

Rövşən Əliyev

**EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ
VƏ RİYAZİ STATİSTİKA**

(Dərs vəsaiti)

*Bakı Dövlət Universitetinin Elmi
Şurasının 23 fevral 2021-ci il tarixli
qərarı ilə (protokol № 02) nəşr
hüququ verilmişdir.*

BAKİ – BDU – 2022

Elmi redaktor:

Valeh Hacıyev

**Bakı Dövlət Universitetinin Tətbiqi
riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin
“Əməliyyatlar tədqiqi və ehtimal
nəzəriyyəsi” kafedrasının dosenti,
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru**

Rəyçilər:

Fəda Rəhimov

**Bakı Dövlət Universitetinin Tətbiqi
riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin
“Əməliyyatlar tədqiqi və ehtimal
nəzəriyyəsi” kafedrasının professoru,
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru**

Araz Əliyev

**Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye
Universitetinin “Ümumi və tətbiqi
riyaziyyat” kafedrasının müdiri,
əməkdar elm xadimi, riyaziyyat elmləri
doktoru, professor**

Təqdim olunan dərs vəsaitində ehtimal nəzəriyyəsinin mühüm anlayışları olan hadisə və onun ehtimalı, şərti ehtimal, asılı olmazlıq, entropiya və informasiya miqdarı anlayışları, təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunları və ədədi xarakteristikaları, həmçinin doğuran və xarakteristik funksiyalar şərh olunmuşdur. Vəsaitdə ehtimal nəzəriyyəsi üçün xarakterik olan müxtəlif yığılma növləri, böyük ədədlər qanunu və mərkəzi limit teoremləri də verilmişdir. Dərs vəsaitində ehtimal nəzəriyyəsinin aktuar və maliyyə riyaziyyatında bəzi tətbiqləri də verilmişdir. Bundan başqa vəsaitdə riyazi statistikanın əsas anlayış və metodları da öz əksini tapmışdır. Dərs vəsaitindən ali məktəblərin bakalavr pilləsində təhsil alan tələbələr, magistrantlar və doktorantlar istifadə edə bilər.

MÜNDƏRİCAT

Ön söz	7
Giriş.....	8

I Fəsil. Ehtimal anlayışı və ehtimal

nəzəriyyəsinin aksiomatikası	15
§1.1. Ehtimal nəzəriyyəsinin predmeti və ilkin	
anlayışları	15
§1.2. Hadisələr üzərində əməllər	19
§1.3. Nisbi tezliklərin dayanıqlığı xassəsi	24
§1.4. Diskret elementar hadisələr fəzasında ehtimalın	
təyini. Ehtimalın klassik tərfi	27
§1.5. Kombinatorikanın elementləri	34
§1.6. Kombinatorikanın tətbiqi ilə ehtimalın klassik	
tərfinə aid məsələ həlli nümunələri	44
§1.7. Ehtimal nəzəriyyəsinin bəzi tarixi məsələləri	62
§1.8. Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomatik quruluşu.	
Kolmoqorov aksiomları	72
§1.9. Ehtimalın xassələri.....	78
§1.10. Həndəsi ehtimal.....	84
§1.11. Şərti ehtimal	92
§1.12. Hadisələrin asılı olmazlığı	100
§1.13. Heç olmasa bir hadisənin baş verməsi ehtimalı	120
§1.14. Tam ehtimal düsturu və Bayes düsturları	122
§1.15. Entropiya və informasiya miqdarı.....	133

II Fəsil. Asılı olmayan sınaqlar ardıcılığı.....

§2.1. Bernulli sxemi	143
§2.2. Bernulli sxemində “müsbət” nəticənin baş verməsinin	

ən böyük ehtimallı sayı və maksimal ehtimal	155
§2.3. Bernulli sxemi üçün limit teoremləri.....	158
§2.4. Bernulli sxemin üçün böyük ədədlər qanunu.....	173
§2.5. Müxtəlif ehtimallı iki nəticəli asılı olmayan sınaqlar	181
§2.6. Polinomial sxem	183

III Fəsil. Təsadüfi kəmiyyət və onun ehtimal paylanması..... 186

§3.1. Təsadüfi kəmiyyət və onun paylanma funksiyası	186
§3.2. Diskret paylanmalar	194
§3.3. Mütləq kəsilməz paylanmalar	208
§3.4. Sinqulyar paylanma. Lebeq teoremi	245
§3.5. Çoxölçülü paylanmalar.	247
§3.6. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər	257
§3.7. Təsadüfi kəmiyyətin funksiyası	259
§3.8. Asılı olmayan iki təsadüfi kəmiyyətin cəminin paylanması.....	265
§3.9. Asılı olmayan iki təsadüfi kəmiyyətin hasilinin və nisbətinin paylanması.....	275

IV Fəsil. Təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları.....278

§4.1. Təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi.....	278
§4.2. Təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası	292
§4.3. Təsadüfi kəmiyyətdən asılı funksiyanın riyazi gözləməsi.....	303
§4.4. Təsadüfi kəmiyyətin yüksək tərtib momentləri	308
§4.5. Moda və median. Kvantil, asimmetriya əmsalı, eksess.....	316

§4.6. Kovariasiya. Korrelyasiya əmsalı	329
§4.7. Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas bərabərsizlikləri	338
§4.8. Təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikalarının maliyyə riyaziyyatında tətbiqi.....	345

V Fəsil. Asılı təsadüfi kəmiyyətlər.....351

§5.1. Şərti paylanmalar	352
§5.2. Şərti riyazi gözləmə	357
§5.3. Bircins Markov zəncirləri	362

VI Fəsil. Doğuran və xarakteristik

funksiyalar	372
§6.1. Doğuran funksiyalar	372
§6.2. Xarakteristik funksiyalar	376

VII Fəsil. Ehtimal nəzəriyyəsinin limit

teoremləri	392
§7.1. Təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının yığılma növləri.....	392
§7.2. Böyük ədədlər qanunu	408
§7.3. Gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu	420
§7.4. Mərkəzi limit teoremləri.....	428
§7.5. Mərkəzi limit teoreminin aktuar riyaziyyatında bəzi tətbiqləri.....	441

VIII Fəsil. Riyazi statistikanın elementləri.....447

§8.1. Riyazi statistikanın əsas məsələləri və ilkin anlayışları	447
§8.2. Seçimin xarakteristikaları	456
§8.3. Naməlum parametrlərin nöqtəvi statistik	

qiymətləndirilməsi	461
§8.4. Nöqtəvi statistik qiymətlərin tapılma metodları.....	467
§8.5. Riyazi statistikada istifadə olunan bəzi paylanma qanunları.....	474
§8.6. Etibarlı interval və etibarlı ehtimal	476
§8.7. Statistik hipotezlər və onların yoxlanılma qaydası	480
§8.8. Uzlaşma kriteriyaları.....	482
§8.9. Korrelyasiya analizinin elementləri.....	496
§8.10. Xətti reqressiya.....	500
Cədvəllər	508
Ədəbiyyat siyahısı	511
Predmet göstəricisi.....	513

Ön söz

Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika müasir riyaziyyatın sürətlə inkişaf edən bölmələrindən biridir. İlkın məsələləri müxtəlif şans oyunları ilə bağlı olsa da, hazırda bu elm sahəsi riyaziyyatın riyazi analiz, funksional analiz, o cümlədən ölçü nəzəriyyəsi, kombinatorika kimi bölmələri ilə sıx bağlı olub ciddi nəzəriyyəyə çevrilmişdir.

