Deməli, $(1)\sim(1')$ alırıq. ▲

Bu teoremdən çox vacib bir nəticə alınır.

NƏTİCƏ. *Eyni bir vektorlar sisteminin müxtəlif bazislərindəki vektorların sayı bərabərdir.*

İSBATI. Doğrudan da, ranqları uyğun olaraq r və r' olan

$$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\dots,\alpha_{i_r}\qquad(4)$$

$$\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\dots,\alpha_{j_{r'}}\qquad(5)$$

sistemləri verilən (1) sisteminin iki müxtəlif bazisidirsə, burada $r=r'$ olmalıdır, çünki

$$((1)\sim(4))\wedge((1)\sim(5))$$

münasibətindən

$$((4)\sim(1))\wedge((1)\sim(5))\Rightarrow((4)\sim(5))$$

alınır. $(4)\sim(5)$ münasibəti isə onu göstərir ki: $r=r'$. ▲

Bu nəticə bir də ona görə vacibdir ki, ranqın tərifinə bəraət qazandırır. Belə ki, eyni bir vektorlar sisteminin müxtəlif maksimal xətti asılı olmayan altsistemləri və deməli müxtəlif bazisləri ola bilər; lakin bu bazislərdəki vektorların sayı eyni olduğundan bu say verilən vektorlar sisteminin ranqı olur.

İndi ranqa aid aşağıdakı teoremlə tanış olaq.

TEOREM 1. *Əgər*

$$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s\qquad(1)$$

$$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m\qquad(2)$$

vektorlar sistemindən (1) *sistemi* (2) *vasitəsilə xətti ifadə olunursa onda* (1)*-in ranqı* (2)*-nin ranqından böyük deyil, əgər* (1) *və* (2) *ekvivalentdirlərsə bunların ranqları bərabər olur.*

İSBATI. $rank(1)=r_\alpha$, $rank(2)=r_\beta$ olsun. Onda bunlarda aydındır ki, aşağıdakı uyğun bazislər var:

$$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\dots,\alpha_{r_\alpha},\qquad(1')$$

$$\beta_{j_1},\beta_{j_2},\dots,\beta_{r_\beta}.\qquad(2')$$

(1) sistemi (2) ilə xətti ifadə olunursa, onda aşkardır ki, bunun özünə ekvivalent olan $(1')$ bazisi də (2) ilə və (2)-nin $(2')$ bazisi ilə xətti ifadə oluna bilir. Deməli, nəticədə $(1')$ sistemi $(2')$ ilə ifadə olunur. $(1')$ xətti asılı deyil (çünki bazisdir) və o $(2')$ ilə ifadə oluna bilirsə, əsas teoremə görə $r_\alpha\le r_\beta$ olmalıdır.

İndi tutaq ki, $(1)\sim(2)$. Onda alırıq ki:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\sim(2)\\(1)\sim(1')\end{array}\right\}\Rightarrow(1')\sim(2)\qquad(3)$$

Digər tərəfdən

$$(2)\sim(2').\qquad(4)$$

Onda $$((1')\sim(2)\wedge(2)\sim(2'))\Rightarrow((1')\sim(2'))\qquad(5)$$

(5) münasibətindən isə $r_\alpha=r_\beta$ alınır. ▲

TEOREM 2. *n - ölçülü vektorlar sistemine bu vektorların xətti kombinasiyasından ibarət olan vektorlar qoşsaq alınan yeni sistemin ranqı əvvəlkinə bərabər olur.*

İSBATI. Tutaq ki,

$$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s \qquad (1)$$

vektorlar sistemi verilib və β vektoru bu vektorlarla xətti ifadə olunur:

$$\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\dots+\lambda_s\alpha_s \qquad (*)$$

Göstərməliyik ki,

$$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s,\beta \qquad (2)$$

sisteminin ranqı (1)-in ranqına bərabərdir. Bunun üçün isə (1) ~ (2) olduğunu əsaslandırmaq gərəkdir.

Aşkar görünür ki:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1=1\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\dots+0\cdot\alpha_s+0\cdot\beta,\\ \alpha_2=0\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2+\dots+0\cdot\alpha_s+0\cdot\beta,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_s=0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\dots+1\cdot\alpha_s+0\cdot\beta.\end{array}\right\}\ \text{(1)-in (2) ilə xətti ifadəsi}$$

Tərsinə:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1=1\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\dots+0\cdot\alpha_s,\\ \alpha_2=0\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2+\dots+0\cdot\alpha_s,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_s=0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\dots+1\cdot\alpha_s,\\ \beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\dots+\lambda_s\alpha_s.\end{array}\right\}\ \text{(2)-nin (1) ilə xətti ifadəsi}$$

Deməli, (1) ~ (2) ona görə də $rank(1)=rank(2)$. ▲

Bu teoremdən xüsusi hal kimi alınan aşağıdakı sadə nəticələri qeyd edək:

Verilən vektorlar sisteminə: 1) *sıfır vektoru qoşsaq və verilən sistemin hər-hansı vektoru ilə mütənasib olan vektor qoşsaq sistemin ranqına təsir etməz.*

Doğrudan da, əvvələn, sıfır vektor hər-hansı vektorlar sisteminin, o cümlədən də verilən vektorlar sisteminin xətti kombinasiyası kimi göstərilə bilir, yəni burada $\beta=\theta$ və $\theta=0\cdot\alpha_1+ +0\cdot\alpha_2+\dots+0\cdot\alpha_s$; digər tərəfdən sistemin vektorlarından biri, məsələn, α_1 ilə mütənasib olan $\beta=\lambda\alpha_1$ vektorunu da verilən sistemin özü ilə $\beta=\lambda\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\dots+0\cdot\alpha_s$ kimi xətti ifadə edə bilərik. Onda aşkardır ki, isbat etdiyimiz teoremə görə hər iki halda alınan yeni sistemin ranqı verilən sistemin ranqına bərabər olacaq.

n-ölçülü vektorlar ilə matrislər arasından çox sıx əlaqə olduğunu artıq biz qeyd etmişik, belə ki, $s\times n$ ölçülü matrisin hər bir sətrinə elə n-ölçülü vektor (sətir-vektor) kimi baxa bilərik ki, bu vektorun koordinatları matrisin uyğun sətir elementləri, bunun kimi də sütunlarına isə (sütun-vektor) elə s-ölçülü vektorlar kimi baxa bilərik ki, bunların koordinatları matrisin uyğun sütun elementləri olur. Bu deyilənləri nəzərə alaraq

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\ a_{s1}&a_{s2}&\dots&a_{sn}\end{pmatrix}$$

matrisinin uyğun olaraq sətir və sütun sistemini

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1=(a_{11};a_{12};\dots;a_{1n}),\\ \alpha_2=(a_{21};a_{22};\dots;a_{2n}),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_s=(a_{s1};a_{s2};\dots;a_{sn}).\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{l}\beta_1=(a_{11};a_{21};\dots;a_{s1}),\\ \beta_2=(a_{12};a_{22};\dots;a_{s2}),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \beta_n=(a_{1n};a_{2n};\dots;a_{sn}).\end{array}\right\}$$

kimi yaza bilərik.

Çox zaman əyanilik naminə sütun vektorlar sistemini aşağıdakı kimi də yazırlar:

$$\beta_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{s1}\end{bmatrix},\ \beta_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{s2}\end{bmatrix},\ \dots,\ \beta_n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{sn}\end{bmatrix}.$$

Matrisin $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ sətir vektorlarını bəzən matrisin üfüqi (horizontal), $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ sütun vektorlar sistemini isə onun şaquli (vektikal) vektorlar sistemi də adlandırırlar.

Matrisin ranqına da adətən onun sətir və ya sütun vektorlar sisteminin ranqı vasitəsilə tərif verirlər (tezliklə görəcəyik ki, bu tariflər ekvivalentdirlər).

TƏRİF. *Matrisin sütun vektorlar sisteminin (yaxud şaquli vektorlar sisteminin) ranqına matrisin ranqı deyilir.*

Deməli, matirsin ranqı onun sütun vektorlar sisteminin maksimal xətti asılı olmayan altsistemindəki vektorların sayı və ya şaquli vektorlar sisteminin bazisindəki vektorların sayıdır.

Matrisin ranqının hesablanmasında mühüm əhəmiyyət kəsb edən və matrisin minoru anlayışı ilə bağlı olan vacib bir teorem ilə tanış olaq.

Əvvələn, qeyd edək ki, matrsinin minoru anlayışı da determinantda olduğu kimidir, yəni: *$A_{s\times n}$ matrisində seçilmiş ixtiyari k dənə satir və k dənə sütunun $(1\le k\le \min(s,n))$ kəsişməsindən alınan k tərtibli matrisin determinantına bu matrisin k tərtibli minoru deyilir.*

Məsələn,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kimi 4×5 ölçülü düzbucaqlı A matrisinin üç tərtibli minorlarından biri

$$M_{\substack{124\\135}}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

olur. Burada M - in indeksləri matrisdə seçilmiş uyğun sətirlərin və sütunların nömrələridir; yazdığımız minor məhz həmin nömrəli sətir və sütunların kəsişməsindən alınıb.

Matrisin ranqı haqqında teoremə keçməzdən əvvəl matrisin minorlarına aid olan belə bir lemmaya diqqət edək.

LEMMA. *A matrisinin bütün k tərtibli minorlarının hamısı sıfra bərabərdirsə, onda onun bundan yüksək tərtibli minorlarının hamısı da sıfra bərabər olur.*

İSBATI. Bu lemmaya bizə məlum olan Laplas teoremindən çıxan nəticə kimi baxa bilərik.

Matrisin hər bir $(k+j)$ tərtibli $(k<k+j\le \min(s,n))$ minorlarını Laplas teoreminə əsasən ixtiyari k sətirdən düzəldilən k tərtibli minorlara nəzərən ayrılışını yazsaq k tərtibli minorlarla hər-hansı bir j tərtibli minorların (daha dürüstü cəbri tamamalayıcılarının) hasilləri cəmini alırıq, k tərtibli minorlar isə şərtə görə hamısı sıfırdır və odur ki, bunların hər-hansı j tərtibli minorların sıfırlarla hasilləri cəmi sıfır verir.

İndi matrisin ranqı haqqında teoremə keçək.

TEOREM. *Matrisin ranqı onun sıfırdan fərqli ən yüksək tərtibli minorunun tərtibinə bərabərdir.*

İSBATI. Teoremi isbat etmək üçün göstərməliyik ki, verilən matrisin sıfırdan fərqli ən yüksək tərtibli minorunun tərtibi bu matrisin şaquli vektorlar sisteminin bazis vektorlarının sayına, yəni onun maksimal xətti asılı olmayan altsistemindəki vektorların sayına bərabərdir.

Verilən $A_{s\times n}$ matrisinin sıfırdan fərqli ən yüksək tərtibli minorunun tərtibi r olsun $(1<r\le \min(s,n))$. Bu minorlardan birini M ilə işarə edək ($M\ne 0$) və isbatın sadə olması naminə bu minorun matrisin sol yuxarı küncündə yerləşdiyini fərz edək:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \dots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sr} & a_{s,r+1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix};\ M=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}\ne 0.$$

İsbatın gedişindən və nəticəsindən bəlli olacaq ki, xüsusi hal kimi M minorunun matrisin sol yuxarı küncündəki seçimi heç də isbatın ümumiliyinə xələl gətirmir.

Beləliklə, yadda saxlayaq ki, A matrisinin tərtibi r-dən yüksək olan bütün minorları sıfra bərabərdir.

$M\ne 0$ şərti ona dəlalət edir ki, M minorunun sütunları

$$\beta_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{bmatrix},\quad \beta_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{r2} \end{bmatrix},\quad \dots,\quad \beta_r=\begin{bmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{rr} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

sistemi xətti asılı olmayan sistemidir. Belə ki, əgər M - in sütunları arasında xətti asılılıq olsaydı bu o demək olardı ki, $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r$ r-ölçülü vektorlar sistemi üçün heç olmasa biri sıfırdan fərqli olan elə c_i ədədləri ($i=\overline{1,r}$) var ki:

$$c_1\beta_1+c_2\beta_2+\dots+c_r\beta_r=\theta \qquad (*)$$

bərabərliyini ödəyirlər. Əgər (*) bərabərliyini koordinatlarla yazası olsaq

$$\left.\begin{array}{l} c_1a_{11}+c_2a_{21}+\ldots+c_ra_{r1}=0, \\ c_1a_{12}+c_2a_{22}+\ldots+c_ra_{r2}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1a_{1r}+c_2a_{2r}+\ldots+c_ra_{rr}=0. \end{array}\right\}$$

bircins xətti tənliklər sistemi alarıq ki, bunun da sıfırdan fərqli həlli (yəni, c_i əmsallarından heç olmasa biri sıfırdan fərqli) olması üçün əmsallardan düzələn M determinantı $M=0$ olardı. Deməli, $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$ vektorlar sistemi, başqa sözlə M-in sütun vektorlar sisteminin xətti asılı olmaması $M\neq 0$ şərtilə bilavasitə bağlıdır.

Diqqət yetirək ki, M-ə aid olan $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$ r-ölçülü sütun vektorlar sistemi verilən $A_{s\times n}$ matrisinə aid olan

$$\beta_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{bmatrix},\quad \beta_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{bmatrix},\quad \ldots,\quad \beta_r=\begin{bmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{sr} \end{bmatrix},\quad \ldots,\quad \beta_n=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

sütun vektorlar sisteminin qısaldılmış vektorlar sistemidir (onun «kəsikləridir»). (1) qısaldılmış vektorlar sistemi xətti asılı olmadığından onun uzadılmış (2) sistemi də xətti asılı deyil.

Teoremi isbat etmək üçün matrisin $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$ sütun vektorlar sisteminin $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ sütun vektorlar sisteminin maksimal xətti asılı olmayan altsistemi olduğunu göstərməliyik. Bunun üçün matrisin ixtiyari j nömrəli sütununun ilk ardıcıl r sayda sütunun xətti kombinasiyası olduğunu göstərmək gərəkdir, bu da məhz o deməkdir ki, matrisin ixtiyari β_j sütun vektorunun β_1, $\beta_2,\ldots,\beta_r$ sütun vektorları ilə xətti ifadə olunmasını göstərməliyik.

Matrisin ixtiyari i-ci sətri ($1\le i\le s$) və ya j-ci sütununun ($1\le j\le n$) köməyi ilə M minorunu «qurşayan» aşağıdakı $(r+1)$ tərtibli D_i determinantı düzəldək:

$$D_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

r-tərtibli M minorunu qurşayan $(r+1)$ tərtibli D_i minoruna M-i haşiyələyən minor deyirlər. Aşkardır ki, haşiyələyən D_i minoru i-nin bütün $1\le i\le s$ qiymətlərində sıfra bərabər olmalıdır: $D_i=0$. Əvvələn, ona görə ki, i-nin $i>r$ qiymətlərində D_i-nin tərtibi r-dən yüksək (yəni, M-in tərtibindən bir vahid artıq) olur; ikincisi də i-nin hər bir $1\le i\le r$ qiymətlərində D_i-nin iki sətri eyni olur.

D_i determinantının sonuncu $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{ir},a_{ij}$ elementlərinin cəbri tamamlayıcıları uyğun olaraq $A_{i1},A_{i2},\ldots,A_{ir},A_{ij}$ olsun. Onda bu determinantın axırıncı sətir elementlərinə nəzərən ayrılışı

$$D_i=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{ir}A_{ir}+a_{ij}A_{ij} \tag{3}$$

olar. İndi buradakı cəbri tamamlayıcıların quruluşuna diqqət edək. Əvvəla, aşkar görünür ki, a_{ij} elementinin cəbri tamamlayıcısı M minorunun özüdür: $A_{ij}=M$; digər tərəfdən a_{im} elementinin ($m=\overline{1,r}$) A_{im} cəbri tamamlayıcısı m-in hər bir $1\le m\le r$ qiyməti üçün

$$A_{im}=(-1)^{(r+1)+m}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,m-1} & a_{1,m+1} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,m-1} & a_{2,m+1} & \ldots & a_{2r} & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{r,m-1} & a_{r,m+1} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \end{vmatrix}$$

şəklində olur və burada m-in bütün $1\le m\le r$ qiymətləri üçün i sabit qalır. A_{im}-in bütün ($m=\overline{1,s}$) qiymətləri üçün i sabit qaldığından $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{ir}$ elementlərinin uyğun A_{im} cəbri tamamlayıcılarına ($m=\overline{1,r}$) i-dən asılı olmayan indekslərlə, yəni sadəcə olaraq $A_1,A_2,\ldots,A_r$ ilə işarə edə bilərik. Onda $D_i=0$, $A_{ij}=M$ və $M\neq 0$ olduğunu nəzərə alaraq (3) bərabərliyindən

$$a_{ij}=-\frac{A_1}{M}a_{i1}-\frac{A_2}{M}a_{i2}-\ldots-\frac{A_r}{M}a_{ir} \tag{4}$$

alırıq. Bu bərabərlikdə $\dfrac{A_m}{M}$ əmsallarının aldığı qiymətlər i-nin bütün $i=1,2,3,\ldots,s$ qiymətlərində doğru olur və ona görə də burada $-\dfrac{A_m}{M}=\lambda_m$ ($m=\overline{1,r}$) işarə edərək onu

$$a_{ij}=\lambda_1 a_{i1}+\lambda_2 a_{i2}+\ldots+\lambda_r a_{ir}$$

kimi yaza bilərik. Onda:

$$i=1 \quad \text{üçün} \quad a_{1j}=\lambda_1 a_{11}+\lambda_2 a_{12}+\ldots+\lambda_r a_{1r},$$
$$i=2 \quad \text{üçün} \quad a_{2j}=\lambda_1 a_{21}+\lambda_2 a_{22}+\ldots+\lambda_r a_{2r},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$i=s \quad \text{üçün} \quad a_{sj}=\lambda_1 a_{s1}+\lambda_2 a_{s2}+\ldots+\lambda_r a_{sr}$$

alırıq. Bu isə o deməkdir ki:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{sj}\end{bmatrix}}_{\beta_j}=\lambda_1\underbrace{\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{s1}\end{bmatrix}}_{\beta_1}+\lambda_2\underbrace{\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{s2}\end{bmatrix}}_{\beta_2}+\ldots+\lambda_r\underbrace{\begin{bmatrix}a_{1r}\\a_{2r}\\\vdots\\a_{sr}\end{bmatrix}}_{\beta_r}$$

yaxud: $\beta_j=\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\ldots+\lambda_r\beta_r$.

Beləliklə, tapırıq ki, A matrisinin ixtiyari β_j sütun vektoru onun M minoruna daxil olan ilk ardıcıl $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$ sütun vektorlar sisteminin xətti kombinasiyasıdır. Deməli, $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$ xətti asılı olmayan sütun vektorları $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ - in bazis vektorlar sistemidir. Onda $rank(2)=r$ olur. r isə M minorunun tərtibidir. ▲

NƏTİCƏ. *Matrisin şaquli (sütun) vektorlar sisteminin ranqı onun üfüqi (sətir) vektorlar sisteminin ranqına bərabərdir.*

Bu nəticənin doğruluğunu göstərmək üçün verilən matrisi transponirə etmək, yəni nömrələrini saxlamaq şərtilə onun bütün sətirlərini sütunları ilə əvəz etmək kifayətdir. Transponirə edildikdə matrisin sıfırdan fərqli ən yüksək tərtibli minoru da transponirə olunmuş şəkildə yeni matrisdə də qalacaq. Determinantın məlum xassəsinə görə yeni matrisdə də onun qiyməti dəyişməyib yenə də sıfırdan fərqli olacaq. Bu isə o deməkdir ki, matrisdə sütun vektorlar sisteminin ranqı sətir vektorlar sisteminin ranqına bərabərdir (və əksinə!). ▲

Bu nəticə onu göstərir ki, *matrisin ranqına onun sətir vektorlar sisteminin ranqı kimi də tərif vermək olar.*

§ 3.6. Determinantın sıfra bərabər olmasının zəruri və kafi şərti

Biz determinantlar bəhsində determinantın sıfra bərabər olmasının bir neçə kafi şərti, o cümlədən də bu şərtlərin daha ümumi xarakter daşıyan biri ilə tanış olmuşuq: determinantın bir sətri (sütunu) digərlərinin xətti kombinasiyasından ibarət olarsa bu determinant sıfra bərabər olur (xassə 3).

İndi isə matrisin ranqı haqqında teoremdən alınan bir nəticə kimi bu xassəni aşağıdakı kimi «tamamlaya» bilərik.

TEOREM. *Determinantın sıfra bərabər olması üçün onun sətirlərinin (sütunlarının) xətti asılılıq münasibətində olması həm zəruri, həm də kafidir.*

Yaxud başqa cür: Determinant yalnız və yalnız sətirləri (sütunları) arasında xətti asılılq münasibəti olduqda sıfra bərabər olur.

İSBATI. Şərtin kafiliyi determinantların xassələrindən biri kimi yuxarıda isbat edilib. Belə ki, əgər sətirlərdən (sütunlardan) hər-hansı biri yerdə qalanların xətti kombinasiyasından ibarətdirsə, bu o deməkdir ki, determinantın sətirləri (sütunları) arasında xətti asılılıq var və belə determinant sıfra bərabər olur.

Şərtin zəruriliyi. Tutaq ki, verilən determinant sıfra bərabərdir; onda göstərməliyik ki, bunun sətirləri (sütunları) bir-biri ilə xətti asılılıq münasibətindədir.

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

determinantı sıfra bərabər olsun: $D=0$.

Aşkardır ki, bu determinant

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

kvadrat matrisinin determinantıdır və deməli bu matrisin ən yüksək tərtibli minorudur. Əgər bu minor $D=0$ isə o deməkdir ki, matrisin ranqı $rangA=r<n$ olmalıdır. Bu isə o deməkdir ki, matrisin r sayda maksimal xətti asılı olmayan sətir (sütun) vektorlar

sistemi (bazisi) var ki, onun ixtiyari sətir (sütun) vektoru bu r dənə sətrin (sütunun) vektorları vasitəsilə xətti ifadə oluna bilirlər. Bu isə o deməkdir ki, matrisin sətir (sütun) vektorlar sistemi arasında xətti asılılıq münasibəti mövcuddur. Digər tərəfdən bu da bəllidir ki, A matrisinin sətirləri (sütunları) eyni zamanda onun D determinantının uyğun sətirləridir (sütunlarıdır). Deməli, $D=0$ olduqda bu determinantın sətirləri (sütunları) arasında hökmən xətti asılılıq münasibəti vardır. ▲

§ 3.7. Matrisin ranqını hesablamaq üsulları

I üsul. *Haşiyələyən minorlar üsulu.* Matrisin ranqının bu üsulla hesablanması matrisin ranqı haqqında məlum teoremə əsaslanır. Bu üsulla ranqı tapmaq əslində verilmiş matrisin sıfırdan fərqli ən yüksək tərtibli minorunu axtarmaq prosesindən ibarətdir. Əlbəttə, burada sonlu sayda olsa da, çoxlu minorlar hesablamaq lazım gəlir. Məsələn, $s\times n$ ölçülü düzbucaqlı matrisdən düzəldilməsi mümkün olan bütün k-tərtibli $(1\le k\le \min(s,n))$ minorların ümumi sayı $C_s^k\cdot C_n^k$ olacaqdır. Aydındır ki, böyük ölçülü matrislərdə müxtəlif k-tərtibli minorları hesablamaqla bunların içərisindən sıfırdan fərqli ən yüksək tərtibli minoru tapmaq çoxlu vaxt və zəhmət tələb edən bir işdir. Lakin burada işi yüngülləşdirən bir cəhət vardır. Matrisin ranqı haqqında teoremin isbatında bir məsələyə yenidən diqqət yetirək. Orada biz r tərtibli M_r minorunun ən yüksək tərtibli sıfırdan fərqli minor olduğunu və bütün $(r+1)$-tərtibli minorların isə sıfra bərabər olduğunu fərz etdikdən sonra, ranqın r-ə bərabər olduğunu əsaslandırmaq üçün, bütün $(r+1)$-tərtibli minorların hamısını deyil, ancaq M_r-i haşiyələyən $(r+1)$-tərtibli minorlara baxdıq. Bu isə A matrisinin xətti asılı olmayan sütunlarının maksimal sayının r olmasını təsdiq etmək üçün tamamilə kifayət etdi. Bu ondan irəli gəlir ki, ancaq M_r-i haşiyələyən $(r+1)$-tərtibli minorların sıfra bərabər olması faktından, qalan bütün $(r+1)$-tərtibli minorların da sıfra bərabər olacağı nəticəsi çıxır. Buradan da matrisin ranqını hesablamaq üçün «haşiyələyən minorlar» üsulu alınır: *matrisin ranqını tapmaq üçün hesablamanı, onun aşağı tərtibli minorlarından başlayıb yuxarı tərtibli minorlara*

keçmək və bu prosesdə sıfırdan fərqli r-tərtibli D_r minoruna rast gəldikdən sonra, ancaq bunu haşiyələyən $(r+1)$-tərtibli minorları hesablamaq lazımdır; əgər D_r-i $(D_r\ne 0)$ haşiyələyən $(r+1)$-tərtibli minorların hamısı sıfırdırsa, onda matrisin ranqı r-dir. Əgər $(r+1)$-tərtibli haşiyələyən minorlardan biri, məsələn, D_{r+1} sıfırdan fərqli olarsa, onda matrisin ranqı r-dən böyük olmalıdır və bu prosesi bu dəfə D_{r+1}-i haşiyələyən $(r+2)$-tərtibli minorları hesablamaqla davam etdirməliyik. Əgər D_{r+1}-i $(D_{r+1}\ne 0)$ haşiyələyən bütün $(r+2)$-tərtibli minorlar sıfır isə, onda matrisin ranqı $r+1$ olmalıdır və s.

Misal 1.
$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1\\ -1 & -2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 8 & 3\\ 3 & 6 & 4 & 1\end{Vmatrix}$$

matrisinin r_A ranqını «haşiyələyən minorlar üsulu» ilə tapmalı.

Həlli. Matrisin elementləri, yəni onun birtərtibli minorları sıfırdan fərqlidir. İkitərtibli minorlara keçək. Sol yuxarı küncdəki minor:
$$M_{\substack{1,2\\1,2}}=\begin{vmatrix} 1 & 2\\ -1 & -2\end{vmatrix}=0.$$

Başqa ikitərtibli minorlardan sıfırdan fərqli birini götürək:
$$M_{\substack{1,2\\3,4}}=\begin{vmatrix} 3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1\ne 0.$$

Deməli, bu matrisin ranqı ikidən kiçik deyil. Əgər bu matrisin bütün üçtərtibli minorları sıfır olarsa, onda $r_A=2$ olduğunu qəti təsdiq edə bilərik. Bu matrisin üçtərtibli minorlarının ümumi sayı $C_4^3\cdot C_4^3=16$ olur. $r_A=2$ olduğunu yəqin etmək üçün bu 16 dənə üçtərtibli minorların hamısının sıfır olmasına əmin olmalıyıq. Lakin bunun hamısını hesablamaq artıq işdir. Biz əgər sıfırdan fərqli olan $M_{\substack{1,2\\3,4}}$ minorunu haşiyələyən minorları hesablasaq, iş xeyli yüngülləşər. Çünki bu minorların sayı nisbətən azdır və əgər bunlar sıfra bərabər olarsa, qalan bütün üçtərtibli minorlar da sıfır olmalıdır.

İndi $M_{\substack{1,2\\3,4}}$-i haşiyələyən üçtərtibli minorları hesablayaq:
$$M_{\substack{123\\134}}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 8 & 3\end{vmatrix}=0,\quad M_{\substack{123\\234}}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1\\ -2 & 2 & 1\\ 2 & 8 & 3\end{vmatrix}=0,$$

$$M_{\substack{124\\134}}=\begin{vmatrix}1&3&1\\-1&2&1\\3&4&1\end{vmatrix}=0,\quad M_{\substack{124\\234}}=\begin{vmatrix}2&3&1\\-2&2&1\\6&4&1\end{vmatrix}=0.$$

Beləliklə, biz verilmiş matrisdə sıfırdan fərqli elə ikitərtibli $M_{\substack{1,2\\3,4}}$ minoru tapdıq ki, bunu qurşayan bütün üçtərtibli minorlar sıfırdır. Bu o deməkdir ki, daha başqa üçtərtibli minorları (habelə bundan yüksək tərtibli minorları) hesablamağa ehtiyac yoxdur; çünki onlar da sıfra bərabər olacaqdır. Deməli, $r_A=2$.

Misal 2.

$$\begin{aligned}\alpha_1&=(\ 1;\ 2;3;0),\\ \alpha_2&=(-1;\ 0;4;1),\\ \alpha_3&=(\ 0;\ 2;6;2),\\ \alpha_4&=(\ 2;\ 4;5;1),\\ \alpha_5&=(\ 1;-1;5;0)\end{aligned}$$

vektorlar sisteminin ranqını tapmalı.

Həlli. Əvvəlcə sətirləri bu vektorların uyğun koordinatlarından ibarət olan matrisi yazaq:

$$\begin{Vmatrix}1&2&3&0\\-1&0&4&1\\0&2&6&2\\2&4&5&1\\1&-1&5&0\end{Vmatrix}$$

Bu matrisin ranqını tapaq. Görürük ki, ikitərtibli minorlardan:

$$M_2=\begin{vmatrix}1&2\\-1&0\end{vmatrix}=2\neq0,$$

bunu haşiyələyən üçtərtibli minorlardan isə:

$$M_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&0&4\\0&2&6\end{vmatrix}=-2\neq0.$$

Deməli, ranq ya 3, ya da 3-dən böyük olmalıdır. İndi bu üçtərtibli minoru haşiyələyən dördtərtibli minorları yoxlayaq:

$$M_4=\begin{vmatrix}1&2&3&0\\-1&0&4&1\\0&2&6&2\\2&4&5&1\end{vmatrix}=0\qquad\text{(yoxlayın!)}.$$

İndi də M_3-ü haşiyələyən o biri dördtərtibli minoru hesablayaq:

$$M_4^1=\begin{vmatrix}1&2&3&0\\-1&0&4&1\\0&2&6&2\\1&-1&5&0\end{vmatrix}=-28\neq0.$$

Görürük ki, matrisdə M_3 minorunu haşiyələyən daha başqa dördtərtibli minor yoxdur. Həmçinin, dördtərtibli M_3 minorunu haşiyələyən beştərtibli minor yoxdur. Onda matrisin ranqı $r=4$ olur. Deməli, uyğun vektorlar sisteminin ranqı da 4-dür. Bu isə o deməkdir ki, bu vektorlar sistemində xətti asılı olmayan vektorların maksimal sayı 4 olmalıdır.

Misal 3. Verilən:

$$\left.\begin{aligned}f_1&=4x_2+10x_3+x_4\\ f_2&=4x_1+8x_2+18x_3+7x_4\\ f_3&=10x_1+18x_2+40x_3+17x_4\\ f_2&=x_1+7x_2+17x_3+3x_4\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

xətti formalar sisteminin xətti asılı olub-olmadığını, əgər xətti asılıdırsa, bunlar arasındakı asılılıq münasibətini tapmalı.

Həlli. Bilirik ki, bu xətti formalar sisteminə belə bir vektorlar sistemi uyğundur:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=(\ 0;\ 4;10;\ 1),\\ \alpha_2&=(\ 4;\ 8;18;\ 7),\\ \alpha_3&=(10;18;40;17),\\ \alpha_4&=(\ 1;\ 7;17;\ 3).\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

(2) sisteminin uyğun matrisini yazaq:

$$A=\begin{Vmatrix}0&4&10&1\\4&8&18&7\\10&18&40&17\\1&7&17&3\end{Vmatrix}.$$

Bu matrisin ranqını hesablayaq. Göründüyü kimi burada $\begin{vmatrix}0&4\\4&8\end{vmatrix}\neq0$. İndi bunu haşiyələyən bütün üçtərtibli minorları hesablayaq:

$$\begin{vmatrix}0&4&10\\4&8&18\\1&7&17\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}0&4&10\\4&8&18\\10&18&40\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}0&4&1\\4&8&7\\10&18&17\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}0&4&1\\4&8&7\\1&7&3\end{vmatrix}=0.$$

Deməli, matrisin ranqı 2-dir. Bu o deməkdir ki, uyğun (2) vektorlar sisteminin də ranqı 2-dir. Onda bunlara uyğun (1) xətti formaların xətti asılı olmayanlarının maksimal sayı 2-dir.

Sıfırdan fərqli yüksək tərtibli $\begin{vmatrix}0 & 4\\ 4 & 8\end{vmatrix}$ minoruna f_1 və f_2 formalarının əmsalları daxildir. Deməli, bu formalar sistemində f_1 ilə f_2 xətti asılı deyil və f_3 ilə f_4 bunlar vasitəsi ilə xətti ifadə olunur (eyni sözləri uyğun (2) vektorlar sistemi ilə A matrisinin uyğun sətirləri haqqında da demək olar). Onda:

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=\alpha_3 \qquad (3)$$

$$\lambda_1'\alpha_1+\lambda_2'\alpha_2=\alpha_4 \qquad (4)$$

münasibətlərini yaza bilərik, (3) bərabərliyindən:

$$\left.\begin{aligned}4\lambda_2&=10,\\4\lambda_1+8\lambda_2&=18,\\10\lambda_1+18\lambda_2&=40,\\\lambda_1+7\lambda_2&=17.\end{aligned}\right\}$$

Bu sistemdən $\lambda_2=\frac{5}{2}$ və $\lambda_1=-\frac{1}{2}$ olduğunu taparıq. Onda: $\alpha_3=-\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{5}{2}\alpha_2$, yaxud uyğun olaraq f_3-ün f_1 və f_2 ilə xətti ifadəsini taparıq, yəni

$$f_3=-\frac{1}{2}f_1+\frac{5}{2}f_2;$$

buradan da:

$$5f_2-f_1-2f_3=0.$$

(4) bərabərliyindən isə:

$$\left.\begin{aligned}4\lambda_2&=1,\\4\lambda_1+8\lambda_2&=7,\\10\lambda_1+18\lambda_2&=17,\\\lambda_1+7\lambda_2&=3.\end{aligned}\right\}$$

Bu sistemin ixtiyari iki tənliyindən: $\lambda_1=\frac{5}{4}$ və $\lambda_2=\frac{1}{4}$. Onda $\alpha_4=\frac{5}{4}\alpha_1+\frac{1}{4}\alpha_2$ və ya f_4-ün f_1 və f_2 ilə $f_4=\frac{5}{4}f_1+\frac{1}{4}f_2$ kimi xətti ifadəsini alarıq (buradan isə $5f_2+f_2-4f_4=0$ asılılığını tapırıq).

Matrislərin ranqını hesablamağın indi öyrəndiyimiz bu üsulunun üstün cəhəti orasındadır ki, bununla nəinki matrisin xətti asılı olmayan sətir və ya sütunlarının (yaxud uyğun vektorlar və ya xətti formalar sisteminin) maksimal sayını müəyyən edirik, həmçinin xətti

asılı olmayan maksimal altsistemə məhz hansı sətir və sütunların daxil olduğunu da aydınlaşdıra bilirik. Sətir və ya sütunlardan hansının elementləri sıfırdan fərqli olan ən yüksək tərtibli minora daxil olarsa, həmin sətir və ya sütunlar xətti asılı olmayan maksimal altsistemə daxildir. Bundan sonra isə başqa sətir və sütunların, bu xətti asılı ol-mayan sətir və sütunlarla necə ifadə edildiyini tapmaq asandır.

Matrislərin ranqını hesablamağın (onun ranqı haqqında teoremə bilavasitə əsaslanmayan) başqa bir üsulu vardır ki, burada determinantları hesablamağa ehtiyac yoxdur. İndi həmin üsulu öyrənək.

II üsul. *Elementar çevirmələr üsulu.* Bu üsuldan ən çox o zaman istifadə edilir ki, bizi burada matrisin ancaq xətti asılı olmayan sətirlərinin (sütunlarının) maksimal sayı maraqlandırır.

Bu üsul, verilmiş matris üzərində elementar çevirmələr aparmaqla onu pilləli, diaqonal və ya kanonik şəkillərdən birinə gətirməkdən ibarətdir. Bu prosesdə aşağıdakı teoremlərə əsaslanılır:

TEOREM 1. *Elementar çevirmələr nəticəsində matrisin ranqı dəyişmir.*

İSBATI. Bu teoremi isbat etmək üçün verilmiş $(s\times n)$-ölçülü

$$A_{s\times n}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn}\end{pmatrix}$$

matrisinin sətirlərinə n-ölçülü (sütunlarına s-ölçülü) vektorlar kimi baxmaq kifayətdir. Belə ki, həmin çevirmələri bu vektorlar sistemi üzərində aparsaq əvvəlkinə ekvivalent sistem alarıq, yəni bu çevirmələr nəticəsində sistemin ranqı dəyişməz. Bunu uyğun matris haqqında da demək olar.

Teorem isbat olunur.

Qeyd. Teoremi başqa yolla da isbat etmək olar.

Əgər ranqı r olan verilən A matrisi üzərində elementar çevirmələr aparsaq onda sıfırdan fərqnli ən yüksək tərtibli $M_r\neq 0$ minoru öz tərtibini dəyişmədən yenə də sıfırdan fərqli olmaq şərtini saxlayacaq. bu isə o deməkdir ki, onun ranqı dəyişməz olaraq qalacaq.

Zəkasını bu yöndə bir qədər işlətmək arzusunda olan oxuculara burada hər bir elementar çevirmədən sonra alınan vəziyyətləri təhlil etməyi məsləhət görərdik.

TEOREM 2. *Hər bir A matrisini elementar çevirmələr vasitəsilə pilləli və kanonik şəklə gətirmək olar.*

Bu teoremin isbatı ilə kitabın əvvəlində (§ 1.5) tanış olmuşuq.

İndi bunun matrisin ranqına nə dəxli olduğunu aydınlaşdıraq.

Fərz edək ki, verilən A matrisi elementar çevirmələr yolu ilə aşağıdakı A' pilləli matris şəklinə gətirilmişdir:

$$A' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3r} & c_{3,r+1} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

burada $c_{11} \neq 0, c_{22} \neq 0, \dots, c_{rr} \neq 0$; yaxud tutaq ki, xüsusi halda A matrisini

$$A_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

kanonik şəklə gətirmişik. A'-i də elementar çevirmələr yolu ilə A_E kanonik şəklə gətirməyin mümkünlüyünü nəzərə alsaq onda A matrisinin ranqının hesablanması işi 1-ci və 2-ci teoremdən bilavasitə alınan aşağıdakı nəticə ilə bağlı olur:

NƏTİCƏ. *A matrisinin ranqı elementar çevirmələr yolu ilə ondan alınan A_E kanonik matrisindəki vahidlərin sayına bərabərdir.*

Doğrudan da, ranqı A matrisinin ranqına bərabər olan

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}$$

kanonik matrisinin ranqının buradakı vahidlərin sayı qədər olduğu aşkardır. Elementlərinin hamısı sıfırlardan ibarət sətirləri və sütunları kənar etsək, ranq dəyişməz və matris

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

kimi sadə şəklə düşər. Aşkardır ki, bu matrisin isə sıfırdan fərqli ən yüksək tərtibli yeganə minoru aşağıdakıdır:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Bunun tərtibi buradakı vahidlərin sayı qədərdir.

Nəticə isbat olunur.

Eyni qayda ilə isbat etmək olar ki, *pilləli A' matrisinin ranqı, onun sıfırdan fərqli diaqonal elementlərinin sayı qədərdir.*

Qeyd. Nəticəni pilləli, yaxud kanonik matrisin sətirlərinin əmələ gətirdiyi vektorlar sisteminin xətti asılı olmayan maksimal sistem əmələ gətirməsi faktına əsasən də isbat etmək olar.

Sıfır matrisin ranqının sıfra bərabər olması buradan bir daha aydın olur.

İndi də matrisin ranıqının ikinci üsulla tapılmasına aid misal göstərək.

Misal 4. Aşağıdakı matrisin ranqını elementar çevirmələr yolu ilə pilləli və ya kanonik matrisə gətirməklə tapmalı:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{Vmatrix}.$$

Bu matris üzərində elementar çevirmələr aparaq: birinci sətri 2-yə və 5-ə vurub, uyğun olaraq 2-ci və 3-cü sətirlərdən çıxaq:

$$A \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Üçüncü sətirdən ikincini çıxaq:

$$A \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Diqqət yetirsək, bunun ranqının da 2 olduğunu demək olar. Lakin bunu çox asanlıqla kanonik şəklə gətirmək olar; bunun üçün birinci sütunu $-1, 2, -2, 1$ ədədlərinə vurub uyğun olaraq, 2-ci, 3-cü, 5-ci sütunların üzərinə gəlib, birinci sətrin $a_{11}=1$ - dən başqa qalan elementlərini sıfra çevirmək, sonra isə alınan matrisdə 2-ci sütunu müvafiq ədədlərə vurub, uyğun olaraq 3-cü, 4-cü, 5-ci sütunların üzərinə əlavə edib:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

kanonik matrisini alarıq, burada da vahidlərin sayı 2-dir. Deməli, bu matrisin ranqı $r_A=2$ - dir.

Bəzən ranqı hesabladıqda, eyni bir misala həm I, həm də II üsulu tətbiq etməklə daha tez məqsədə nail olmaq olur. Belə ki, verilən matris üzərində əvvəlcə bir sıra elementar çevirmələr aparıb, sadələşdirdikdən sonra asanlıqla onun sıfırdan fərqli ən yüksək tərtibli minorunu hesablayırlar.

Misal 5. Aşağıdakı matrisin ranqını tapmalı:

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{Vmatrix}.$$

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & -4 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Axırıncı matrisdən ikitərtibli minorun sıfırdan fərqli olduğu görünür. Bundan yüksək tərtibli minor isə yoxdur. Deməli A matrisinin ranqı $r_A=2$ olur.

§ 3.8. Xətti tənliklər sisteminin birgəlik əlaməti (kriteriyası). Kroneker-Kapelli teoremi

Artıq biz, istənilən sayda tənlik və məchulu olan xətti tənliklər sistemini daha dərindən öyrənmək üçün zəruri olan məsələləri nəzərdən keçirmişik.

Tutaq ki, n məchullu s sayda xətti tənliklər sistemi verilmişdir:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ldots+a_{sn}x_n=b_s. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Sistemin matrisini və genişlənmiş matrisini yazaq:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{Vmatrix}, \quad B=\left\Vert\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} & b_s \end{array}\right\Vert.$$

Bunların ranqını uyğun olaraq r_A və r_B ilə işarə edək. Hər şeydən əvvəl ümumi şəkildə verilmiş belə sistemin uyuşan olub-olmamasını aydınlaşdırmaq, birgəlik əlamətini təyin etmək lazımdır. Bunu aşağıdakı teorem müəyyən edir.

TEOREM (*Kroneker-Kapelli teoremi*). (1) *sisteminin uyuşan olması üçün onun matrisi ilə genişlənmiş matrisinin ranqının bərabər olması həm zəruri, həm də kafidir.*

İSBATI. *Şərtin zəruriliyi.* Tutaq ki, (1) sistemi uyuşandır və onun $x_1=\lambda_1, x_2=\lambda_2,\ldots,x_n=\lambda_n$ kimi həlli vardır. Göstərək ki, onda $r_A=r_B$ olmalıdır.

$(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ həllini sistemdə uyğun məchulların yerinə yazsaq, aydındır ki, sistemin hər bir tənliyi ödənilər və aşağıdakı eyniliklər alınar:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\lambda_1+a_{12}\lambda_2+\ldots+a_{1n}\lambda_n=b_1, \\ a_{21}\lambda_1+a_{22}\lambda_2+\ldots+a_{2n}\lambda_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}\lambda_1+a_{s2}\lambda_2+\ldots+a_{sn}\lambda_n=b_s. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

(2) bərabərliklərindən göründüyü kimi B matrisinin axırıncı sütunu (şaquli vektoru) A matrisinin sütunlarının (şaquli vektorlarının) xətti kombinasiyasıdır, yəni $\beta=(b_1;b_2;\ldots;b_s)$ vektoru $\alpha_1=(a_{11};a_{21};\ldots;a_{s1}), \alpha_2=(a_{12};a_{22};\ldots;a_{s2}),\ldots,\alpha_n=(a_{1n};a_{2n};\ldots;a_{sn})$ vektorları ilə

$$\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\ldots+\lambda_n\alpha_n \qquad (3)$$

kimi xətti ifadə olunmuşdur. Bilirik ki, (§ 3.4. Teorem 2) bu halda $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ sistemi ilə $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta$ xətti ekvivalent olub ranqları bir-birinə bərabərdir. Bu isə o deməkdir ki, A və B matrislərinin ranqları da eyni olmalıdır: $r_A=r_B$

Şərtin kafiliyi. İndi fərz edək ki, $r_A=r_B=r$. A - nın sütunları eyni zamanda B - nin də sütunları olduğundan və B - nin də ranqının r olduğundan da aşkar olur ki, A - nın maksimal xətti asılı olmayan sütunlar sistemi həm də B - nin maksimal xətti asılı olmayan sütunlarıdır. Genişlənmiş B matrisi A - dan ancaq sonuncu sütunu ilə fərqlənir. Onda B matrisinin axırıncı sütununu maksimal xətti asılı olmayan sütunların altsisteminə qoşanda o sütunların xətti asılı sisteminə çevrilər və B - nin sonuncu sütunu A - nın sütun vektorlar sistemi ilə ifadə edilə bilər. Deməli, elə r dənə $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ ədədləri var ki, bu əmsalların köməyi ilə B matrisinin $\beta = (b_1; b_2; \ldots; b_s)$ şaquli vektoru qalan sütunların hamısı ilə, yəni $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ şaquli vektorları ilə (3) şəklində xətti ifadə olunur (burada xətti asılı olmayan altsistemə daxil olmayan sütunları da sıfır əmsalların köməyi ilə cəmə əlavə edirik). Buradan da (2) eynilikləri alınır ki, bu da $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ədədlərinin (1) sisteminin həlli olduğunu göstərir. Deməli, $r_A = r_B$ olanda sistemin həlli var, o birgədir, uyuşandır.

Teorem isbat olunur.

§ 3.9. Kroneker-Kapelli teoreminə əsasən xətti tənliklər sisteminin araşdırılması

Kroneker-Kapelli teoremi sistemin uyuşan olub-olmadığını aydınlaşdırmağa imkan verir. Lakin uyuşan sistemi necə həll etmək yolunu göstərmir. İndi həmin məsələni ətraflı öyrənməyə keçək.

Tutaq ki, A və B matrislərinin ranqları bərabərdir: $r_A = r_B = r$. Matrislərin ranqlarının r olması bildiyimiz üzrə o deməkdir ki, matrisdə xətti asılı olmayan sətirlərin maksimal sayı r - dir. Tutaq ki, bu r sayda sətir B matrisinin ilk ardıcıl nömrəli r sətirləridir. Onda B - nin qalan sətirləri ilk ardıcıl r sətrin xətti kombinasiyaları olacaq. Digər tərəfdən aydındır ki, B - nin sətir elementləri

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s \end{array}\right\} \qquad (1)$$

sisteminin uyğun tənliklərindəki əmsallardır (yaxud buna uyğun üfüqi vektorlar sistemidir). Onda $r_A = r_B = r$ olduğundan (1) sisteminin hər bir tənliyini bunun ilk ardıcıl r sayda

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \end{array}\right\} \qquad (2)$$

tənliklərinin müəyyən ədədlərlə hasillərinin cəmi kimi göstərə bilərik. Deməli, (2) sistemini (1)-dən elementar çevirmələr yolu ilə ala bilərik. Bu isə (1) ilə (2) sistemlərinin ekvivalent olması deməkdir: $(1) \sim (2)$. Onda (1) sistemində xətti asılı olmayan bu r sayda tənliyi saxlayıb, bunların xətti kombinasiyasından ibarət olan «artıq» tənlikləri sistemdən kənar edərək, (1)-ə ekvivalent olan (2) sistemini alarıq. (2)-nin həlli eyni zamanda (1)-in də həlli olacaqdır. Burada xətti asılı olmayan maksimal sistem əmələ gətirən tənliklərin məhz ilk ardıcıl $1, 2, \ldots, r$ nömrəli tənliklər olduğunu fərz etmək mühakimənin ümumiliyinə xələl gətirmir. Əgər (2) sistemində verilmiş sistemin müxtəlif ixtiyari nömrəli tənlikləri olsaydı, bunların sistemdə yerini dəyişib, yenidən nömrələməklə baxdığımız hala gətirə bilərdik.

İndi (2) sisteminə baxaq. Aşkardır ki, bu sistemin

$$A' = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \end{Vmatrix}$$

matrisinin ranqı da r olmalıdır, çünki bunun r sayda sətri xətti asılı olmayan sistem təşkil edir. Digər tərəfdən isə, bu matrisin r - tərtibli minorlarından biri hökmən sıfırdan fərqli olmalıdır. Aydındır ki, $r > n$ ola bilməz, ancaq $r \le n$ ola bilər, yəni *uyuşan sistemin ranqı sistemdəki məchulların sayını aşmır.*

İndi mümkün olan bu iki halı nəzərdən keçirək.

1) $r = n$ olduqda (2) sistemi n məchullu n xətti tənlik sisteminə çevrilər, bunun da n - tərtibli determinantı (ən yüksək tərtibli minoru) sıfırdan fərqlidir. Bu halda sistem müəyyəndir və onun yeganə həllini Kramer qaydası ilə tapmaq olar.

Buradan Kramer teoreminin Kroneker-Kapelli teoreminin xüsusi halı olduğu da aydınlaşır.

2) $r < n$. Tutaq ki, A' matrisinin sıfırdan fərqli olan r - tərtibli minoru onun sol küncündə yerləşir. Aydındır ki, bu minor (2)

sisteminin ilk ardıcıl r sayda məchullarının əmsallarından düzələn determinantdır:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Onda əmsalları bu determinanta daxil olan ilk ardıcıl r sayda $x_1, x_2, \dots, x_r$ məchullarını əsas məchullar kimi sol tərəfdə saxlayıb, qalan $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ məchullarını isə sərbəst məchullar kimi sağ tərəfə keçirməklə, (2) sisteminə ekvivalent olan aşağıdakı sistemi alarıq:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - a_{1,r+2}x_{r+2} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - a_{2,r+2}x_{r+2} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - a_{r,r+2}x_{r+2} - \dots - a_{rn}x_n. \end{array}\right\} (3)$$

A' matrisinin sıfırdan fərqli olan başqa r-tərtibli minorları da ola bilər. Onda əmsalları bu minorlara daxil olan ixtiyari r sayda məchulu əsas məchullar kimi sol tərəfdə saxlayıb, qalan $n-r$ məchulu sağ tərəfə keçirməklə, yenə də (3) şəklində sistem alardıq.

İndi (3) sistemindəki $n-r$ sayda sərbəst məchullara: $x_{r+1} = c_{r+1}, x_{r+2} = c_{r+2}, \dots, x_n = c_n$ kimi hər hansı qiymətlər versək, (3) sisteminin sağ tərəfində müəyyən ədədlər alınar və nəticədə:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b'_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b'_r \end{array}\right\} (4)$$

sistemi alınar; (4) sisteminə yenə də Kramer qaydasını tətbiq edərək, «əsas məchullar» üçün $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_r = c_r$ qiymətlərini taparıq. Aydındır ki, tapdığımız qiymətlər sərbəst məchullara verdiyimiz qiymətlər ilə birlikdə (yəni $c_1, c_2, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_n$ ədədlər sistemi) (3)-ün və deməli, eyni zamanda (2) sisteminin də həlli olar. Sərbəst məchullara verilən qiymətlər ixtiyari olduğundan biz bunlara istənilən qədər qiymətlər verməklə (2) sisteminin sonsuz sayda həllərini tapa bilərik. Deməli, (3) sistemi qeyri-müəyyəndir. Bildiyimiz kimi, bunun ümumi həllini də tapa bilərik.

Dediklərimizi yekunlaşdırsaq, ixtiyari xətti cəbri tənliklər sisteminin həllinə aid aşağıdakı ümumi qaydanı söyləyə bilərik:

1. Verilən sistemin matrisinin və genişlənmiş matrisinin ranqını hesablayırlar. Əgər bu matrislərin ranqları müxtəlifdirsə, deməli, sistem uyuşan deyil, onun həlli yoxdur. Əgər bu ranqlar eyni olub r-ə bərabərdirsə, onda əmsalları sıfırdan fərqli r-tərtibli minorlardan birinə, məsələn $D \neq 0$ minoruna daxil olan r sayda tənliyi saxlayıb qalanını atırlar. Burada $r = n$ olarsa, bu sistem bizə tanış olan n məchullu n xətti tənliklər sistemidir və bunu Kramer qaydası ilə həll edib, onun yeganə həllini tapırlar. Əgər $r < n$ olarsa, onda bu sistem qeyri-müəyyəndir və bu n məchullu r xətti tənlik sistemində D $(D \neq 0)$ minoruna daxil olan əmsallara uyğun məchulları əsas məchul kimi sol tərəfdə saxlayıb, qalan $n-r$ məchulu isə sərbəst məchullar adlandıraraq sağ tərəfə keçirirlər.

2. Yenə də Kramer qaydası ilə əsas məchulların sərbəst məchullarla ifadəsini tapırlar və bildiyimizə görə buna sistemin ümumi həlli deyirlər.

3. Sərbəst məchullara ixtiyari qiymətlər verərək, əsas məchullar üçün ümumi həlldən uyğun qiymətlər tapırlar. Bununla da verilmiş sistemin xüsusi həlli təyin edilir.

Bir neçə misal göstərək.

Misal 1.

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6 \end{array}\right\}$$

sistemini həll etməli. Əvvəlcə:

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{Vmatrix} \quad \text{və} \quad B=\left\Vert\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 5 & 6 \end{array}\right\Vert$$

matrislərinin ranqlarını hesablamaq lazımdır: $r_A = r_B = 3$. Burada sıfırdan fərqli üçtərtibli minorlardan biri, məsələn:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Deməli, burada dördüncü tənliyi sistemdən kənar edə bilərik; qalan:

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=6,\\ 2x_1-x_2+x_3&=3,\\ x_1-x_2+2x_3&=5 \end{aligned}\right\}$$

üçməchullu üç tənlik isə determinantı ($D \neq 0$) sıfırdan fərqli olan sistemdir. Bunu Kramer qaydası ilə həll edib, $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$ kimi yeganə həllini tapırıq.

Misal 2. Tənliklər sistemini həll etməli:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3&=1,\\ x_1-3x_2+4x_3&=2,\\ 11x_1-12x_2+17x_3&=3. \end{aligned}\right\}$$

Burada sistemin matrisinin ranqı $r_A=2$, genişlənmiş matrisinin ranqı isə $r_B=3$ olduğundan (yoxlanmasını oxucuya məsləhət görürük) sistem birgə deyil və həlli yoxdur.

Misal 3. Tənliklər sistemini həll etməli:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3-x_4&=1,\\ -2x_1+x_2+2x_3-x_4&=0,\\ 2x_1-x_2+7x_3-5x_4&=3. \end{aligned}\right\}$$

Sistemin

$$A=\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 7 & -5 \end{Vmatrix}$$

matrisinin və

$$B=\left\Vert A \left| \begin{matrix} 1\\ 0\\ 3 \end{matrix} \right.\right\Vert$$

genişlənmiş matrisinin ranqlarını hesablayırıq: $r_A=r_B=2$.

Sıfırdan fərqli ikitərtibli minorlardan biri, məsələn:

$$M=\begin{vmatrix} -1 & 1\\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-3\neq 0.$$

Göründüyü kimi, bu minorda sistemin birinci və ikinci tənliyinin əmsalları iştirak edir. Ona görə, sistemin üçüncü tənliyini nəzərə almasaq:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3-x_4&=1,\\ -2x_1+x_2+2x_3-x_4&=0 \end{aligned}\right\}$$

kimi dördməchullu iki tənlik sistemi alırıq. Burada $r=2,\ n=4,\ r<n$ olduğundan sistem qeyri-müəyyəndir. Bu sistemdə sıfırdan fərqli M minoruna x_2 və x_3 məchullarının əmsalları daxildir. Ona görə də, x_2 və x_3 məchullarını əsas məchul, x_1 ilə x_4 - ü isə sərbəst məchullar hesab etsək:

$$\left.\begin{aligned} -x_2+x_3&=1-2x_1+x_4,\\ x_2+2x_3&=2x_1+x_4 \end{aligned}\right\}$$

sistemini alarıq. Buradan isə Kramer qaydasına görə:

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 1-2x_1+x_4 & 1\\ 2x_1+x_4 & 2 \end{vmatrix}}{M}=\frac{6x_1-x_4-2}{3};\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1-2x_1+x_4\\ 1 & 2x_1+x_4 \end{vmatrix}}{M}=\frac{2x_4+1}{3}.$$

Beləliklə,

$$x_2=2x_1-\frac{1}{3}x_4-\frac{2}{3}$$
$$x_3=\frac{2}{3}x_4+\frac{1}{3}$$

alırıq. Buraya $x_1=\xi_1,\ x_4=\xi_4$ ixtiyari parametrlərini qoşub

$$\begin{cases} x_2=2x_1-\frac{1}{3}x_4-\frac{2}{3},\\ x_3=\frac{2}{3}x_4+\frac{1}{3},\\ x_1=\xi_1,\\ x_4=\xi_4. \end{cases}$$

sisteminin ümumi həllini tapırıq. Burada $\xi_1,\ \xi_4$ parametrlərini və deməli x_1 və x_4 sərbəst məchullarına ixtiyari qiymətlər verməklə x_2 və x_3 üçün uyğun qiymətlər tapırıq. Bu yolla sistemin sonsuz sayda xüsusi həllərini alarıq.

Məsələn, $x_1=\xi_1=1,\ x_4=\xi_4=3$ qiymətlərini verməklə x_2 və x_3 məchulları üçün uyğun olaraq $x_2=2-1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3},\ x_3=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ qiymətlərini tapırıq. Onda xüsusi həllərdən biri $\left(1;\frac{1}{3};\frac{7}{3};3\right)$ olar.

Qeyd. Biz burada sıfırdan fərqli ikitərtibli minorlardan başqa birini də, məsələn, $M'=\begin{vmatrix} 2 & -1\\ 7 & -5 \end{vmatrix}=-3$ götürə bilərdik. Onda əmsalları bu minora daxil olan 2-ci və 3-cü tənliyi götürüb, sistemdən 1-ci tənliyi atardıq. Əmsalları minora daxil olan x_3 və x_4 - ü əsas məchul, x_1 və x_2 - ni isə sərbəst məchul hesab edərək,

$$\left.\begin{aligned}-2x_1+x_2+2x_3-x_4&=0,\\ 2x_1-x_2-7x_3-5x_4&=3\end{aligned}\right\}$$

qeyri-müəyyən sistemini alardıq. Bu sistemi həll edib, əvvəlcə tapdığımız həll ilə müqayisə etməyi oxuculara məsləhət görürük.

Misal 4. n məchullu $(n+1)$ tənliklər sistemini Kroneker-Kapelli teoreminin köməyi ilə araşdırmalı.

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=b_n,\\ a_{n+1,1}x_1+a_{n+2,2}x_2+\ldots+a_{n+1,n}x_n&=b_{n+1}.\end{aligned}\right\}$$

Aydındır ki, bu sistemin A matrisi $(n+1)$ sətir və n sütundan ibarət olduğundan onun ranqı n-dən böyük ola bilməz: $r_A<n$. Lakin genişlənmiş B matrisinin ən yüksək tərtibli minoru isə aşağıdakı yeganə $(n+1)$-tərtibli determinant olar:

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n\\ a_{n+1,1} & a_{n+2,2} & \ldots & a_{n+1,n} & b_{n+1}\end{vmatrix},$$

yəni B matrisinin ranqı $r_B<n+1$ ola bilər. Əgər verilən sistem birgədirsə, onda $r_A=r_B$ və $(n+1)$-tərtibli determinant (B-nin A-ya nisbətən yüksək tərtibli minoru): $D=0$ olmalıdır.

Buradan belə bir nəticə alınır: *n məchullu $(n+1)$ sayda tənliklər sistemi birgədirsə, onda onun B matrisinin determinantı sıfra bərabər olmalıdır.*

§ 3.10. Bircins xətti tənliklər sistemi və bunun həllinin xassələri

Biz artıq bircins xətti tənliklər sistemi ilə tanışıq:

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ldots+a_{sn}x_n&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Onu da bilirik ki, bu sistem həmişə uyuşandır və bunun heç olmasa bir $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ sıfır (trivial) həlli həmişə vardır. Bunun doğruluğunu Kroneker-Kapelli teoremi bir daha təsdiq edir. Belə ki, bu sistemin matrisi A ilə genişlənmiş $B=(A\,|\,0)$ matrisinin ranqları həmişə eynidir (çünki, B matrisindəki axırıncı sütun elementləri hamısı sıfırlar olduğundan bunun ranqı A-nın ranqından fərqlənməyəcək): $r_A=r_B=r$. Lakin əlbəttə, inkar etmək olmaz ki, bircins sistemin sıfırdan fərqli (qeyri-trivial) həlləri də ola bilər. Ranq anlayışı bu məsələyə aydınlıq gətirir. Bununla əlaqədar olan aşağıdakı teoremlərə diqqət edək.

TEOREM 1. $r=n$ *olduqda* (1) *sisteminin yeganə sıfır həlli vardır.*

İSBATI. $r=n$ olanda tənliklər sisteminin ümumi nəzəriyyəsinə əsasən hər-hansı sistemin, o cümlədən də bircins xətti tənliklər sisteminin yeganə həlli var. Bircins sistemlərdə bu məhz sıfır həlldir. Deməli, $r=n$ halında (1) sistemi yeganə sıfır həllə malikdir.

Teorem isbat olundu.

Qeyd. Başqa sözlə bunu belə də izah etmək olur: $r=n$ olanda sistemdə xətti asılı olmayan tənliklərin sayı ilə məchulların sayı bərabər olur, onda Kramer teoreminə görə bu sistemin $x_j=\dfrac{D_j}{D}$ $(j=\overline{1,n})$ düsturu ilə tapılan yeganə həlli var. Aydındır ki, bircins sistemlərdə $D_j=0$ və onda düsturdan $x_j=0$ kimi yeganə həll alınır ($j=1,2,\ldots,n$).

TEOREM 2. (1) *bircins xətti tənliklər sisteminin sıfır həllindən fərqli həllərinin varlığı üçün r ranqının məchulların n sayından kiçik $(r<n)$ olması zəruri və kafi şərtdir.*

İSBATI. ***Kafilik.*** $r<n$ olsun. Göstərməliyik ki, (1) sisteminin istənilən qədər qeyri-trivial həlləri var.

$r<n$ olanda, aydındır ki, sistemin məchullarından $n-r$ dənəsi sərbəst məchul olacaq və bunlara da ixtiyari sayda, o cümlədən də sıfırdan fərqli qiymətlər verməklə sistemin istənilən sayda sıfırdan fərqlənən həllərini tapa bilərik.

Zərurilik. Tutaq ki, (1) sisteminin sıfırdan fərqli həlləri var. Göstərməliyik ki, bu ancaq $r<n$ olduqda mümkündür.

Aydındır ki, r ilə n parametrləri üzərində ancaq $r=n$ və $r<n$ münasibətləri mümkündür. Çünki, doğrudan da $r>n$ ola bilməz, belə ki, bircins sistemin A matrisinin sütunlar sayı n olduğundan r ranqı bundan böyük ola bilməz (B genişlənmiş matrisinin axırıncı sütun elementləri hamısı sıfırlardır və bu sütun ranqa təsir etmir). Bilirik ki, $r=n$ olanda sistemin yalnız sıfır həlli vardır. Biz isə sistemin sıfır olmayan həllərinin də olduğunu fərz etmişik. Deməli, bu ancaq $r<n$ halında mümkün olar.

Teorem isbat olundu.

Qeyd. $r<n$ halında biz bu teoremin hələ Qauss üsulunu öyrənərkən tanış olduğumuz aşağıdakı ifadəsini alırıq.

Bircins xətti tənliklər sistemində tənliklərin sayı məchulların sayından az olduqda bu sistemin sıfır həllindən əlavə sıfırdan fərqli istənilən qədər həlləri də vardır.

İndi isə xüsusi maraq doğuran o hala baxaq ki, verilən bircins xətti tənliklər sistemində n dənə məchul və n dənə də tənlik var. Onda aydındır ki, bu sistemə Kramer qaydasını tətbiq etmək imkanı var. Yada salaq ki, Kramer qaydasını öyrənəndə belə bircins sistemlər barədə demişdik ki, bunların sıfırdan fərqli həllə malik olması üçün onun D determinantının sıfır olması zəruri şərtdir. İndi göstərək ki, $D=0$ olması həm də kafi şərtdir. Başqa sözlə aşağıdakı teorem doğrudur.

TEOREM 3. *n məchullu n xətti bircins tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli həllərinin varlığı üçün onun determinantının sıfra bərabər olması həm zəruri, həm də kafidir.*

İSBATI. Şərtin zəruriliyinin isbatı bizə artıq Kramer qaydasının n məchullu n dənə tənlik sisteminə tətbiqindən məlumdur (§ 2.9).

Kafilik. Tutaq ki, $D=0$. Bu o deməkdir ki, sistemin A matrisinin ranqı $r_A=r$ hökmən n-dən kiçik olmalıdır, $r<n$ olanda isə sistemin sıfır həllindən fərqlənən istənilən qədər sıfır olmayan həlləri vardır.

Teorem isbat olundu.

İndi isə xətti bircins tənliklər sisteminin həllərinin xassələri ilə tanış olaq.

XASSƏ 1. *$\beta=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ və $\gamma=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ vektorları (1) sisteminin həllidirsə, onda $\beta\pm\gamma$ vektoru və $\lambda\beta$ vektoru da sistemin həllidir (burada λ - istənilən ədəddir).*

İSBATI. Bu xassə adi yoxlama yolu ilə isbat edilir. Belə ki, sistemin ixtiyari

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n=0 \quad (i=\overline{1,s})$$

tənliyində $x_j=b_j+c_j$ və $x_j=\lambda b_j$ ($j=1,2,\dots,n$) yazsaq, uyğun olaraq:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(b_j+c_j)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_j+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j=0$$

və

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\lambda b_j)=\lambda\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_j=\lambda\cdot 0=0$$

alırıq. İsbat etdiyimiz bu xassələr öz ümumiləşməsini aşağıdakı xassədə tapır:

XASSƏ 2. *Bircins xətti tənliklər sisteminin həllərinin istənilən xətti kombinasiyası da sistemin həllidir.*

İSBATI. Tutaq ki,

$$\left.\begin{array}{l}\gamma_1=(c_{11},c_{12},\dots,c_{1n}),\\ \gamma_2=(c_{21},c_{22},\dots,c_{2n}),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \gamma_m=(c_{m1},c_{m2},\dots,c_{mn})\end{array}\right\}$$

vektorları (1) sisteminin həlləridir. Onda:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{kj}=0 \quad (i=\overline{1,s};\ k=\overline{1,m}).$$

Göstərmək lazımdır ki, bu həllərin xətti kombinasiyası olan

$$\gamma=\lambda_1\gamma_1+\lambda_2\gamma_2+\dots+\lambda_m\gamma_m$$

vektoru da sistemin həllidir; burada λ_j ($j=\overline{1,m}$) əmsalları ixtiyari ədədlərdir. Yenə də sistemin ixtiyari $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n=0$ ($i=\overline{1,s}$) tənliyində məchulların əvəzinə γ vektorunun uyğun koordinatlarını, yəni:

$$x_j=\lambda_1c_{1j}+\lambda_2c_{2j}+\dots+\lambda_mc_{mj}=\sum_{k=1}^{m}\lambda_kc_{kj} \quad (j=1,2,\dots,n)$$

yazaq:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_kc_{kj}\right)=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{kj}\right)=0.$$

Burada $m=2,\lambda_1=1,\lambda_2=\pm1$ olduqda I xassədəki 1-ci bənd, $m=1$ və $\lambda_1=\lambda$ olduqda isə 2-ci bənd xüsusi hal kimi alınır.

§ 3.11. Bircins və bircins olmayan xətti tənliklər sistemlərinin həlləri arasında əlaqə

Bircins olmayan ixtiyari xətti tənliklər sistemi götürək:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Bu sistemin sərbəst hədlərinin sıfırlarla əvəz edilməsi nəticəsində alınan

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

bircins sistemə (1) sisteminə nəzərən *gətirilmiş sistem*, yaxud (1)-ə uyğun *bircins sistem* deyirlər.

(1) və onun gətirilən (2) sisteminin həlləri arasında sıx əlaqə vardır. Bu, aşağıdakı teoremlərlə ifadə edilir.

TEOREM 1. (1) *sisteminin hər hansı həlli ilə gətirilmiş* (2) *sisteminin ixtiyari həllinin cəmi, yenə də* (1)*-in həlli olur.*

İSBATI. Tutaq ki, $(c_1;c_2;\ldots;c_n)$ verilmiş (1) sisteminin həlli, $(d_1;d_2;\ldots;d_n)$ isə gətirilmiş (2) sisteminin həllidir. İndi (1) sisteminin ixtiyari bir i-ci

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \quad (i=\overline{1,s})$$

tənliyində $x_j = c_j + d_j$ $(j=\overline{1,n})$ yazıb, yoxlayaq:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(c_j + d_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j = b_i + 0 = b_i.$$

TEOREM 2. (1) *sisteminin ixtiyari iki həllinin fərqi* (2) *sisteminin həllidir.*

İSBATI. Tutaq ki, $(c_1;c_2;\ldots;c_n)$ və $(c_1';c_2';\ldots;c_n')$ verilmiş (1) sistemin hər hansı iki həllidir. (2) sisteminin hər hansı bir i-ci

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0$$

tənliyində $x_j = c_j - c_j'$ yazıb yoxlayaq:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(c_j - c_j') = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j' = b_i - b_i = 0.$$

Bu iki teoremdən bircins olmayan və buna uyğun (gətirilmiş) bircins tənliklər sisteminin həlləri arasındakı əlaqəyə aid aşağıdakı mühüm nəticə alınır.

NƏTİCƏ. *Bircins olmayan* (1) *sisteminin hər-hansı bir həllini taparaq onu* (2) *bircins sisteminin həllərinin hər biri ilə toplamaqla* (1)*-in həllərinin hamısını tapmış olarıq.*

Xüsusi halda: (1)*-in ümumi həllini* (1)*-in öz xüsusi həlli ilə* (2)*-nin ümumi həllinin cəmi kimi göstərmək olar.*

§ 3.12. Fundamental həllər sistemi

Biz isbat etmişik ki, bircins xətti tənliklər sisteminin istənilən həllərinin xətti kombinasiyası yenə də sistemin həllidir. Burada belə bir maraqlı məsələ qarşıya çıxır: bu sistemin həllər çoxluğu içərisindən xətti asılı olmayan elə həllər çoxluğu seçmək mümkündürmü ki, onun qalan bütün həlləri bunlar vasitəsi ilə xətti ifadə olunsun?

Bircins sistemin həllərini n-ölçülü vektorlar kimi təsəvvür edək; bildiyimizə görə, n-ölçülü vektorlar sistemindəki vektorların sayı bunların n ölçüsündən («uzunluğundan») çoxdursa belə sistem xətti asılı olur. Buradan isə aydın olur ki, bircins tənliklər sisteminin həllər çoxluğundan xətti asılı olmayan elə həllər sistemi seçmək olar ki, qalan hər bir həll bu seçilən həllər sisteminin xətti kombinasiyası olar.

Bu deyilənlər bizi bircins sistemlərə aid olan mühüm bir anlayışla – «fundamental həllər sistemi» anlayışı ilə tanış olmağa sövq edir.

TƏRİF. *Xətti bircins tənliklər sisteminin həllər çoxluğunun maksimal xətti asılı olmayan altçoxluğuna fundamental həllər sistemi deyilir.*

Başqa sözlə: Xətti bircins tənliklər sisteminin həllər çoxluğunun bazisini təşkil edən həllər sistemi fundamental həllər sistemi adlanır.

Yaxud: Xətti bircins tənliklər sisteminin həllər çoxluğunun elə xətti asılı olmayan altçoxluğuna fundamental həllər sistemi deyirlər ki, bütün qalan hər bir həllər bunlar vasitəsi ilə xətti ifadə edilə bilir.

Aşkardır ki, bircins xətti tənliklər sisteminin ancaq sıfırdan fərqli həlləri olduqda onun fundamental həllər sistemindən danışmaq olar.

Bir cəhətə də xüsusi diqqət yetirmək gərəkdir: eyni bir bircins xətti tənliklər sistemi istənilən qədər fundamental həllər sistemlərinə malikdir, lakin bunları təşkil edən vektorlar sistemləri maksimal xətti asılı olmayan sistem (bazis) təşkil etdiyindən bunlar ekvivalent olurlar, odur ki, bunlardakı həllər sayı bərabər olmalıdır: qısa desək: *müxtəlif fundamental həllər sistemi istənilən qədər çox olsa da bunların hər birini əmələ gətirən həllərin sayı eyni olmalıdır.*

İndi isə fundamental həllər sisteminə aid olan aşağıdakı teoremlə tanış olaq.

TEOREM. *Bircins xətti tənliklər sistemində onun matrislərinin r ranqı sistemdəki məchulların n sayından kiçik olduqda $(r<n)$, bu tənliklər sisteminin istənilən qədər mövcud müxtəlif fundamental həllər sisteminin hər biri $n-r$ dənə həlldən ibarətdir.*

İSBATI. Bildiyimiz kimi $r<n$ olduqda

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ldots+a_{sn}x_n=0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

sistemində sərbəst məchullar $n-r$ dənə olacaq.

Tutaq ki, $x_1,x_2,\ldots,x_r$ əsas məchullar $x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_n$ isə sərbəst məchullardır. Bu da məlumdur ki, sərbəst məchullara ixtiyari qiymətlər verməklə, əsas məchullara isə buna uyğun qiymətlər tapmaqla sistemin istənilən qədər həllini ala bilərik.