Təqdim olunan dərs vəsaiti ali məktəblərin bakalavr pilləsində tədris olunan ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika fənninin proqramına uyğun yazılmışdır. Dərs vəsaiti 8 fəsildən ibarətdir. Vəsaitdə ehtimal nəzəriyyəsinin Kolmoqorov aksiomları verilmiş, şərti ehtimal, asılı olmayan sınaqlar ardıcılığı, təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunları və ədədi xarakteristikaları, həmçinin doğuran və xarakteristik funksiyalar şərh olunmuşdur. Vəsaitdə ehtimal nəzəriyyəsi üçün xarakterik olan müxtəlif yığılma növləri, böyük ədədlər qanunu və mərkəzi limit teoremləri də verilmişdir. Bundan başqa vəsaitdə riyazi statistikanın əsas anlayış və metodları da öz əksini tapmışdır. Dərs vəsaiti yüksək elmi-pedaqoji ustalıqla yazılmışdır. Bakı Dövlət Universitetinin “Əməliyyatlar tədqiqi və ehtimal nəzəriyyəsi” kafedrasının müdiri, riyaziyyat elmləri doktoru Rövşən Telman oğlu Əliyev tərəfindən yazılmış bu dərs vəsaiti müəllifin 25 illik elmi-pedaqoji fəaliyyəti nəticəsində ərsəyə gəlmişdir.

Hesab edirəm ki, dərs vəsaiti ali məktəblərin tələbələri, magistrantlar və doktorantlar üçün faydalı olacaqdır.

Elmi redaktor

Giriş

Riyaziyyatın yüksək vəzifəsi bizi əhatə edən qarma-qarışıqlar içərisində gizlənən nizamı tapıb üzə çıxarmaqdır.

Norbert Viner

Ehtimal nəzəriyyəsi bir elm kimi təşəkkül tapmazdan əvvəl elmin müxtəlif sahələrində yalnız determinik qanunla baş verən hadisə və proseslər öyrənilirdi. Lakin bizi əhatə edən aləmdə heç də həmişə bütün hadisə və proseslər determinik qanunauyğunluqlara tabe olmurlar.

Ehtimal nəzəriyyəsi bizi əhatə edən aləmdə baş verən təsadüfi hadisə və prosesləri öyrənir. Əslində ilk baxışda elə görünə bilər ki, təsadüfi sözü altında baş verən hadisələr elmi qanunauyğunluqlara tabe olmur. Lakin bu belə deyil. Təsadüfi sözü altında baş verən hadisə və proseslər müəyyən ciddi riyazi qanunauyğunluqlara tabe olur. Ehtimal nəzəriyyəsi bu qanunauyğunluqları aşkara çıxarır, onların riyazi modelini qurur və tədqiq edir. Ehtimal nəzəriyyəsi kütləvi şəkildə baş verən təsadüfilik hallarındakı qanunauyğunluqları öyrənən riyazi elmdir.

Məlumdur ki, ilk statistik məlumatlar hələ qədim Misirdə, Yunanıstanda və Romada əhalinin sayı, məhsuldarlıq, ticarət və s. ilə bağlı olmuşdur. Müxtəlif sahələrdə, o cümlədən sığorta cəmiyyətlərində toplanmış statistik məlumatların təhlili, həmçinin azartlı oyunlarla bağlı məsələlər ehtimal nəzəriyyəsinin yaranmasına təsir edən amillərdir.

XIV əsrdə İtaliya və Hollandiyada ilk dəniz sığorta cəmiyyətləri yaranırdı. Bu cəmiyyətlərdə böyük riskli daşıma-

çılıqda böyük sığorta məbləğləri alınırdı və bu zaman müəyyən şansların hesablanması zərurəti yaranırdı. Məsələn, daşınan yükün dəyərinin 15 faizi məbləğində sığorta haqqı tutulurdu. Sonrakı dövrlərdə xəstələnmə halları, ölüm halları, bədbəxt hadisələr və s. kimi kütləvi təsadüfilik hallarının qanunauyğunluqlarının analizinə əsaslanan ümumi sığorta nəzəriyyəsinin formalaşmasına ilk cəhdlər olurdu. Bunlar isə müəyyən ehtimalların hesablanması zərurəti yaradırdı.

Ehtimal nəzəriyyəsinin yaranmasında və inkişafında azarlı oyunlarla bağlı olan məsələlərin də rolu olmuşdur. XV–XVI əsrlərdə yaşamış italyan renesansı dövrünün tanınmış alimləri Luka Paçoli (1445–1514), Nikkolo Tartalya (1500–1557) və Ceramolo Kardano (1501–1576) oyun zərərlərinin atılması ilə bağlı müəyyən məsələlər həll etmişlər. Paçoli 1494-cü ildə çap olunmuş “Hesab, həndəsə, mütənasibliklər” adlı kitabının “Qeyri-adi məsələlər” bölməsində mərc oyunu vaxtından əvvəl dayandırıldığı halda qoyulmuş məbləğin ədalətli bölünməsi haqqında məsələnin həlli ilə bağlı cəhd etmişdir. Tartalya 1556-cı ildə çap olunmuş “Ədəd və ölçü haqqında” kitabının “Borqodan olan qardaşım Lukanın səhvi” bölməsində Paçolinin həllini tənqid edərək öz həllini vermişdir. Kardano ölümündən sonra 1663-cü ildə çap olunmuş “Zər oyunu haqqında” əsərində ehtimalın klassik tərifinə yaxınlaşmış və demək olar ki, ehtimalların toplanması və vurulması teoremindən istifadə etmişdi.

İtalyan alimi, məhşur fizik Qalileo Qaliley (1564–1642) bir neçə oyun zərinin atılması ilə bağlı məsələlər qurmuş və onların tam həllini vermişdir. O, həmçinin fiziki və astronomik ölçmələrin nəticələrində olan təsadüfi xətlərin

qaçılmaz olduğu fikrinə gəlmiş, onların ehtimallarını qiymətləndirmişdir.