Sərbəst məchullara verilən qiymətlər ixtiyari olduğundan onlar üçün elə qiymətlər sistemi seçə bilərik ki, buna uyğun tapılan həllər sistemi xətti asılı olmasın. Məsələn, sərbəst məchullara bir-birinin ardınca $(n-r)$ dəfə:

$$\left.\begin{array}{l} x_{r+1}=1,\ x_{r+2}=0,\ldots,x_n=0, \\ x_{r+1}=0,\ x_{r+2}=1,\ldots,x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{r+1}=0,\ x_{r+2}=0,\ldots,x_n=1 \end{array}\right\}$$

qiymətləri verməklə əsas məchullar üçün uyğun olaraq, hər dəfə tamamilə müəyyən

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\xi_{11},x_2=\xi_{12},\ldots,x_r=\xi_{1r}, \\ x_1=\xi_{21},x_2=\xi_{22},\ldots,x_r=\xi_{2r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1=\xi_{n-r,1},x_2=\xi_{n-r,2},\ldots,x_r=\xi_{n-r,r} \end{array}\right\}$$

qiymətlərini taparıq. Bu qayda ilə verilmiş sistemin $n-r$ sayda

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1=(\xi_{11},\xi_{12},\ldots,\xi_{1r},1,0,\ldots,0) \\ \alpha_2=(\xi_{21},\xi_{22},\ldots,\xi_{2r},0,1,\ldots,0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n-r}=(\xi_{n-r,1},\xi_{n-r,2},\ldots,\xi_{n-r,r},0,0,\ldots,1) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

kimi həllər sistemini tapmış olarıq. Bu həllər sistemi xətti asılı deyildir. Doğrudan da, əgər uyğun matrisi yazsaq, burada sıfırdan fərqli $(n-r)$-tərtibli minorlardan birinin

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

olduğu aşkar görünür. Bu o deməkdir ki, (2)-nin ranqı $(n-r)$-dir, başqa sözlə $n-r$ sayda vektor xətti asılı olmayan sistem əmələ gətirir. Deməli, əgər biz sıfırdan fərqli istənilən bir $(n-r)$-tərtibli:

$$D=\begin{vmatrix} c_{1,r+1} & c_{1,r+2} & \ldots & c_{1n} \\ c_{2,r+1} & c_{2,r+2} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ c_{n-r,r+1} & c_{n-r,r+2} & \ldots & c_{n-r,n} \end{vmatrix} \neq 0$$

determinantının i-ci $(1\le i\le n-r)$ sətrinin elementlərini sərbəst məchullar üçün uyğun qiymətlər qəbul etsək, onda əsas məchullara tamamilə müəyyən $c_{i1},c_{i2},\ldots,c_{ir}$ kimi müvafiq qiymətlər taparıq və (1) sisteminin:

$$\alpha_i=(c_{i1},c_{i2},\ldots,c_{ir},c_{i,r+1},c_{i,r+2},\ldots,c_{in}) \qquad (3)$$

$(i=1,2,\ldots,n-r)$ kimi həllini alarıq. Bu qayda ilə tapılan $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-r}$ vektorlar sistemi xətti asılı deyil (uyğun matrisin $(n-r)$-tərtibli D minoru sıfırdan fərqlidir).

Göstərək ki, xətti asılı olmayan $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-r}$ həllər sistemi (1)-in məhz fundamental həllər sistemidir. Bunun üçün göstərməliyik ki, (1) sisteminin ixtiyari bir həlli (3) həllər sistemi ilə xətti ifadə olunur.

$$\beta=(b_1,b_2,\dots,b_r,b_{r+1},b_{r+2},\dots,b_n)$$

vektoru (1) sisteminin ixtiyari bir həlli olsun.

$$\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\dots+\lambda_{n-r}\alpha_{n-r}$$

bərabərliyi ödəndiyini göstərmək lazımdır.

D determinantının sətirlərini əmələ gətirən

$$\alpha_i'=(c_{i,r+1};c_{i,r+2};\dots;c_{in})\quad (i=1,2,\dots,n-r)$$

şəklində $(n-r)$-ölçülü vektorlar sistemi, $D\neq 0$ olduğundan xətti asılı deyildir. Əgər bu sistemə $\beta'=(b_{r+1};b_{r+2};\dots;b_n)$ kimi vektor qoşsaq, alınan $\alpha_1',\alpha_2',\dots,\alpha_{n-r}',\beta'$ vektorlar sistemi xətti asılı olar (çünki, sistemdəki vektorların sayı bunların ölçülərindən çoxdur). Onda xətti asılılığın tərifinə görə elə $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n-r}$ ədədləri var ki,

$$\beta'=\lambda_1\alpha_1'+\lambda_2\alpha_2'+\dots+\lambda_{n-r}\alpha_{n-r}' \tag{4}$$

bərabərliyi doğru olsun.

İndi isə (1) bircins xətti tənliklər sisteminin $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-r}$ və β həllərinin:

$$\beta_0=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\dots+\lambda_{n-r}\alpha_{n-r}-\beta \tag{5}$$

kimi xətti kombinasiyasını nəzərdən keçirək. Aydındır ki, β_0 vektoru da (1) sisteminin həlli olmalıdır (II xassə).

(4) münasibətindən alınan $\beta'-(\lambda_1\alpha_1'+\lambda_2\alpha_2'+\dots+\lambda_{n-r}\alpha_{n-r}')=\theta$ bərabərliyi göstərir ki, β_0 həlli, sərbəst $x_{r+1},x_{r+2},\dots,x_n$ məchullarının ancaq sıfırlardan ibarət olan qiymətlərinə uyğun olan həlldir:

$$\beta_0=(c_1';c_2';\dots;c_r';0;0;\dots;0).$$

Onda β_0 həllindəki əsas $x_1,x_2,\dots,x_r$ məchullarının uyğun $x_m=c_m'$ $(m=1,2,\dots,r)$ qiymətləri də sıfır olmalıdır:

$$c_1'=c_2'=\dots=c_r'=0,$$

çünki, (1) sistemində sərbəst məchulların hamısına sıfır qiymətlər verdikdə, sistemin əsas məchulları da ancaq sıfır qiymətlər alır. Deməli, β_0 həlli (1) sisteminin sərbəst məchulların sıfır qiymətlərinə uyğun yeganə sıfır həllidir:

$$\beta_0=(0;0;\dots;0;0;\dots;0)=\theta.$$

Onda (5)-dən:

$$\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\dots+\lambda_{n-r}\alpha_{n-r}.$$

Bununla da teorem isbat olunur.

Bu teoremə əsasən fundamental həllər sisteminin qurulmasının üsulu da aydınlaşır. Belə ki, verilən sistemdə $r<n$ olarsa, əvvəl onun ümumi həllini tapır, sonra isə sıfırdan fərqli $(n-r)$-tərtibli ixtiyari bir determinant götürərək, bunun sətir elementlərini uğun olaraq sərbəst məchulların qiymətləri hesab edib, uyğun xüsusi həlləri tapırlar. Bu proses nəticəsində $n-r$ sayda həll məhz fundamental həllər sistemi olar.

Əgər sıfırdan fərqli başqa bir yeni $(n-r)$-tərtibli determinant seçsək, həmin qayda ilə yenə də $n-r$ sayda həlldən ibarət başqa bir fundamental həllər sistemi taparıq.

Sərbəst məchullara qiymət vermək üçün, adətən $(n-r)$-tərtibli olmaq şərti ilə;

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&1\end{vmatrix}\neq 0$$

determinantını seçirlər. Bu onunla əlaqədardır ki, əvvələn, bu determinantın sətir elementlərini uyğun olaraq sərbəst məchulların qiyməti olaraq seçdikdə ümumi həlldən əsas məchulların qiymətlərini hesablamaq işi xeyli asanlaşır, ikincisi isə, bu determinantın sıfırdan fərqli olduğu dərhal görünür.

İndi bir neçə misalı nəzərdən keçirək.

Misal 1. Sistemi həll edin:

$$\left.\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3+x_4&=0,\\2x_1-x_2+2x_3+2x_4&=0,\\x_1-4x_2+3x_3-x_4&=0,\\3x_1+x_2+6x_3&=0.\end{aligned}\right\}.$$

Əvvəlcə, bu sistemin sıfırdan fərqli həllinin olduğunu aydınlaşdıraq. Bunun üçün sistemin determinantını yoxlamalıyıq:

$$D=\begin{vmatrix}1&2&1&1\\2&-1&2&2\\1&-4&3&-1\\3&1&6&0\end{vmatrix}=0.$$

Deməli, sistemin sıfır həllindən başqa, sıfırdan fərqli həlləri də vardır. İndi matrisin ranqını hesablayaq. Aydındır ki, ranq 4-dən kiçik olmalıdır. Haşiyələyən minorlar üsulunun köməyi ilə ranqın $r=3$ olduğunu taparıq. Belə ki, burada sıfırdan fərqli ən yüksək tərtibli minorun tərtibi 3 olur. Onlardan biri:

$$M=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Onda verilən sistem:

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1-4x_2+3x_3-x_4=0, \\ 3x_1+x_2+6x_3=0 \end{aligned}\right\}$$

sistemi ilə ekvivalentdir. Burada x_1 məchulunu sərbəst hesab edib, sistemi x_2, x_3, x_4 əsas məchullarına nəzərən həll etsək, bu sistemin:

$$x_2=0,\ x_3=-\frac{1}{2}x_1,\ x_4=-\frac{1}{2}x_1$$

həllini alarıq. Əgər $x_1=2\xi$ parametrini daxil etsək, sistemin:

$$x_1=2\xi,\ x_2=0,\ x_3=-\xi,\ x_4=-\xi$$

kimi ümumi həllini taparıq. Burada ξ parametrinə ixtiyari qiymətlər verməklə verilmiş sistemin istənilən sayda həllərini tapa bilərik.

Misal 2.

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{aligned}\right\}$$

sisteminin ümumi həllini və fundamental həllər sistemini tapmalı.

Bu sistemin ranqını hesablayıb $r=2$ oluduğunu tapırıq. Deməli, bunun fundamental həllər sistemi var və hər biri $n-r=4-2=2$ sayda həlldən ibarət olmalıdır.

Bildiyimiz qaydalar üzrə bu sistemin $x_1=8x_3-7x_4$, $x_2=-6x_3+5x_4$ kimi ümumi həllini tapırıq. İndi fundamental həllər sistemini qurmaq üçün x_3 və x_4 sərbəst məchullarına elə qiymətlər verməliyik ki, alınan həllər xətti asılı olmayan sistem əmələ gətirsin. Bunu aşağıdakı kimi edirlər: ümumi həlldə sərbəst məchullara əvvəlcə $x_3=1$, $x_4=0$ və sonra $x_3=0$, $x_4=1$ kimi qiymətlər verirlər. Bu qiymətlər sıfırdan fərqli olan

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

kimi ikitərtibli determinantın uyğun sətir elementləridir (teoremin isbatını yadınıza salın). İndi x_1 və x_2 əsas məchullarının uyğun qiymətlərini tapaq. Bu prosesi aşağıdakı cədvəl üzrə aparmaq daha məqsədəuyğundur.

x_1	x_2	x_3	x_4
8	−6	1	0
−7	5	0	1

Burada $\alpha_1=(8;-6;1;0)$ və $\alpha_2=(-7;5;0;1)$ kimi iki həlldən ibarət bir fundamental həllər sistemi tapırıq.

Qeyd. Bu sistemin istənilən bir həllini α_1 və α_2 həlləri vasitəsi ilə xətti ifadə etmək olar:

$$\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2.$$

Başqa sözlə, ümumi həll:

$$\beta=(8x_3-7x_4;-6x_3+5x_4;x_3;x_4)=x_3\alpha_1+x_4\alpha_2$$

olur.

FƏSİL 4

MATRİSLƏR CƏBRİNİN ELEMENTLƏRİ

§ 4.1. Matrislərin toplanması və ədədə vurulması

Matrislər haqqında kitabın əvvəlində verilən ilkin məlumatdan oxucuya artıq bəllidir ki, ölçüləri $s\times n$ olan $A_{s\times n}$ ədədi matris dedikdə elementləri a_{ij} kimi işarə edilən, sətirləri sayı s, sütunları sayı isə n, qısa yazılış şəkli $A_{s\times n}=(a_{ij})$ olan ($i=1,2,\dots,s;\ j=1,2,\dots,n$) düzbucaqlı cədvəl düşünülür və ölçüləri ilə uyğun elementləri bərabər olan matrislər bərabər matrislər adlanırlar.

İndi isə matrislər üzərində əməllər və bununla bağlı olaraq matrislərin bəzi əlavə xüsusi növləri ilə tanış olmaqla cəbrin matrislər nəzəriyyəsinin elementləri barədə biliyimizi bir qədər də artıraq.

Matrislər üzərində əməlləri matrislərin toplanması və ədədə vurulmasından başlayaq.

TƏRİF 1. *Ölçüləri eyni olan A və B matrislərinin cəmi elə bir C matrisinə deyilir ki, bunun elementləri A və B-nin uyğun elementlərinin cəmindən ibarət olsun.*

Başqa sözlə, əgər $A_{s\times n}=(a_{ij})$ və $B_{s\times n}=(b_{ij})$ matrisləri verilibsə, bunların cəmi $C_{s\times n}=(c_{ij})$ üçün $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ olur:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}}_{A}+\underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{sn} \end{pmatrix}}_{B}=\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{s1}+b_{s1} & a_{s2}+b_{s2} & \dots & a_{sn}+b_{sn} \end{pmatrix}}_{C}.$$

Matrislər üzərində toplamanın tərsi olan çıxma əməlinin varlığını göstərmək üçün $A+X=B$ bərabərliyinin sol tərəfindəki $A_{s\times n}=(a_{ij})$, $X_{s\times n}=(x_{ij})$ matrislər cəminin hər-hansı $a_{ij}+x_{ij}$ elemen-

ti $B_{s\times n}=(b_{ij})$ matrisinin uyğun elementinə bərabər olduğuna diqqət etmək lazımdır: $a_{ij}+x_{ij}=b_{ij}$, buradan isə $x_{ij}=b_{ij}-a_{ij}$. Deməli,

$$X=B-A=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{sn} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} b_{11}-a_{11} & b_{12}-a_{12} & \dots & b_{1n}-a_{1n} \\ b_{21}-a_{21} & b_{22}-a_{22} & \dots & b_{2n}-a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ b_{s1}-a_{s1} & b_{s2}-a_{s2} & \dots & b_{sn}-a_{sn} \end{pmatrix}.$$

Xüsusi halda $B=A$ olduqda $B-B$ fərqi sıfır matris verir:

$$B-B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}=\theta.$$

Əgər $B-A$ fərqində $B=\theta$ olarsa, onda $\theta-A$ fərqini $(-A)$ ilə işarə edib A-nın əks-matrisi adlanan

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ -a_{s1} & -a_{s2} & \dots & -a_{sn} \end{pmatrix}$$

matrisini alırıq.

Deməli, $B-A$ fərqi B matrisi üzərinə A-nın $(-A)$ əksini əlavə etməklə də $B+(-A)$ təyin edilir.

TƏRİF 2. *A matrisinin hər-hansı λ ədədi ilə $\lambda\cdot A$ kimi işarə edilən hasili elə A_1 matrisinə deyilir ki, bunun uyğun elementlərinin hamısı A-nın bütün elementlərinin hasilindən ibarət olsun.*

Yəni, $A=(a_{ij})$ matrisi ilə λ ədədinin hasili

$$A_1=\lambda A=\lambda\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{s1} & \lambda a_{s2} & \dots & \lambda a_{sn} \end{pmatrix}.$$

Bu tərifdən alınan aşkar bir xassəni qeyd edək: *matrisin bütün elementlərindən ortaq vuruğu onun işarəsi xaricinə çıxarmaq olar*. Məsələn,

$$\begin{pmatrix} -8 & 12 & 16 \\ 4 & 28 & -4 \\ 0 & 24 & 12 \\ 32 & -16 & 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu deyilənlərdən göstərilən əməlləri icra etmək qaydalarının belə xülasələrini söyləmək olar:

Ölçüləri eyni olan iki matrisi toplamaq (çıxmaq) üçün onların uyğun elementlərini toplamaq (çıxmaq), matrisi ədədə vurmaq üçün onun bütün elementlərinin hamısını həmin ədədə vurmaq gərəkdir.

Qeyd. Toplama əməlini ixtiyari sonlu k sayda $A_1, A_2, \ldots, A_k$ matrislər üçün asanlıqla ümumiləşdirmək olar: $A_1 + A_2 + \ldots + A_k$ cəminin elementləri toplananların uyğun elementlərinin cəmindən ibarətdir.

Göstərilən əməllər aşağıdakı xassələrə malikdirlər:

1. $A + B = B + A$;
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$;
3. $A + \theta = A$;
4. $A + (-A) = \theta$;
5. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$;
6. $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$;
7. $(\lambda_1\lambda_2)A = \lambda_1(\lambda_2 A)$;
8. $1 \cdot A = A$.

Bu xassələrin hər birinin doğruluğu adi yoxlama yolu ilə sübut edilir.

Məsələn, 2-ci xassəni, yəni toplamada assosiativlik $(A+B)+C = A+(B+C)$ xassəsinin doğruluğunu isbat edək.

Aydındır ki, sol və sağ tərəflərdəki cəmlərin nəticəsində alınan matrislərin uyğun elementləri $(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}$ və $a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$ olacaq və cəmdə iştirak edən bu toplanan ədədlər üçün

$$(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$$

bərabərliyi doğrudur. Odur ki: $(A+B)+C = A+(B+C)$.

4-cü xassəyə baxaq: $A + (-A) = \theta$.

$$A+(-A) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & \ldots & -a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ -a_{s1} & \ldots & -a_{sn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \theta.$$

İndi, 5-ci xassəni götürək.

Sol tərəf:

$$\lambda(A+B) = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{s1}+b_{s1} & \ldots & a_{sn}+b_{sn} \end{pmatrix}}_{A+B} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda a_{11}+\lambda b_{11} & \ldots & \lambda a_{1n}+\lambda b_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \lambda a_{s1}+\lambda b_{s1} & \ldots & \lambda a_{sn}+\lambda b_{sn} \end{pmatrix}}_{\lambda A+\lambda B}.$$

Sağ tərəf:

$$\lambda A+\lambda B = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \ldots & \lambda a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{s1} & \ldots & \lambda a_{sn} \end{pmatrix}}_{\lambda A} + \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda b_{11} & \ldots & \lambda b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda b_{s1} & \ldots & \lambda b_{sn} \end{pmatrix}}_{\lambda B} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda a_{11}+\lambda b_{11} & \ldots & \lambda a_{1n}+\lambda b_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \lambda a_{s1}+\lambda b_{s1} & \ldots & \lambda a_{sn}+\lambda b_{sn} \end{pmatrix}}_{\lambda A+\lambda B}.$$

Nəticələr eynidir, deməli: $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

Qalan xassələrin hamısı bu cür asanlıqla isbat edilir.

Matrislər üzərində toplama və ədədə vurma əməllərinin təyini, bu əməllərin xassələri bir daha matrislərin n-ölçülü vektorlarla sıx əlaqəsini göstərir, daha doğrusu, $s \times n$ ölçülü matrisə mahiyyət etibarilə $(s \times n)$-ölçülü vektor, n-tərtibli kvadrat matrisə isə n-ölçülü vektor kimi baxmağın tamamilə təbii olduğunu sübut edən faktlardan biridir.

§ 4.2. Matrislərin vurulması

Tutaq ki, $s \times n$ və $n \times m$ ölçülü (bəzən matrislərin ölçülərini onun «quruluşu» da adlandırırlar) iki

$$A_{s\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad B_{n\times m} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{i1} & b_{i2} & \ldots & b_{im} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

matrisləri verilmişdir.

Matrislərin ölçülərinin belə seçimi təsadüfi deyil, bunun səbəbi tərifdən aydın olacaq.

TƏRİF. $A_{s\times n} = (a_{ij})$ *və* $B_{n\times m} = (b_{ij})$ *matrislərinin hasili elə*

$$C_{s\times m}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{im} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{sj} & \dots & c_{sm} \end{pmatrix}$$

matrisinə deyilir ki, onun ixtiyari c_{ij} elementi $(i=\overline{1,s}\,,\ j=\overline{1,m})$ A-nın i-ci sətir elementlərinin B-nin j-ci sütununun uyğun elementlərinin hasillərinin cəmindən ibarət olsun:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\,. \qquad (*)$$

Tərifdən görünür ki, matrislərin vurulma qaydası determinantların vurulmasındakı «sətri sütuna vurmaq» qaydası ilə eynidir (determinantlarda «sütunu sütuna vurma», «sətri sətrə vurma» və «sütunu sətrə vurma» qaydaları burada istisna edilir, çünki, matris determinantdan fərqli olaraq ədəd deyil, o cədvəldir və bunları transponirə etdikdə əvvəlkindən fərqlənən başqa cədvələ çevrilir).

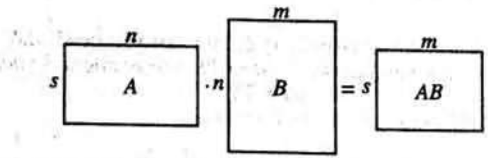
Tərifdən hasildə iştirak edən vuruqları, yəni A və B matrisinin ölçülərinin uyğun olaraq məhz $s\times n$ və $n\times m$ seçilməsi səbəbi də aşkar olur. Belə ki, (*) cəminin hədlərindəki hasilləri düzəltməyin mümkünlüyü üçün A matrisinin i-ci sətrindəki $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in}$ elementlər sayı B-nin j-ci sütununun $b_{1j},b_{2j},\ldots,b_{nj}$ elementləri sayına bərabə olmalıdır; başqa sözlə: *A-nın sütunlar sayı B-nin sətirlər sayına bərabər olmalıdır*. Bu şərti «AB hasilinin mənası olması» şərti adlandırırlar. Kitabda bunu «matrislərin vurulmasının mümkünlüyü» şərti adlandırmağı şərtləşək.

Uyğun olaraq ölçüləri $s\times n$ və $n\times m$ olan A və B matrislərinin hasili (C matrisi) $s\times m$ ölçülü, yəni sətirlər sayı birinci vuruğun (A-nın), sütunlar sayı isə ikinci vuruğun (B-nin) sütunlar sayına bərabər olur:

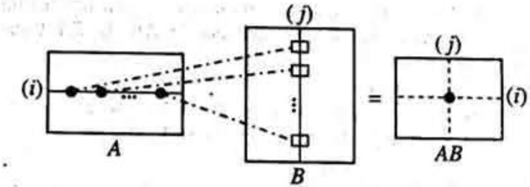
$$A_{s\times n}\cdot B_{n\times m}=C_{s\times m}\,.$$

Xüsusi halda verilən matrislər kvadrat matris olsalar ($s=n=m$), onda bunlar üçün vurmanın mümkünlük şərti bunların tərtiblərinin eyni olmasıdır. Həm də əgər hər iki vuruq n-tərtiblidirsə hasil matris də n-tərtibli olacaq.

Matrislərin vurulmasını ($A_{s\times n}$ və $B_{n\times m}$) sxematik olaraq belə təsvir edirlər:



Hasil matrisin hesablanmasını da aşağıdakı kimi sxemlə təsvir edirlər:



Matrislərin vurulmasına aid bir neçə misal göstərək.

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ və $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$, $AB=?$

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot1+3\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3 & 1\cdot1+2\cdot4+3\cdot9\\ 4\cdot1+5\cdot1+6\cdot1 & 4\cdot1+5\cdot2+6\cdot3 & 4\cdot1+5\cdot4+6\cdot9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 14 & 36\\ 15 & 32 & 78\end{pmatrix}$$

2) $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}$ və $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ 4 & -5 & 6\end{pmatrix}$;

$$AB=\begin{pmatrix}4\cdot0+(-1)\cdot4 & 4\cdot2+(-1)\cdot(-5) & 4\cdot(-3)+(-1)\cdot6\\ 5\cdot0+(-2)\cdot4 & 5\cdot2+(-2)\cdot(-5) & 5\cdot(-3)+(-2)\cdot6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 13 & -18\\ -8 & 20 & -27\end{pmatrix}$$

3) $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 6\end{pmatrix}$ və $B=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 5 & 0\end{pmatrix}$, $AB=?$

Burada AB hasili mənasızdır, burada vurmanın mümkünlük şərti pozulmuşdur.

Verilən matrislər uyğun olaraq bir sətir və bir sütundan ibarət olarsa onda vurma əməlinin icra edilməsi üçün sətrin «uzunluğu» ilə sütunun «hündürlüyü» bərabər olmalıdır; bu halda hasildə bir dənə elementdən ibarət (birtərtibli) kvadrat matris olacaq. Məsələn:

$$(1\ \ 2\ \ 3)\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}=(1\cdot 2+2\cdot(-4)+3\cdot 1)=(-3).$$

Matrislərin vurulmasında aşağıdakı xassələri qeyd edək.

1. *Matrislər hasilində kommutativlik xassəsi doğru deyildir:*

$$AB\neq BA.$$

Buna aid misal göstərmək kifayətdir:

1) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\0 & 3 & 5\end{pmatrix}$ və $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & -2\\1 & 3\end{pmatrix}$; $AB=\begin{pmatrix}2 & -1\\8 & 9\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}2 & 7 & 9\\1 & -5 & -11\\2 & 10 & 14\end{pmatrix}$.

Burada AB və BA hasilinin mənası var, yəni hər iki hasildə vurma əməlinin mümkünlük şərti ödənsə də AB ilə BA tamamilə başqa-başqa matrislərdir.

Yaxud başqa misal:

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \text{ və } \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

Göründüyü kimi: $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}$.

Lakin bir çox hallarda bəzi matrislər üçün vurmada kommutativlik xassəsi doğru olur. Belə matrisləri *kommutativ matrislər* adlandırırlar. Məsələn, aşağıdakı matrislər kommutativdir:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Bunlar üçün $AB=BA$ (yoxlayın!).

Amma bunu bütün matrislər üçün demək olmaz.

2. *Matrislərin hasilində assosiativlik xassəsi doğrudur*, yəni: *A, B, C matrislərində AB və BC hasillərinin mənası varsa (yəni, A ilə B və B ilə C matrisləri vurmanın mümkünlüyü şərtini ödəyirlər), onda $(AB)C$ və $A(BC)$ hasillərinin də mənası var və bunlar üçün*

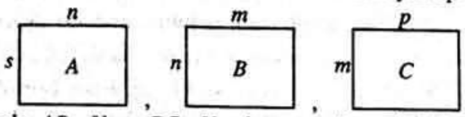
$$(AB)C=A(BC) \tag{1}$$

bərabərliyi doğrudur.

İSBATI. Əvvəlcə $(AB)C$ və $A(BC)$ hasillərinin mənası olduğunu göstərək.

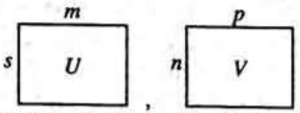
$A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$, $AB=U=(u_{ij})$, $BC=V=(v_{ij})$, $(AB)C=S=(s_{ij})$, $A(BC)=T=(t_{ij})$ işarələrini qəbul edək.

A, B və C matrislərinin sxematik təsvirini yazaq:



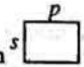
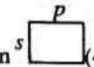
(2)

Onda $AB=U$ və $BC=V$ -nin sxematik təsviri belə olar:



(3)

(2) və (3)-dən $(AB)C=S$ və $A(BC)=T$ üçün aşağıdakı sxematik təsvirlər alınır:

$\underbrace{(AB)}_{U}C=UC=S$ üçün  və $A\underbrace{(BC)}_{V}=AV=T$ üçün  (4)

Deməli, $(AB)C$ və $A(BC)$ hasillərinin mənası var.

İndi sadə olması naminə $(AB)C=A(BC)$ bərabərliyinin doğruluğunu n-tərtibli matrislər üçün isbat edək (lakin yadda saxlamaq lazımdır ki, bu xassə vurmanın mümkünlük şərtləri daxilində düzbucaqlı matrislər üçün də doğrudur).

Matrislərin vurulma qaydasına əsasən:

$$u_{il}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}\quad,\quad v_{kj}=\sum_{l=1}^{n}b_{kl}c_{lj};$$

$S=UC$ və $T=AV$ olduğundan:

$$s_{ij}=\sum_{l=1}^{n}u_{il}c_{lj}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj},$$

$$t_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}v_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj},$$

yəni $s_{ij}=t_{ij}$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$ və deməli, $S=T$ olur.

Xassə isbat olundu.

Onu da qeyd edək ki, riyazi induksiya prinsipinin köməyi ilə matrislər hasilinin assosiativlik xassəsini asanlıqla ümumiləşdirib onu istənilən sonlu sayda vuruqlar hasilinə də aid edə bilərik. Belə ki, əgər k dənə $A_1, A_2, \ldots, A_k$ matrislərinin hasilində istənilən iki qonşu A_i, A_{i+1} matrislərinin A_iA_{i+1} hasilinin ($i = 1,2,\dots,n-1$) mənası varsa, onda $A_1A_2\dots A_k$ hasili üçün induktiv prinsipə uyğun olaraq $k-1$ dənə vuruqlara malik olan $A_1A_2\dots A_{k-1}$ hasili üçün doğruluğunu qəbul edib $A_1A_2\dots A_k = (A_1A_2\dots A_{k-1})A_k$ yazılışına istinad edib k dənəsi üçün isbat edə bilərik. Buradakı hasildən axırda alınan matrisin sətirlər sayı birinci vuruğun (A_1 -in) sətirləri sayını, sütunları sayı isə sonuncu vuruğun (A_k - nın) sütunlar sayına bərabər olacaq.

Assosiativlik qanununa əsasən istənilən $i = 1,2,\dots,n-1$ üçün

$$A_1A_2\dots A_k = (A_1A_2\dots A_i)(A_{i+1}\dots A_k)$$

bərabərliyi doğrudur.

Matrislərin vurulmasında rast gəlinən daha bir neçə xassəni qeyd edək.

3. Vurmanın mümkünlük şərti nəzərə alınmaqla:

a) $(A \pm B)C = AC \pm BC$ (distributivlik xassəsi), (5)

b) $C(A \pm B) = CA \pm CB$ (distributivlik xassəsi). (6)

İSBATI. a) bəndini isbat edək. matrislərin toplanması və vurulması qaydalarına əsasən isbat edəcəyimiz bərabərliyin müvafiq elementlərinin köməyi ilə aşağıdakı bərabərliyi yaza bilərik:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik} \pm b_{ik})c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \pm \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}. \tag{7}$$

Bu bərabərliyin sol tərəfi $(A \pm B)C$ cəm və hasilindən alınan matrisin i - ci sətri ilə j - ci sütunun kəsişdiyi yerdə duran element, sağ tərəf isə $AC \pm BC$ cəm və hasilindən alınmış matrisin uyğun elementidir. Bu isə a) bəndindəki $(A \pm B)C = AC \pm BC$ bərabərliyinin, yəni toplama və vurma əməllərinin iştirak etdiyi distributivlik xassəsinin doğruluğunu göstərir.

Buna oxşar qayda ilə b) bəndi isbat edilir (bunu oxucuya həvalə edirik).

4. $$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB). \tag{8}$$

İSBATI. Aydındır ki, buradakı hasil üçün müvafiq elementlərin köməyi ilə

$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_{ij})b_{kj} = \lambda\sum_{k=1}^{n} a_{ij}b_{kj}$$

bərabərliyini yazmaq olur, yəni sol tərəfdəki matrisin ixtiyari i - ci sətir və j - ci sütunun kəsişməsindəki element, sağ tərəfdə isə $\lambda(AB)$ matrisinin uyğun elementidir. Bununla da $(\lambda A)B = (AB)$ bərabərliyinin doğruluğu isbat edilir. $A(\lambda B) = \lambda(AB)$ bərabərliyi də bu qayda ilə isbat edilir.

Qeyd. Matrislərin toplanması, vurulması və ədədə vurulması əməllərini və bunların xassələrini nəzərə aldıqda matrislərin müəyyən şərtləri ödəyən çoxluğunun hansı cəbri struktura əmələ gətirməsi sonrakı bölmələrdə aydın olacaq.

5. *Vurmanın mümkünlük şərtini ödəyən $A = (a_{ij})$ və $B = (b_{ij})$ matrislərinin hasilinin transponirə edilmişi onların transponirə olunmuşlarının tərs nizamla hasillərinə bərabərdir:* $(AB)' = B'A'$.

İSBATI. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ verilir, bunların transponirə olunmuşları $A' = (a'_{ij}) = (a_{ji})$, $B' = (b'_{ij}) = (b_{ji})$.

$AB = C$ olsun. Bilirik ki: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Onda $c'_{ij} = c_{ji}$ olduğunu nəzərə alıb matrislərin vurulma qaydasına əsasən $B'A'$ hasilini tapaq:

$$B'A' = \left(\sum_{k=1}^{n} b'_{ik}a'_{kj}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}\right) = (c_{ji}).$$

Deməli, $(AB)'$ hasilinin ixtiyari elementləri $B'A'$ hasilinin uyğun elementləri ilə üst-üstə düşür, bu isə o deməkdir ki:

$$(AB)' = B'A'.$$

Riyazi induksiya prinsipinə əsaslanıb bu xassəni vurma əməlinin mənası olan ixtiyari sonlu sayda matrislər hasili üçün ümumiləşdirə bilərik:

$$(A_1A_2\dots A_k)' = A'_kA'_{k-1}\dots A'_2A'_1.$$

Nəhayət bir neçə kəlmə də qüvvətə yüksəltmə əməli haqqında danışaq.

Əvvələn, onu qeyd edək ki, n - tərtibli A matrisində $A^0 = E$ (yəni A matrisinin sıfır dərəcədən qüvvəti vahid matris qəbul edilir).

TƏRİF. *n - tərtibli A kvadrat matrisinin k dərəcədən ($k \in N$) qüvvəti A - nın özünün-özünə k dəfə vurulmasından alınan matrisə deyilir və A^k kimi işarə edilir:*

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ dənə}}. \tag{9}$$

Assosiativlik xassəsinin doğruluğunu nəzərə alsaq istənilən p və q $(p,q \in N_0)$ üçün aşağıdakı bərabərliklərin doğruluğuna əmin ola bilərik:

$$A^p \cdot A^q = A^{p+q},\ \left(A^p\right)^q = A^{pq}. \qquad (10)$$

Amma bunu da xatırlamağın yeridir ki, A və B kimi iki n-tərtibli matrislər üçün

$$(AB)^k = A^k B^k$$

bərabərliyi doğru deyil; səbəbi də odur ki, matrislərin vurulmasında kommutativlik xassəsi (xassə 1) doğru deyil.

Qeyd. Sonuncu $(AB)^k = A^k B^k$ bərabərliyi yalnız kommutativ matrislər üçün, yəni $AB = BA$ olduqda doğru olur və bu şərt daxilində $A+B$ cəmi üçün Nyuton binomu düsturu da doğrudur:

$$(A+B)^n = A^n + C_n^1 A^{n-1}B + C_n^2 A^{n-2}B^2 + \ldots + B^n.$$

Xüsusi maraq doğuran bir məsələyə də toxunmağı vacib sayırıq. Bu da matrislər hasilində iştirak edən vuruqlardan birinin təkcə bir sətirdən (sətir-matris və ya «sətir-vektor») və təkcə bir sütundan (sütun-matris və ya «sütun-vektor») olması halıdır. Təbii ki, burada da vurmanın mümkünlük şərti ödənməlidir.

Tutaq ki, $A_{s\times n} = (a_{ij})$ ölçülü matris soldan s-ölçülü sətir matrisə vururuq; matrislərin vurulma qaydasına əsasən

$$(y_1\ y_2 \ldots y_s)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{s} y_i a_{i1}\ \sum_{i=1}^{s} y_i a_{i2} \ldots \sum_{i=1}^{s} y_i a_{in}\right). \qquad (11)$$

İndi isə $A_{s\times n} = (a_{ij})$ matrisini sağdan n-ölçülü sütun matrisə vuraq; yenə də vurma qaydasına əsaslanaraq:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \ldots\ldots\ldots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{sj}x_j \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Göründüyü kimi nəticədə (11) «sətir-matris» və (12) «sütun-matris» alırıq.

Kitabın gələcək bəhslərində istənilən matrisləri vurmanın mümkünlük şərtini nəzərə almaqla soldan və sağdan sətir və sütun matrislərə vurma əməlindən istifadə edilməsinin şahidi olacağıq.

Sonda matrislərin vurulmasında vuruqların birinin diaqonal, skalyar, sıfır matris olması hallarına da nəzər yetirək.

Xatırlayaq ki, diaqonal matris də baş diaqonal elementlərə aid olmayan bütün elementləri sıfırlardan ibarət olan kvadrat matrisdir, yəni:

$$\left(\forall (i,j), i \neq j\right) \Rightarrow \left(d_{ij} \neq 0\right).$$

Bilirik ki, burada d_{ij} elementi diaqonal matrisin baş diaqonal elementidir və $d_{11} = d_{22} = \ldots = d_{nn} = d$ olduqda matris skalyar, bütün elementlər sıfır olduqda isə matris sıfır olur. «Açıq» yazsaq:

$$D(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix} \quad \text{(diaqonal matris)},$$

$$D_d = \begin{pmatrix} d & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d \end{pmatrix} \quad \text{(skalyar matris)}, \qquad \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(sıfır matris)}.$$

Diaqonal və skalyar matrislərdən fərqli olaraq sıfır matrisin kvadrat matris olması heç də məcburi deyil.