XVII əsrin ortalarından ehtimal məsələlərinin ümumi həll üsulları yox idi. Bu dövrdə Blez Paskal (1623–1662), Pyer Ferma (1601–1665), Xristian Hüygens (1629–1695) kimi böyük alimlər ehtimal nəzəriyyəsinin ilk anlayışlarının formalaşmasında rol oynamışlar. Bu dövrdə azartlı oyunlara (bəzən şans və ya qumar oyunları ifadələri də işlədilir) böyük maraq yaranmışdı. Belə oyunlara maraq göstərən və bu oyunlarda iştirak edən şəxslərdən biri də şevalye de Mere (1607–1648) olmuşdur. Şevalye de Mere bu oyunlarda müəyyən qanunauyğunluqlar aşkar etməyə çalışmış və bu məqsədlə də məhşur fransız fiziki Paskala məktub yazmışdır. Bu məktublarda olan iki maraqlı məsələ aşağıdakı kimidir:

1. iki oyun zərini neçə dəfə atmaq lazımdır ki, hər iki zərdə 6 rəqəminin düşməsi sayı zərlərin atılması sayının yarısından çox olsun;
2. oyunçular oyunu vaxtından əvvəl dayandırsalar, mərc edilən məbləği ədalətli şəkildə necə bölmək olar?

Paskal isə 1654-cü ildə bu məsələlərlə bağlı Fermaya məktub yazır. Bu məsələlərin həlli ilə bağlı yazışmalarda onlar ehtimal nəzəriyyəsinin bəzi anlayışlarını müəyyən edirlər. Daha sonra holland alimi Hüygens 1657-ci ildə çap olunan “Azartlı oyunlarda hesablamalar haqqında” kitabında bu yazışmalarda olan məsələlərlə bağlı öz həll üsulunu vermişdir. Bu dövrdə ehtimal nəzəriyyəsinin ilk teoremləri olan ehtimalların toplanması və vurulması teoremləri meydana çıxmışdır.

Ehtimal nəzəriyyəsinin riyazi bir elm kimi inkişafında

İsveç alimi, Bazel universitetinin professoru Yakob Bernullinin (1654–1705) “Fərzetmə məharəti” (“Arts Confietandi”) əsəri də mühüm rol oynamışdır. Bernullinin ölümündən 8 il sonra 1713-cü ildə çap olunmuş bu əsərdə kombinatorikanın bəzi elementlərinin şərhilə yanaşı, ehtimal nəzəriyyəsinin ilk limit teoremi olan böyük ədədlər qanununun isbatı da verilmişdir. Bu əsərin çap olunmasında Bernullinin qardaşı oğlu Nikolay Bernullinin rolu olmuşdur.

XVIII əsrdə fransız riyaziyyatçıları Abraham de Muavrin (1667–1754) və Pyer de Monmor (1678–1719) da ehtimal nəzəriyyəsi ilə bağlı əsərlər yazmışlar. Muavrin (1667–1754) “Təsadüfilik doktrinası” (1718) və “Analitik metodlar” (1730) adlı əsərləri ehtimal nəzəriyyəsinin dəqiq riyazi elm kimi formalaşmasına böyük təkan vermişdir. Bu əsərdə ehtimal nəzəriyyəsinin ikinci limit teoremi olan mərkəzi limit teoremi simmetrik Bernulli sxemi üçün isbat edilmişdir. Asılı olmazlıq və şərti ehtimal, riyazi gözləmə kimi anlayışların müəllifi də Muavr hesab olunur.

Məhşur riyaziyyatçı Leonard Eyler (1707–1783) də ehtimal nəzəriyyəsinin məsələlərinə maraq göstərmiş və “Genuya lotereyası” ilə məsələlərin həllinə aid əsər yazmışdır.

1812-ci ildə Pyer Simon Laplasın (1749–1827) “Analitik ehtimal nəzəriyyəsi” adlanan böyük əsəri çap olunmuşdur. Bu əsərdə Laplas özünün aldığı nəticələri və ona qədər məlum elmi nəticələri şərh etmiş, Muavrin simmetrik hal üçün isbat etdiyi teorem ümumiləşdirmişdir.

Ehtimal nəzəriyyəsinin limit teoremləri Deni Puasson (1781–1840) və Karl Fridrix Qaussun (1777–1855) əsərlərində inkişaf etdirilmişdir. Qeyd edək ki, “böyük ədədlər qa-

nunu” termini Puasson tərəfindən 1835-ci ildə verilmişdir.

Ehtimal nəzəriyyəsinin sonrakı inkişaf mərhələsi P.L.Çebişevin (1821–1894), A.A.Markovun (1856–1922) və A.M.Lyapunovun (1857–1918) adları ilə bağlıdır. Bu görkəmli rus alimləri asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün limit teoremlərinin effektiv isbat metodlarını yaratmışlar.

1895-ci ildə aktuarların birinci, 1900-cü ildə isə ikinci beynəlxalq konfransı keçirilmişdir. Bu konfranslarda sığorta şirkətlərinin fəaliyyətində ehtimal nəzəriyyəsinin istifadəsi ilə bağlı maraqlı məsələlər müzakirə olunmuşdur. 1903-cü ildə İsveç alimi Filip Lundberq (1876–1965) tərəfindən sığorta şirkətinin iflas ehtimalı üçün yuxarıdan qiymətləndirmə alınmışdır. Hazırda bu qiymətləndirmə elmi ədəbiyyatda Lundberq bərabərsizliyi adlanır.

Böyük fransız alimi Anri Puankare (1854–1912) ehtimal nəzəriyyəsinə kitab yazmışdır. 1900-cü ildə Puankarenin tələbəsi olmuş Luis Başelye (1870–1946) qiymətli kağızların qiymətlərinin dəyişməsinin ehtimal modelini qurmuş və səhmlərin qiymətlərini artımları $\sqrt{t}$ olan təsadüfi proseslə ifadə etmişdir. Onun təklif etdiyi proses broun hərəkəti idi və onun ciddi riyazi tərifini 1923-cü ildə Norbert Viner (1894–1964) vermişdir. Başelyenin aldığı “ $\sqrt{t}$ effektini” 5 il sonra Albert Eynşteyn (1879–1955) fizikada təsadüfi təsirlərə məruz qalan zərrəciyin fəzadakı hərəkəti üçün almışdır. Qeyd edək ki, Başelye aldığı nəticə xeyli müddət unudulsa da, XX əsrin ikinci yarısında ehtimal nəzəriyyəsinin maliyyə bazarının analizə tətbiqləri yenidən vüsət almışdır. H.Makovits, D.Tobin, P.Samuelson və baş-

qaları məhz ehtimal nəzəriyyəsi üsullarını tətbiq etməklə aldıkları elmi nəticələrə görə müxtəlif illərdə iqtisadiyyat üzrə Nobel mükafatı almışlar.