Bu da məlumdur ki, skalyar matrisdə $d = 1$ olanda xüsusi halda vahid matrisi alırıq:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Onu da yadda saxlamağın yeridir ki, ixtiyari diaqonal matrisə pilləli matrisin xüsusi halı, vahid və sıfır matrisə isə kanonik şəkilli matrisin xüsusi halları kimi baxmaq olar.

İndi bu matrislərlə A matrisinin hasillərinə baxaq:

a) *A matrisinin sağdan diaqonal matrisə hasili A-nın hər bir sütununun elementinin diaqonal matrisin uyğun elementlərinin hasillərinə bərabərdir.*

Doğrudan da, vurma qaydasına əsasən:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}}_{n \text{ tərtibli}} = \begin{pmatrix} d_1a_{11} & d_2a_{12} & \dots & d_na_{1n} \\ d_1a_{21} & d_2a_{22} & \dots & d_na_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ d_1a_{s1} & d_2a_{s2} & \dots & d_na_{sn} \end{pmatrix} \quad (13)$$

b) Analoji olaraq: *A matrisinin soldan diaqonal matrisə vursaq hasil matrisin elementləri A-nın sətir elementlərinin diaqonal matrisin uyğun elementləri hasilindən ibarət olacaq*, yəni:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_s \end{pmatrix}}_{s \text{ tərtibli}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & \dots & d_1a_{1n} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & \dots & d_2a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ d_sa_{s1} & d_sa_{s2} & \dots & d_sa_{sn} \end{pmatrix} \quad (14)$$

c) (13) və (14)-dən xüsusi halda alınır ki, *iki diaqonal matrisin hasili yenə də diaqonal matrisdir və bunun diaqonal elementləri verilən diaqonal matrislərin (vuruqların) uyğun elementlərin hasillərindən ibarətdir:*

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2d_2 & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & c_nd_n \end{pmatrix} \quad (15)$$

NƏTİCƏ: *Diaqonal matrislər kommutativ matrislərdir (burada vurmada kommutativlik xassəsi doğrudur).*

ç) $A_{s\times n} = (a_{ij})$ *matrisinin soldan və sağdan diaqonal elementləri d olan müvafiq tərtibli skalyar matrislə hasili A matrisinin d ədədi ilə hasilinə bərabərdir*, yəni:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix}}_{n \text{ dənə sətri}} = \underbrace{\begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix}}_{s \text{ dənə sütunu}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} da_{11} & da_{12} & \dots & da_{1n} \\ da_{21} & da_{22} & \dots & da_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ da_{s1} & da_{s2} & \dots & da_{sn} \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix} = dA. \quad (16)$$

(16) düsturu gösrətir ki, *matrisin ədədə vurulmasına əlahiddə bir əməliyyat kimi yox, matrislərin özləri üzərində aparılan xüsusi əməl kimi, yəni matrislərin vurulmasının xüsusi halı kimi də baxmaq olar.*

d) D diaqonal matrisində $d = 1$ olarsa, onda uyğun skalyar matrislər n-tərtibli E_n və s-tərtibli E_s vahid matrislər olur və burada

$$AE_n = E_nA = A \quad (17)$$

olur.

e) Xüsusi halda *əgər A marisi n-tərtibli kvadrat matrisdirsə ($s = n$), onda bu matrisin n-tərtibli D_d skalyar matrislərlə hasili üçün də vurmada kommutativlik xassəsini daşıyır:*

$$AD_d = D_dA. \quad (18)$$

§ 4.3. Hücrəli matris anlayışı, onlar üzərində əməllər haqqında.Jordan hücrəsi

TƏRİF 1. *Hər-hansı A matrisinin sətir və sütun sistemlərini horizontal (üfüqi) və vertikal (şaquli) düz xətt parçaları ilə hissələrə böldükdə nəticədə alınan kiçik ölçülü matrislərə verilən matrisin hücrələri (hissələri) deyilir («hücrə» termini əvəzinə bəzən «blok», «qutu», «altmatris» terminlərindən də istifadə edilir). Hücrələrə bölünən matrisin özünü hücrəli matris, yaxud parçalanmış matris adlandırırlar (burada kəsən xətlərin matrisi tamamilə kəsdiyi nəzərdə tutulur).*

Aydındır ki, matrisi kəsib onu hücrələrə parçalayan horizontal və vertikal düz xətt parçalarının vəziyyətindən asılı olaraq eyni bir matrisi müxtəlif hücrələrə ayırmaq olar ki, bu hücrələrin ölçüləri eyni və fərqli ola bilərlər.

Məsələn,

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ -9 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:cc} 3 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ \hdashline -9 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:ccc} 3 & 7 & 8 & 1 \\ \hdashline 0 & 5 & 2 & 3 \\ -9 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right),$$

yaxud:

$$2)\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right) \text{ və s.}$$

1-ci misalda əvvəlcə $A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_{21} = (-9 \ 4)$, $A_{22} = (-1 \ 3)$ hücrələrinə, sonra isə $A'_{11} = (3)$, $A'_{12} = (7 \ 8 \ 1)$, $A'_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix}$, $A'_{22} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ hücrələrinə bölünüb. Alınan hissələrin köməyi ilə müvafiq hücrəli matrisləri aşağıdakı kimi yaza bilərik:

Matrisləri $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ və $A = \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{pmatrix}$.

2-ci misalda əvvəlcə ayrılan hücrələr

$$B_{11} = (a_{11}),\ B_{12} = (a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ a_{15}),\ B_{21} = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix},$$

$$B_{22} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix} \text{ və sonra isə } B'_{11} = (a_{11}),\ B'_{12} = (a_{12} \ a_{13}),$$

$$B'_{13} = (a_{14} \ a_{15}),\ B'_{21} = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},\ B'_{22} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ B'_{23} = \begin{pmatrix} a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \end{pmatrix},$$

$$B'_{41} = (a_{41}),\ B'_{42} = (a_{42} \ a_{43}),\ B'_{43} = (a_{44} \ a_{45}),$$

uyğun hücrəli matrislərimiz aşağıdakılardır:[1]

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \quad \text{və} \quad B = \begin{pmatrix} B'_{11} & B'_{12} & B'_{13} \\ B'_{21} & B'_{22} & B'_{23} \\ B'_{41} & B'_{42} & B'_{43} \end{pmatrix}.$$

Burada başlıca məqam budur ki, əvvəlcə matrisin ayrıldığı hissələr, hücrələr özləri də matrisdir və matrislər üzərində əməllər aparanda müəyyən şərtlər daxilində bu hücrələrə hücrəli matrisin sanki «elementləri» kimi baxaraq onlardan əməldə istifadə edirlər.

---

[1] Buradakı hücrələri işarə etdiyimiz A_{ij}, B_{ij} - ləri başqa yerdə onlardan cəbri tamamlayıcılarının yazılışında istifadə etdiyimiz işarələrlə qarışdırmamaq lazımdır.

Yeri gəlmişkən hücrəli matrisə ən yaxşı misal olaraq riyaziyyatda məşhur olan Jordan (Жордан) hücrəsi və Jordan matrisini qeyd edək.

TƏRİF 2. *Baş diaqonal elementləri λ_0-lərdən və diaqonal elementlərindən bilavasitə ya üstdə (yaxud altda) 1 ədədinin dayandığı*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

kvadrat matrisə Jordan hücrəsi deyilir.

Məsələn, (λ_0), $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ hücrələri bir, iki və üç tərtibli Jordan hücrələridir.

TƏRİF 3. *Baş diaqonal istiqaməti boyunca $J_1, J_2, \dots, J_s$ Jordan hücrələrinin dayandığı və qalan elementlərinin sıfır olduğu*

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \boxed{J_2} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_s} \end{pmatrix}$$

şəklində olan matrisə isə n-tərtibli Jordan matrisi deyilir (burada $s \le n$); buradakı $J_1, J_2, \dots, J_s$ Jordan hücrələri eyni və müxtəlif tərtibli ola bilərlər.

Məsələn, aşağıdakı matris 5-tərtibli Jordan matrisidir:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Bu matris iki dənə: bir üç tərtibli və bir də iki tərtibli Jordan hücrələrinə malikdir.

Aşağıdakı matris isə 4-hücrəli 8-tərtibli Jordan matrisidir:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|ccc|c} -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Mətləbə qayıdaq. Ən çox hallarda matrislərin hücrələrə parçalanmasını kvadrat matrislər üzərində aparırlar, həm də bölgü qaydasını elə icra edirlər ki, nəticədə alınan hücrələr özləri kvadrat matrislər olurlar.

İndi bu hal üçün matrislər üzərində əməllərin kvadrat hücrəli matrislər üçün necə icra edilməsi ilə tanış olaq.

1. *Toplama.* *A və B hücrəli matrislərinin cəmi elə matrisdir ki, onun hücrələri toplananların uyğun hücrələri cəmindən ibarətdir.*

n-tərtibli A və B matrisləri verilir:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{pmatrix};$$

burada A_{ij} və B_{ij} hücrələri eyni tərtibli kvadrat hücrələr olsun. Onda:

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \dots & A_{1n}+B_{1n} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \dots & A_{2n}+B_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ A_{n1}+B_{n1} & A_{n2}+B_{n2} & \dots & A_{nn}+B_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

2. *Ədədə vurma.* *Hücrəli A matrisinin λ ədədi ilə hasili elə hücrəli matrisdir ki, onun hücrələri verilən matrisin bütün hücrələrinin λ ədədi ilə hasillərindən ibarətdir:*

$$\lambda A=\lambda\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \dots & \lambda A_{1n} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \lambda A_{n1} & \dots & \lambda A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

3. *Vurma.* *Verilən eyni n-tərtibli A və B matrislərinin hasili C elə hücrəli matrisdir ki, onun ixtiyari C_{ij} hücrəsi A-nın i-ci sətir*

hücrələri ilə B-nin j-ci sütun hücrələrinin uyğun hasilləri cəmindən ibarətdir:

$$AB=C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix},$$

hansı ki:

$$C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\dots+A_{in}B_{nj}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj} \quad (i,j=\overline{1,n}). \qquad (3)$$

1-ci və 2-ci aşkardır. (3)-də hər bir $A_{ik}B_{kj}$ hasilinin mənası var (hücrələrin tərtibləri eyni olan haldır və buna görə də bunlar üçün vurmanın mümkünlük şərti ödənir, habelə (3) cəminin də mənası var, çünki toplanan hasillər eyni tərtiblidirlər. Nəhayət, diqqət yetirək ki, C hasil matrisinin ixtiyari C_{ij} hücrəsinin hər-hansı elementini $c_{\alpha\beta}$ kimi işarə etsək, onda bu element aşağıdakı kimi təyin oluna bilər:

$$c_{\alpha\beta}=(a_{\alpha 1}b_{1\beta}+\dots+a_{\alpha s_1}b_{s_1\beta})+\dots+(a_{\alpha,s_{k-1}+1}b_{s_{k-1}+1,\beta}+\dots+a_{\alpha s_k}b_{s_k\beta}),$$

burada $s_1, s_2-s_1, \dots, s_k-s_{k-1}$ indeksləri uyğun olaraq $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$ matrislərinin tərtibləridir. $c_{\alpha\beta}$-nin ifadəsində mötərizə daxilindəki toplananlar uyğun olaraq $A_{i1}B_{1j}, A_{i2}B_{2j}, \dots, A_{in}B_{nj}$ matrislərinin elə elementlərinin ifadələridir ki, onların vəziyyəti C_{ij} matrisindəki $c_{\alpha\beta}$ elementinin vəziyyət durumundadırlar. Odur ki:

$$C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\dots+A_{in}B_{nj} \qquad (*)$$

cəmi doğru olmalıdır.

Bir daha qeyd edək ki, (1), (2), (3) düsturlarının doğruluğu onu göstərir ki, hücrəli matrislər üzərində əməllər elə aparılır ki, sanki burada elementlər «hücrə-matrislər» deyil, adi ədədlərdir.

Əlbəttə, ixtiyari müxtəlif tərtibli hücrələrə malik olan düzbucaqlı matrislər üzərində də müəyyən şərtlər daxilində bu əməlləri icra etmək mümkündür. Məsələn, toplamada toplanan hücrələr eyni tərtibli olmalı («toplamanın mümkünlük şərti»), vurulan hücrələrdə birincinin sütunlar sayı ikincinin sətirlər sayına bərabər olmalıdır («vurmanın mümkünlük şərti» ödənməlidir). Məsələn,

$$U_{m\times n} = \begin{pmatrix} U_{11} & \dots & U_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ U_{m1} & \dots & U_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{və} \quad V_{n\times p} = \begin{pmatrix} V_{11} & \dots & V_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ V_{n1} & \dots & V_{np} \end{pmatrix}$$

düzbucaqlı hücrəli matrislərinin vurulmasında U_{ij} hücrəsi ilə V_{jk} hücrələri vurmanın mümkünlük şərtini ödəməli ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,p}$) və

$$W_{ik} = U_{i1}V_{1k} + U_{i2}V_{2k} + \ldots + U_{in}V_{nk} \qquad (*)'$$

cəminin mənası olmalıdır. Onda göstərmək olur ki:

$$UV = \begin{pmatrix} W_{11} & \dots & W_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{m1} & \dots & W_{mp} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Xüsusi halda, $(A\ \ B)$ və $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$ kimi iki hücrəli matrislərinin vurulmasında

$$(A\ \ B)\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = AC + BD \qquad (2)$$

bərabərliyinin doğruluğunu göstərmək çətin deyildir. Belə ki, əgər A, B, C, D matrislərinin elementlərini uyğun olaraq $\alpha_{ij}, \beta_{ik}, \gamma_{jl}, \delta_{kl}$ ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,s}$, $l=\overline{1,t}$) işarə etsək (2)-nin sol tərəfindəki hasilin i-ci sətir və j-ci sütun elementi

$$\alpha_{i1}\gamma_{1l} + \ldots + \alpha_{in}\gamma_{nl} + \beta_{i1}\delta_{1l} + \ldots + \beta_{is}\delta_{sl} \qquad (3)$$

olacaq. (2)-nin sağ tərəfinin uyğun elementini hesablasaq yenə də (2) ifadəsi alınır. Deməli (2) bərabərliyi doğrudur.

Lakin biz şərtləşdiyimizə görə əsas diqqətimizi kvadrat hücrələrə malik olan kvadrat matrislərə yönəldirik.

İndi hücrəli matrislərin bəzi xüsusi halları ilə tanış olaq.

1. ***Haşiyələnən matris.*** *$n-1$ tərtibli*

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

matrisinə $v_{n-1} = (a_{n1}\ \ a_{n2}\ \ \dots\ \ a_{n,n-1})$ *sətrini, həm də* $u_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{bmatrix}$ *sütununu və bir də a_{nn} ədədini qoşmaqla alınan*

$$A_n = \begin{pmatrix} & & a_{1n} \\ & A_{n-1} & a_{2n} \\ & & \vdots \\ & & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2}\ \dots\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & u_{n-1} \\ v_{n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

şəklində matrisə A_{n-1}-i qurşayan və ya onu haşiyələyən matris deyirlər.

Göründüyü kimi A_n «haşiyələyən» matrisi hücrəli matrisdir. Belə matrislər üzərində əməllər də təbii ki, hücrəli matrislər üzərində əməllər kimidir.

Tutaq ki,

$$A = \begin{pmatrix} M & u \\ v & a \end{pmatrix} \quad \text{və} \quad B = \begin{pmatrix} P & y \\ x & b \end{pmatrix}$$

verilən iki haşiyələyən matrislərdir. Burada M, v, u, a və P, x, y, b işarələrinin mənası tərifdə deyildiyi kimidir. Onda aşağıdakı bərabərlikləri yaza bilərik:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda M & \lambda u \\ \lambda v & \lambda a \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

$$A + B = \begin{pmatrix} M + P & u + y \\ v + x & a + b \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

$$AB = \begin{pmatrix} MP + ux & My + ub \\ vP + ax & vy + ab \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Burada MP və ux matrisləri $n-1$ tərtibli matrislər, ab hasili $(n-1)$ elementi olan sütun, vP və ax isə analoji olaraq sətirlər, nəhayət $vy + ab$ isə ədəddir.

2. ***Kvazi-diaqonal matris.*** *Kvazi-diaqonal matris elə kvadrat matrisə deyirlər ki, onun baş diaqonalı boyunca kvadrat hücrələr yerləşir və qalan elementləri isə hamısı sıfırlardan ibarət olur.*

Məsələn, aşağıdakı 7-tərtibli kvazi-diqonal matrisdir:

$$A_7=\left(\begin{array}{cc:ccc:cc} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} \end{array}\right).$$

Bu kvazi-diaqonal matsridə, aşkardır ki, baş diaqonal boyunca üç dənə A, B, C kimi

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

kvadrat hücrə-matrislər və «kənarlarda» isə 6 dənə sıfır matris vardır.

Ölçüləri eyni olan iki kvazi-diaqonal matrisin hasili yenə də həmin ölçülü kvazi-diaqonal matris olacaq, həm də hasil matrisin baş diaqonal boyunca vurulan matrislərin uyğun hücrələri hasillərdən ibarət olacaq (bunu izah edin!).

Əgər Laplas teoremini kvazi-diaqonal matrisə tətbiq etsək, aşkardır ki, kvazi-diaqonal matrisin determinantı diaqonaldakı kvadrat hücrələrin determinantları hasilinə bərabər olar. Məsələn, yuxarıdakı misalda A_7 kvazi-diaqonal matrisi onun aşağıdakı diaqonal hücrələrin hasilinə bərabər olacaq.

$$A_7=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Yaxşı olardı ki, oxucu bunun doğruluğunu izah etsin.

Nəhayət, hücrəli matrislərlə əlaqədar olaraq matrislərin uniüçbucaq növü və bunun maraqlı xassəsi ilə tanış olaq.

3. ***Uniüçbucaq matris.*** *Uniüçbucaq matris elə üçbucaq matrisə deyirlər ki, onun baş diaqonal elementləri vahidlərdən ibarətdir*, yəni:

$$\Delta=\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ (sağ uniüçbucaq).}$$

İndi bu matrisin

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisinin «sətirlərinə nəzərən» hücrələnən, yəni

$$A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

matrisi ilə hasilinə baxaq (burada $A_1, A_2, \dots, A_m$ hücrələri $A_{m\times n}$ matrisinin sətirləridir). Vurma qaydası ilə tapırıq ki:

$$\Delta A=\begin{pmatrix} A_1+c_{12}A_2+\dots+c_{1m}A_m \\ A_2+\dots+c_{2m}A_m \\ \dots\dots\dots \\ A_m \end{pmatrix}.$$

Buradan görünür ki, ΔA hasilinin birinci sətri A-nın sonrakı sətirlərinin $c_{12}, c_{13}, \dots, c_{1m}$ ədədlərinə vurularaq A-nın birinci sətri üzərinə əlavə etməklə, ikinci sətir A-nın 2-ci sətrinin A-nın A_1-dən sonrakı sətirləri müvafiq $c_{22}, \dots, c_{2m}$ ədədlərinə vurub A_2-nin üzərinə əlavə etməklə və s. yolla alınıb, sonrakı sətir isə dəyişməz qalıbdır.

Əgər Δ sol uniüçbucaq matris olarsa, yəni

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

onda

$$\Delta A=\begin{pmatrix} A_1 \\ c_{21}A_1+A_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_{m1}A_1+c_{m2}A_2+\dots+A_m \end{pmatrix}$$

alarıq. Buradakı çevirməni sonuncu sətrə özündən əvvəlki sətirləri $c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{m,m-1}$ ədədlərinə vurub əlavə etməkdən başlamaqla prosesi davam etdirmək əlverişli olur.

Nəhayət, hücrəli matrislərin növlərindən danışanda onun «yarımparçalanan» və «parçalanan» adlanan aşağıdakı növləri barədə də oxuculara məlumat verək.

TƏRİF.

$$A=\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & 0 & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{km} & & & & \\ \hline b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,m-k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m-k,1} & b_{m-k,2} & \cdots & b_{m-k,k} & c_{m-k,1} & c_{m-k,2} & \cdots & c_{m-k,m-k} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array}\right)$$

şəklində olan matrislərə yarımparçalanan,

$$B=\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & 0 & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{km} & & & & \\ \hline & & & & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,m-k} \\ & 0 & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & c_{m-k,1} & c_{m-k,2} & \cdots & c_{m-k,m-k} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

şəklində olan matrisə isə parçalanan matris deyirlər.

Yarımparçalanan matrislərin «kvazi-üçbucaq matris» adlanan xüsusi halı ilə biz yuxarıda rastlaşmışıq).[1]

§ 4.4. Matrislər hasilinin determinantı

Tutaq ki, n-tərtibli

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{və} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

[1] Bəzi riyazi ədəbiyyatda «kvazi-üçbucaq» matris dedikdə aşağıdakı hücrəli matrislər nəzərdə tutulur:

$$\begin{array}{r}\text{sağ}\\ \text{kvazi-üçbucaq}\\ \text{matris:}\end{array}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix};\ \begin{array}{r}\text{sol}\\ \text{kvazi-üçbucaq}\\ \text{matris:}\end{array}\begin{pmatrix} B_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix}.$$

Bu da aşkardır ki, bu şəkildə verilən kvazi-üçbucaq matrisin determinantı onun diaqonal-hücrələrinin determinantları hasilinə bərabərdir.

kvadrat matrisləri verilib, bunların uyğun olaraq determinantlarını yazaq:

$$D_A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

A və B matrislərinin hasili C olsun: $AB=C$. Məqsədimiz C matrisinin determinantının A və B matrislərinin determinantları ilə əlaqəsini aşkarlamaqdır. Buna aşağıdakı teorem aydınlıq gətirir.

TEOREM. *Eyni tərtibli A və B matrislərinin hasilinin determinantı bunların uyğun determinantları hasilinə bərabərdir.*

Yəni, $AB=C$ üçün $|C|=|A|\cdot|B|$. (1)

İSBATI. Əgər $\det A=D_A$, $\det B=D_B$, $\det C=D_C$ işarə etsək, göstərməliyik ki:

$$(AB=C)\Rightarrow(D_C=D_A\cdot D_B).$$

Determinantların vurulması haqqında teoremdən bilirik ki, $D_A=|a_{ij}|$, $D_B=|b_{ij}|$ determinantlarının $D_A\cdot D_B$ hasili elə bir n-tərtibli $D_C=|c_{ij}|$ determinantıdır ki, bunun ixtiyari i-ci sətir və j-sütun elementi

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj} \tag{2}$$

kimi təyin edilir.

İndi determinantların vurulmasında istifadə etdiyimiz qaydaya oxşar olaraq burada da

$$M=\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix}$$

kimi $2n$-tərtibli hücrəli matrisə baxaq. Göründüyü kimi hücrələr elə seçilib ki, sol yuxarı küncdə A matrisi, sağ aşağı küncdə B matrisi, sol aşağı küncdə isə E matrisinin əksi durur.

M matrisini soldan $D=\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}$ uniüçbucaq matrisinə vursaq $\det D=\det\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}=1$ olduğundan M və D matrislərinin hasilinin determinantı dəyişməyəcək və

$$\det A\cdot\det B=\det\left[\begin{pmatrix}E & A\\ 0 & E\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A & 0\\ -E & B\end{pmatrix}\right]=\det\begin{pmatrix}0 & AB\\ -E & B\end{pmatrix}.$$

Sonuncu determinantı: $\det\begin{pmatrix}0 & AB\\ -E & B\end{pmatrix}=D$ ilə işarə edib bunun üzərində elə çevirmə apara bilərik ki, o $\det\begin{pmatrix}AB & 0\\ B & -E\end{pmatrix}$ şəklinə düşər. Bunun üçün 1-ci sütunu $(n+1)$-ci sütunla, ikinci sütunu $(n+2)$-ci sütunla və s. yerini dəyişməklə nail ola bilərik, bu isə məhz sətir-hücrələrin yerini dəyişməklə aparılan eynigüclü çevirmədir və təbii ki, sütunlar üzərində aparılan bu yerdəyişmə nəticəsində yeni determinantda $(-1)^n$ işarəsi yaranacaq, yəni

$$\det A\cdot\det B=(-1)^n\det\begin{pmatrix}AB & 0\\ B & -E\end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Bu isə pilləli matrisin determinantı olduğundan bilirik ki: $\det\begin{pmatrix}AB & 0\\ B & -E\end{pmatrix}=\det(AB)\cdot\det(-E)$ olur. Onda

$$\det A\cdot\det B=(-1)^n\det(AB)\det(-E)=(-1)^n\det(AB)(-1)^n=(-1)^{2n}\det(AB),$$

deməli:
$$D_{AB}=D_A\cdot D_B. \qquad (4)$$

Teorem isbat olundu.

Bu teoremi istənilən sonlu sayda matrislər hasili üçün ümumiləşdirmək olar:

$$\det(A_1A_2\ldots A_k)=\det A_1\cdot\det A_2\cdot\ldots\cdot\det A_k.$$

Burada başqa bir ümumiləşmə isə pilləli matrisin determinantına aiddir:

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{A_1} & & & 0\\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \boxed{A_k}\end{pmatrix},$$

burada $A_1, A_2, \ldots, A_k$ kvadrat matrislərdir və A matrisinin diaqonal-hücrələri adlanır (diaqonaldan yuxarıda sıfırlar, aşağıda isə istənilən ədədlərdir). Göstərmək olar ki:

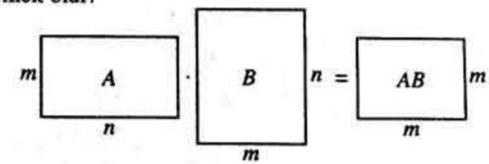
$A_1, A_2, \ldots, A_k$ diaqonal hücrələrə malik olan A pilləli matrisinin determinantı onun hücrələrindəki matrislərin determinantları hasilinə bərabərdir:

$$\det A=\prod_{i=1}^{k}A_i.$$

Hər iki ümumiləşməni aparmaq üçün riyazi induksiya prinsipindən istifadə etmək əlverişlidir.

Nəhayət, matrislər hasilinin determinantından danışmaqla bu mövzuya birbaşa aidiyyəti olan bir məsələdən yan keçmək olmaz. Bu Bine-Koşi teoremidir.

Məlumdur ki, vuruqları heç də kvadrat matris olmayan matrislər hasilində kvadrat matris alınması halları heç də az deyil. Belə hasillərin mümkünlüyünü vurma əməlinin aşağıdakı sxemindən görmək olar:



yəni

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix} \quad \text{və} \quad B_{n\times m}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m}\\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm}\end{pmatrix}$$

matrislərinin hasili m-tərtibli kvadrat matris verir.

Belə matrislərin hasilinin determinantı haqqında və xüsusi halda yuxarıda baxdığımız kvadrat matrislərin hasilinin determinantı haqqındakı teoremin ümumiləşməsi kimi Bine-Koşi teoremi vardır.

TEOREM (*Bine-Koşi*). *$A_{m\times n}=(a_{ij})$ və $B_{n\times m}=(b_{ij})$ matrislərinin hasilinin determinantı $m>n$ olduqda sıfra, $m\le n$ olduqda isə A matrisinin bütün m-tərtibli minorları ilə B-nin m-tərtibli uyğun minorlarının hamısı ilə hasilləri cəminə bərabərdir.*

Teoremin isbatı üzərində dayanmayıb onu izah edək ki, burada uyğun m-tərtibli minorlar dedikdə A matrisindən düzələn bütün m-tərtibli minorların sütun nömrələri sayı B-dən düzələn bütün uyğun m-tərtibli minorların sətir nömrələrinə bərabər olduğu nəzərdə tutulur.

Bine-Koşi düsturu ümumi şəkildə belə yazılır:

$$\det AB = \sum_{\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_m} A_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m}\cdot B_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m}. \qquad \text{(BK)}$$

Xüsusi halda $m=n$ olanda $\det(AB)=\det A\cdot\det B$, burada $A_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m}$ A matrisinin $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m$ nömrəli sütunlardan düzələn m-tərtibli minorları, $B_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m}$ isə B matrisinin $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m$ sətirlərindən düzəldilmiş minorlardır.

Misal.

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n\end{pmatrix} \quad \text{və} \quad B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ d_1 & d_2 & \ldots & d_n\end{pmatrix}.$$

Bine-Koşi teoremini bu düzbucaqlı matrislərə tətbiq etdikdə A-dan və B-dən düzəldilmiş bütün iki tərtibli

$$M_A=\begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k\end{vmatrix} \quad \text{və} \quad M_B=\begin{vmatrix} c_i & c_k \\ d_i & d_k\end{vmatrix}$$

($1\le i<k\le n$) uyğun minorları vurub toplamaq gərəkdir:

$$\det(AB)=\begin{vmatrix} a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n & a_1d_1+a_2d_2+\ldots+a_nd_n \\ b_1c_1+b_2c_2+\ldots+b_nc_n & b_1d_1+b_2d_2+\ldots+b_nd_n\end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{1\le i<k\le n}\begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c_i & c_k \\ d_i & d_k\end{vmatrix}.$$

§ 4.5. Məxsusi və qeyri-məxsusi matrislər. Qarşılıqlı matris anlayışı

TƏRİF 1. *Determinantı sıfırdan fərqli olan kvadrat matrislərə qeyri-məxsusi, determinantı sıfra bərabər olan matrislərə isə məxsusi matris deyilir (bəzən «qeyri-məxsusi» və «məxsusi» terminləri əvəzinə riyazi ədəbiyyatda uyğun olaraq «cırlaşmayan» və «cırlaşan» terminləri də işlədilir).*

Məxsusi və qeyri-məxsusi matrislərə ranq anlayışının köməyi ilə də tərif verirlər:

TƏRİF 2. *Ranqı tərtibinə bərabər ($rangA=r=n$) olan matrislərə qeyri-məxsusi, ranqı tərtibindən kiçik ($r<n$) olan matrislərə isə məxsusi matris deyirlər.*

Bu iki tərif ekvivalentdir, belə ki, verilən n-tərtibli matrisin ranqı $r=n$ olması o deməkdir ki, bu matrisin ən yüksək tərtibli minoru olan elə onun özünün n-tərtibli determinantıdır, bu determinant isə sıfır deyilsə deməli matris qeyri-məxsusidir; $r<n$

olması isə o deməkdir ki, bu matrisin sıfırdan fərqli ən yüksək tərtibli minorunun tərtibi n ola bilməz, n-tərtibli minor (yəni matrisin determinantı) sıfır olmalıdır, bu isə matrisin məxsusi olması deməkdir (mühakimənin tərsini də aparmaq olar!).

Qeyri-məxsusi və məxsusi matrislər haqqında aşağıdakı teorem doğrudur.

TEOREM 1. *Qeyri-məxsusi matrislərin hasili də qeyri-məxsusidir və bir neçə matrisin hasilində vuruqlardan heç olmasa biri məxsusi olarsa hasil matris məxsusi olur.*

İSBATI. İsbatı iki matris üzrə aparaq (sonra onu riyazi induksiya prinsipinin köməyi ilə istənilən sonlu sayda $A_1, A_2, \ldots, A_k$ matrislərinin hasili üçün asanlıqla ümumiləşdirmək olar).

Tutaq ki, $A=(a_{ij})$ və $B=(b_{ij})$ qeyri-məxsusi n-tərtibli matrislər verilib. Bunların determinantlarını $\det A=D_A$ və $\det B=D_B$ kimi işarə edək.

Şərtə görə $D_A\ne 0$, $D_B\ne 0$. Bilirik ki: $D_{AB}=D_A\cdot D_B$.

Vuruqlar sıfırdan fərqli olduğundan hasil AB matrisinin determinantı da sıfırdan fərqli olacaq: $D_{AB}\ne 0$.

İndi fərz edək ki, vuruqlardan biri, məsələn, A matrisi məxsusidir, yəni $D_A=0$-dır. Onda aşkardır ki, $D_A\cdot D_B=0\cdot D_B= =0$ olar, yəni AB hasili məxsusi matris olur.

Teorem isbat olundu.

İndi tutaq ki, n-tərtibli A matrisi verilib:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Bu matrisin ixtiyari a_{ij} elementinin cəbri tamamlayıcısı A_{ij} olsun.

TƏRİF 3. *Elementlərinin hamısı özlərinin uyğun cəbri tamamlayıcılarından ibarət olub sonradan transponirə edilən $\widetilde{A}$ matrisinə*

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn}\end{pmatrix}.$$

A matrisinin qarşılıqlı matrisi deyilir (qarşılıqlı matrisi bəzən A-ya qoşulan, ya da A-nın müttəfiq matrisi adlandırırlar).

Qarşılıqlı matrisin aşağıdakı maraqlı xassəsini qeyd edək.

TEOREM 2. *n-tərtibli $A=(a_{ij})$ matrisi qeyri-məxsusidirsə, onda onun $\widetilde{A}=(a_{ji})$ qarşılıqlı matrisi də qeyri-məxsusi olur və bunların determinantları üçün*

$$D_{\widetilde{A}} = D_A^{n-1} \tag{1}$$

münasibəti doğrudur.

İSBATI. Verilmiş A matrisi ilə onun $\widetilde{A}$ qarşılıqlı matrisinin hasilini hesablayaq.

Determinantlar bəhsindən bizə məlum olan

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D, & i=j \text{ olanda}, \\ 0, & i\neq j \text{ olanda}, \end{cases}$$

bərabərliklərini nəzərə alsaq, onda axtardığımız hasil

$$A\widetilde{A} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix},$$

olur, burada $|A| = \det A$-dır (biz bunu qısa olması naminə D_A kimi işarə edirik).

İndi $A\widetilde{A}$ hasilinin determinantına baxaq. Matrislər hasilinin determinantı barədə teoremə əsasən

$$D_A \cdot D_{\widetilde{A}} = \begin{vmatrix} D_A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D_A \end{vmatrix} = D_A^n \quad \text{və ya} \quad D_A \cdot D_{\widetilde{A}} = D_A^n. \tag{2}$$

(2)-dən aşkardır ki, əgər A qeyri-məxsusidirsə onda $D_A \neq 0$ və deməli $D_A^n \neq 0$ olur, buradan da belə çıxır ki, $D_{\widetilde{A}}^n \neq 0$, yəni $\widetilde{A}$ matrisi qeyri-məxsusi olur. Onda (2)-dən $D_{\widetilde{A}} = D_A^{n-1}$ alınq.

Teorem isbat olunur.

§ 4.6. Vahid və tərs matris, bunların xassələri

Vahid matrisin nə olduğunu bilirik: o baş diaqonal elementləri vahidlər, qalan elementləri isə sıfırlardan ibarət olan kvadrat matrisdir. Burada və irəlidə onun tərs matris və tərs çevirmə ilə əlaqədar olan, habelə digər bəzi xassələri ilə tanışlığı davam et-dirirk. Bəs tərs matris nədir?

TƏRİF. *n-tərtibli A və X kvadrat matrisləri $AX = XA = E$ bərabərliyini ödəyirsə, onda X-ə A-nın tərsi deyilir və A^{-1} kimi işarə edilir (burada E matrisi n-tərtibli vahid matrisdir).*[1]

Vahid və tərs matrislə matrislərin vurulması ilə tanışlıq ədədlərdə vahidin və ədədin tərsinin xassələrini xatırladır. Belə ki, hər bir sıfırdan fərqli ədədin öz tərsi ilə hasili vahidə bərabər olur, hər-hansı bir ədədi vahidə vurduqda ədəd dəyişmir. Matrislərdə də buna bənzər xassələrin şahidi olacağıq.

Əvvələn vahid matrisin iki aşkar xassəsini qeyd edək.

1) *Vahid E matrisi bununla eyni tərtibli ixtiyari A matrisi ilə $AE = EA$ (kommutativlik) şərtini ödəyir.*

Bunun doğruluğuna əmin olmaq üçün hər-hansı bir A kvadrat matrisini soldan və sağdan bununla eyni tərtibli vahid matrisə vurmaq kifayətdir.

2) *E vahid matrisi yeganədir.*

Doğrudan da, əgər $AE = EA$ xassəsinə malik olan digər bir E' matrisi də olsa idi, onda 1-ci xassəyə görə $E'E = E'$ və həm də $E'E = E$ alınır; buradan da $E = E'$ olduğu aydın görünür.

Tərs matris anlayışına qayıdaq. Belə bir təbii sual qarşıya çıxır: hər bir matrisin tərsi varmı, yəni

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E \tag{1}$$

bərabərliyini ödəyən A^{-1} varmı?

Aşağıdakı teorem buna cavab verir.