1900-cü ildə Parisdə II Beynəlxalq Riyaziyyatçılar Konqresində böyük alman riyaziyyatçısı David Hilbert (1862–1943) riyaziyyatçılar qarşısında 23 problem qoymuşdur. Bunlardan 6-cı problem fizika məsələlərinin riyazi aksiomatikasının verilməsi ilə bağlı idi. Bu həmçinin ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomatik quruluşu ilə bağlıdır. Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomatikasının qurulması istiqamətində bir neçə cəhdlər olmuşdur. Bu istiqamətdə ilk addımlar P.Mizes (1883–1953), C.H.Bernşteyn (1880–1968) və E.Borelə (1871–1956) məxsusdur. Ehtimal nəzəriyyəsinin müasir aksiomatikası 1933-cü ildə böyük rus riyaziyyatçısı A.H.Kolmoqorovun “Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışları” kitabında verilmişdir.

Bir elm sahəsi olaraq riyazi statistikaya aid ilk ciddi nəticə Qauss tərəfindən 1795-ci ildə verilmiş ən kiçik kvadratlar üsulu ilə başlayır. O, astronomik müşahidələr əsasında kiçik planet olan Serreranın orbitinin dəqiqləşdirilməsi zamanı meydana çıxan ölçmə xəstələrini qiymətləndirərkən bu üsulu vermişdir.

XIX əsrin sonunda və XX əsrin başlanğıcında riyazi statistikaya böyük töhfə ingilis tədqiqatçıları, xüsusən də Karl Pirson (1857–1936) və Ronald Fişer (1890–1962) tərəfindən verilmişdir. Pirson statistik fərziyyələrin yoxlanılması üçün “xi-kvadrat” üsulunu, Fişer isə maksimal doğruya oxşarlıq metodunu və dispersiya analizini vermişdir.

XX əsrin 30-cu illərində E.Neymann (1894–1977) və

özünə Student təxəllüsü götürmüş Vilyam Qosset (1876–1937), ingilis alimi Eron Şarp Pirson (1895–1980) statistik fərziyyələrin yoxlanılmasının ümumi nəzəriyyəsinin, A.N.Kolmoqorov və N.V.Smirnov (1900–1966) qeyri-parametrik statistikanın, A.Vald (1902–1950) isə ardıcıl statistik analiz nəzəriyyəsinin əsasını qoymuşlar.

Dərs vəsaiti 8 fəsildən ibarətdir. Vəsaitində ehtimal nəzəriyyəsinin mühüm anlayışları olan hadisə və onun ehtimalı, şərti ehtimal, asılı olmazlıq, entropiya və informasiya miqdarı anlayışları, təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunları və ədədi xarakteristikaları, həmçinin doğuran və xarakteristik funksiyalar şərh olunmuşdur. Vəsaitdə ehtimal nəzəriyyəsi üçün xarakterik olan müxtəlif yığılma növləri, böyük ədədlər qanunu və mərkəzi limit teoremləri də verilmişdir. Dərs vəsaitində ehtimal nəzəriyyəsinin aktuar və maliyyə riyaziyyatında bəzi tətbiqləri də verilmişdir. Bundan başqa vəsaitdə riyazi statistikanın əsas anlayış və metodları da öz əksini tapmışdır. Vəsaitdə verilmiş məsələlər əsasən [7] və [18] ədəbiyyatlarından götürülmüşdür. Dərs vəsaitindən ali məktəblərin bakalavr pilləsində təhsil alan tələbələr, magistrantlar və doktorantlar istifadə edə bilər.

Dərs vəsaitinin elmi redaktoruna, rəyçilərə, həmçinin r.e.d., prof. Tahir Xaniyevə, r.ü.f.d., dosent Hilalə Cəfərovaya, r.ü.f.d., b.m. Nərminə Abdullayevaya, Vəli Bayramova və Afaq Abdullayevaya təşəkkürümü bildirirəm.

I FƏSİL EHTİMAL ANLAYIŞI VƏ EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNİN AKSİOMATİKASI

*Nə qədər qəribə olsa da ilk məsələləri
azartlı oyunlarla bağlı olan bu nəzəriyyə gələcəkdə
insanlıq düşüncəsinin böyük bir hissəsini əhatə et-
məyi vəd edir...*

Laplas

“Analitik ehtimal nəzəriyyəsi” kitabından

§1.1. Ehtimal nəzəriyyəsinin predmeti və ilkin anlayışları

Məlumdur ki, eksperimentlər (sınaqlar) iki sinfə ayrılır: determinik eksperimentlər və stoxastik eksperimentlər.

Nəticəsini əvvəlcədən dəqiq söyləmək mümkün olan eksperimentə **determinik eksperiment** deyilir. Məsələn, normal atmosfer təzyiqində suyun qaynadılması determinik eksperimentdir, çünki öncədən dəqiq məlumdur ki, 100 dərəcə Selsi temperaturda su qaynayır.

Nəticəsi birqiymətli olaraq təyin edilə bilməyən eksperimentlərə **stoxastik eksperimentlər** deyilir. Bəzən stoxastik eksperiment ifadəsi yerinə sınaq sözünü də istifadə edirlər.

Stoxastik eksperimentin bütün mümkün nəticələri çoxluğuna **elementar hadisələr fəzası** deyilir və çox zaman Ω ilə işarə olunur. Ω çoxluğunun hər bir elementi **elementar hadisə** adlanır və ω ilə işarə olunur. Hər bir elementar

hadisə eksperimentin bir nəticəsinə ifadə edir.

Ehtimal nəzəriyyəsində metal pulun atılması, oyun zərinin atılması, qutudan təsadüfi qaydada kürəcik çıxarılması, hədəfə güllə atılması kimi eksperimentlərdən çox istifadə olunur. Bu eksperimentlər ehtimal nəzəriyyəsinin əsaslarını öyrənmək üçün vasitə rolunu oynayır.

Misallara baxaq:

1. Düzgün (bircins materialdan hazırlanmış) metal pulun bir dəfə atılması eksperimentinə baxaq. Bu misalda stoxastik eksperiment metal pulun atılması, şərtlər kompleksi isə bir simmetrik metal pulun bir dəfə atılmasından ibarətdir. Bu eksperimentə uyğun elementar hadisələr fəzası $\Omega = \{G, R\}$, burada $\{G\}$ pulun gerb üzünün, $\{R\}$ isə rəqəm üzünün yuxarı olmaqla düşməsinə bildirən elementar hadisələrdir.

2. Düzgün oyun zərinin bir dəfə atılması eksperimentinə baxaq. Bu eksperimentə uyğun elementar hadisələr fəzası $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olar; burada, məsələn, 2 ilə zərdə 2 rəqəminin düşməsi elementar hadisəsi göstərilmişdir.

3. Müəyyən cihazın fasiləsiz işləmə müddətinin təyin edilməsi stoxastik eksperimentə misal ola bilər. Bu eksperimentin nəticəsi $[0, \infty)$ yarımintervalından olan istənilən bir ədəd ola bilər.

4. Bir dəqiqə ərzində müstəvi üzərində hissəciyin Broun hərəkəti də stoxastik eksperimentə aid misaldır. Bu eksperiment nəticəsində sonsuz sayda mümkün trayektoriyalardan biri ola bilər.

Stoxastik eksperimentin nəticələrinin sayından asılı olaraq elementar hadisələr fəzası sonlu, hesabi və kontinuum

güclü çoxluq ola bilər. Sonlu və ya hesabi elementar hadisələr fəzasına **diskret elementar hadisələr fəzası** deyilir. Bu paraqrafta diskret elementar hadisələr fəzasına baxılır.

Diskret elementar hadisələr fəzasının hər bir alt çoxluğu **təsadüfi hadisə** və ya sadəcə **hadisə** adlanır. Hadisələri A, B, C və s. kimi işarə edirlər.

Beləliklə, təsadüfi hadisə elə hadisəyə deyirlər ki, sınaq nəticəsində o baş verə də bilər, baş verməyə də bilər. Hər hansı A hadisəsinin baş verməsi dedikdə sınaq nəticəsində bu hadisəni təşkil edən elementar hadisələrdən hər hansı birinin baş verməsi başa düşülür. Əgər $\omega \in A$ olarsa, bu halda deyirlər ki, A hadisəsi baş vermişdir. Əgər $\omega \notin A$ olarsa, bu halda deyirlər ki, A hadisəsi baş verməmişdir.

Verilmiş eksperiment nəticəsində hökmən baş verəcək hadisəyə **yəqin hadisə**, heç vaxt baş verməyən hadisəyə isə **qeyri-mümkün hadisə** deyilir və bu hadisələr uyğun olaraq Ω və $\emptyset$ ilə işarə olunur. Məsələn, bir oyun zəri bir dəfə atıldıda “7-dən kiçik rəqəmin düşməsi” hadisəsi **yəqin hadisə**, “7-dən böyük rəqəmin düşməsi” hadisəsi isə bu stoxastik eksperimentə nəzərən **qeyri-mümkün hadisə**dir.

İndi isə bəzi stoxastik eksperimentlərə uyğun elementar hadisələr fəzalarının qurulması ilə bağlı misallar verək.

1.İki simmetrik metal pulun atılması eksperimentinə uyğun elementar hadisələr fəzası aşağıdakı kimi olacaq:

$$\Omega = \{GG, GR, RG, RR\}.$$

Göründüyü kimi, elementar hadisələr fəzasının elementlərinin sayı 4-dür:

$$|\Omega| = 4 = 2^2.$$

2. Üç simmetrik metal pulun atılması eksperimentinə uyğun elementar hadisələr fəzası

$$\Omega = \{GGG, GGR, GRG, RGG, RRR, RRG, RGR, GRR\}.$$

Bu halda elementar hadisələrin sayı $|\Omega| = 8 = 2^3$ olur.

$$\begin{aligned} A &= \{2 \text{ metal pulda gerb düşməsi}\} = \\ &= \{GGR, GRG, RGG\} \end{aligned}$$

hadisəsi bu sınaqda müşahidə oluna bilən hadisədir.

3. n sayda simmetrik metal pulun atılması sınağına uyğun elementar hadisələr fəzası

$$\Omega = \{\omega: \omega = (a_1, a_2, \dots, a_n); a_i = R \text{ və ya } G; i = \overline{1, n}\}.$$

Bu halda $|\Omega| = 2^n$.

4. Bir düzgün oyun zərinin atılması sınağına uyğun elementar hadisələr fəzası

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\} = \{i: i = \overline{1, 6}\}.$$

Bu halda $|\Omega| = 6$.

5. İki düzgün oyun zərinin atılması sınağına uyğun elementar hadisələr fəzası

$$\Omega = \{(1, 1), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\}$$

kimidir. Bu fəzanı aşağıdakı kimi də yazmaq olar:

$$\Omega = \{(i, j): i, j = \overline{1, 6}\}.$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$|\Omega| = 36 = 6^2.$$

Bu sınaqda müşahidə oluna bilən bir hadisə quraq:

$$A = \{\text{düşən rəqəmlər hasilinin 3 olması}\} =$$

$$= \{(i, j): i \cdot j = 3\} = \{(1, 3), (3, 1)\}.$$

6. İndi isə n sayda düzgün oyun zərinin atılması eksperimentinə uyğun elementar hadisələr fəzasını quraq:

$$\Omega = \{\omega: \omega = (a_1, a_2, \dots, a_n), a_i = 1, \dots, 6, i = \overline{1, n}\}.$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki, bu fəzanı təşkil edən elementar hadisələrin sayı

$$|\Omega| = 6^n.$$

§1.2. Hadisələr üzərində əməllər

Əvvəlki paraqrafda qeyd olunduğu kimi hər bir hadisə bir çoxluqdur. Deməli, çoxluqlar üzərində aparılan əməllər hadisələr üzərində də aparıla bilər.

Fərz edək ki, A və B eyni eksperimentdə müşahidə oluna bilən hadisələrdir.

A hadisəsi baş verdikdə, B hadisəsi mütləq baş versə, başqa sözlə, A -nın baş verməsindən B -nin baş verməsi çıxırsa, deyirlər ki, A hadisəsi B hadisəsini **doğurur** və bu münasibət $A \subset B$ kimi işarə olunur.

Məsələn, bir oyun zərinin atılması eksperimentində $A = \{2 \text{ rəqəminin düşməsi}\}$ və $B = \{\text{cüt ədəd düşməsi}\}$ hadisələrinə baxaq. Aydındır ki, A hadisəsi baş verdikdə mütləq B hadisəsi də baş verir.

Əgər A hadisəsi B -ni və B hadisəsi də A -nı doğrurursa, bu hadisələrə **ekvivalent hadisələr** deyilir. Bu münasibət $A = B$ kimi işarə olunur. Məsələn, bir oyun zəri atıldıqda $A = \{2\text{-yə bölünən ədəd düşməsi}\}$ və $B = \{\text{cüt rəqəm düşməsi}\}$ hadisələri ekvivalent hadisələrdir. A və B hadisələrinin yal-

nız və yalnız hər ikisi baş verdikdə baş verən hadisəyə bu hadisələrin **kəsişməsi** (və ya **hasili**) deyilir və $A \cap B$ (və ya AB) kimi işarə olunur:

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega: \omega \in A \wedge \omega \in B\}.$$

Məsələn, bir oyun zəri atıldıqda $A = \{2,4\}$ və $B = \{\text{cüt ədəd düşməsi}\}$ hadisələrinə baxaq. Bu hadisələrin kəsişməsi $A \cap B = \{2,4\}$.