TEOREM (*tərs matrisin varlığı*). *Ancaq qeyri-məxsusi matrislərin tərsi vardır.* Başqa sözlə: *A kvadrat matrisinin tərsinin varlığı üçün onun qeyri-məxsusi olması həm zəruri, həm də kafidir.*

---

[1] Matrislərin vurulmasında ümumiyyətlə kommutativlik xassəsi doğru olmadığından çox zaman A^{-1} tərs matrislə ilk tanışlıqda A-nın «sağ tərsi», yaxud «sol tərsi» təriflərini verirlər. Aşağıda görəcəyik ki, hər bir matris özünün tərsi ilə kommutativdir, yəni matrisin «sağ tərsi» eyni zamanda onun «sol tərsidir».

İSBATI. *Şərtin zəruriliyi.* Tutaq ki, A matrisinin A^{-1} tərsi var. Göstərməliyik ki, A qeyri-məxsusidir.

A^{-1} varsa, deməli: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Buradan: $|A| \cdot |A^{-1}| = |E|$ alırıq ki, burada $|E| = 1$ - dir. Onda $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$. Buradan isə görünür ki, $|A| \neq 0$, yəni A matrisi qeyri-məxsusidir.

Şərtin kafiliyi. İndi tutaq ki, A matrisi qeyri-məxsusidir: $|A| \neq 0$. Göstərək ki, elə A^{-1} var ki, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ bərabərliyi ödənir.

A matrisinin öz qarşılıqlı matrisi ilə $A\tilde{A}$ və $\tilde{A}A$ hasillərinə baxaq.

Göründüyü kimi:

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = |A| \cdot E.$$

$A\tilde{A} = |A| \cdot D$ bərabərliyindən $|A| \neq 0$ olduğu üçün

$$A \cdot \left(\frac{1}{|A|} \tilde{A} \right) = E$$

alırıq. Buradan da aşkar görünür ki:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A},$$

yaxud

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Bu isə bizim axtardığımız tərs matrisdir.

Teorem isbat olundu.

Tərs matrisin xassələri ilə tanış olaq.

1. *A matrisinin A^{-1} tərsi yeganədir.*

Əksini fərz edək: tutaq ki, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ şərtini ödəyən digər bir C matrisi də vardır: $AC = CA = E$.

Vurmada assosiativlik xassəsini xatırlayıb CAA^{-1} hasilinə baxaq:

$$CAA^{-1} = C(AA^{-1}) = CE = E,$$

digər tərəfdən $CAA^{-1} = (CA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}$.

2. *Tərs matrisin determinantı verilən matrisin determinantının tərs qiymətinə bərabərdir:* $D_{A^{-1}} = D_A^{-1} = \frac{1}{D_A}$.

Doğrudan da AA^{-1} bərabərliyindən $D_A \cdot D_{A^{-1}} = D_E$, yaxud $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, buradan $(\det A)^{-1} = \det A^{-1}$.

3. $(A^{-1})^{-1} = A$. Deməli, A matrisi ilə onun tərsi A^{-1} qarşılıqlıdır, yəni A^{-1} matrisi A - nın tərsi olduğu kimi, A özü də A^{-1} - in tərsidir.

Bunun doğruluğu ondan irəli gəlir ki, $(A^{-1})^{-1}$ elə yeganə matrisdir ki, onun A^{-1} ilə hasili E - yə bərabərdir. A matrisinin özü də bu xassəyə malik olan matrisdir, yəni: $(A^{-1})^{-1}A^{-1} = E$ və $AA^{-1} = E$, müqayisədən görünür ki: $(A^{-1})^{-1} = A$ olmalıdır.

4. *İki matrisin hasilinin tərsi onların tərslərinin tərs nizamla hasilinə bərabərdir:* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Həqiqətən də $B^{-1}A^{-1}$ hasilinin AB hasilinin tərsi olması üçün tərifə görə bunların bir-biri ilə hasili vahid matrisə bərabər olmalıdır, yəni:

$$(AB)^{-1}(B^{-1}A^{-1}) = A(BA^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB)^{-1} = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E.$$

Deməli, $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ olur.

Bu xassəni sonlu sayda matrislər hasili üçün ümumiləşdirə bilərik: $(A_1A_2 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1} \dots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

5. *Matrisin transponirə edilmişinin tərsi, onun tərsinin transponirə edilmişinə bərabərdir:* $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

Həqiqətən də $AA^{-1} = E$ bərabərliyini transponirə etsək $(AA^{-1})' = (A^{-1})'A' = E' = E$ alırıq ki, buradan $(A')^{-1} = (A^{-1})'$ olduğu görünür.

5-ci xassəyə aid bir misal göstərək.Tutaq ki, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ matrisi verilib. Bu matrisi transponirə etsək $A'=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ alırıq. A-nın tərsi $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$, A'-in tərsi $(A')=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$-dir. Göründüyü kimi $(A')^{-1}=(A^{-1})'$.

Kvadrat hücrəli pilləli matrisin tərsi ilə tanışlıq da maraqlı məsələdir.

6. A və D kvadrat hücrəli qeyri-məxsusi $\Delta=\begin{pmatrix}A & 0\\ C & D\end{pmatrix}$ hücrəli matrisi üçün:

$$\begin{pmatrix}A & 0\\ C & D\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & 0\\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1}\end{pmatrix},$$

analoji olaraq:

$$\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1}\\ 0 & D^{-1}\end{pmatrix}.$$

İSBATI. Verilən hücrəli matrisin qeyri-məxsusi olması şərtindən çıxır ki, $\det A\neq 0$ və $\det D\neq 0$. Tərs matrisin varlıq teoreminə görə bu matrisin tərsi olmalıdır. Fərz edək ki, verilən matrisin bunun uyğun hücrələrə malik olan belə bir tərsi var:

$\Delta^{-1}=\begin{pmatrix}X & Y\\ U & V\end{pmatrix}$. Onda $\begin{pmatrix}A & 0\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X & Y\\ U & V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}$ bərabərliyi ödənməlidir. Buradan isə $AX=E$, $AY=0$, $CX+DU=0$ və $CY+DV=E$ bərabərlikləri alınır.

Birinci tənlikdən $X=A^{-1}$, ikincidən $Y=0$, dördüncüdən $V=D^{-1}$ və üçüncüdən isə $U=-D^{-1}CA^{-1}$ tapırıq. Deməli:

$$\begin{pmatrix}A & 0\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & 0\\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1}\end{pmatrix} \text{ alınır.}$$

İsbat olundu.

$\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1}\\ 0 & D^{-1}\end{pmatrix}$ bərabərliyi də buna oxşar qayda ilə isbat edilir.

Oxucuya müstəqil çalışmaq üçün $\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}$ kimi A,B,C,D n-tərtibli hücrələrə malik olan $2n$ tərtibli matrisin determinantlarına aid «Şur düsturları» adı ilə məşhur olan aşağıdakı bərabərliklər üzərində düşünməyi məsləhət görərdik:

$$\Delta=|AD-BD^{-1}CD|,\quad |D|\neq 0;$$

$$\Delta=|AD-CB|,\quad AC=CA \text{ olanda};$$

$$\Delta=|AD-BC|,\quad CD=DC \text{ olanda}.$$

§ 4.7. Dəyişənlərin xətti çevirməsi və bunun matrislərlə əlaqəsi

Tutaq ki, «təzə» adlanan $x_1,x_2,\ldots,x_n$ və «köhnə» adlanan $y_1,y_2,\ldots,y_n$ dəyişənlər sistemləri verilib (sadə olması üçün dəyişənlər sisteminin hər birindəki x_i-lərin və y_i-lərin sayının eyni olduğunu fərz edirik, $i=\overline{1,n}$).

TƏRİF. *Yeni $x_1,x_2,\ldots,x_n$ dəyişənlərinin köhnə $y_1,y_2,\ldots,y_n$ dəyişənləri ilə ədədi əmsalların köməyi ilə göstərilən aşağıdakı*

$$\left.\begin{array}{l} x_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n,\\ x_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

ifadələri verilibsə, bu, dəyişənlərin xətti çevirməsi adlanır (burada y_i-lər x_i-lərə $(i=\overline{1,n})$ çevrilir, bəzən də dəyişənlərin hansını köhnə, hansını isə təzə və ya hansından hansına «keçid» adlandırılması şərtləşmədən asılıdır).

Xətti çevirmənin əmsallarından düzəlmiş

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

matrisinə bu xətti çevirmənin matrisi deyilir.

Xarakterik cəhət budur ki, hər bir xətti çevirmə öz matrisi ilə tamamilə təyin edilə bilir və eyni matrisə malik olan iki xətti çevirmə yalnız oradakı dəyişənlərin hansı hərflə işarə edilməsi ilə fərqlənə bilər, bu işarələmə özünüzdən asılı olur və elə bir ciddi əhəmiyyət kəsb etmir. Məsələn,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2y_1 - 3y_2 \\ x_2 &= y_1 + 2y_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{və} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= 2u - 3v \\ x_2 &= u + 2v \end{aligned}\right\}$$

xətti çevirmələri eyni bir

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisə malikdirlər və dəyişənlərin müxtəlif hərflərlə işarə edilməsi heç də burada mahiyyət dəyişmir.

Vacib bir məsələ də bundan ibarətdir ki, ixtiyari n-tərtibli bir matris verildikdə onun elementlərinin köməyi ilə dəyişənlərin müvafiq bir xətti çevirməsini yaza bilərik. Bu isə o deməkdir ki, n sayda dəyişənləri olan xətti çevirmələr ilə n-tərtibli matrislər çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq vardır, yəni bu iki çoxluq arasında biyektiv inikasdan danışmaq olur və bu inikasın tərsinin varlığını xatırlamaq da yersiz olmaz.

İndi fərz edək ki, y_i-ləri x_i-lərə çevirən ($i=\overline{1,n}$) (1) çevirməsindəki $y_1, y_2, \dots, y_n$ dəyişənləri özləri digər bir $z_1, z_2, \dots, z_n$ dəyişənlər sistemi ilə aşağıdakı bərabərliklər vasitəsilə ifadə edilmişdir:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \dots + b_{1n}z_n, \\ y_2 &= b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \dots + b_{2n}z_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \dots + b_{nn}z_n. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(2) ifadələr sistemi $z_1, z_2, \dots, z_n$ dəyişənlərini $y_1, y_2, \dots, y_n$ dəyişənlərinə çevirən xətti çevirmədir. Bunun matrisini B ilə işarə edək:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Xüsusi halda çevirmə

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= y_2, \\ &\vdots \\ x_n &= y_n \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

şəklində verilərsə, ona eynilik çevirməsi deyirlər və buna uyğun matris n-tərtibli vahid matris olacaq:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Doğrudan da (3) eynilik çevirməsini aşağıdakı kimi yazmaqla

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1\cdot y_1 + 0\cdot y_2 + \dots + 0\cdot y_n, \\ x_2 &= 0\cdot y_1 + 1\cdot y_2 + \dots + 0\cdot y_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= 0\cdot y_1 + 0\cdot y_2 + \dots + 1\cdot y_n \end{aligned}\right\}$$

bunun matrisinin həqiqətən E_n olduğunu aşkar görürük.

İndi (1) və (2) çevirmələrinin «ardıcıl tətbiqinə» diqqət yetirək, yəni y_i-lərin (2)-də olan ifadələrini (1)-də yerinə yazıb müvafiq qruplaşdırmalar aparsaq onda x_i-lərin z_i-lərlə ifadələrindən ibarət olan aşağıdakı (4) çevirməsini alırıq:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \dots + c_{1n}z_n, \\ x_2 &= c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \dots + c_{2n}z_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= c_{n1}z_1 + c_{n2}z_2 + \dots + c_{nn}z_n. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(4)-ə (1) və (2) çevirmələrinin hasili deyilir. Başqa sözlə: *y_i-ləri x_i-lərə çevirən* (1) *və z_i-ləri y_i-lərə çevirən* (2) *çevirmələrinin hasili elə* (4) *çevirməsinə deyilir ki, o, z_i-ləri x_i-lərə çevirir* $(i=\overline{1,n})$.

(4) çevirməsinin matrisini yazaq:

$$
\begin{array}{cc}
 & (j) \\
C = & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} (i)
\end{array}
$$

Hasil çevirmə (4)-ün C matrisi ilə verilən (1) və (2) çevirmələrinin A və B matrisləri arasında nə əlaqə var?

Aşağıdakı teorem buna cavab verir.

TEOREM. *Dəyişənlərin (1) və (2) çevirmələrinin hasilinin C matrisi onların A və B matrislərinin hasilinə bərabərdir.*

İSBATI. Teoremi isbat etmək üçün y_i - lərin (2)-dəki ifadələrinin hər birini (1)-də yerinə yazıb x_i - lərin z_i - lərlə ifadələrini almalıyıq. Aydındır ki, burada çox uzun-uzadı çevirmələr, qruplaşdırmalar aparmaq lazımdır. Belə ki, məsələn, (4)-ün ixtiyari bir

$$x_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{ij}y_j + \ldots + a_{in}y_n \quad (i = \overline{1,n})$$

bərabərliyində (4)-də y_i - lərin ifadəsini yazaraq

$$x_i = a_{i1}(b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \ldots + b_{1j}z_j + \ldots + b_{1n}z_n) +$$
$$+ a_{i2}(b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \ldots + b_{2j}z_j + \ldots + b_{2n}z_n) + \ldots +$$
$$+ a_{in}(b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \ldots + b_{nj}z_j + \ldots + b_{nn}z_n)$$

alırıq ki, burada da $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ əmsallarını mötərizələrə vurub sonra isə $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dəyişənlərinə nəzərən qruplaşdırmaq gərəkdir. Bu yolla z_i - lərin əmsalları C matrisinin elementləri ilə A və B matrisinin elementləri arasındakı əlaqəni aşkar etmək olur. Bu uzun prosesdən yaxa qurtarmaq işində $\sum$ cəm işarəsindən istifadə etmək olduqca səmərəli nəticə verir. Belə ki, (1) və (2) ifadələrini (1′) və (2′) kimi yazaq:

$$\left. \begin{array}{c} x_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} y_k \\ i = \overline{1,n} \end{array} \right\} (1') \qquad \left. \begin{array}{c} y_k = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{kj} z_j \\ k = \overline{1,n} \end{array} \right\} (2')$$

Bu ifadələrdən

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{n} b_{kj} z_j = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)}_{c_{ij}} z_j = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} z_j \qquad (5)$$

alırıq. Bunun matrisi $C = (c_{ij})$ - dir.

Deməli, z_j - nin əmsalı c_{ij} (yəni C matrisinin ixtiyari c_{ij} elementi) üçün

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}, \quad i, j = \overline{1,n}. \qquad (6)$$

(6) bərabərliyi bizə matrislərin vurulma qaydasından məlumdur. Bu ifadədən görünür ki, matrisi A olan (1) və matrisi B olan (2) çevirmələrinin hasili olan (4)-ün C matrisi A və B - nin hasilinə bərabərdir:

$$C = A \cdot B \qquad (7)$$

Teorem isbat olundu.

Burada bir haşiyə çıxıb belə bir aşkar faktı da nəzərə çatdıraq ki, xüsusi halda dəyişənlərin hər-hansı xətti çevirməsinin eynilik çevirməsi ilə hasili elə həmin çevirmənin özünü verir. Bu xassəni bunların matrisləri haqqında da demək olar, belə ki,

$AE = EA = A$ olur.

(7) düsturunun bir vacib praktik əhəmiyyəti ondadır ki, xətti çevirmələrin hasilini tapmaq işində yararlı bir vasitə olur. Belə ki, verilən xətti çevirmələrin matrislərinin hasilini hesablasaq alınan hasil matrisə uyğun çevirməni asanlıqla yaza ilərik ki, bu da məhz verilən çevirmələrin hasili olur. Buna aid sadə bir misal göstərək.

Misal 1. Tutaq ki:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 2y_1 + y_2 - y_3, \\ x_2 = y_2 + 2y_3, \\ x_3 = -y_1 + 2y_2; \end{array} \right\} (8) \qquad \left. \begin{array}{l} y_1 = z_1 - z_3, \\ y_2 = 2z_1 + z_2 + 3z_3, \\ y_3 = -z_1 + 2z_2 + 3z_3 \end{array} \right\} (9)$$

xətti çevirmələri verilib.

Bu iki xətti çevirmənin hasilini tapmaq üçün y_i - lərin (9)-dakı qiymətlərini (8)-də yerinə yazıb x_i - ləri z_i - lərlə ifadə etmək lazımdır ($i = 1,2,3$), yəni:

$$x_1 = 2(z_1 - z_3) + (2z_1 + z_2 + 3z_3) - (-z_1 + 2z_2 + 3z_3) = 5z_1 - z_2 - 2z_3;$$
$$x_2 = 2z_1 + z_2 + 3z_3 + 2(-z_1 + 2z_2 + 3z_3) = 5z_2 + 9z_3;$$
$$x_3 = -(z_1 - z_3) + 2(2z_1 + z_2 + 3z_3) = 3z_1 + 2z_2 + 7z_3.$$

Deməli, x_i və y_i dəyişənlərinin (8) və (9) xətti çevirməsinin hasili

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 5z_1 - z_2 - 2z_3; \\ x_2 &= 5z_2 + 9z_3; \\ x_3 &= 3z_1 + 2z_2 + 7z_3 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

çevirməsidir.

İndi (8), (9) və (10) çevirmələrinin hər birinə uyğun olan A, B, C matrislərini yazaq:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

AB hasilini tapaq:

$$AB = \begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot2+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot0+1\cdot1+(-1)\cdot2 & 2\cdot(-1)+1\cdot3+(-1)\cdot3 \\ 0\cdot1+1\cdot2+2\cdot(-1) & 0\cdot0+1\cdot1+2\cdot2 & 0\cdot(-1)+1\cdot3+2\cdot3 \\ (-1)\cdot1+2\cdot2+0\cdot(-1) & (-1)\cdot0+2\cdot1+0\cdot2 & (-1)\cdot(-1)+2\cdot3+0\cdot3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} = C \text{ alırıq.}$$

Buradan görünür ki, (8) və (9) çevirmələrinin hasili olan (1) çevirməsini yazmaq üçün verilən (8) və (9)-un matrislərini vurub C matrisinə uyğun (10) çevirməsini dərhal yazmaq olar. Bu məhz (10) çevirməsidir.

Xətti çevirmələri bunların matrislərinə rəğmən məxsusi (və ya «cırlaşan») və qeyri-məxsusi (və ya «cırlarşmayan») növlərə bölürlər.

TƏRİF. *Dəyişənlərin xətti çevirməsinin matrisi məxsusi olarsa, ona məxsusi, matrisi qeyri-məxsusi olarsa ona qeyri-məxsusi çevirmə deyilir.*

Qeyri-məxsusi xətti çevirmələr üçün *tərs çevirmə* anlayışı vardır. Belə ki, *y_i-ləri x_i-lərə inikas etdirən çevirmənin tərsi x_i-ləri y_i-lərə $(i=\overline{1,n})$ inikas etdirən çevirmədir.*

Başqa sözlə: y_i-ləri x_i-lərə inikas etdirən (1) çevirməsinin tərsinin varlığı elə (6) çevirməsidir ki, burada y_i-lər x_i-lərlə ifadə edilir.

(1) çevirməsini qeyri-məxsusi çevirmə hesab edib onu aşağıdakı kimi yazaq:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n &= x_1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n &= x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n &= x_n. \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

Buradakı $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dəyişənlərini «məchullar», $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dəyişənlərini «sərbəst hədlər» hesab edərək y_i-lərin x_i-lərlə ifadələrini təyin edə bilərik.

Bunun $A=(a_{ij})$ matrisinin qeyri-məxsusi olduğu üçün

$$\det A = D_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

olur və buna Kramer qaydasını tətbiq etsək y_i-lər üçün

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{D_1}{D} = \frac{A_{11}}{D_A}x_1 + \frac{A_{21}}{D_A}x_2 + \ldots + \frac{A_{n1}}{D_A}x_n, \\ y_2 &= \frac{D_2}{D} = \frac{A_{12}}{D_A}x_1 + \frac{A_{22}}{D_A}x_2 + \ldots + \frac{A_{n2}}{D_A}x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \frac{D_n}{D} = \frac{A_{1n}}{D_A}x_1 + \frac{A_{2n}}{D_A}x_2 + \ldots + \frac{A_{nn}}{D_A}x_n \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

ifadələrini alarıq. Bu (1)-in tərs çevirməsidir.

Burada A_{ij}-lər a_{ij} elementlərinin cəbri tamamlayıcılarıdır.

(11)-in matrisini yazaq:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D_A} & \frac{A_{21}}{D_A} & \cdots & \frac{A_{n1}}{D_A} \\ \frac{A_{12}}{D_A} & \frac{A_{22}}{D_A} & \cdots & \frac{A_{n2}}{D_A} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{D_A} & \frac{A_{2n}}{D_A} & \cdots & \frac{A_{nn}}{D_A} \end{pmatrix};$$

$(1')$-in matrisi isə məlumdur: $A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Oxucu asanlıqla görə bilər ki, (11) tərs çevirməsinin matrisi X matrisi (1) çevirməsinin A matrisinin tərsidir: $X=A^{-1}$.

Buna aid misal göstərək.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1+2y_2+3y_3, \\ x_2 &= 2y_1+y_2-y_3, \\ x_3 &= 3y_1+2y_3 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

çevirməsinin tərs çevirməsini tapaq, yəni y_i -ləri x_i - lərlə ifadə $(i=1,2,3)$ etməyə çalışaq.

Əvvəlcə bunun matrisinin determinantını hesablayaq:

$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2-6-9-8=-21\neq 0$; çevirmə qeyri-məxsusidir, deməli tərsi var.

Sistemi

$$\left.\begin{aligned} y_1+2y_2+3y_3 &= x_1, \\ 2y_1+y_2-y_3 &= x_2, \\ 3y_1+2y_3 &= x_3 \end{aligned}\right\} \qquad (12')$$

şəklində yazıb buna y_1, y_2, y_3 məchullarına, x_1, x_2, x_3 sərbəst hədlərinə malik olan xətti tənliklər sistemi kimi baxaraq Qauss üsulu və ya Kramer qaydasına əsasən taparıq ki:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -\frac{2}{21}x_1+\frac{4}{21}x_2+\frac{5}{21}x_3, \\ y_2 &= \frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3, \\ y_1 &= \frac{1}{7}x_1-\frac{2}{7}x_2+\frac{1}{7}x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

(13) çevirməsi (12)-nin tərs çevirməsidir. Bunun matrisi:

$$A_1=\begin{pmatrix} -\frac{2}{21} & \frac{4}{21} & \frac{5}{21} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

İndi (12)-nin $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin tərsini hesablasaq $A_1=A^{-1}$ olduğunun şahidi olarıq. Deməli, qeyri-məxsusi (12)-dən bunun (13) tərs çevirməsini almaq üçün (12)-nin A matrisinin tərsini hesablayıb bu A^{-1} tərs matrisinin təyin etdiyi (yaxud buna uyğun olan çevirməni) yazsaq, bu çevirmə məhz (3) çevirməsi olacaq.

Beləliklə, çevirmədə enyilik çevirməsinə vahid matris qarşı qoyulduğu kimi tərs çevirməyə də tərs matris qarşı qoyulur, daha dürüstü: tərs matrisin təyin etdiyi çevirmə verilən çevirmənin tərsidir.

§ 4.8. Elementar matrislər

Matrislər nəzəriyyəsində elementar matris adlanan və matrislərdə elemementar çevirmələrlə bilavasitə bağlı olan «elementar matris» anlayışının olmasının özünə məxsus yeri vardır.

Matrislər üzərində aparılan elementar çevirmələrlə artıq biz tanışıq. Müəyyən zərurət üzündən bu çevirmələri aşağıdakı ardıcıllıqla nömrələyək.

1-ci: *İki sətrin (sütunun) transpozisiyası;*

2-ci: *bir sətri (sütunu) sıfırdan fərqli hər-hansı λ $(\lambda\neq 0)$ ədədinə vurmaq;*

3-cü: *bir sətri (sütunu) ixtiyari bir λ ədədinə vurub digər sətrin (sütunun) üzərinə əlavə etmək.*

TƏRİF. *n-tərtibli vahid matrisdən müəyyən elementar çevirmələr yolu ilə alınan matrislərə elementar matrislər deyilir.*

Vahid matris üzərində aparılan elementar çevirmələrin yuxarıdakı ardıcıllıqla nömrələnməsinə uyğun olaraq elementar matrisləri bəzən elementar matrisləri növlərə bölürlər, belə ki, adətən 1-ci elementar çevirmənin aparıldığı vahid matrisi I növ, 2-ci elementar çevirmənin aparıldığı vahid matrisi II növ, sətir və sutunları üzərində 3-cü elementar çevirmənin aparıldığı matrisi III növ elementar matris adlandırırlar.[1]

Tutaq ki, n-tərtibli vahid matris verilib, onu aşağıdakı kimi yazaq:

$$\begin{matrix} (i) & & (j) \end{matrix}$$
$$E_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

1. $Э(i,j)$ kimi işarə edilən birinci növ elementar matris aşağıdakı kimi olar:

$$\begin{matrix} (i) & & (j) \end{matrix}$$
$$Э(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ (i)\,. \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Göründüyü kimi burada E_n-in i-ci sətir ilə j-ci sətri yerlərini dəyişib.

2. $Э(i\times\lambda)$ kimi işarə edəcəyimiz ikinci növ elementar matris aşağıdakı kimi olar:

[1] Elementar çevirmələrin və buna uyğun elementar matrislərin bu təsnifatı ümumən qəbul edilmiş termin olmayıb şərtləşmədən asılıdır. Belə ki, bəzi müəlliflər, məsələn vahid matrisin hər-hansı sətrini λ-ya $(\lambda\neq 0)$ vurulmasından (bizim təsnifatda 2-ci elementar çevirməyə uyğun olaraq) alınan matrisi I növ elementar çevirmə adlandırırlar (məsələn, bax: Петрова В.Т. Лекции по алгебре и геометрии. М., 1999). Yaxud matrislərə aid başqa bir kitabda elementar çevirmələr bizim baxdığımız ardıcıllıqla nömrələnib (bax: Хорн Р., Джонс Ч. Матричный анализ. М., 1989).

Oxucu bu təsnifatda sərbəst hərəkət edə bilər.

$$\begin{matrix} (i) \end{matrix}$$
$$Э(i\times\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ (i), \\ \\ \\ \end{matrix}$$

burada E_n-in i-ci sətri λ $(\lambda\neq 0)$ ədədinə vurulub.

3. $Э\binom{i+}{j\lambda}$ və $Э(i+j\times\lambda)$ kimi işarə etdiyimiz 3-cü növ elementar matrislər isə belədirlər:

$$\begin{matrix} (i) & & (j) \end{matrix}$$
$$Э\binom{i+}{j\lambda}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ (i), \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

burada, E_n-in j-ci sətir elementləri λ-ya $(\lambda\neq 0)$ vurulub i-ci sətir üzərinə əlavə edilib.

$$\begin{matrix} (i) & & (j) \end{matrix}$$
$$Э(i+j\times\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ (i), \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

burada isə E_n-in j-ci sütun λ $(\lambda\neq 0)$ ədədinə vurulub i-ci sütun üzərinə əlavə edilib.

Elementar matrislərin başlıca əhəmiyyəti ondadır ki, vurmanın mümkünlük şərtini ödəyən hər-hansı bir

$$A_{s\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{si} & \dots & a_{sj} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

matrisinin elementar matrislərlə hasilindən A üzərində uyğun elementar çevirmə aparılmış olduğu matris alınır.

Doğrudan da, $Э(i,j)$ matrisini soldan və sağdan A matrisinə vursaq alınan $B=Э_s(i,j)A$, $C=AЭ_n(i,j)$ matrisləri uyğun olaraq A-dan onunla fərqlənəcəklər ki, bunlar A-nın i-ci və j-ci sətri, habelə i-ci sütunu ilə j-ci sütunun yerdəyişməsindən alınmış olurlar.

Bunun kimi də A matrisinin soldan və sağdan ikinci növ elementar matrisə vurmaqla $D=Э_m(i\times\lambda)A$, $F=AЭ_n(i\times\lambda)$ alınan D və F matrisləri A-nın i-ci sətrinin (sütununun) λ ədədi $(\lambda\neq 0)$ ilə hasilinin j-ci sətrinə (sütununa) əlavə edilməsindən alınan matrislərdir.

Nəhayət, $G=Э_s\binom{i+}{j\times\lambda}A$, $H=AЭ(i+j\times\lambda)$ hasillərindən alınan matrislər də A-nın j-ci sətrinin i-ci üzərinə və j-ci sütunun elementlərinin λ ilə hasillərinin i-ci sütuna əlavə edilməsi deməkdir.

Beləliklə: *Verilən A matrisinin üzərində elementar çevirmə aparmaq onu müvafiq elementar matrisə vurmaq deməkdir, burada sətirlər üzərində aparılan elementar çevirmə verilən matrisin soldan, sütunlar üzərində elementar çevirmə aparmaq onu sağdan müvafiq elementar matrisə vurmaq deməkdir.*

Bu təklifin doğruluğu yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi adi yoxlama yoludur.

Misal göstərək.

1) $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ u_1 & v_1 & w_1 \end{pmatrix}$ matrisi və $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisləri verilib.

Aşkardır ki, $Э(1,3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olacaq, yəni 1-ci və 3-cü sətirlər transpozisiyaya uğrayıb.

İndi A matrisini soldan və sağdan $Э(1,3)$-ə vuraq.

$$Э(1,3)\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ u_1 & v_1 & w_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix};$$

$$A\cdot Э(1,3)=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ u_1 & v_1 & w_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ w_1 & v_1 & u_1 \end{pmatrix}.$$

Göründüyü kimi, bu hasillərdə A matrisinin 1-ci və 3-cü sətirləri və sütunları yerini dəyişib.

Deməli, A-nı birinci növ elementar matrisə vurmaq onun sətirləri (sütunları) üzərində müvafiq elementar çevirmə aparmaqla eynigüclü əməliyyatdır.

§ 4.9. Matrisin tərsini hesablamaq üsulları

Tərs matrisi tapmaq üçün istifadə edilən bir neçə üsulla tanış olaq.

1. *Qarşılıqlı matrisin köməyi ilə hesablamaq.* Bu üsul tərs matrisin varlığına aid teoremdən bizə məlum olan aşağıdakı düstura əsaslanır:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}. \qquad (*)$$

Misal.

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ matrisinin tərsini (*) düsturuna əsasən hesablayaq.

Əvvəlcə $|A|=D_A$ determinantını hesablayaq:

$$D_A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=-4\neq 0.$$

$D_A\neq 0$ olduğundan A-nın tərsi A^{-1} var.

A-nın $\widetilde{A}$ qarşılıqlı matrisini quraq. Bunun üçün D_A-nın bütün elementlərinin cəbri tamamlayıcılarını hesablayaq:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -2 & 5\end{vmatrix}=4;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-7;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-6;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-8;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}=10;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-6.$$

Onda qarşılıqlı matris:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix},\ \text{tərs matris isə } A^{-1}=\frac{1}{D_A}\widetilde{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4}\\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

Bu üsul kiçik tərtibli matrislər üçün çətinlik törətmədiyi halda, tərtibi yüksək olan matrislərdə çoxlu hesablamalar tələb etmək mənada o qədər də səmərəli olmur.

2. *Məchul matris daxil etmək üsulu.* Bu üsul tərs matrisin tərifinə əsaslanır, yəni $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ şərtini ödəyən $A^{-1}=X$ məchul matrisi daxil edərək

$$XA=AX=E$$

matris tənliyini həll etmək lazımdır (burada AX hasilinin mənası olduğu nəzərdə tutulur).

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$$ qeyri-məxsusi matrisi verilibsə, onda

onun tərsi elə $X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn}\end{pmatrix}$ matrisidir ki,

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Başqa sözlə

$$a_{i1}x_{1j}+a_{i2}x_{2j}+\ldots+a_{in}x_{nj}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j,\quad i,j=\overline{1,n}\end{cases}$$

xətti cəbri tənliklər sistemini həll edib tərs matrisin x_{ij} elementlərini tapmaq gərəkdir.

Misal. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 4 & -5\end{pmatrix}$, $A^{-1}=?$. $\det A=-17$.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 4 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Buradan

$$\left.\begin{array}{l}x_{11}-x_{21}=1,\\ 2x_{21}+x_{31}=0,\\ 3x_{11}+4x_{21}-5x_{31}=0.\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x_{12}-x_{22}=0,\\ 2x_{22}+x_{32}=1,\\ 3x_{12}+4x_{22}-5x_{32}=0.\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x_{13}-x_{23}=0,\\ 2x_{23}+x_{33}=0,\\ 3x_{13}+4x_{23}-5x_{33}=1.\end{array}\right\}$$

Bu sistemləri Qauss üsulu ya Kramer qaydası ilə həll edib x_{ij}-ləri taparıq.

3. *Dəyişənlərin xətti çevirməsinin köməyi ilə.* Bu üsul dəyişənlərin verilən matrisə uyğun xətti çevirmənin tərs çevirməsini tapmağa əsaslanır. Belə ki, bildiyimizə görə tərs çevirmənin matrisi verilən çevirmənin matrisinin tərsi olur.

Misal. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $A^{-1}=?$

A-ya uyğun xətti çevirmə (və ya A-nın təyin etdiyi xətti çevirmə):

$$\left.\begin{array}{l}y_1+2y_2+3y_3=x_1,\\ 2y_1+y_2-y_3=x_2,\\ 3y_1+2y_3=x_3.\end{array}\right\}\qquad D_A=-21\neq 0 \text{ (çevirmə qeyri-məxsusidir).}$$

Dəyişənlərin bu xətti çevirməsinin tərsini tapmaq üçün səmərəli yol bunun «genişlənmiş matrisindən» istifadə etmək olar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & x_1\\ 2 & 1 & -1 & x_2\\ 3 & 0 & 2 & x_3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & x_1\\ 0 & -3 & -7 & x_2-x_1\\ 0 & -6 & -7 & x_3-3x_2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & x_1\\ 0 & -3 & -7 & x_2-2x_1\\ 0 & 0 & 7 & x_1-2x_2-x_3\end{array}\right).$$

Buradan asanlıqla taparıq ki:

$$\left.\begin{array}{l} y_1=-\frac{1}{21}(-2x_1+4x_2+5x_3), \\ y_2=\frac{1}{3}(x_1+x_2-x_3), \\ y_3=\frac{1}{7}(x_1-2x_2+x_3). \end{array}\right\} \quad \text{Deməli: } A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{21} & -\frac{4}{21} & -\frac{5}{21} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

4. *Elementar çevirmə yolu ilə «vahid matrisə gətirmə» üsulu.* Bu şərti ad altında matrislərin tərsinin hesablanmasında istifadə edilən səmərəli üsullardan biridir, burada verilmiş qeyri-məxsusi matris ilə onunla eyni tərtibli olan vahid matrisinin hər ikisində eyni zamanda (ikisindən birinin) ya sətirləri, ya da sütunları üzərində elə elementar çevirmələr aparılır ki, verilən matris vahid matrisə çevrilir; onda həmin çevirmələrin nəticəsində vahid matrisdən alınan yeni matris verilən matrisin tərsi olur.

Bunun səbəbini və nəzəri əsasını aydınlaşdıraq.

Elementar matrislərlə tanışlığımızdan bizə bəllidir ki, verilən A matrisi üzərində elementar çevirmə aparmaq onu uyğun elementar matrisə vurmaq deməkdir.

İndi tutaq ki, vurmaq yolu ilə qeyri-məxsusi A-nı E-yə çevirən elementar çevirmələri təmin edən elementar matrislər $Э^{(1)}, Э^{(2)}, \ldots, Э^{(k)}$ - dır, yəni

$$E = Э^{(k)}Э^{(k-1)}\ldots Э^{(2)}Э^{(1)}\cdot A \qquad (1)$$

$Э^{(k)}Э^{(k-1)}\ldots Э^{(2)}Э^{(1)}$ hasilini B_A ilə işarə edək. Onda

$$E = B_A \cdot A. \qquad (2)$$

İndi göstərək ki, $B_A A = E$ olduğu kimi həm də $AB_A = E$ - dir.

Aşkardır ki, B_A qeyri-məxsusidir, çünki, o, $Э^{(i)}$ $(i=\overline{1,k})$ qeyri-məxsusi matrislərin hasilindən ibarətdir.

(2)-nin hər iki tərəfini sağdan B_A-ya vuraq.

$$B_A\cdot A\cdot B_A = E\cdot B_A = B_A. \qquad (3)$$

Bu da məlumdur ki, B_A qeyri-məxsusi matrisi üçün bunun elə C tərs matrisi var ki,

$$C\cdot B_A = E$$

olur. (3)-ün hər tərəfini soldan C-yə vursaq, onda

$$(CB_A AB_A = CB_A) \Rightarrow (EAB_A = E) \Rightarrow (AB_A = E).$$

Deməli, belə çıxır ki, $AB_A = E = B_A A$, yəni $A^{-1} = B_A$.

Tərs matrisin bu nəzəri mülahizəyə əsaslanan baxdığımız üsulunu praktik həyata keçirmək üçün verilən A matrisi ilə buna uyğun E vahid matrisini bir-birinin yanında «genişlənmiş» matris $(A|E)$ şəklində yazıb hər bir elementar çevirməni eyni zamanda bunların hər ikisi üzərində icra edirlər.

Misal. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1}=?$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right).$$

Şaquli xətdən solda yazılan A matrisi elementar çevirmələr yolu ilə vahid matrisə, şaquli xətdən sağda yerləşən vahid matris isə yeni bir matrisə (B_A - ya) çevrilir ki, bu da məhz tərs matrisdir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

§ 4.10. Xətti cəbri tənliklər sisteminin matris yazılış forması. Kramer qaydasının matrislərlə ifadəsi

Öncə A və B məlum, X və Y isə məchul matrislər olduqda

$$AX = B, \quad \text{yaxud} \quad YA = C \qquad (1)$$

şəklində matris tənliklərə baxaq.

Matris tənliklərin həllində iki halı fərqləndirmək lazımdır:

1. A düzbucaqlı matris, yaxud məxsusi kvadrat matrisdirsə (1) tənliklərini həll etmək üçün iki matrisin hasili və bərabərliyi şərtini əsas götürüb (1) münasibətinə görə X və ya Y məchul matrisinin elementlərinin axtarılmasını xətti cəbri tənliklər sisteminin həllinə gətirə bilərik (bu, tərs matrislərin hesablanmasındakı 2-ci üsulu xatırladır).

2. Xüsusi halda A qeyri-məxsusidirsə onda (1) tənliklərinin həlli

$$X = A^{-1}B, \quad Y = CA^{-1} \tag{2}$$

düsturları ilə tapılır.

Doğrudan da A qeyri-məxsusi olduğundan onun tərsi A^{-1} var və (1) bərabərliklərini uyğun olaraq soldan və sağdan A^{-1}-ə vurmaqla (2) bərabərliklərini alırıq.

Xüsusi halda, $AX = B$ tənliyində B və X matrisləri ancaq bir sütundan ibarət matris ola bilər. Bu hal, xətti cəbri tənliklər sistemini matrislər vasitəsi ilə ifadə etməyə imkan verir. Belə ki,

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{Vmatrix}$$

olarsa, onda $AX = B$ münasibəti bildiyimiz

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s \end{aligned}\right\}$$

n məchullu, s xətti cəbri tənliklər sisteminin matrislərlə ifadəsidir.

Xüsusi halda, $s = n$ və A kvadrat matrisi də qeyri-məxsusi olarsa, onda (2) düsturlarından birincisi artıq bizə məlum olan Kramer qaydasının matrislərlə ifadəsini verir.

Doğrudan da, bunun sağ tərəfindəki $A^{-1}B$ hasil matris bir sütundan ibarət olar (çünki B özü bir sütundan ibarət matrisdir) və onun j-ci sətir elementi A^{-1}-in j-ci elementləri ilə B-nin uyğun $b_1, b_2, \dots, b_n$ elementlərinin hasilləri cəminə bərabərdir, yəni:

$$\frac{A_{1j}}{D_A}b_1 + \frac{A_{2j}}{D_A}b_2 + \dots + \frac{A_{nj}}{D_A}b_n = \frac{1}{D_A}\left(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \dots + A_{nj}b_n\right).$$

Mötərizədəki cəm D_A determinantında ancaq j-ci sütun elementlərinin B-nin sütun elementləri ilə əvəz edilməsindən alınan determinantın özünün j-ci sütun elementlərinə nəzərən ayrılışıdır. Bu göstərir ki, $X = A^{-1}B$ düsturu I fəsildə öyrəndiyimiz Kramer düsturlarının matrislər vasitəsi ilə ifadəsindən başqa bir şey deyildir. Bunun doğruluğuna inanmaq üçün $X = A^{-1}B$ ifadəsi-

ni $AX = B$ matris tənliyində yerinə yazmaq kifayətdir. Aşkardır ki, $B = B$ olacaqdır.

Misal 1. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ və $B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}$ verildikdə $AX = B$ matris tənliyini həll etməli.

A matrisi qeyri-məxsusidir: $|A| = 1$.

$AX = B$ tənliyini soldan A^{-1}-ə vuraq:

$X = A^{-1}B$. Onda $A^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ olduğundan:

$$X = \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Deməli, $X = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}$.

Bunu tənlikdə yerinə yazıb, yoxlayaq:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Misal 2. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$ tənliyini həll etməli.

Burada $A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$ matrisi məxsusi ($|A| = 0$), $B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$ isə qeyri-məxsusidir ($|B| = 2 \neq 0$). Onda $AX = B$ tənliyini həlli yoxdur (yoxlayın!)

Misal 3. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{Vmatrix}$ tənliyini həll etməli.

Burada:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{Vmatrix} \quad \text{və} \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{Vmatrix}$$

məxsusi matrislərdir:

$$|A| = 0, \quad |B| = 0.$$

Bu halda A^{-1} yoxdur. Ona görə $X = \begin{Vmatrix} x & y \\ z & t \end{Vmatrix}$ qəbul edərək, $AX = B$ tənliyində nəzərə alsaq:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} x & y \\ z & t \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{Vmatrix},$$

buradan:
$$\begin{Vmatrix} x+2z & y+2t \\ -2x-4z & -2y-4t \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{Vmatrix}.$$

İki matrisin bərabərlik şərtinə əsasən:
$$\left.\begin{array}{r} x+2z=1, \\ y+2t=1, \\ -2x-4z=-2, \\ -2y-4t=-2 \end{array}\right\}$$
tənliklər sistemi alınır. Bu sistemin isə:
$$\left.\begin{array}{r} x+2z=1, \\ y+2t=1 \end{array}\right\}$$
sistemi ilə ekvivalent olduğu dərhal görünür. Buradan: $x=1-2z$ və $y=1-2t$ (burada z və t sərbəst məchullardır) ümumi həlli tapa bilərik.

Əgər $z=c$, $t=d$ parametrlərini daxil etsək, onda X məchul matrisini təyin edə bilərik.
$$X = \begin{Vmatrix} -2c+1 & -2d+1 \\ c & d \end{Vmatrix}.$$

Burada c və d ixtiyari qiymətlər ala bilər.

Misal 4.
$$\left.\begin{array}{r} 2x_1+3x_2+4x_3=1, \\ 2x_1+6x_2+8x_3=-2, \\ 2x_1+6x_2+12x_3=-1 \end{array}\right\}$$
tənliklər sistemini matrislər şəklində göstərərək həll etməli.
$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 12 \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$$
və $B = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{Vmatrix}$ kimi işarə etsək, verilmiş sistemi $AX=B$ şəklində yazarıq.

A^{-1} - i hesablayaq:
$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{Vmatrix}$$

munasibətinə əsasən: $x_1 = 1+1=2$; $x_2 = -\frac{1}{3}-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$; $x_3 = \frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, yəni sistemin $\left(2;-\frac{4}{3};\frac{1}{4}\right)$ həllini tapırıq.

Çalışmalar.

1. $\begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} X \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$

tənliyindən ikitərtibli məchul X matrisini tapın.

Cavabı. $X = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix}.$

2. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{Vmatrix}$

tənliyindən ikitərtibli məchul X matrisini tapın.

Cavabı. $X = \begin{Vmatrix} \frac{5}{2}-3a & 1-3b \\ 2a & 2b \end{Vmatrix},$

burada a və b ixtiyari ədədlərdir.

§ 4.11. Matrislər hasilinin ranqı

TEOREM. *Sonlu sayda matrislər hasilinin ranqı vuruqların hər birinin ranqından böyük deyildir.*

İSBATI. İsbatı iki matrisin hasili üçün isbat etmək kifayətdir (sonra onu istənilən sonlu sayda matrislər hasili üçün riyazi induksiya prinsipinin köməyi ilə ümumiləşdirmək çətin deyildir).

Tutaq ki, $A_{s\times n}=(a_{ij})$ və $B_{n\times m}=(b_{ij})$ matrisləri verilib (ölçüləri elə seçirik ki, vurma əməlinin mümkünlük şərti ödənsin).

$AB=C=(c_{ij})$, $rangA=r_A$, $rangB=r_B$, $rangC=r_C$ olsun.

Göstərməliyik ki: $r_C \le r_A$, $r_C \le r_B$.

Aşkardır ki, C - nin ölçüsü $n\times m$ olar. Bilirik ki, $C_{s\times m}=(c_{ij})$ hasil matrisin ixtiyari c_{ik} elementi (C - nin i - ci sətri ilə k - cı sütunun kəsişdiyi yerdə duran element) A və B - nin elementləri ilə
$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \quad (i=\overline{1,s}). \qquad (1)$$

Aydındır ki, buradakı cəmin hədlərində 1-ci $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ vuruqları A-nın i-ci sətir elementləri, 2-ci $b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{nk}$ isə B-nin k-cı sütun elementləridir. Burada verilmiş n üçün (k-nı sabit saxlayıb) i-yə $i = 1,2,\dots,s$ qiymətlərini verməklə

$$\left.\begin{array}{l} c_{1k} = a_{11}b_{1k} + a_{12}b_{2k} + \dots + a_{1n}b_{nk}, \\ c_{2k} = a_{21}b_{1k} + a_{22}b_{2k} + \dots + a_{2n}b_{nk}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{sk} = a_{s1}b_{1k} + a_{s2}b_{2k} + \dots + a_{sn}b_{nk} \end{array}\right\}$$

bərabərliklərini alarıq ki, bunu da sütun matrislərin köməyi ilə

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{sk} \end{bmatrix}}_{\gamma_k} = b_{1k}\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{bmatrix}}_{\alpha_1} + b_{2k}\underbrace{\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{bmatrix}}_{\alpha_2} + \dots + b_{nk}\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{bmatrix}}_{\alpha_n} \tag{2}$$

Burada sol tərəfdəki $\gamma_k = \begin{bmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{sk} \end{bmatrix}$ sütun matrisi $C_{s\times m} = (c_{ij})$ hasil matrisinin ixtiyari k-cı sütunu, sağ tərəfdəki $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{bmatrix}, \ \alpha_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{bmatrix}, \ \dots, \ \alpha_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{bmatrix}$ sütun matrisləri isə A-nın uyğun olaraq 1-ci, 2-ci, ..., n-ci sütun matrisləridir. $b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{nk}$ əmsallarını $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \dots, \lambda_{nk}$ ədədləri hesab edib (2)-dən

$$\gamma_k = \lambda_{1k}\alpha_1 + \lambda_{2k}\alpha_2 + \dots + \lambda_{nk}\alpha_n \tag{3}$$

bərabərliyini yaza bilərik, burada $k = 1,2,\dots,m$ qiymətləri ala biləcəyini nəzərdə tutub C-nin

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m \tag{4}$$

sütun vektorlar sisteminin A matrisinə məxsus olan

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \tag{5}$$

vektorlar sisteminin aşağıdakı xətti ifadələrini alarıq:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1 = \lambda_{11}\alpha_1 + \lambda_{12}\alpha_2 + \dots + \lambda_{1n}\alpha_n, \\ \gamma_2 = \lambda_{21}\alpha_1 + \lambda_{22}\alpha_2 + \dots + \lambda_{2n}\alpha_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_m = \lambda_{m1}\alpha_1 + \lambda_{m2}\alpha_2 + \dots \lambda_{mn}\alpha_n. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Başqa sözlə, (6) onu göstərir ki, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ vektorlar sistemi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ vektorlar sisteminin xətti kombinasiyalarından ibarətdir. Onda vektorlar sistemlərinin ranqlarının müqayisəsinə aid bizə məlum olan teoremə görə $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ vektorlar sisteminin ranqı $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ vektorlar sisteminin ranqını aşmamalıdır: $rang(4) \le rang(5)$. $rang(4)$ isə (yəni, C-nin sütun vektorlar sisteminin ranqı) C-nin ranqı, $rang(5)$ isə A-nın sütun vektorlar sisteminin ranqı, yəni A-nın ranqı deməkdir. Deməli, $r_C \le r_A$ olur.

Teorem isbat olunur.

Buna oxşar qayda ilə $r_C \le r_B$ olduğunu göstərmək olar.

Teoremdən çıxan vacib bir nəticəni qeyd edək.

NƏTİCƏ. *İxtiyari A matrisinin qeyri-məxsusi Q matrisi ilə hasilinin ranqı A matrisinin ranqına bərabərdir.*

Başqa sözlə: *Hər hansı A matrisini qeyri-məxsusi Q matrisinə vurduqda A-nın ranqı dəyişmir.*

İSBATI. $AQ = C$, $rangA = r_A$, $rangQ = r_Q$, $rangQ^{-1} = r_{Q^{-1}}$ olsun. Teoremə əsasən

$$r_C \le r_A, \quad r_C \le r_Q \tag{1}$$

olmalıdır. İndi $AQ = C$ bərabərliyini sağdan qeyri-məxsusi Q matrisinin ($D_Q \ne 0$) tərsinə vuraq:

$$AQQ^{-1} = CQ^{-1}$$

və $QQ^{-1} = E$ olduğu üçün

$$A = CQ^{-1}$$

alırıq. Teoremə görə burada

$$r_A \le r_C \quad \text{və} \quad r_A \le r_{Q^{-1}} \tag{2}$$

olmalıdır. (1) və (2) münasibətlərindən $r_A = r_C$ olduğu aydınlaşır.

Nəticə isbat olundu.

Nəhayət, matrislərin ranqından söhbət gedəndə burada onların isbatı üzərində dayanmadığımız aşağıdakı münasibətlərin də doğruluğunu xatırlamağın yeridir:

1. $rang(AB)+rang(BC)=rangB+rang(ABC)$

(buna cəbri ədəbiyyatda Frabeninə bərabərliyi deyilir).

2. A və B n-tərtibli kvadrat matrislər üçün isbat etdiyimiz teoremə də əlavə edən aşağıdakı bərabərsizlik də doğrudur:

$$r_A + r_B - b \le r_{AB} \le \min(r_A, r_B)$$

(bu sonuncu münasibət isə cəbri ədəbiyyatda Silvestr bərabərsizliyi adı ilə məşhurdur).

Əgər burada n ədədi A matrisinin sütunlar sayı və B matrisinin sətirlər sayını göstərirsə, onda Silvestr bərabərsizliyi belə düzbucaqlı matrislər üçün də doğrudur.

§ 4.12. Ortoqonal matrislər

TƏRİF. *Həqiqi matrisin tərsi onun transponirə edilmişinə bərabərdirsə, buna ortoqonal matris deyilir.*

A matrisinin ortoqonal olması tərifini

$$A^{-1} = A' \tag{1}$$

kimi yaza bilərik (burada A' matrisi A-nın transponirə edilmiş matrisidir).

Əgər (1)-i sağdan və soldan A-nın özünə vursaq, onun tərifi kimi qəbul edilə bilən aşağıdakı mühüm xassələrini alarıq:

$$A'A = E; \tag{2}$$

$$AA' = E. \tag{3}$$

Burada:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1i} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2i} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{ii} \dots a_{ij} \dots a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{j1}\ a_{j2} \dots a_{ji} \dots a_{jj} \dots a_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{ni} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{21} \dots a_{i1} \dots a_{j1} \dots a_{n1} \\ a_{12}\ a_{22} \dots a_{i2} \dots a_{j2} \dots a_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1i}\ a_{2i} \dots a_{ii} \dots a_{ji} \dots a_{ni} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1j}\ a_{2j} \dots a_{ij} \dots a_{jj} \dots a_{nj} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}\ a_{2n} \dots a_{in} \dots a_{jn} \dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ortoqonal matrislərin bəzi xassələri ilə tanış olaq.

1. *Ortoqonal matrisin determinantı* ± 1-*ə bərabərdir.*

(3)-dən $\left(|AA'| = |E|\right) \Rightarrow \left(|A| \cdot |A'| = 1\right)$. Burada $|A| = |A'|$ olduğundan $|A|^2 = 1$, Deməli: $D_A = \pm 1$.

2. *Ortoqonal matrisin iki sətrinin (sütununun) uyğun elementlərinin hasilləri cəmi sıfra, eyni bir sətrin (sütunun) elementlərinin kvadratları cəmi* 1-*ə bərabərdir.*

Doğrudan da, (3) bərabərliyindən AA' hasilinin vahid matrisə bərabərliyindən tapırıq ki, məsələn, xüsusi halda

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1n}^2 = 1$$

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + \dots + a_{1n}a_{2n} = 0$$

və ya ümumiyyətlə i və j sətirləri üçün:

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 = 0$$

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{in}a_{jn} = 0 \quad (i \neq j).$$

Qısa yazsaq:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj} = 0, \quad i,k = \overline{1,n}, \quad i \neq n. \tag{5}$$

Bu xassəni çox zaman ortoqonal matrisin tərifi kimi qəbul edirlər.

Ortoqonal matrisə sadə misallar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{olar.}$$

Bunlar üçün: $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$, $1^2 + 0^2 = 1$, $0^2 + 1^2 = 1$ və:

$$\sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha = 0, \ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

3. *Ortoqonal matrisin tərsi də ortoqonaldır.*

A ortoqonal matris üçün $A^{-1} = A'$ olduğunu bilirik. Digər tərəfdən $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$, $\left(A'\right)' = A$ olması da məlumdur. Deməli: $\left(A^{-1}\right)^{-1} = \left(A'\right)'$.

4. *Ortoqonal matrislərin hasili də ortoqonaldır.*

Göstərməliyik ki: A və B ortoqonal matrisləri üçün: $(AB)^{-1} = (AB)'$. Doğrudan da

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{6}$$

olduğundan və şərtə görə $B^{-1}=B'$, $A^{-1}=A'$. Bu da məlumdur ki, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. Bunu (6)-da nəzərə alsaq

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=(AB)' \quad \text{və ya} \quad (AB)^{-1}=(AB)'.$$

5. *Vahid matris ortoqonaldır.*

Doğrudan da $EE'=E'E=E$.

Nəhayət, onu da qeyd edək ki, ortoqonal matrislərin determinantlarının ± 1-ə bərabər olduğuna rəğmən onları məxsusi və qeyri-məxsusi ortoqonal siniflərə ayırırlar. Determinantı 1-ə bərabər olan ortoqonal matrisi məxsusi, determinantı -1-ə bərabər olan matrisləri isə qeyri-məxsusi ortoqonal matris adlandırırlar.

§ 4.13. Oxşar matrislər

TƏRİF 1. *Q ixtiyari qeyri-məxsusi matris olduqda iki A və B kvadrat matrisləri*

$$A=Q^{-1}BQ$$

münasibətindədirsə, onda A matrisinə B-yə oxşar matris deyilir.

Bu munasibətdə Q matrisini bəzən dəyişdirici və transformasiyaedici matris adlandırıb deyirlər ki, A matrisi B-dən Q-nün transformasiyası vasitəsilə alınıb. A matrisinin B-yə oxşar olmasını çox zaman $A \backsim B$ kimi işarə edirlər.

Oxşar matrislərin bəzi xassələri ilə tanış olaq.

1. *Oxşar matrislərin determinantları və ranqları bir-birinə bərabərdir.*

İSBATI. $A \backsim B$ olsun. Onda $A=Q^{-1}BQ$ olur və buradan isə $|A|=|Q^{-1}||B||Q|=|B|$ alırıq.

Oxşar A və B matrislərinin ranqlarının bərabər olması isə matrislər hasilinin ranqı haqqında məlum teoremdən bilavasitə aydın olur.

2. *n-tərtibli matrislər çoxluğunda matrislərin oxşarlığı ekvivalentlik münasibətinə malikdir.*

İSBATI. Göstərməliyik ki, burada ekvivalentliyin mahiyyətini təşkil edən refleksivlik, simmetriklik və tranzitivlik xassələrinin vəhdəti burada doğrudur.

1. *Refleksivlik*: Hər bir A matrisi özü-özünə oxşardır, yəni $A \backsim A$.

Bunun doğruluğu $A=E^{-1}AE$ məlum bərabərliyindən aydın olur (burada E – vahid matris qeyri-məxusi olub transformasiyaedici matrisdir).

2. *Simmetriklik*: $(A \backsim B) \Rightarrow (B \backsim A)$.

$A \backsim B$ olduğundan $A=Q^{-1}BQ$. Bunu soldan Q qeyri-məxsusi matrisinə, sağdan isə Q^{-1}-ə (aydındır ki, Q qeyri-məxsusi olduğundan, onun tərsi Q^{-1} də qeyri-məxsusidir) vuraq:

$$QAQ^{-1}=QQ^{-1}BQQ^{-1}=B, \text{ yəni } B=(Q^{-1})^{-1}AQ^{-1}.$$

3. *Tranzitivlik*: $((A \backsim B)\wedge(B \backsim C)) \Rightarrow (A \backsim C)$ olduğunu göstərməliyik. $A=Q^{-1}BQ$ və $B=S^{-1}CS$ münasibətlərindən:

$$A=Q^{-1}(S^{-1}CS)Q=(Q^{-1}S^{-1})C(SQ)=(SQ)^{-1}C(SQ)$$

alırıq ki, bu da A-nın C-yə oxşar olduğunu göstərir.

3. *Transformasiyaedici matrisləri eyni olan A, B, C, D matrislərində $A \backsim B$ və $C \backsim D$ isə, onda*

$$(A+C) \backsim (B+D). \tag{1}$$

İSBATI. Transformasiyaedici matris Q olsun. Onda şərtə görə

$$(A \backsim B) \Rightarrow A=Q^{-1}BQ \tag{2}$$

$$(C \backsim D) \Rightarrow C=Q^{-1}DQ \tag{3}$$

$A+C=S$, $B+D=T$ olsun. Onda (2) və (3)-dən

$$\underbrace{A+C}_{S}=Q^{-1}BQ+Q^{-1}DQ=Q^{-1}\underbrace{(B+D)}_{T}Q,$$

$$S=Q^{-1}TQ \tag{4}$$

yəni $(A+C) \backsim (B+D)$ olur.

Xassə isbat olunur.

TƏRİF 2. *Diaqonal matrislərə oxşar olan matrislərə diaqonallaşan matrislər deyilir.*

FƏSİL 5

CƏBRİ ƏMƏL VƏ CƏBRİ STRUKTURA ANLAYIŞI, BUNLARIN ƏSAS NÖVLƏRİ HAQQINDA

§ 5.1. Cəbri əməl, cəbri struktura anlayışı

Girişdə qeyd etmişdik ki, müasir cəbri müxtəlif riyazi obyektlərin xüsusi təbiətinə məhəl qoymadan, əsas etibarilə bu obyektlər çoxluğunda təyin edilən cəbri əməlləri və bu əməllərin xassələrini öyrənən elm kimi səciyyələndirirlər.

Bəs cəbri əməl nədir?

Tutaq ki, ixtiyari M çoxluğu verilir. M çoxluğunun müəyyən nizamla götürülmüş hər hansı iki a və b elementinə, birqiymətli olmaqla həmin çoxluğun bir c elementi müəyyən bir qanun və qayda ilə qarşı qoyula bilirsə, onda deyirlər ki, M çoxluğunda cəbri əməl (və yaxud «kompozisiya») təyin edilmişdir.

Buradan *əvvələn* aydın olur ki, cəbri əməlin mahiyyətini tərifdə deyilən qarşıqoyma qanunu (və ya qaydası) təşkil edir. *İkincisi* qeyd edilir ki, bu qarşıqoyma qaydası birqiymətlidir, yəni M çoxluğunun iki a və b elementinə həmin çoxluğun yeganə c elementi qarşı qoyulur. *Üçüncüsü*, göstərilən əməli M çoxluğunun ixtiyari iki elementi üzərində aparmaq mümkün olmaqla, bu cəbri əməl nəticəsində alınan üçüncü yeganə element hökmən M çoxluğuna daxil olmalıdır. *Nəhayət*, cəbri əməlin nəticəsi bu əməlin aparıldığı a və b elementlərinin hansı nizamla götürülməsindən asılıdır (yəni cəbri əməl kommutativlik xassəsinə malik olmaya da bilər).

Cəbri əməliyyat çoxluğun yalnız iki a və b elementinə aid edildikdə onu adətən «Binar cəbri əməl» adlandırırlar.

Binar cəbri əməl A çoxluğunun $A\times A$ Dekart hasilinin hər hansı altçoxluğunun elementi, yəni müvafiq iki elementin nizamlanmış cütü kimi çıxış edir.

Xüsusi halda cəbri əməli toplama və vurma adlandıraraq onu «+» və ya « · » (nöqtə) kimi işarə edirlər. Onda birinci halda qarşıqoyma qaydasında iştirak edən c ədədinə a və b-nin cəmi deyib $a+b=c$ kimi, ikinci halda isə c-yə a və b-nin hasili deyib $a\cdot b=c$ kimi işarə edirlər. Əlbəttə, ola bilər ki, M çoxluğunda təyin edilən cəbri əməliyyat üçün başqa yeni termin və simvol qəbul edilsin. Məsələn, ümumi halda əməli və ya kompozisiyanı bəzən $a\otimes b=c$, yaxud $a*b=c$ və yaxud da $a \perp\!\!\perp b=c$ və s. kimi işarə edirlər. Onda M çoxluğunda $\otimes$ cəbri əməlinin təyin edilməsi o deməkdir ki, $a,b\in M$ isə $a\otimes b\in M$ olmalıdır (bu halda deyirlər ki, M çoxluğu $\otimes$ əməlinə nəzərən qapalıdır). Başqa sözlə, burada $M\times M \longrightarrow M$ inikasından söhbət gedir.

Müasir cəbrin «Ümumi cəbr» adlanan sahəsinin əsas məqsədi məhz cəbri strukturaları öyrənməkdir. Bəs cəbri struktura nədir?

Cəbri struktura dedikdə, müxtəlif təbiətli elementlərin elə çoxluğu nəzərdə tutulur ki, burada müəyyən xassələrə malik olan bir və ya bir neçə cəbri əməl təyin edilmiş olsun. Bu çoxluğu cəbri strukturanın daşıyıcısı adlandırırlar.

Cəbri strukturalara müasir cəbrdə çox zaman «Universal cəbrlər» deyib, bunun özünü və daşıyıcısını adətən eyni bir hərflə (məsələn: M ilə) işarə edirlər.

Cəbri strukturada bir deyil, bir neçə cəbri əməl təyin edilərsə, onda bu hal arqumentləri M-dən olan bir neçə dəyişənli f funksiyasını xatırladır və aşağıdakı şəkildə göstərilə bilər:

$$f: M^n = M\times M\times \ldots \times M \to M;$$

burada $\times$ işarəsi çoxluğun Dekart hasilini göstərir və buradakı arqumentlərin sayı da cəbri əməlin «ar»ı adlanır; belə ki, $n=0$ olduqda nular, $n=1$ olanda əməl unar, $n=2$ olanda binar, $n=3$ olanda ternar və s. ümumiyyətlə n-ar əməl olur. Ən çox rast gəlinən, işlək əməl binar əməldir ki, müxtəlif ədədlər çoxluqlarında iki ədəd üzərində aparılan toplama və çıxma əməlləri bunun ən sadə, bariz nümunəsidir. Məsələn, iki ədədin ən böyük ortaq böləni (ƏBOB), ən kiçik ortaq bölünəni də (ƏKOB) natural ədədlərdə təyin edilən binar cəbri əməldir; iki müddəa üzərində dizyunksiya və konyunksiya kimi məntiqi əməllər də riyazi məntiqdə binar əmələ misal olar.

Xüsusi halda M çoxluğunda təyin edilən unar əməlo M - in özünün özünə birqiymətli inikası ($f: M \to M$) kimi baxmaq olar. Bir qədər sadələşmiş tərzdə desək, unar cəbri əməldə verilən çoxluğun yalnız bir elementi iştirak edir. Məsələn, ədədi kvadrata yüksəlmək onun üzərində aparılan unar cəbri əməldir. Çoxluğun altçoxluğunun özünə tamamlayıcısını, həqiqi ədədin mütləq qiymətini, verilən müddəanın inkarını tapmaq unar əmələ aid sadə misallardır. Elə cəbri əməllər də var ki, orada verilən çoxluğun ikidən də çox ($n \geq 3$) elementi iştirak edir. Məsələn, n sayda $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kimi verilən natural ədədlərin ən böyük ortaq bölənini və ən kiçik ortaq bölünənini tapmaq n - ar cəbri əmələ misal olar.

Cəbri əməliyyatın təyin edilməsi anlayışının daha yaxşı dərk edilməsi üçün bir neçə misala baxaq.

1. Tam ədədlər çoxluğunda toplama və vurma əməlləri təyin edilmişdir.

Doğrudan da iki tam ədədin cəmi və hasili yenə də tam ədəd verir, burada cəm, hasil verilmiş tam ədədlər çoxluğuna daxildir; belə ki, $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ tam ədədlər çoxluğunun ixtiyari iki $a \in Z$, $b \in Z$ elementinin cəmi və hasili də tam ədəd olub Z - ə daxildir.

2. Tam ədədlər çoxluğunda bölmə cəbri əməli təyin edilməmişdir. Çünki, əvvələn, burada sıfra bölmək mümkün deyil, ikincisi də, iki tam ədədin nisbəti heç də həmişə tam ədəd olmur və deməli, əməlin nəticəsi çoxluğun özünə daxil olmaya da bilər.

3. Natural ədədlər (müsbət tam ədədlər) çoxluğunda çıxma cəbri əməli təyin edilməmişdir. Doğrudan da ixtiyari iki a, b natural ədədlərinin $a-b$ fərqi həmişə natural ədəd olmaya da bilər ($a < b$ olanda $a-b$ mənfi ədəd olur ki, bu da natural ədədlər çoxluğuna daxil deyil).

4. İrrasional ədədlər çoxluğunda vurma cəbri əməlinin təyin edildiyini də təsdiq etmək olmaz. İki irrasional ədədin hasili həmişə irrasional olmaya da bilər (məsələn, xüsusi halda: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = 2$).

Cəbri strukturalar üçün burada təyin edilən əməllərin xassələri mühüm əhəmiyyətə malikdir.

TƏRİF. $\otimes$ *binar cəbri əməli (kompozisiyası)*

$$\underset{a,b \in M}{\forall} [a \otimes b = b \otimes a]$$

şərtini ödəyirsə, buna onun kommutativlik (yerdəyişmə),

$$\underset{a,b,c \in M}{\forall} [(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)]$$

şərtini ödədikdə isə onun assosiativlik (qruplaşdırma) xassəsi deyilir. Əgər M çoxluğunda

$$a \otimes b \neq b \otimes a,$$
$$(a \otimes b) \otimes c \neq a \otimes (b \otimes c)$$

olan a,b «cütlüyü» və a,b,c «üçlüyü» tapılarsa, onda uyğun olaraq deyirlər ki, bu əməl kommutativlik və assosiativlik xassələrinə malik deyildir.

Məsələn, M çoxluğunun altçoxluqlarının birləşməsi və kəsişməsi, habelə natural və tam ədədlər çoxluqlarında toplama və vurma əməlləri kommutativlik xassəsinə malikdirlər. Lakin məsələn, tam ədədlərin çıxılmasında kommutativlik xassəsi doğru deyil (məsələn, $12-7 \neq 7-12$).

Bunu assosiativlik xassəsi üçün də deyə bilərik; məsələn, xüsusi halda: $(10-3)-1 \neq 10-(3-1)$.

TƏRİF. $\otimes$ *binar əməli* $\perp\!\!\!\perp$ *əməlinə nəzərən*

$$\underset{a,b,c \in M}{\forall} [(a \perp\!\!\!\perp b) \otimes c = (a \otimes c) \perp\!\!\!\perp (b \otimes c)] \text{ və } c \otimes (a \perp\!\!\!\perp b) = (c \otimes a) \perp\!\!\!\perp (c \otimes b)$$

şərtlərini ödəyirsə, buna $\otimes$ *əməlinin* $\perp\!\!\!\perp$ *əməlinə nəzərən distributivlik (paylaşdırma) xassəsi deyilir (əgər* $\otimes$ *əməli kommutativ olarsa, onda «və» bağlayıcısının sol və sağındakı münasibətlər fərqlənməz).*

Əgər M - də bu bərabərlikləri ödəməyən a,b,c «üçlüyü» tapılarsa, onda burada distributivlik xassəsi ümumiyyətlə doğru olmaz.

Cəbri strukturalar nəzəriyyəsində neytral və simmetrik element anlayışları xüsusi əhəmiyyətə malikdir.

TƏRİF. η *elementi* $\underset{a \in M}{\forall} [(a \otimes \eta = a) \wedge (\eta \otimes a = a)]$ *şərtini ödəyirsə, buna M - in* $\otimes$ *əməlinə nəzərən neytral elementi deyilir.*

Məsələn, M çoxluğunun altçoxluqları içərisində birləşmə $\cup$ əməlinə nəzərən $\varnothing$ boş çoxluq, kəsişmə $\cap$ əməlinə nəzərən isə M - in özü neytral element olur:

$$M \cup \varnothing = \varnothing \cup M = M \quad , \quad M \cap M = M .$$

Xüsusi halda $M = Z$ tam ədədlər çoxluğunda toplama əməli üçün 0 (sıfır), vurma əməli üçün isə 1 (vahid) neytral element olur:

$$\forall a \in Z \text{ üçün } a + 0 = 0 + a = a, \; a \cdot 1 = 1 \cdot a = a .$$

Ümumiyyətlə, M çoxluğunda təyin edilən toplama əməlinə nəzərən neytral elementi «sıfır element» adlandırıb onu adətən θ

(teta) ilə, vurma əməlinə nəzərən neytral elementə isə «vahid element» deyib əksər hallarda e ilə işarə edirlər.

Asanlıqla isbat etmək olar ki, əgər M çoxluğunda neytral element varsa, o yeganədir.

Doğrudan da, əgər fərz etsək ki, M - də bir deyil, iki η və η' kimi neytral elementləri var, onda $\eta = \eta \otimes \eta' = \eta'$ alarıq.

TƏRİF. *M - in a elementi və η neytral elementi üçün $a' \otimes a = a \otimes a' = \eta$ şərtini ödəyən a' elementinə ($a' \in M$) a - nın $\otimes$ əməlinə nəzərən simmetrik elementi deyilir.*

Xüsusi halda $M = Q$ rasional ədədlər çoxluğunda sıfırdan fərqli olan a ədədi ($a \neq 0$) üçün toplama əməlinə nəzərən simmetrik elementi $a' = -a$, vurma əməlinə görə isə simmetrik elementi $a' = \frac{1}{a}$ olar. Belə ki:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0, \quad a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1.$$

Ümumiyyətlə, M çoxluğunda toplama binar cəbri əməlinə nəzərən a ilə simmetrik olan a' elementini a - nın əksi deyib $-a$ ilə, vurma əməlinə ənəzərən isə a - nın simmetrik elementini a - nın tərsi adlandırıb a^{-1} kimi işarə edirlər.

Onu da qeyd edək ki, riyazi ədəbiyyatda bəzi neytral və simmetrik elementlərdən danışanda «sol» və «sağ» neytral və simmetrik elementləri fərqləndirib onlara ayrıca təriflər verib, sonradan bunların eyni olduğunu isbat edirlər (sonrakı şərhlərdə bu fərqləndirmənin elə bir prinsipial əhəmiyyəti yoxdur).

Riyazi əməl və riyazi struktura haqqında danışanda «daxili» və «xarici» (zahiri) əməllər barəsində məlumata ehtiyac vardır.

Verilən çoxluqda təyin edilən cəbri əməldən danışanda bu cəhəti xüsusi vurğuladıq ki, əməldə iştirak edən elementlərin özləri də və bu əməlin nəticəsində alınan element də hökmən verilən çoxluğa daxil olmalıdır ($a, b \in M$ isə $a \otimes b = c \in M$). Bunu çoxluqda təyin edilən daxili əməl və ya «kompozisiyanın daxili qanunu» adlandırırlar. Amma xarici əməl və ya kompozisiyanın xarici qanunu da var. İş burasındadır ki, burada M çoxluğundan əlavə yardımçı bir Q çoxluğu da iştirak edir ki, bunun elementlərini adətən «operatorlar» adlandırırlar. Burada α operatoru ($\alpha \in Q$)

ilə M çoxluğunun a elementindən ($a \in M$) düzələn (α, a) kompozisiya cütlüyündən və hər bir (α, a) cütünə M çoxluğunun yeganə bir b elementini qarşıqoyulma qaydasından söhbət gedir. Başqa sözlə, M və Q çoxluqları üçün kompozisiyanın xarici qanunu $\varphi: Q \times M \to M$ inikası kimi səciyyələndirə bilərik.

Əksər hallarda kompozisiyanın xarici qanunu kimi M çoxluğunun elementlərinin Q çoxluğundakı operatorlara vurulması düşünülür və bu əməli $\alpha \cdot a$ və ya $a\alpha$ kimi işarə edirlər (bunu a elementinin α operatoru ilə hasili adlandırırlar). Məsələn, vektorlar çoxluğunun həqiqi ədədə vurulması xarici əmələ (və ya kompozisiyanın xarici qanununa) ən yaxşı misal ola bilər (burada verilən M çoxluğu vektorlar çoxluğu, Q yardımçı çoxluğu isə həqiqi ədədlər çoxluğu olur).

Mühüm məsələlərdən biri cəbri strukturalar arasında «morfizm» münasibətidir.