Başqa bir misala baxaq. İki atıcı hədəfə eyni anda atəş açır. Aşağıdakı hadisələrə baxaq:

$A = \{\text{birinci atıcının hədəfi vurması}\},$

$B = \{\text{ikinci atıcının hədəfi vurması}\}.$

Bu hadisələrin kəsişməsi

$$A \cap B = \{\text{hər iki atıcının hədəfi vurması}\}.$$

Hadisələrin kəsişməsi üçün aşağıdakılar doğrudur:

$$A \cap A = A; \quad A \cap \Omega = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset; \quad \emptyset \cap \Omega = \emptyset.$$

Qeyd edək ki, A və B hadisələrinin kəsişməsi bu hadisələrin hər birini doğurur, yəni

$$A \cap B \subset A; \quad A \cap B \subset B.$$

Əgər $A \cap B = \emptyset$ olarsa, bu hadisələrə **birgə baş verməyən** və ya **uyuşmayan** hadisələr deyilir. Bir oyun zəri atıldıqda $A = \{\text{tək ədəd düşməsi}\}$ və $B = \{\text{cüt ədəd düşməsi}\}$ hadisələrinə baxaq. Aydındır ki, bu hadisələrin hər ikisinə aid olan elementar hadisə yoxdur. Buna görə də hadisələrin kəsişməsi qeyri-mümkün hadisədir, yəni $A \cap B = \emptyset$.

A və B hadisələrindən yalnız və yalnız heç olmazsa biri baş verdikdə baş verən hadisəyə bu hadisələrin **birləş-**

məsi deyilir və $A \cup B$ kimi işarə olunur:

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega: \omega \in A \vee \omega \in B\}.$$

Məsələn, bir oyun zərinin bir dəfə atılması sınağında $A = \{1,3\}$ və $B = \{\text{cüt rəqəm düşməsi}\}$ hadisələrinə baxaq. Bu hadisələrin birləşməsi $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$.

Başqa bir misala baxaq. İki atıcı hədəfə eyni anda atəş açır.

$A = \{\text{birinci atıcının hədəfi vurması}\},$

$B = \{\text{ikinci atıcının hədəfi vurması}\}.$

Bu hadisələrin birləşməsi

$A \cup B = \{\text{heç olmasa bir atıcının hədəfi vurması}\}.$

Hadisələrin birləşməsi üçün aşağıdakılar doğrudur:

$$A \cup A = A; \quad A \cup \Omega = \Omega; \quad A \cup \emptyset = A.$$

A və B hadisələrinin hər biri onların birləşməsini doğrur, yəni

$$A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B.$$

A və B hadisələrinin **fərqi**, yalnız A baş verib B baş vermədikdə baş verən hadisəyə deyilir və $A \setminus B$ kimi işarə olunur:

$$A \setminus B = \{\omega \in \Omega: \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$$

Əgər $A \subset B$ olarsa, bu halda $A \setminus B = \emptyset$.

Əgər $A \cap B = \emptyset$ olarsa, bu halda $A \setminus B = A$ olar.

Məsələn, bir oyun zəri atıldıqda $A = \{1,3,4,6\}$ və $B = \{\text{cüt ədəd düşməsi}\}$ hadisələrinə baxaq. Bu hadisələrin fərqi $A \setminus B = \{1,3\}$ hadisəsidir.

Eksperiment zamanı yalnız və yalnız A baş vermədikdə baş verən hadisəyə A hadisəsinin **əks hadisəsi və ya inkarı** deyilir və $\bar{A}$ kimi işarə olunur:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \text{ və } A \cup \bar{A} = \Omega.$$

Buradan

$$\bar{\bar{A}} = \Omega \setminus A.$$

A hadisəsinin əks hadisəsinin əks hadisəsi onun özünə bərabərdir:

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

Əgər $A \subset B$ olarsa, bu halda $\bar{B} \subset \bar{A}$ münasibəti doğrudur.

Məsələn, hədəfə güllə atılması sınağında

$A = \{\text{hədəfin vurulması}\}$ və $\bar{A} = \{\text{hədəfin vurulmaması}\}$ əks hadisələrə misaldır.

İki hadisənin fərqi kəsişmə və əks hadisə vasitəsilə aşağıdakı kimi göstərilə bilər:

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}.$$

İki hadisənin **simmetrik fərqi** A və B hadisələrindən yalnız biri baş verdikdə baş verən hadisəyə deyilir:

$$A \triangle B = \{\omega \in \Omega: (\omega \in A \wedge \omega \notin B) \vee (\omega \notin A \wedge \omega \in B)\}$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$

A və B hadisələrinin simmetrik fərfini aşağıdakı kimi də yazmaq mümkündür:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Qeyd edək ki, hadisələr üçün də De Morqan qanunları

doğrudur:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

$\bar{\bar{A}} = A$ olduğundan

$$A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}},$$

$$A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}.$$

İndi isə hadisələr üzərində əməllərə aid məsələ həlli nümunələri verək.

Misal 1. Bir düzgün oyun zəri bir dəfə atılır. Bu zaman $\Omega = \{1, \dots, 6\}$.

$A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3\}$ olsun.

Asanlıqla görmək mümkündür ki, $A \triangle B = \{1, 2, 5\}$.

Misal 2. Təsadüfi qaydada 2 ikirəqəmli ədəd seçilir. Aşağıdakı hadisələr arasında hansı münasibətlər vardır?

$A = \{\text{seçilmiş ədədlərin 2-yə bölünməsi}\},$

$B = \{\text{seçilmiş ədədlərin 3-ə bölünməsi}\},$

$C = \{\text{seçilmiş ədədlərin 6-ya bölünməsi}\}.$

Aydındır ki, C hadisəsi yalnız və yalnız A və B hadisələrinin hər ikisi eyni zamanda baş verdikdə baş verir. A və B hadisələrindən hər hansı biri baş vermədikdə C hadisəsi də baş verə bilməz. Deməli,

$$C = A \cap B.$$

Məsələlər.

1. A və $\overline{A \cup B}$ hadisələrinin uyuşan olub olmadığını təyin edin.
2. İsbat edin ki, $A \cap B = A$ münasibəti yalnız və yalnız $A \subset B$ olduqda doğrudur.
3. Səhmdarın 4 növ səhmi vardır. A_i ilə i -ci səhmin qiymətdən düşməsi ehtimalını işarə edək. Aşağıdakı hadisələri ifadə edin:
 - a) heç bir səhmin qiymətdən düşməməsi;
 - b) heç olmasa bir səhmin qiymətdən düşməsi;
 - c) yalnız bir səhmin qiymətdən düşməsi;
 - d) qiymətdən düşmüş səhmlərinin sayının ikidən çox olmaması;
 - e) azı iki səhmin gəlirli olması;
 - f) yalnız iki səhmin qiymətdən düşməsi.

§1.3. Nisbi tezliklərin dayanıqlığı xassəsi

Biz qeyd etdik ki, ehtimal nəzəriyyəsində elə sınaqlara baxılır ki, həmin sınaqların aparılmasını təmin edən müəyyən şərtlər kompleksi ödənildikdə sınaqları qeyri-məhdud sayda aparmaq mümkün olsun.