Ümumi halda iki cəbri struktura arasında «morfizm» dedikdə bunlarda təyin edilən cəbri əməllərin saxlanması şərtilə birinin digərinə inikası düşünülür. İnikasın və cəbri strukturanın, burada təyin edilən kompozisiyaların növlərindən asılı olaraq «morfizm» homomorfizm, izomorfizm, epimorfizm, monomorfizm, avtomorfizm, endomorfizm kimi növləri vardır.

$<M, \otimes>$ və $<M', \otimes'>$ cəbri strukturalar arasında $\varphi: M \to M'$ inikası varsa və bu inikas $M \ni a \xrightarrow{\varphi} a' \in M'$, $M \ni b \to b' \in M'$ üçün $\varphi(a \otimes b) = \varphi(a) \otimes' \varphi(b)$ olarsa, onda deyirlər ki, M cəbri strukturası ilə M' cəbri strukturaları arasında $\otimes$ və $\otimes'$ əməllərinə nəzərən homomorf uyğunluq var (yaxud deyirlər ki, M strukturu M' - ə homomorf inikas olur). M ilə M' arasında homomorfizm münasibəti adlanan bu inikas inyektiv olduqda bu münasibət monomorfizm, bu inikas süryektiv olarsa epimorfizm, bu inikas biyektiv olarsa, ona izomorfizm deyirlər. Deməli, xüsusi halda $<M, \otimes>$ və $<M', \otimes>$ cəbri strukturalarında M və M' çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq varsa (biyektiv inikas) və burada $M \ni a \longleftrightarrow a' \in M'$, $M \ni b \longleftrightarrow b' \in M'$ üçün $a \otimes b \longleftrightarrow a' \otimes b'$ olursa, M ilə M' cəbri strukturaları $\otimes$ əməlinə və ya kompozisiyasına nəzərən izomorf adlanır və $M \cong M'$ kimi yazılır.

Əgər verilən M cəbri strukturasında bir deyil, çox kompozisiya varsa (məsələn, $\otimes_1, \otimes_2, \ldots, \otimes_k$) onda M - in M' - ə inikasında proobrazlar üzərində kompozisiyalar M' - dəki obrazlar üçün də saxlanırsa, deyirlər ki, M ilə M' $\otimes_1, \otimes_2, \ldots, \otimes_k$ əməllərinə nəzərən homomorf uyğunluqdadır, xüsusi halda bu inikas biyektivdirsə M ilə M' bu əməllərə nəzərən izomorfdurlar ($M \cong M'$).

İzomorf uyğunluqda olan iki cəbri struktura o qədər ümumi xasələrə malik olur ki, hətta cəbrdə bunlar fərqləndirilmir, eyni nöqteyi-nəzərdən öyrənilir.

Bir çoxluğun digərinə inikasından danışanda bəzi riyazi ədəbiyyatda inyektiv və süryektiv inikas əvəzinə «daxilinə» və «üzərinə» inikas anlayışlarından da istifadə edirlər. Bu halda M strukturasının özü özünə izomorf inikasında avtomorfizm, öz daxilinə homomorf inikasına endomorfizm deyirlər.

Təyin edildiyi cəbri əməlin xarakteri, bunların sayı, bu əməllərin daxili və xarici olması baxımından cəbri strukturaların müxtəlif növləri vardır. Kitabın sonrakı bölmələrində cəbri strukturaların bir neçə klassik və müasir növləri ilə tanış olacaqsınız.

§ 5.2. Qruppoid, yarımqrup, monoid

Yalnız bir binar cəbri əməlin təyin edildiyi cəbri strukturaya qruppoid deyilir; deməli, qruppoid üçün $\otimes$ əməlinə nəzərən aşağıdakı şərt ödənməlidir:

$$\forall(a,b \in M) \quad \exists!(c \in M) \quad (a \otimes b = c).$$

Qruppoiddə bu şərtdən əlavə assosiativlik xassəsinə aid

$$\forall(a,b,c \in M) \quad [a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c]$$

aksiomu da ödənərsə, buna yarımqrup deyilir. Deməli, yarımqrup elə cəbri strukturadır ki, orada iki şərt ödənir: 1) $\otimes$ əməlinin təyin edilməsi; 2) bu əməlin assosiativlik xassəsinə malik olması.

Cəbrə aid ədəbiyyatda bəzən yarımqrup əmələ gətirən M çoxluğunu məhz assosiativ qruppoid adlandırırlar.

Xüsusi şərtləşmə olmadıqda qruppoiddə təyin edilən $\otimes$ kompozisiyası adətən vurma əməli kimi qəbul edilir və bu $< \Gamma, \cdot >$ kimi işarə edilir.

Lakin bəzən təyin edilən $\otimes$ cəbri əməli toplama kimi də qəbul edilir. Vurma əməlinə nəzərən qruppoidə multiplikativ, toplama əməlinə nəzərən qruppoidə isə additiv qruppoid deyirlər.

Sonrakı mühakimələrimizi adətən multiplikativ qruppoid, yarumqruplar üzərində aparmağı şərtləşək.

Əgər qruppoiddə və yarımqrupda əlavə bir aksiom – vurmada kommutativlik xassəsi ($ab = ba$) ödənərsə, onda uyğun olaraq bunları kommutativ qruppoid və kommutativ yarımqrup adlandırırlar.

Təriflərdən aydın olur ki, istər qruppoiddə, istərsə də yarımqrupda neytral elementin olması vacib sayılmır.

Yarımqrupda neytral element olarsa, buna monoid deyirlər.[1] Deməli, monoid elə cəbri strukturadır ki, orada aşağıdakı şərtlər ödənir:

1) $\forall(a,b \in M) \quad \exists!(c \in M) \quad (a \otimes b = c)$,
2) $\forall(a,b,c \in M) \quad [a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c]$,
3) $\exists(e \in M) \quad \forall(a \in M) \quad e \otimes a = a \otimes e = a$.

$\otimes$ əməlinin vurma və toplama olmasına uyğun olaraq monoidi uyğun olaraq multiplikativ və additiv adlandırmaq olar. M çoxluğunun vurma və toplama cəbri əməllərinə nəzərən əmələ gətirdiyi multiplikativ və additiv monoidləri uyğun olaraq $< M, \cdot, e >$, $< M, +, \theta >$ kimi işarə edə bilərik. Təyin edildiyi əməl kommutativlik xassəsinə malikdirsə, belə monoidə kommutativ monoid deyirlər.

Həqiqi ədədlər çoxluğu R - i yada salaq. R həqiqi ədədlər çoxluğu ayrılıqda həm toplama, həm də vurma əməllərinə görə kommutativ qruppoiddir. Çünki, bu çoxluqda $\forall(a,b \in R)$ üçün $a + b = R$ və $a \cdot b = R$, yəni R - də toplama və vurma əməlləri təyin edilib, həm də $a + b = b + a$, $ab = ba$. Bu çoxluqda təyin edilən əməllər assosiativlik xassəsinə malik olduğu üçün ayrılıqda hər iki əmələ nəzərən yarımqrupdur. Burada neytral (vahid) element olduğu üçün bu həm də monoiddir, özü də kommutativdir.

Digər bir misala baxaq, n natural ədədinə bölünən tam ədədlər çoxluğunu götürək: $nZ = \{nm \mid m \in \dot{Z}\}$. Bu çoxluq toplamaya nəzərən kommutativ monoid əmələ gətirir, vurmaya nəzərən isə vahidi olmayan yarımqrupdur (burada $n > 1$).

---

[1] Bəzi müəlliflər (məsələn, N.Burbaki və R.For, A.Kofman, M.Deni-Papen) «yarımqrup» və «monoid» terminlərini sinonim kimi işlədirlər.

Qruppoiddə onun ixtiyari a elementi üçün $a \cdot a = a$ şərti ödənərsə, buna idempotent qruppoid deyilir.

Əgər qruppoiddə vahid element varsa, o, yeganədir.

Qruppoid, yarımqrup, monoid kimi cəbri strukturalar bir çox ümumi və spesifik xassələrə malikdirlər. Bunların öyrənilməsi bir çox cəhətdən qrup anlayışının öyrənilməsini xatırladır, burada geniş analogiya vardır.

§ 5.3. Qrup və altqrup anlayışı

Qrup anlayışı və bu əsasla yaranan qrup nəzəriyyəsi müasir riyaziyyatın çox vacib bir sahəsidir.

Qrup nəzəriyyəsinə biz yenidən qayıdacağıq. Hələlik ilkin tanışlıqla kifayətlənək.

Qrupa həm başqa cəbri strukturaların köməyi ilə, həm də müstəqil surətdə tərif vermək olar. Məsələn, deyə bilərik ki, elementlərinin hamısının tərsi olan monoidə qrup deyilir. Yaxud: neytral və simmetrik elementlərə malik olan yarımqrupa qrup deyilir.

Lakin yaxşı olar ki, qrupun müstəqil tərifi ilə də tanış olaq.

Boş olmayan G çoxluğunda aşağıdakı şərtlər ödənərsə, ona vurma əməlinə nəzərən qrup deyilir:

1) G çoxluğunda vurma əməli təyin edilir, yəni:

$$\forall(a,b\in G) \text{ üçün } a\cdot b=c,\ c\in G$$

(başqa sözlə, G çoxluğu vurma əməlinə nəzərən cəbri qapalıdır);

2) Vurmada assosiativlik qanunu doğrudur, yəni:

$$(ab)c=a(bc);$$

3) G çoxluğunda vahid element vardır, yəni:

$$\forall(a\in G) \text{ üçün } \exists(e\in G),\ ae=ea=a;$$

4) G-nin hər bir elementinin tərsi var, belə ki:

$$\forall(a\in G) \text{ üçün } \exists!(a^{-1}\in G),\ aa^{-1}=a^{-1}a=e.$$

2), 3), 4) şərtləri qrupun aksiomları adlanır.

Bunlardan əlavə $ab=ba$ (yəni vurmada kommutativlik qanunu) doğru olarsa, buna kommutativ qrup, yaxud Abel qrupu deyirlər.

Analoji olaraq toplama əməlinə nəzərən qrupa tərif verilir, yəni G çoxluğunda

1) $a,b\in G$ üçün $a+b\in G$ (toplama əməlinin təyini);

2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (toplamada assosiativlik qanunu);

3) $a+\theta=\theta+a=a$ (sıfır elementinin varlığı);

4) $a+a'=a'+a=\theta$, $a'=-a$ (əks elementin varlığı)

şərti və aksiomları ödənərsə, G-yə toplama əməlinə nəzərən qrup deyilir. Burada da yenə $a+b=b+a$ aksiomu ödənərsə, buna kommutativ və ya Abel qrupu deyirlər.

Əks elementin yeganəliyi asanlıqla isbat edilir.

Qruppoid, yarımqrup və monoiddə olduğu kimi, burada da vurmaya nəzərən qrupu multiplikativ, toplamaya nəzərən qrupu isə additiv qrup adlandıraraq birincini $<G,\cdot,e>$, ikincini isə $<G,+,\theta>$ kimi və ya daha qısa $<G,\cdot>$ və $<G,+>$ kimi işarə edirlər. Bunlarda neytral elementi isə uyğun olaraq «tərs» və «əks» element adlandırırlar.

Bir cəhəti də qeyd edək: xüsusi şərtləşmə olmadıqda əksər riyazi ədəbiyyatda qrup dedikdə, adətən ilk növbədə vurmaya nəzərən qrup nəzərdə tutulur və çox zaman da toplamaya nəzərən qrupdan danışanda ilk növbədə onu Abel (kommutativ) qrupu kimi qəbul edirlər.

Qrupun elementləri sayı sonlu və sonsuz olarsa, buna uyğun olaraq onu sonlu və sonsuz qrup adlandırırlar.

Qrupa aid bir neçə misala baxaq:

Additiv qrupa ən sadə misal tam ədədlər çoxluğu olar. Belə ki, $<Z,+,0>$ strukturası toplama əməlinə nəzərən qrupun tərifindəki tələblərin hamısını ödəyir, yəni:

1) Tam ədədlərin cəmi yenə tam ədəddir, yəni burada toplama əməli təyin edilib ($a,b\in Z$ üçün $a+b\in Z$);

2) Toplamada assosiativlik qanunu doğrudur, yəni $a,b,c\in Z$ üçün $(a+b)+c=a+(b+c)$;

3) Bu çoxluqda sıfır elementi var, yəni $a+0=0+a=a$;

4) Çoxluğun hər bir a elementinin $a'=-a$ əksi var, yəni, $a+a'=a'+a=0$, $a'=-a$.

Bunlardan əlavə $a+b=b+a$ şərti də ödənildiyi üçün bu qrup kommutativdir.

Multiplikativ qrupa isə ən sadə misal sıfrı kənar etməklə (sıfırın tərsi yoxdur) rasional ədədlərin $Q^*=Q\setminus\{0\}$ çoxluğu olur.

Burada da yenə:

1) İki rasional ədədin hasili yenə rasionaldır (vurma əməli təyin edilir: $a,b\in Q$ üçün $a\cdot b\in Q$);

2) Vurmada assosiativlik xassəsi doğrudur, yəni $a,b,c\in Q$ üçün $(ab)c=a(bc)$;

3) $\forall a\in Q$ üçün $a\cdot 1=1\cdot a=a$ (vahid element var);

4) Hər bir $a\neq 0$ elementi üçün $a\cdot a'=a'\cdot a=1$ (yəni tərs element var).

$ab=ba$ olduğundan bu qrup da kommutativdir.

n-tərtibli matrislər çoxluğu, n-ölçülü vektorlar çoxluqları da additiv qrup əmələ gətirirlər.

n-tərtibli qeyri-məxsusi matrislər çoxluğu, habelə, n-tərtibli əvəzləmələr çoxluğu multiplikativ qrupa misal ola bilər.

Qrupun elementləri sayını (başqa sözlə «gücünü») işarə etmək üçün $Card\,G$, $|G|$, $(G:e)$ kimi simvolların birindən istifadə edilir.

Qruplar nəzəriyyəsinin mühüm bir qolunu məhz sonlu qruplar nəzəriyyəsi təşkil edir.

Sonlu qrupun elementləri sayına onun tərtibi deyilir.

Qruplar nəzəriyyəsinin çox vacib anlayışlarından biri altqrup anlayışıdır.

TƏRİF. *G qrupunun G' altçoxluğu ($G'\subset G$) öz növbəsində G-də təyin edilən cəbri əmələ (vurmaya) nəzərən qrup əmələ gətirirsə (başqa sözlə, vurmada «qapalılıq» şərtini ödəyirsə), onda G'-ə G-nin altqrupu deyilir.*

Bu tərifdən nəticə kimi alınan və G'-in G üçün altqrup olmasını təsdiq edən aşağıdakı əlaməti bilmək faydalıdır.

TEOREM. *$<G,\cdot>$ qrupunun G' altçoxluğunun altqrup olması üçün:*

1) *$a,b\in G'$ üçün $ab\in G'$ (qapalılıq şərti);*

2) *$a\in G'$ üçün $a^{-1}\in G'$*

şərtlərinin ödənməsi həm zəruri, həm də kafidir.

Qeyd. Bu teoremi $<G,+>$ qrupu üçün söyləsək, onda göstərilən şərtlər:

1) $a,b\in G'$ üçün $a+b\in G'$;

2) $a\in G'$ üçün $-a\in G'$

şəklində olar.

Teoremi $<G,\cdot>$ qrupu üçün isbat edək.

Şərtin zəruriliyi. Tutaq ki, G' altçoxluğu $<G,\cdot>$ qrupunun altqrupudur. Onda altqrupun yuxarıdakı tərifinə görə G' çoxluğu qrupun tərifindəki bütün şərtləri, o cümlədən də, $a,b\in G'$ üçün $ab\in G'$ və $a\in G'$ üçün $aa^{-1}=a^{-1}a=e$ şərtini ödəyən a^{-1} tərs elementinin varlığı ($a^{-1}\in G'$) şərtini də ödəməlidir.

Şərtin kafiliyi. $a,b\in G'$ üçün $ab\in G'$ şərtinin ödənməsi G' altçoxluğunda vurma əməlinin təyin olduğundan xəbər verir. Onda G'-in istənilən üç elementi üçün assosiativlik aksiomunun ödənəcəyi aydındır; çünki bu elementlər eyni zamanda verilən G qrupunun elementləridir; G'-in istənilən elementinin tərsinin varlığı da bu səbəbdən aşkardır. Nəhayət, G'-də vurma əməlinin təyin edilməsindən və ixtiyari a elementi üçün a^{-1}-in varlığından $aa^{-1}=e\in G'$ olması, yəni vahid elementin mövcudluğu aksiomu da ödənir. Beləliklə, G' çoxluğunda G-də təyin edilən əmələ nəzərən qrupun bütün aksiOmları ödənir. Ona görə də G' altçoxluğu G-nin altqrupu olur.

Teorem isbat olundu.

Altqrupun tərifindəki G-nin G' altçoxluğunun məhz G qrupunda təyin edilən cəbri əmələ nəzərən qrup təşkil etməsi şərti mühümdür. Məsələn, bilirik ki, müsbət ədədlər çoxluğu həqiqi ədədlərin altçoxluğudur, lakin buna baxmayaraq müsbət ədədlərin multiplikativ qrupu heç də bütün həqiqi ədədlərin əmələ gətirdiyi additiv qrupun altqrupu deyildir.

G'-in G üçün altqrup olmasını riyazi ədəbiyyatda çox zaman $G'\leq G$ kimi işarə edirlər, $G\neq G'$ halında G' məxsusi altqrup adlandırılır və $G'<G$ kimi işarə edilir.

Altqrupların aşağıdakı xassəsinin doğruluğunu göstərək.

TEOREM. *G qrupunun G_1 və G_2 altqruplarının $G_1\cap G_2$ kəsişməsi G-nin altqrupudur.*

İSBATI. Doğrudan da $G_1\cap G_2$ kəsişməsinin hər hansı x,y elementi ($x,y\in G_1\cap G_2$) həm G_1-ə, həm də G_2-yə daxildirlər ($x,y\in G_1$, $x,y\in G_2$) və G_1 ilə G_2 altqrup olduqları (($G_1\subset G$, $G_2\subset G$) $xy\in G_1$, $xy\in G_2$) üçün habelə $x^{-1}\in G_1$, $x^{-1}\in G_2$.

Zəruri və kafi şərtə görə $G_1\cap G_2$ kəsişməsi altqrup olur.

Teorem isbat olundu.

İndi isə altqrupa aid bir neçə misala baxaq:

1. Hər bir G multiplikativ qrupun özü və onun vahid elementindən ibarət $\{e\}$ çoxluğu («vahid qrup») verilən qrupun altqruplarıdır.

G özü və $\{e\}$ vahid qrupu G-nin qeyri-məxsusi altqrupları, G-dən $\{e\}$-dən fərqli altqrupları isə məxsusi altqrup adlanırlar.

2. Rasional ədədlərin Q çoxluğu additiv qrup əmələ gətirən R həqiqi ədədlər çoxluğunun elə altçoxluğudur ki, Q-nün özü də additiv qrup əmələ gətirir. Odur ki, $<Q,+>$ qrupu $<R,+>$ qrupunun altqrupudur.

3. Müsbət ədədlər çoxluğunun multiplikativ qrupu sıfırdan fərqli kompleks ədədlər çoxluğunun altqrupudur.

4. Tam ədədlərin additiv qrupu bütün kompleks ədədlərin additiv qrupunun altqrupudur.

§ 5.4. Halqa, halqanın idealı

Biz yuxarıda yalnız bir binar cəbri əməlin təyin olunduğu cəbri strukturaların bir neçə növu ilə tanış olduq (qruppoid, yarımqrup, monoid, qrup). Lakin iki binar cəbri əmələ malik olan strukturalar da vardır. İndi tanış olacağımız halqa anlayışı məhz iki binar cəbri əməlin təyin olunduğu cəbri strukturadır.

K çoxluğu ($K \neq \varnothing$) burada təyin edilən toplama və vurma cəbri əməlinə və bu əməllərlə əlaqədar olan müəyyən şərtləri ödəyəndə onu halqa adlandırırlar. Daha doğrusu, halqaya belə tərif verilir:

Boş olmayan K çoxluğunda:

1. Toplama və vurma əməlləri təyin edilmişsə: $a,b \in K$ üçün $a+b \in K$, $a \cdot b \in K$;

2. $\forall (a,b) \in K$ üçün $a+b=b+a$ (toplamada kommutativlik);

3. $\forall (a,b,c) \in K$ üçün $(a+b)+c=a+(b+c)$ (toplamada assosiativlik);

4. $\forall a \in K$ üçün $\exists \theta \in K$ $a+\theta=a$ (sıfır elementin varlığı);

5. $\forall a \in K$ üçün $\exists a'$, $a+a'=a'+a=\theta$, $a'=-a$ (əks elementin varlığı);

6. $\forall (a,b,c) \in K$ üçün $(ab)c=a(bc)$ (vurmada assosiativlik);

7. $\forall (a,b,c) \in K$ üçün $a(b+c)=ab+ac$, $(b+c)a=ba+ca$ (distributivlik) şərtləri (aksiomları) ödənirsə, onda K çoxluğuna halqa deyirlər.

Bunlardan əlavə əgər $ab=ba$ (vurmada kommutativlik xassəsi) ödənərsə, buna kommutativ halqa deyilir (aydındır ki, kommutativ halqalarda 7-ci aksiomda (distributivlik xassəsində) iki bərabərlik yazmağa ehtiyac olmur).

Tərifdən görünür ki, halqada sıfır və əks elementlərin olması məcburi şərt olduğu halda, vahid elementin olması xüsusi qeyd edilmir, yəni halqada vahid element ola da bilər, olmaya da bilər; əgər burada vahid element varsa, yəni $\forall a \in K$, $\exists e \in K$ üçün $ae=ea=a$ şərtini ödəyən e vahid elementi olarsa, onda buna vahidi olan halqa deyirlər.

Asanlıqla göstərmək olar ki, halqanın sıfır elementi və hər bir elementin əksi yeganədir.

Bunun kimi də əgər halqada vahid element varsa, o da yeganədir.

Toplama və vurma əməllərinə nəzərən halqa əmələ gətirən cəbri strukturanı $<K,+,\cdot>$ kimi işarə edirlər.

$<K,+,\cdot>$ halqasının tərifindəki aksiomatikaya diqqət yetirib onu artıq tanış olduğumuz cəbri strukturaların tərifləri ilə müqayisə etsək bunlarda ortaq aksiomların varlığını görərik. Bu da halqaya daha bir tərif verməyə imkan yaradır. Belə ki, halqa iki binar cəbri əməlin (toplama və vurmanın) təyin edildiyi elə K çoxluğuna deyilir ki:

1) onun elementləri toplamaya nəzərən Abel qrupu (bununla $\forall (a,b) \in K$ üçün $a+b \in K$ şərti, 2-ci, 3-cü, 4-cü, 5-ci aksiomların ödəndiyi qeyd edilmiş olur);

2) vurmaya nəzərən yarımqrup (burada isə $\forall (a,b) \in K$ üçün $ab \in K$ şərti və 6-cı aksiomun ödənmәsi qeyd edilmiş olur);

3) toplama və vurma əməlləri distributivlik qanunu ilə əlaqəlidir: $a(b+c)=ab+ac$ və $(b+c)a=ba+ca$ (bu isə 7-ci aksiomdur).

$<K,+,\cdot>$ halqası üçün $<K,+>$ bu halqanın additiv qrupu, $<K,\cdot>$ isə halqanın multiplikativ yarımqrupu adlanır.

Halqada istənilən a elementi üçün $a^2=\theta$ bərabərliyi və ixtiyari a,b,c elementləri üçün Yakobi eyniliyi adlanan

$$a(bc)+b(ca)+c(ab)=\theta$$

ödənirsə, belə halqaya Li halqası deyirlər.

Halqaya aid bir neçə misal göstərək.

1. n-tərtibli matrislər çoxluğu burada təyin edilən toplama və vurma əməllərinə nəzərən halqa əmələ gətirir. Bu halqa vahidi olan (burada vahid element vahid matrisdir) assosiativ halqadır. Burada halqanın bütün şərtləri ödənir. Xüsusi halda bu halqanın sıfır elementi sıfır matris, hər bir A matrisinin əksi isə $-A$ matrisidir; lakin bu kommutativ halqa deyil, çünki matrislərin vurulmAsında kommutativlik qanunu doğru deyil ($AB\neq BA$).

2. $[a,b]$ parçasında həqiqi dəyişənli kəsilməz funksiyaların F çoxluğu da burada təyin olunan toplama və vurma əməllərinə nəzərən halqa təşkil edir. Belə ki, bu funksiyaların cəmi də, hasili də təyin olunduqları (a,b)-də yenə də həqiqi dəyişənli kəsilməz funksiyalardır. Bu çoxluq halqaya aid olan bütün aksiomları ödəyir, hələ üstəlik də vurmada kommutativlik qanunu da doğrudur, bu kommutativ halqadır.

3. Cüt ədədlər çoxluğu da toplama və vurmaya nəzərən halqa təşkil edir. Bu assosiativ, kommutativ halqadır. Bu halqanın vahid elementi yoxdur.

Dedik ki, halqanın mühüm bir şərti onun elementlərinin toplamaya nəzərən Abel qrupu əmələ gətirməsidir. Halqanın toplama əməlinə nəzərən kommutativ qrup əmələ gətirən elementlər çoxluğunu halqanın additiv (Abel) qrupu adlandırırlar. Bu qrupun sıfır elementi də məhz halqanın sıfır elementi olur. Halqanın ixtiyari a elementinin sıfır elementlə hasili də sıfır olur ($a\cdot\theta=\theta$). Lakin halqada sıfırdan fərqli elə a,b elementləri də ola bilər ki, bunlar üçün $ab=\theta$ olsun.

Halqada $a\neq\theta$, $b\neq\theta$ üçün $ab=\theta$ olarsa, onda a və b elementlərinə sıfrın uyğun olaraq sağ və sol bölənləri deyirlər. Aşkardır ki, kommutativ halqalarda sol və sağ bölən üst-üstə düşür.

Sıfrın bölənləri olmayan kommutativ halqaya tamlıq oblastı deyilir. Məsələn, adi toplama və vurma əməlinə nəzərən halqa əmələ gətirən ədədlər çoxluqları tamlıq oblastıdır.

Tamlıq oblastı olmayan halqalara aid misal iki tərtibli kvadrat matrislər halqası olar. Belə ki, məsələn, burada

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\theta,\ B=\begin{pmatrix}0&0\\1&3\end{pmatrix}\neq\theta \text{ olduğu halda } AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\theta$$

olur (yəni bu halqada sıfrın bölənləri var).

Halqada vahid element kimi tərs elementin də varlığı vacib şərt deyil, onlar ola da bilər, olmaya da bilər. Vahidi olan halqanın hər bir elementinin tərsi də varsa, onda bu halqanın hasilləri e-yə bərabər olan elementlərini vahidin bölənləri adlandırırlar. Məsələn, n-tərtibli qeyri-məxsusi matrislər çoxluğunun əmələ gətirdiyi halqa buna misal olar, çünki qeyri-məxsusi (determinantı sıfırdan fərqli olan) matrislərin tərsi vardır. Burada e vahid elementi

$$E=\begin{bmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{bmatrix}$$

vahid matris $\det A\neq 0$ olan hər bir A matrisi üçün elə A^{-1} var ki: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ olar.

K halqasının boş olmayan altçoxluğu K' ($K'\subset K$) öz növbəsində K-da təyin edilən toplama və vurmaya nəzərən halqa əmələ gətirirsə, onda K'-ə K-nın althalqası deyilir. Məsələn, cüt ədədlər halqası tam ədədlər halqasının althalqasıdır. $x=a+\sqrt{2}$ şəklində olan ədədlər çoxluğunun əmələ gətirdiyi halqa həqiqi ədədlər halqasının althalqasıdır və s.

Hər bir halqanın özü və onun sıfır elementi özünün althalqasıdır (bunları trivial althalqalar adlandırırlar).

Bəzi hallarda althalqanın şərhində halqanın additiv altqrupu anlayışından istifadə edirlər. Başqa sözlə K halqasının A additiv altqrupunda bunun a_1, a_2 ixtiyari elementlərinin cəmi ilə hasili də bu qrupun elementi olursa ($a_1+a_2\in A$ və $a_1a_2\in A$), onda bu altqrup K-nın althalqası olur. Althalqanı təyin etmək işində mühüm əhəmiyyət kəsb edən aşağıdakı teorem vardır (bunun isbatı çətin deyil):

K - böş olmayan K' altqrupunun althalqa olması üçün

$$((a,b)\in K')\Rightarrow(a-b\in K',\ ab\in K')$$

şərti həm zəruri, həm də kafidir.

Halqanın ümumi nəzəriyyəsində onun idealı anlayışının xüsusi yeri vardır.

K - nın K' althalqası özünün hər bir a $(a \in K')$ elementi ilə K halqasının x elementinin $(x \in K)$ ax hasilini (uyğun olaraq xa hasilini) özünə daxil edərsə $(ax \in K')$, onda K' - ə halqanın sol (sağ) idealı deyilir.

K - nın eyni zamanda həm sol, həm də sağ idealı olan K' altçoxluğuna ikitərəfli ideal və ya eləcə də ideal deyirlər.

Althalqanın verilən halqanın öz additiv qrupu ilə əlaqədar olan tərifini yada salsaq ideala belə tərif vermək olar: K halqasının boş olmayan K' altçoxluğu K - nın additiv qrupunun altqrupudursa və istənilən a, x $(a \in K'$ və $x \in K')$ elementləri üçün $xa \in K'$ $(ax \in K')$ olduqda, onda K' - ə sol (sağ) ideal deyilir.

Aşkardır ki, kommutativ halqalarda hər bir sol ideal eyni zamanda sağ ideal olur.

Tərifdən bilavasitə aydın olur ki, verilən K halqasının hər bir sağ, sol idealı və deməli, iki tərəfli idealı eyni zamanda K halqasının althalqalarıdır.

Buradan isə belə mühüm nəticə hasil olur ki, K - nın K' althalqasının sağ (sol) ideal olması üçün aşağıdakı iki şərtin ödənməsi həm zəruri, həm də kafidir.

1) $a, b \in K'$ üçün $a \pm b \in K'$;

2) $x \in K$ və $a \in K'$ üçün $ax \in K'$ $(xa \in K')$.

Deməli, aydın olur ki, K - nın K' sol idealının $a, b, c, \ldots$ elementləri və K - nın hər hansı bir x elementindən düzəldilən $ax, bx, cx, \ldots$ elementləri hökmən K' - in elementləri olmalıdır.

Bir neçə misal göstərək.

1. Hər bir halqa özü-özünün ikitərəfli idealı olur (buna vahid ideal deyilir). Bunun kimi də sıfır $\{\theta\}$ althalqa ikitərəfli idealdır (bunu da sıfır ideal adlandırırlar).

2. Tam ədədlər halqasında qeyd olunmuş bir n ədədinin misilləri çoxluğu tam ədədlər halqası üçün ikitərəfli idealdır.

3. n - tərtibli kvadrat matrislər halqasında sonuncu sütunu sıfırlardan ibarət olan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

matrislər çoxluğu halqanın sol idealı, sonuncu sətri sıfırlar olan, yəni

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

şəklində olan matrislər çoxluğu sağ ideal olur.

Vahid və sıfır ideallardan başqa digər idealı olmayan halqalara sadə halqalar deyilir. Məsələn, n - tərtibli kvadrat matrislər çoxluğu sadə halqadır.

Halqada vacib anlayışlardan biri də baş idealdır.

Hər hansı K halqasının a ixtiyari elementi $(a \in K)$ və hər hansı n natural ədədinin köməyi ilə düzəldilən və $xa + na$ kimi təyin edilən elementlər çoxluğuna baxaq. Aydındır ki, burada sadə mühakimə aparmaqla əmin ola bilərik ki, $\{xa + na\}$ çoxluğu verilmiş K halqasının idealıdır.

K halqası, onun a elementi və n natural ədədindən düzəldilən $xa + na = (x+n)a$ elementlər çoxluğunun əmələ gətirdiyi $\{(x+n)a\}$ çoxluğunun əmələ gətirdiyi ideala a elementinin doğurduğu ideal deyirlər və bunu adətən (a) kimi işarə edirlər. Yalnız bir elementin doğurduğu idealı baş ideal adlandırırlar. Başqa sözlə: K halqasının K' idealı hər hansı bir a elementinin $(a \in K)$ bütün misillərindən ibarət olarsa, ona baş ideal deyirlər və a burada doğuran adlanır.

Doğuranı birdən çox sayda olan ideallar da vardır. Məsələn, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementlərinin doğurduğu ideal elementləri $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} n_i a_i$ kimi təyin edilən $\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{r} n_i a_i\right\}$ çoxluğunun əmələ gətirdiyi idealdır. Belə idealı adətən $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ kimi işarə edirlər, buradakı $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ doğuranlarını bəzən bu idealın bazisi də adlandırırlar.

a elementini özünə daxil edən ideallar içərisində (a) baş idealı ən kiçik ideal adlanır.

Deyilənlərdən aşkar olur ki, xüsusi halda, hər hansı halqanın sıfır idealı (θ) baş ideal, əgər halqada e vahid elementi varsa, onda (e) baş ideal olur.

Vahid elementi olan tamlıq oblastının hər bir idealı baş ideal olarsa, buna baş ideallarm halqası deyirlər. Məsələn, tam ədədlər halqası ixtiyari meydanda verilən birdəyişənli çoxhədlilər halqası baş ideallar halqasına misal olar.

§ 5.5. Halqalarda morfizm, onların bəzi xassələri

K və K' halqaları arasında qarşılıqlı birqiymətli (biyektiv) inikas varsa və bu inikas bu halqalarda təyin edilən toplama və vurma əməllərini saxlayırsa, bu K və K' halqalarının izomorfizmi adlanır. Yəni, $\varphi: K \to K'$ biyektiv inikasında K-nın ixtiyari x və y elementləri üçün $x+y$ cəmi və xy hasilinə K'-dən x və y-in uyğun x' və y' obrazlarının $x'+y'$ cəmi və $x'y'$ hasili qarşı qoyula bilirsə,

$$K \ni x+y \longleftrightarrow x'+y' \in K' \text{ (yaxud } (x+y)' = x'+y' \text{)}$$

$$K \ni xy \longleftrightarrow x'y' \in K' \text{ (yaxud } (xy)' = x'y' \text{)}$$

onda deyilir ki, K ilə K' izomorf halqalardır, yaxud K ilə K' halqaları izomorf uyğunluqdadır.

K və K' halqalarının izomorfluğunu $K \cong K'$ kimi işarə edirlər.

Halqaların izomorfizmində bəzi sadə xassələri qeyd edək.

1. $K \cong K'$ üçün K-nın θ sıfır elementinə K'-in θ' elementi, K-nın $(-x)$ elementinə K'-in $(-x')$ elementi uyğundur.

Doğrudan da tutaq ki, K-nın θ sıfır elementinə K'-dən c' elementi qarşı durur. K-dan ixtiyari bir x elementi və bunun K'-dəki x' obrazına diqqət edək. Aydındır ki, K-da $a+\theta$ cəminə K'-dən $x'+c'$ cəmi uyğun olmalıdır. Lakin K-da $x+\theta=x$ olduğundan K'-dən bu cəmə $x'+c'$ cəmi uyğun olmalıdır və buna görə də $x'+c'=x'$ olmalıdır; buradan isə $c'=\theta'$ olması aydındır.

Bunun kimi də K-dan $(-x)$-ə K'-dən $(-x')$ uyğun gəldiyini göstərmək olar (burada $(-x')$ elementi $(-x)$-in obrazıdır). Tutaq ki, K-dan $(-x)$-ə K'-dən d' elementi qarşı qoyulub. Məlumdur

ki, izomorfizmin tərifinə görə K-dakı $x+(-x)=\theta$ cəminə K'-dən $x'+d'$ cəmi qarşı durur ki, buradan da $x'+d'=\theta$, deməli, $d'=-x'$ alınır.

Əgər K halqasında vahid element varsa, onda analoji mühakimə aparmaqla buna K'-dən vahid elementin uyğun gəldiyini göstərmək olar. Bu sözləri K-nın hər hansı x elementinin tərsi x^{-1} varsa, buna K'-dən $(x')^{-1}$ elementinin olacağını söyləmək olar.

Bütün cəbri strukturalarda olduğu kimi halqada da homomorfizm anlayışı xüsusi əhəmiyyət kəsb edir.

$<K,+,\cdot>$ və $<K',+,\cdot>$ halqaları arasında $f: K \to K'$ inikası mövcuddursa və burada təyin edilən əməllər saxlanılırsa, yəni $a,b \in K$ və $a(a), f(b) \in K'$ üçün $f(a+b)=f(a)+f(b)$, $f(ab)=f(a)f(b)$ olarsa, onda belə inikasa K və K' halqaları arasında homomorfizm deyirlər; əgər xüsusi halda f inikası biyektiv olarsa bu izomorfizm, inyektiv olarsa monomorfizm, süryektiv olarsa epimorfizm adlanır. Xarakterik hal budur ki, halqalar arasındakı homomorfizmin $Kerf=\{a \in K \mid f(a)=\theta\}$ nüvəsi həmişə idealdır.