Müşahidələr göstərir ki, sınaqlar qeyri-məhdud sayda aparıldıqda hadisənin nisbi tezliyi müəyyən bir ədəd ətrafında toplaşır. Buna **nisbi tezliklərin dayanıqlığı xassəsi** deyilir. Bu xassəni bir qədər ətraflı şərh edək:

Qeyd etdiyimiz kimi, ehtimal nəzəriyyəsində qeyri-məhdud sayda təkrarlana bilən sınaqlar tədqiq olunur. Onların hər dəfə reallaşması üçün müəyyən kompleks şərtlər ödənilməlidir.

Tərif 1. Fərz edək ki, G sınağı n dəfə aparılır və bu zaman A hadisəsi $\mu_n(A)$ dəfə baş verir. $\mu_n(A)$ kəmiyyətinə A **hadisəsinin tezliyi** deyilir.

Tərif 2. $\frac{\mu_n(A)}{n}$ nisbətinə isə A hadisəsinin nisbi tezliyi deyilir.

Praktiki müşahidələr əsasında nisbi tezliklər üçün aşağıdakı şəkildə ifadə olunan dayanıqlılıq xassəsi aşkar edilmişdir.

Fərz edək ki, G sınağı n_1 dəfə aparıldıqda, A hadisəsi $\mu_1(A)$ dəfə, sınaq n_2 dəfə aparıldıqda, hadisəsi $\mu_2(A)$ dəfə və s. sınaq n_k dəfə aparıldıqda, A hadisəsi $\mu_k(A)$ dəfə baş verir.

Qeyd edək ki, nisbi tezliklər seriyadan seriyaya təsadüfi olaraq dəyişə bilər. Lakin seriyalardakı sınaqların sayı kafi qədər artdıqca $\frac{\mu_k(A)}{n_k}$ nisbi tezlikləri bir-birindən az fərqlənərək müəyyən sabit $P(A)$ ədədi ətrafında “qruplaşır”. Təbii olaraq bu $P(A)$ ədədini A hadisəsinin baş vermə ehtimalı adlandırmaq olar:

$$\frac{\mu_1(A)}{n_1} \approx \frac{\mu_2(A)}{n_2} \approx \dots \approx \frac{\mu_k(A)}{n_k} \approx P(A). \quad (1)$$

(1) münasibəti **nisbi tezliklərin dayanıqlılığı xassəsi** adlanır. $P(A)$ ədədinə isə A hadisəsinin **statistik ehtimalı** deyilir. Nisbi tezliklərin dayanıqlılığı xassəsi real aləmdə baş verən kütləvi təsadüfi hadisələrin obyektiv xassəsidir.

(1) ilə ifadə olunan dayanıqlılıq xassəsi XVII əsrin ortalarında aşkar edilmişdir. Bunun üçün müxtəlif sınaqlar aparılmışdır.

İlk baxışda metal pulun atılması eksperimentindən hansısa elmi nəticə çıxarmağın mümkün olmadığı görünür. Doğrudan da, metal pulun bir dəfə atılması çox da maraqlı kəsb etməyə bilər. Lakin metal pulun atılması eksperimentini

n sayda təkrar edib, gerb üzünün düşməsi sayını $\mu_n(G)$ ilə işarə etsək, bu halda n -nin artması ilə $\frac{\mu_n(G)}{n}$ nisbətinin $\frac{1}{2}$ -ə yaxınlaşmasını müşahidə etmək mümkündür. Bu fakt uzun müddət əvvəl müşahidə olunmuş və bir çox tədqiqatçılar bunun doğruluğunu təcrübi olaraq yoxlamışlar. Məsələn, fransız tədqiqatçısı Corc Byuffon (1707–1788) metal pulun atılması eksperimentini 4040 dəfə aparmış və 2048 dəfə gerb üzü düşmüşdür. Bu halda $\frac{\mu_n(G)}{n} = 0,507$. İngilis statistiki Karl Pirson (1857–1936) metal pulun atılması eksperimentini 24000 dəfə aparmış, bu zaman gerb üzü 12012 dəfə düşmüşdür, buna görə də $\frac{\mu_n(G)}{n} = 0,5005$ olmuşdur. Bu nəticələr aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

Eksperimenti aparan	Eksperimentin sayı	Gerb üzünün düşməsi sayı	Nisbi tezlik
Byuffon	4040	2048	0,5080
Pirson	12000	6019	0,5016
Pirson	24000	12012	0,5005

Göründüyü kimi, “ G ” üzünün düşməsinin nisbi tezliyi təqribən $\frac{1}{2}$ olur. Beləliklə, bu hadisənin ehtimalı $P(G) \approx \frac{1}{2}$ olur.

Qeyd edək ki, nisbi tezliklərin dayanıqlıq xassəsinə növbəti mövzularda ciddi riyazi məna verəcəyik.

Nisbi tezliklərin statistik dayanıqlıq xassəsindən çıxır ki, hadisənin ehtimalı mənfi olmamalıdır, yəni $P(A) \geq 0$ və yəqin hadisənin ehtimalı $P(\Omega) = 1$ olmalıdır.

§1.4. Diskret elementar hadisələr fəzasında ehtimalın təyini. Ehtimalın klassik tərif

Fərz edək ki, Ω sonlu və ya hesabi elementar hadisələr fəzasıdır, yəni diskret elementar hadisələr fəzasıdır:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}.$$

Ω çoxluğunun hər bir ω_k elementar hadisəsinə qarşı bir p_k ədədi qoyaq, belə ki,

1. $p_k \geq 0, k = 1, 2, \dots,$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

münasibətləri ödənilir.

Bu halda deyirlər ki, Ω diskret elementar hadisələr fəzasında ehtimal təyin olunmuşdur.

p_k ədədi ω_k elementar hadisəsinin ehtimalı adlanır.

Tərif 1. Fərz edək ki, Ω diskret elementar hadisələr fəzasıdır. İxtiyari $A \subseteq \Omega$ hadisəsinin ehtimalı aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$P(A) = \sum_{k: \omega_k \in A} p_k. \quad (1)$$

Bu tərifdən istifadə etməklə, ehtimalın aşağıdakı xassələrinin doğruluğunu göstərmək mümkündür:

1. $P(A) \geq 0,$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B), A \cap B = \emptyset,$
3. $P(\Omega) = 1,$
4. $P(\emptyset) = 0,$
5. $P(\bar{A}) = 1 - P(A).$

Məsələ 1. Ω elementar hadisələr fəzası aşağıdakı kimi olsun:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}.$$

Elementar hadisələrin ehtimallarını aşağıdakı kimi təyin edək:

$$p_1 = 0,4 ; \quad p_2 = 0,3 ; \quad p_3 = 0,2 ; \quad p_4 = 0,1.$$

(1) düsturuna əsasən $A = \{\omega_1, \omega_3\}$ hadisəsinin ehtimalı

$$P(A) = p_1 + p_3 = 0,4 + 0,2 = 0,6.$$

Məsələ 2. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ olsun. Aşağıdakı hadisələri daxil edək:

$$A = \{\omega_1, \omega_2\} \text{ və } B = \{\omega_2, \omega_3\}.$$

Məlumdur ki, $P(A) = 0,8$ və $P(B) = 0,7$. Elementar hadisələrin p_1 , p_2 və p_3 ehtimallarını tapın.