Halqalarda homomorfizmə aid ən tutarlı misal xüsusi əhəmiyyətinə görə seçilən misal

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(R)$$

kimi ikitərtibli matrislər çoxluğunun əmələ gətirdiyi $M_2(R)$ halqa ilə $a+bi$ kompleks ədədlər çoxluğunun C halqası arasındakı münasibət olar.

Burada

$$\varphi:(a+bi) \to \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \varphi:(c+di) \to \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

kimi təyin edilən inikas homomorfizm şərtlərini ödəyir. Belə ki:

1. $\varphi[(a+bi)+(c+di)] = \varphi[(a+c)+(b+d)i] =$

$$= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \varphi(a+bi)+\varphi(c+di).$$

Yəni burada

$$\varphi[(a+bi)+(c+di)]=\varphi(a+bi)+\varphi(c+di).$$

2. $\varphi[(a+bi)\cdot(c+di)]=\varphi[(ac-bd)+(ad+bc)i]=$

$$=\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}=\varphi(a+bi)\varphi(c+di).$$

Yəni $\varphi[(a+bi)\cdot(c+di)]=\varphi(a+bi)\varphi(c+di)$.

Bunlar onu göstərir ki, $M_2(R)$ ilə C halqaları arasında homomorfizm var. Əgər yaxından diqqət yetirsək,

$$\varphi:(a+bi)\to\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

inikasının qarşılıqlı birqiymətli (biyektiv) olmasını görərik. Bunu nəzərə alsaq deyə bilərik ki, $M_2(R)$ ilə C halqaları izomorf halqalardır. Kompleks ədədlər sistemini quranda çox vaxt bu münasibətdən istifadə edirlər.

§ 5.6. Meydan və cisim. Meydanın xarakteristikası anlayışı

İstər meydan, istərsə də cisim cəbri strukturaların mühüm klassik növləri sayılır. Bunlara da başqa cəbri strukturaların köməyi ilə və yaxud da başqa cəbri strukturaları buraya qatmadan müstəqil olaraq tərif verirlər. Öncə bunların «müstəqil» tərifləri ilə tanış olaq.

TƏRİF. *Heç olmasa bir elementi sıfırdan fərqli olan $P=\{x,y,z,u,v,w,...\}$ çoxluğunda toplama və vurma əməlləri təyin edilmişsə (yəni $\forall(x,y)\in P$ üçün $x+y\in P$, $xy\in P$) və bu əməllər aşağıdakı şərtləri (aksiomları) ödəyirsə:*

1. Toplamada:

1) $x+y=y+x$ (kommutativlik),

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (assosiativlik),

3) $x+\theta=x$, $\theta\in P$ (sıfır elementin varlığı),

4) $a+a'=\theta$, $a'=-a\in P$ (əks elementin varlığı);

2. Vurmada:

5) $xy=yx$ (kommutativlik),

6) $(xy)z=x(yz)$ (assosiativlik),

7) $xe=x$, $e\in P$ (vahid elementin varlığı),

8) $aa''=e$, $a'',e\in P$ ($a''=a^{-1}$ tərs elementin varlığı);

3. Toplama və vurmada:

9) $x(y+z)=xy+xz$ (distributivlik);

onda P-yə meydan deyilir.

Cisim adlanan cəbri struktura meydandan yalnız onunla fərqlənir ki, onun tərifində yalnız 5-ci (vurmada kommutativlik: $xy=yx$) aksiomu yoxdur. Yəni deyə bilərik ki, cisim vurmada kommutativlik xassəsi olmayan meydandır, meydan isə vurmada kommutativlik xassəsinə malik olan cisimdir.

Əlbəttə, meydanın bu tərifini başqa cəbri strukturalar ilə tutuşdurub ona daha qısa təriflər verə bilərik.

Belə ki, P çoxluğu həm toplama, həm də vurma əməllərinə nəzərən Abel qrupu əmələ gətirirsə və bu əməllər distributivlik ($x(y+z)=xy+xz$) xassəsinə malikdirsə, onda P meydan adlanır. Əgər verilən çoxluq toplamaya nəzərən kommutativ (Abel), vurmaya nəzərən isə qeyri-kommutativ qrup əmələ gətirirsə və bu əməllərdə distributivlik şərti də ödənərsə, bu çoxluq cisim olar.

Meydanın çox geniş yayılmış tərifi ona halqa vasitəsilə verilən tərifidir:

Meydan vahidi olan elə kommutativ halqaya deyilir ki, onun heç olmasa sıfırdan fərqli bir elementi olsun və sıfırdan fərqi elementlərin hamısının tərsi olsun.

Yaxud: kommutativ halqada $a\neq\theta$ üçün $ax=b$ tənliyinin həmişə yeganə həlli varsa, belə halqaya meydan deyilir.

Bu tərifləri müvafiq şəkildə cismə də aid etmək olar (burada təkcə vurmada kommutativlik qanununun olmadığı nəzərə alınmalıdır). Məsələn deyə bilərik ki, əgər halqada sıfırdan fərqli heç olmasa bir element varsa və orada

$$ax=b \quad , \quad ay=b$$

tənliklərinin hər birinin həlli varsa, belə halqaya cisim deyilir.

Aşkardır ki, bu qısa təriflərdən meydanın (eləcə də cismin) bütün aksiomları alınır. Məsələn, meydanda vahid və tərs elementin varlığını onun halqa ilə əlaqədar tərifindən alaq.

Əgər burada $a\neq\theta$, $ax=b$ tənliyinin həmişə həlli varsa, deməli, $a=b$ halında da olmalıdır: $ax=a$; buradan da $x=e$ tənliyin həllinin olduğu görünür və bu da məhz vahid elementin varlığı deməkdir. Sonra $a\neq\theta$, $ax=b$ tənliyinin həlli $ax=e$ olanda da mümkün olduğundan, buradan da $x=a^{-1}$ (tərs elementin varlığı) alınır və s.

Vahid elementin yeganəliyi $ax=b$ tənliyinin ($a\neq\theta$) yeganə həllə malik olmasından irəli gəlir. Bunun kimi də a elementinin a^{-1} tərsinin yeganəliyi $ax=e$ tənliyinin həllinin yeganəliyindən aydındır (bu tənliklərin həllinin yeganəliyinin əksini fərzetmə yolu ilə isbat etməyi oxuculara həvalə edirik).

Deməli, meydanın tərifindən bilavasitə belə bir nəticə alınır:

1. Hər bir meydanda vahid element və hər bir a elementinin ($a\neq\theta$) tərsi var və bunlar yeganədir.

Bu xassədən isə aşağıdakılar alınır:

$(a^{-1})^{-1}=a$, $\frac{b}{a}=ba^{-1}$.

2. $\frac{b}{a}$ nisbətinin mənasından və $\frac{b}{a}=ba^{-1}$ yazılışından alınır ki, $\frac{b}{a}$ simvolu üzərində aparılan əməllər kəsrlər üzərində aparılan əməllər kimidir; belə ki, $a\neq 0$, $c\neq 0$ olduqda $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ bərabərliyi yalnız və yalnız $ad=bc$ olduqda ödənilir.

$$\frac{b}{a}\pm\frac{d}{c}=\frac{bc\pm ad}{ac},\quad \frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac},\quad \frac{b}{a}:\frac{d}{c}=\frac{bc}{ad}.$$

3. Meydanda $(a^{-1})^n=(a^n)^{-1}$, $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$, $(a^m)^n=a^{mn}$ bərabərlikləri doğrudur. Xüsusi halda $a^0=e$ qəbul edilir.

4. Meydanda sıfrın bölənləri yoxdur.

Bunu isbat edək. Yəni göstərək ki, P meydanında onun iki elementinin hasili sıfra bərabərdirsə, onda a və b vuruqlarından heç olmasa biri sıfra bərabər olmalıdır.

Tutaq ki, $ab=\theta$ ($a\in P$, $b\in P$, $\theta\in P$ və $a\neq\theta$).

Bu halda meydanda $ax=b$ tənliyinin həllinin yeganəliyinə əsasən hökmən $b=\theta$ olmalıdır. Doğrudan da, $ax=\theta$ bərabərliyinin hər tərəfini $\frac{1}{a}$-ya vursaq, $a^{-1}ax=a^{-1}\theta$, buradan $eb=\theta$ və $b=\theta$.

Bu xassədən belə bir nəticə alınır.

İxtiyari meydanda hər hansı bərabərliyi sıfırdan fərqli ortaq vuruğa ixtisar etmək olar.

Doğrudan da, əgər $ac=bc$ bərabərliyində $c\neq\theta$ isə, onda $(a-b)c=\theta$, buradan $a-b=\theta$, yaxud $a=b$.

Meydana aid misallar gətirək:

1) Rasional ədədlər çoxluğu, həqiqi ədədlər çoxluğu, kompleks ədədlər çoxluğu meydan əmələ gətirir (asanlıqla tərifin bütün tələblərinin bu çoxluqlarda ödəndiyini yoxlaya bilərsiniz).

2) Rasional əmsallı çoxhədlilərin kökü olan kompleks ədədlər də meydan əmələ gətirir (bu «cəbri ədədlər meydanı» adlanır).

3) Tam ədədlər çoxluğu meydan əmələ gətirmir (burada sıfırdan fərqli hər bir tam ədədin tərsi tam ədəd deyil).

4) Kəsr-rasional $\frac{f(x)}{g(x)}$ (burada $f(x)$ və $g(x)$ həqiqi əmsallı çoxhədlilər və $g(x)\neq 0$) funksiyalar çoxluğu meydan əmələ gətirir.

5) Çoxhədlilər halqası meydan deyil (çoxhədlinin tərsi, iki çoxhədlinin nisbəti çoxhədli olmaya da bilər).

Meydanın bəzi xassələri onun xarakteristikası ilə əlaqədardır.

Meydanın xarakteristikası. p ədədi P meydanının vahid e elementi ilə $pe=\theta$ şərtini ödəyən ən kiçik müsbət tam ədəd olarsa, onda p-yə P meydanının xarakteristikası, meydanın özünə isə sonlu xarakteristikalı meydan deyilir.

Əgər meydanın vahidinin tam misilləri P-nin yalnız müxtəlif elementləri olarsa (yəni m və k natural ədədləri üçün $m\neq k$ olduqda $me\neq ke$ olursa), onda deyirlər ki, P meydanının xarakteristikası sıfırdır.

Aşkardır ki, bütün ədədi meydanlar (elementləri ancaq ədədlərdən ibarət olan meydanlar) sıfır xarakteristikalı meydandır, çünki burada $m\neq k$ olduqda $m\cdot 1\neq k\cdot 1$.. Lakin ixtiyari P meydanında $m\neq k$ olduqda $me=ke$ və ya $me-ke=\theta$, yaxud $(m-k)e=\theta$ alınması mümkündür. Başqa sözlə, P meydanında elə bir $m-k=p$ kimi müsbət tam ədədi tapmaq olar ki, bu meydanın vahidinin həmin həmin müsbət ədədlər hasili (vahidin P müsbət tam misli) meydanın sıfır elementinə bərabər olsun (p

xarakteristikalı meydana p moduluna nəzərən çıxıqlar sisteminin əmələ gətirdiyi meydan misal olar).

İndi meydanın bunun xarakteristikası ilə əlaqədar olan daha bir xassəsi ilə tanış olaq.

Əgər P meydanın xarakteristikası p ədədi isə, onda p ədədi sadə ədəddir.

İSBATI. Tutaq ki, p xarakteristikası sadə ədəd deyil, onda $p = st$ $(s < p,\ t < p)$, şərtə görə $pe = \theta$ və deməli, $pe = (se)(te) = \theta$ olmalıdır. Bilirik ki, meydanda sıfrın bölənləri yoxdur. Ona görə $(se)(te) = \theta$ bərabərliyindən ya $se = \theta$, yaxud $te = \theta$ olmalıdır. Deməli, P meydanı üçün p-dən kiçik elə s, yaxud t müsbət tam ədədləri var ki, P-nin vahid elementinin s msli və ya t misli sıfra bərabər olur. Bu isə p ədədinin P meydanı üçün xarakteristika olması şərtinə ziddir.

Qeyd. Meydanın xarakteristikası anlayışına ən yaxşı, orijinal misala çıxıqlar haqqında söhbət gedən bölmədə § 14.5-də rast gələcəksiniz.

§ 5.7. Ədədlər halqası və ədədlər meydanı

Cəbri əməl anlayışından, halqa və meydanın ümumi tərifindən, həmçinin gətirdiyimiz misallardan aydın olur ki, bu çoxluqların elementləri müxtəlif təbiətli obyektlər ola bilər. Xüsusi halda, halqanın və meydanın elementləri müxtəlif ədədlər sistemi ola bilər.

Elementləri müxtəlif ədədlər çoxluğundan ibarət olan halqa və meydan uyğun olaraq ədədlər halqası və ədədlər meydanı adlanır.

TƏRİF. *H ədədlər çoxluğunda toplama, çıxma və vurma cəbri əməlləri təyin edilmişsə, onda bu çoxluğa ədədlər halqası deyilir.*

Deməli, əgər H çoxluğu ədədlər halqası isə, onda onun ixtiyari a, b elementləri üçün $a \pm b \in H$, $a \cdot b \in H$ olur.

Göründüyü kimi, bu tərif halqanın yuxarıdakı ümumi tərifinə uyğundur.

Biz artıq tam, həqiqi, rasional və kompleks ədədlər çoxluğunun halqa əmələ gətirdiyini bilirik. Lakin bəzi ədədlər çoxluğu heç də həmişə halqa əmələ gətirmir. Məsələn, mənfi ədədlər sistemi halqa əmələ gətirmir, çünki burada vurma cəbri əməli təyin edilməmişdir (iki mənfi ədədin hasili bu çoxluğa aid deyil, müsbət

ədədlər çoxluğuna daxildir). Tək ədədlər çoxluğunu da ədədlər halqası adlandırmaq olmaz və s.

Çıxma cəbri əməlinin təyin edilməsi ilə əlaqədar olaraq deyə bilərik ki, ədədlər halqasında həmişə sıfır elementi ($\theta = 0$, yəni adi sıfır ədədi) hər bir a elementinin əksi, yəni $-a$ vardır.

TƏRİF. *Heç olmasa bir elementi sıfırdan fərqli olan P ədədlər çoxluğunda toplama, çıxma, vurma və bölən sıfırdan fərqli olduqda isə bölmə əməlləri təyin edilirsə, bu çoxluğa ədədlər meydanı deyilir.*

Bu tərif ədədlər meydanının ümumi tərifinə tamamilə uyğundur.

Bilirik ki, rasional, həqiqi və kompleks ədədlər çoxluğu meydan təşkil edir, çünki bu ədədlər çoxluğunun hər birində toplama, vurma, çıxma və bölmə (bölən sıfırdan fərqli olduqda) cəbri əməllər təyin edilmişdir.

Lakin tam ədədlər çoxluğu ədədlər halqası əmələ gətirdiyi halda ədədlər meydanı əmələ gətirmir, çünki burada bölmə əməli təyin edilməmişdir. Belə ki, iki a və b tam ədədinin $\frac{a}{b}$ nisbəti həmişə tam ədəd olmaya da bilər.

Ədədlər halqası və ədədlər meydanına aid daha bir neçə misal göstərək:

1) $a + b\sqrt{2}$ şəklində olan ədədlər çoxluğuna baxaq. Əvvəlcə tutaq ki, a və b tam ədədlərdir.

Asanlıqla göstərmək olar ki, a və b istənilən tam ədəd olduqda $a + b\sqrt{2}$ şəklində ədədlər çoxluğu halqa əmələ gətirir. Belə ki, bu cür ədədlərin cəmi, fərqi və hasili yenə də həmin tipli ədədlər verir:

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \pm (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\sqrt{2},$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}.$$

Alınan nəticələrdə $a_1 \pm a_2$, $b_1 \pm b_2$, $a_1a_2 + 2b_1b_2$, $a_1b_2 + a_2b_1$ yenə tam ədədlərdir. Ona görə də a və b tam ədəd olduqda $a + b\sqrt{2}$ tipli ədədlər çoxluğu ədədlər halqası əmələ gətirir.

Lakin a və b tam ədəd olduqda $a + b\sqrt{2}$ şəklində ədədlər çoxluğu meydan əmələ gətirmir, çünki burada bölmə cəbri əməli təyin edilmir. Belə ki, a_1, a_2 və b_1, b_2 tam ədəd və $a_2 + b_2\sqrt{2} \neq 0$ ədədi üçün

$$\frac{a_1 + b_1\sqrt{2}}{a_2 + b_2\sqrt{2}} = \frac{a_1a_2 - 2b_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2}$$

(surət və məxrəci $a_2 - b_2\sqrt{2}$ ifadəsinə vururuq), alınan kəsrlər tam ədədlər olmaya da bilər.

İndi tutaq ki, $a_2 + b_2\sqrt{2}$ tipli ədədlərdə a və b tam deyil, ixtiyari rasional ədədlərdir. Aşkardır ki, bu halda da yenə belə ədədlər çoxluğu halqa əmələ gətirəcək.

Nəhayət, ədədlər meydanı üçün genişlənmiş meydan anlayışı ilə tanış olaq.

Tərifdən və gətirilən misallardan göründüyü kimi, meydan əmələ gətirən müxtəlif ədədlər sistemi vardır. Məsələn, həm rasional, həm həqiqi, həm də kompleks ədədlər sistemi ədədlər meydanını əmələ gətirir. Digər tərəfdən isə bilirik ki, rasional ədədlər çoxluğu həqiqi ədədlərin altçoxluğudur. Buna uyğun olaraq, ədədlər meydanının da genişlənmiş meydan anlayışı verilir.

Əgər P_1 ədədlər meydanı P_2 ədədlər meydanına daxildirsə, $P_1 \subset P_2$, lakin $P_1 \neq P_2$ olarsa, onda deyirlər ki, P_2 meydanı P_1-in genişlənməsidir. P_1 isə P_2-nin altmeydanıdır.

Əgər rasional, həqiqi, kompleks ədədlər çoxluqlarını uyğun olaraq Q, R və C və uyğun meydanları P_Q, P_R, P_C ilə işarə etsək, onda $P_Q \subset P_R \subset P_C$, yəni həqiqi ədədlər meydanı rasional ədədlər meydanının, kompleks ədədlər isə həqiqi ədədlər meydanının (həm də rasional ədədlər meydanının) genişlənməsidir. Buradan belə bir nəticə alınır ki, hər bir P ədədlər meydanı rasional ədədlər meydanının genişlənməsidir (bu rasional ədədlər meydanının minimal xassəsidir).

Bu təklifi isbat edək. Tutaq ki, P ixtiyari ədədlər meydanı, a isə bunun sıfırdan fərqli elementidir: $a \in P$, $a \neq 0$. Meydanın tərifinə görə $a - a = 0$, $\frac{a}{a} = 1$ ədədləri də bu meydanın elementləri olmalıdır. Vahidi özü ilə bir neçə dəfə toplamaqla $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = n$ istənilən tam ədədi alırıq. Aşkardır ki, $n \in P$ olacaqdır. Meydanda bölmə əməli təyin olunduğundan istənilən tam m və $\frac{m}{n} \in P$ ədədləri üçün olmalıdır.

Deməli, ixtiyari P ədədlər meydanına sıfır, bütün tam və kəsr ədədləri daxildir, yəni meydan əmələ gətirən rasional ədədlər

çoxluğu ixtiyari ədədlər meydanın altmeydanıdır. Çünki bu tipli ədədlərin cəmi, fərqi, hasili yenə də bu tipli ədəd verəcəkdir.

Asanlıqla göstərmək olar ki, a və b ixtiyari rasional ədədlər olduqda, $a + b\sqrt{2}$ tipli ədədlər çoxluğu, həm də ədədlər meydanı əmələ gətirir. Bu çoxluqda $p = a + b\sqrt{2}$ və $q = c + d\sqrt{2}$ ədədlərinin $\frac{p}{q}$ nisbətini hesablasaq, yuxarıdakı hesablamadan aydın olur ki,

$\frac{p}{q} = l + f\sqrt{2}$, burada $l = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2}$ və $f = \frac{bc - 2ad}{c^2 - 2d^2}$ ədədləri rasional ədədlərdir. Deməli, $\frac{p}{q}$ nisbəti yenə də $a + b\sqrt{2}$ tipli ədəd verir, yəni burada vurma, çıxma və toplama əməllərindən başqa, həm də bölmə əməli təyin edilmişdir. Ona görə də a və b ixtiyari rasilonal ədədlər olduqda da $a + b\sqrt{2}$ tipli ədədlər çoxluğu ədədlər meydanı əmələ gətirir.

Bu yerdə oxucuya öz gücünü sınayıb $a + bx_0 + cx_0^2$ şəklində olan ədədlər çoxluğunun a, b, c rasional ədədlər, x_0 isə $f(x_0) = x^3 - 5$ çoxhədlisinin köklərindən biri (yəni $x_0 = \sqrt[3]{5}$) olduğu halda ədədlər meydanı əmələ gətirdiyini göstərməyi tövsiyə edirik.

Nəhayət, bir orijinal misal da sıfır çoxluq olar (elementləri ancaq sıfır olan çoxluq); belə ki, sıfır çoxluq ədədlər halqası əmələ gətirdiyi halda meydan əmələ gətirmir (çünki burada sıfırdan fərqli digər bir element yoxdur və deməli, bölmə əməlindən danışmaq olmaz).

§ 5.8. Xətti fəza anlayışı. Tərifi, misallar, sadə xassələri

Tutaq ki, V – ixtiyari təbiətli elementlərin boş olmayan ($V \neq \varnothing$) çoxluğu, P isə ədədlər meydanıdır. V – nin elementlərini x, y, z, u, v və s., P ədədlər meydanın elementlərini isə $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ və s. ilə işarə etməyi şərtləşək. Fərz edək ki, V çoxluğunda toplama və ədədə vurma əməlləri təyin edilmişdir, yəni:

$\forall x, \forall y \in V$ üçün $x + y \in V$ və $\forall x \in V, \forall \alpha \in P$ üçün $\alpha x \in V$.

TƏRİF 1. *Toplama və ədədə vurma əməllərinin təyin olunduğu boş olmayan V çoxluğunda $\forall x, \forall y, \forall z \in V$ və $\forall \alpha, \forall \beta \in P$ üçün:*

1. $x+y=y+x$ *(toplamada kommutativlik xassəsi),*

2. $(x+y)+z=x+(y+z)$ *(toplamada assosiativlik xassəsi),*

3. V *– də elə bir* θ *elementi var ki,* $\forall x\in V$ $x+\theta=x$ *(sıfır elementin varlığı xassəsi),*

4. $\forall x\in V$ *üçün* V *– də elə* x' *var ki,* $(x'=-x)$ $x+x'=\theta$ *(əks elementin varlığı xassəsi),*

5. $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$ *(ədədə vurma əməlində assosiativlik xassəsi),*

6. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ *(ədədlərin cəminin* x *elementinə vurulmasında distributivlik xassəsi),*

7. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ *(ədədin* x *və* y *elementlərinin cəminə vurulmasında distributivlik xassəsi),*

8. $1\cdot x=x$ *(1 ədədi vuruğunun xüsusi roluna aid xassə)*

şərtləri ödənərsə, onda V *çoxluğuna* P *ədədlər meydanı üzərində verilmiş xətti fəza deyilir.*

V çoxluğunun elementlərini çox zaman onun vektorları da adlandırırlar.

Tərifdəki 1-8 şərtlərinə xətti fəzanın aksiomları deyilir.

Əgər biz bu tərifi toplamaya nəzərən Abel qrupunun tərifi ilə müqayisə etsək, onda V xətti fəzasına aşağıdakı kimi tərif verə bilərik.

TƏRİF 2. *Toplama və ədədə vurma əməllərinin təyin edildiyi boş olmayan* V *çoxluğu aşağıdakı şərtləri ödəyərsə, ona* P *meydanı üzərində xətti fəza deyilir:*

1. V *çoxluğu toplamaya nəzərən Abel qrupudur;*

2. $\forall\alpha,\beta\in P$ *və* $\forall x\in V$ *üçün* $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$,

3. $\forall\alpha,\beta\in P$ *və* $\forall x\in V$ *üçün* $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,

4. $\forall x,y\in V$ *və* $\forall\alpha\in P$ *üçün* $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$,

5. $\forall x\in V$ *üçün* $1\cdot x=x$.

Əgər P meydanı həqiqi ədədlər meydanıdırsa, V həqiqi xətti fəza, P kompleks ədədlər meydanı isə, V kompleks xətti fəza adlanır.

Misallar: 1. Adi üç ölçülü fəzada analitik həndəsədən məlum olan vektorlar çoxluğu toplama və ədədə urma əməllərinə nəzərən həqiqi fəzadır. Bunu W_3 ilə işarə edək.

W_3 - ün vektorları paraleloqram qaydası ilə toplanır; vektorun həqiqi ədədə vurulması isə belə təyin edilir: x vektorunun həqiqi α ədədinə vurulması onun uzunluğunu $|\alpha|$ dəfə artırır, $\alpha>0$ olduqda istiqamət dəyişmir, $\alpha<0$ olduqda isə istiqamət əksinə çevrilir. Deməli, topladıqda da, ədədə vurduqda da nəticədə yenə vektor alındığından verilən W_3 çoxluğunda hər iki əməl təyin olunmuşdur. Bu əməllər xətti fəzanın tərifindəki 1-8 aksiomlarını ödəyir ki, bunu yoxlamaq çətin deyildir.

Düz xətt və müstəvi üzərində verilmiş bir nöqtədən çıxan vektorlar çoxluqları da xətti fəza təşkil edirlər. Bu fəzaları da uyğun olaraq W_1 və W_2 ilə işarə edək.

2. n - ölçülü vektorlar çoxluğu burada təyin olunan toplama və ədədə vurma əməllərinə nəzərən xətti fəza təşkil edir.

Bilirik ki, n - ölçülü vektor dedikdə, n sayda nizamlanmış ixtiyari həqiqi ədədlər sistemi nəzərdə tutulur və $x=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ şəklində işarə edilir (burada $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ nizamlanmış həqiqi ədədləri x vektorunun koordinatları adlanır). Məlum olduğu kimi, bu vektorlar çoxluğunda da toplama və ədədə vurma əməlləri təyin edilib, yəni

$$x=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \text{ və } y=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$$

vektorları üçün:

$$x+y=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\ldots,\alpha_n+\beta_n),\ \lambda x=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\ldots,\lambda\alpha_n).$$

Burada λ ixtiyari həqiqi ədəddir. Bu çoxluqda sıfır element $\theta=(0,0,\ldots,0)$ və x vektorunun əksi $-x=(-\alpha_1,-\alpha_2,\ldots,-\alpha_n)$ - dir.

1-8 aksiomlarının doğruluğu da aşkar görünür (yoxlayın!).

n - ölçülü vektorların fəzası həqiqi xətti fəzadır (xatırlayaq ki, bu fəzanı çox zaman R_n ilə işarə edib onu n - ölçülü vektorların arifmetik fəzası adlandırırlar).

3. C – kompleks ədədlər meydanı burada təyin edilən toplama və vurma əməllərinə nəzərən kompleks fəza təşkil edir.

4. C – kompleks ədədlər meydanı kompleks ədədlərin toplanması və kompleks ədədlərin həqiqi ədədə vurulması əməllərinə nəzərən həqiqi xətti fəza təşkil edir.

5. $a\le t\le b$ parçasında təyin edilən və kəsilməz həqiqi dəyişənli $x=f(t)$ funksiyalarının $C_{[a,b]}$ çoxluğu toplama və ədədə vurma əməllərinə nəzərən həqiqi xətti fəza təşkil edir.

Bu çoxluqda funksiyaların toplanması və həqiqi ədədə vurulması əməlləri analizdən məlum olan adi qayda üzrə təyin edilir. 1-8 aksiomlarının ödənməsi isə asanlıqla yaxlanır.

6. Dərəcələri n - dən böyük olmayan həqiqi əmsallı birdəyişənli çoxhədlilər çoxluğu da burada təyin olunan toplama və ədədə vurma əməllərinə nəzərən həqiqi xətti fəza təşkil edir.

7. Elementləri P meydanından olan n tərtibli matrislər çoxluğu da burada təyin edilən toplama və ədədə vurma əməllərinə nəzərən xətti fəza təşkil edir.

Qeyd. Bunlan haqqında kitabın müvafiq bölmələrində irəlidə ətraflı məlumat veriləcək.

Bundan sonrakı şərhlərdə əgər P meydanı üzərində xüsusi məhdudiyyət qoyulmasa, bu o deməkdir ki, o, həm həqiqi, həm də kompleks hesab edilə bilər.

P meydanı üzərində verilmiş V xətti fəzasının aşağıdakı teoremlərlə ifadə edilən sadə xassələri bilavasitə onun tərifindən nəticə kimi alınır.

TEOREM 1. *Xətti fəzanın:*

1) θ sıfır elementi və

2) hər bir x elementinin əksi $-x$ yeganədir.

İSBATI. Əksini fərz edək. Tutaq ki, V xətti fəzasında bir deyil, θ_1 və θ_2 kimi iki sıfır elementi və bunun kimi də V - də ixtiyari x elementinin bir deyil, x_1 və x_2 kimi iki əksi var.

1. Aydındır ki, $x+\theta_1=x$ və $x+\theta_2=x$ olmalıdır. Burada xüsusi halda $x=\theta_2$ və $x=\theta_1$ qəbul etməklə $\theta_2+\theta_1=\theta_2$ və $\theta_1+\theta_2=\theta_1$ alarıq. $\theta_1+\theta_2=\theta_2+\theta_1$ olduğundan $\theta_1=\theta_2$ olur.

2. Əks fərziyyəmizə görə $x+x_1=\theta$ və $x+x_2=\theta$ olmalıdır. x_1+x+x_2 cəminə baxaq. Assosiativlik xassəsinə əsasən burada toplananları iki cür qruplaşdırmaqla

$$x_1+x+x_2=(x_1+x)+x_2=\theta+x_2=x_2,$$

$$x_1+x+x_2=x_1+(x+x_2)=x_1+\theta=x_1$$

alırıq və nəticədə $x_1=x_2$ olur.

TEOREM 2. *1) $0\cdot x=\theta$, 2) $(-1)\cdot x=-x$, 3) $\alpha\cdot\theta=\theta$ və 4) $\alpha x=\theta$ olduqda ya $\alpha=0$, yaxud $x=\theta$ olmalıdır.*

İSBATI. 1) $0\cdot x=0\cdot x+\theta=0\cdot x+(x+(-x))=(0\cdot x+x)+(-x)=$
$=(0\cdot x+1\cdot x)+(-x)=(0+1)x+(-x)=1\cdot x+(-x)=x+(-x)=\theta$.

Deməli, $0\cdot x=\theta$ olur.

2) $(-1)\cdot x=-x$ bərabərliyinin isbatını oxucuya həvalə edirik (burada $(-1)\cdot x$ hasilinin x elementi üçün əks element olduğunu göstərmək lazımdır).

3) $\alpha\cdot\theta=\alpha(x+(-x))=\alpha(x+(-1)x)=\alpha x+\alpha((-1)x)=\alpha x+(-\alpha)x=$

$=(\alpha-\alpha)x=0\cdot x=\theta,\quad \alpha\cdot\theta=\theta$.

4) $\alpha x=\theta$ olduqda ya $\alpha=0$, yaxud $x=\theta$ olmalıdır. Əgər $\alpha=0$ olarsa, onda $\forall x\in V$ üçün $0\cdot x=\theta$ olduğu məlumdur. Əgər $\alpha\neq 0$ olarsa, onda P meydanında α^{-1} var və verilmiş $\alpha x=\theta$ bərabərliyindən $x=(\alpha^{-1}\alpha)x=\alpha^{-1}(\alpha x)=\alpha^{-1}\theta=\theta$.

TEOREM 3. *Aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:*

1) $\alpha(x-y)=\alpha x-\alpha y$,

2) $(\alpha-\beta)x=\alpha x-\beta x$.

İSBATI. 1. $\alpha(x-y)=\alpha(x+(-y))=\alpha x+\alpha(-y)=\alpha x-\alpha y$.

2. $(\alpha-\beta)x=(\alpha+(-\beta))x=\alpha x+(-\beta)x=\alpha x-\beta x$.

§ 5.9. *P* meydanı üzərində cəbr anlayışı, onun müxtəlif tərifləri, misallar

Çox vacib cəbri strukturaların biri də elə «cəbr» elminin öz «adaşıdır» - cəbrdir[1].

P meydanı üzərində cəbr adlanan strukturanın yaranması xətti fəzalarda yeni cəbri əməl daxil etməklə əlaqədardır. Belə ki, riyaziyyatın müxtəlif sahələrində elə xətti fəzaya baxmaq tələbatı qarşıya çıxır ki, müəyyən meydan üzərində verilən xətti fəzada toplama və ədədə vurma əməllərindən əlavə burada həm də vurma (yəni xətti fəzanın nizamlanmış bir cüt venktoruna bunların hasili adlanan üçüncü bir vektorunu qarşı qoyan bir qayda başa düşülür) əməli təyin edilmiş olsun və bu hasili vuruqların biri qeyd edildə o birinə nəzərən xəttilik xassəsinə (bixəttiliyə) malik olsun, yəni

$$(c_1x_1+c_2x_2)y=c_1x_1y+c_2x_2y,\ x(c_1y_1+c_2y_2)=xc_1y_1+xc_2y_2. \quad (*)$$

Deməli, P *meydanı üzərində verilən cəbr vurma əməlinin daxil edildiyi elə xətti fəzadır ki, burada hasil bixəttilik xassəsinə malikdir.*

Riyazi ədəbiyyatda «cəbr» adlanan strukturun aşağıdakı kimi tərifinə də təsadüf edilir.

---

[1] Dolaşıqlıq yaranmaması üçün - «cəbr» elmi ilə cəbri strukturanın bir növü kimi düşünülən «cəbr» anlayışını fərqləndirmək üçün bunlardan biri üçün «algebra» terminindən istifadə etmək məqsədəuyğun olardı. Bu barədə bizim «Maarifçilik» qəzetində (7 iyul 1998) «Elmi terminologiyamızın bəzi məsələləri» adlı məqaləmizdə ətraflı bəhs edilmişdir.

TƏRİF. *P meydanı üzərində cəbr elə çoxluğa deyilir ki, onun elementləri P meydanı üzərində həm vektorlar fəzası, həm də halqa əmələ gətirsin və burada*

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y) \qquad (**)$$

şərti ödənsin[1] (buradakı x, y elementləri fəza və halqanın ixtiyari elementləri və $\lambda \in P$) burada vektorlar fəzasının və halqanın additiv qruplarının eyni olub üst-üstə düşməsi də nəzərdə tutulur.

Bu iki tərifin ekvivalentliyi aydındır; belə ki, halqada və xətti fəzadakı toplama əməlləri üst-üstə düşür, vurmadakı distributivlik xassəsi isə hər bir vuruğa nəzərən xətti olması isə daha «güclənir»; buna əmin olmaq üçün cəbrin x, y elementləri və P-nin elementləri üçün (**) bərabərliyinin doğruluğunun qəbul edilməsi kifayətdir.

P meydanı üzərində verilən A cəbrində ədədə vurma əməlini w_λ *kimi işarə edib bu cəbri strukturu çox zaman*

$$A = \langle V, +, \langle \{w_\lambda \mid \lambda \in P\}, \cdot \rangle$$

şəklində yazırlar.

Buradakı V xətti (və ya vektorlar) fəzasının ölçüsünə A cəbrinin ölçüsü və yaxud ranqı deyirlər.

Buradakı $\langle K, +, \cdot \rangle$ halqasının assosiativ, kommutativ (və əksinə) olmasından asılı olaraq cəbrləri assosiativ (qeyri-assosiativ), kommutativ (qeyri-kommutativ) adlandırırlar.

Meydanın üzərində verilən cəbrlərə aid bir neçə misal göstərək.

1. R həqiqi ədədlər meydanı üzərində verilən C kompleks ədədlər meydanı iki ölçülü cəbrdir.

2. Elementləri P meydanından olan n-tərtibli matrislər halqası P üzərində n^2 ölçülü cəbrdir.

3. Qeyri-assosiativ cəbrlər də vardır: bunun ən sadə nümunəsi vektorial hasilin təyin edildiyi üç ölçülü Evklid fəzasının əmələ gətirliyi cəbrdir.

4. P meydanında verilən $f(t)$ çoxhədlilər halqası P meydanı üzərində sonsuz ölçülü cəbrdir.

[1] «Cəbr» adlanan strukturu bəzən «xətti cəbr» də adlandırırlar.

Gətirdiyimiz misallardakı cəbrlər assosiativ cəbrlərdir (n-tərtibli matrislər çoxluğu isə o biri iki misaldan fərqli olaraq assosiativ olsa da qeyri-kommutativdir).

5. Qeyri-kommutativ, lakin assosiativ cəbrlərə daha bir yaxşı misal V xətti fəzasında təyin edilən xətti operatorlar çoxluğudur.

Qeyd. Operatorlar, Çoxhədlilər cəbri və kvaternionlar cəbri haqqında aşağıda ətraflı məlumat veriləcək.