Həlli. (1) düsturuna əsasən

$$P(A) = p_1 + p_2 = 0,8$$

və

$$P(B) = p_2 + p_3 = 0,7.$$

Digər tərəfdən normallıq şərtinə əsasən

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Beləliklə,

$$p_1 = 0,3, \quad p_2 = 0,5 \text{ və } p_3 = 0,2.$$

İndi isə hesabi sayda mümkün nəticəsi olan stoxastik

eksperimentə baxaq.

Məsələ 3. Simmetrik metal pul ilk dəfə gerb üzü düşənədək atılır. Aşağıdakı hadisələrin ehtimalını tapın:

$A = \{\text{sınağın tək sayda addımda dayandırılması}\},$

$B = \{\text{sınağın cüt sayda addımda dayandırılması}\},$

$C = \{\text{aparılan sınaqların sayının 5-dən çox olmaması}\}.$

Həlli. Bu halda elementar hadisələr fəzası hesabi çoxluq olacaqdır:

$$\Omega = \left\{ G; RG; RRG; \dots; \underbrace{RR \dots R}_{n-1} G; RR \dots \right\} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\infty\}.$$

Elementar hadisələrin ehtimalları aşağıdakı kimidir:

$$p_1 = P(\omega_1) = \frac{1}{2}; p_2 = P(\omega_2) = \frac{1}{4}; \dots; p_\infty = P(\omega_\infty) = 0.$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki, $p_k \geq 0, k = 1, 2, \dots$ və

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Qeyd edək ki, ω_∞ elementar hadisəsi mümkün hadisədir, lakin ehtimalı sıfırdır (yəni, ω_∞ praktik cəhətdən mümkün olmayan elementar hadisədir).

Diskret fəzada ehtimalın tərifinə əsasən

$$P(A) = \sum_{k: \omega_k \in A} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1}} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{2}{3}.$$

Eyni qayda ilə

$$P(B) = \sum_{k: \omega_k \in B} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{3}.$$

İndi isə C hadisəsinin ehtimalını tapaq. C hadisəsinə belə yazmaq olar:

$$C = \{G; RG; RRG; RRRG; RRRRG\}.$$

Diskret fəzada ehtimalın tərifinə əsasən

$$P(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{15}{16}.$$

İndi isə (1) düsturunun mühüm bir xüsusi halına baxaq.

Tərif 2. Fərz edək ki, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ sonlu elementar hadisələr fəzasıdır, yəni $|\Omega| = n < \infty$ və elementar hadisələr eyni ehtimallıdır: $p_1 = p_2 = \dots = p_n$. Bu halda ixtiyari $A \subseteq \Omega$ hadisəsinin ehtimalı üçün

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad (2)$$

düsturu doğrudur, burada $|A|$ ilə A hadisəsinə daxil olan elementar hadisələrin sayı işarə olunmuşdur.

(2)-yə **ehtimalın klassik tərif**i deyilir.

Qeyd edək ki, (2) düsturu (1)-dən alınır.

Doğrudan da, Ω fəzası sonludursa və hər bir elementar

hadisənin ehtimalı eynidirsə, yəni $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$, bu halda

$$\sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n p = np = 1.$$

Buradan alırıq ki,

$$p = \frac{1}{n}.$$

Bunu nəzərə alaraq (1) düsturundan (2) əldə edilir.

Ehtimal nəzəriyyəsində işlədilən “simmetrik metal pul”, “düzgün oyun zəri”, “təsadüfi qaydada seçmə” ifadələri elementar hadisələrin ehtimallarının eyni olduğunu göstərir.

Məsələ 4. İki simmetrik metal pulun atılması eksperimentində aşağıdakı hadisələrin ehtimallarını tapın:

$$A = \{\text{eyni üzlərin düşməsi}\},$$

$$B = \{\text{müxtəlif üzlərin düşməsi}\}.$$

Həlli. Öncə bu eksperimentə uyğun olan elementar hadisələr fəzasını quraq:

$$\Omega = \{\omega: \omega = (a_1, a_2), a_i = G \text{ və ya } R; i = 1, 2\} =$$

$$= \{GG, GR, RG, RR\}.$$

Göründüyü kimi, eksperimentin mümkün nəticələri çoxluğunun elementləri sayı 4-dür: $|\Omega| = 4$.

İndi isə A hadisəsini quraq:

$$A = \{\text{eyni üzlərin düşməsi}\} = \{GG, RR\}.$$

Göründüyü kimi, A hadisəsi Ω -nın altçoxluğudur.

Məsələnin şərtinə görə və elementar hadisələr fəzası

sonlu və elementar hadisələr eyni ehtimallıdır, çünki metal pul simmetrikdir. Buna görə də ehtimalın klassik tərifindən istifadə edə bilərik:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

İndi isə B hadisəsinin ehtimalını tapaq.

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$B = \{\text{müxtəlif üzlərin düşməsi}\} = \{GR, RG\}.$$

Beləliklə,

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Məsələ 5. İki düzgün oyun zəri atılır. Düşən rəqəmlərin cəminin 4-dən kiçik olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. İki zərin eyni zamanda bir dəfə atılması eksperimentinə uyğun elementar hadisələr fəzası

$$\Omega = \{\omega: \omega = (i, j): i = \overline{1,6}; j = \overline{1,6}\}$$

olar, burada (i, j) – birinci zərdə i , ikinci zərdə isə j rəqəminin düşməsi elementar hadisəsidir.

Göründüyü kimi, iki oyun zəri atıldıqda elementar hadisələrin sayı 36-ya bərabərdir, yəni $|\Omega| = 36$.

Düşən rəqəmlərin cəmin 4-dən kiçik olması hadisəsinə A ilə işarə edək. Aydındır ki,

$$A = \{(i, j): i + j < 4\} = \{(1,1); (1,2); (2,1)\}.$$

Göründüyü kimi, $|A| = 3$.

Ehtimalın klassik tərifinə görə

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Məsələ 6. İki oyun zərinin atılması eksperimentinə baxaq. $A = \{\text{düşən rəqəmlər hasilinin 20-dən kiçik olmaması}\}$ və $B = \{\text{düşən rəqəmlər hasilinin cüt ədəd olması}\}$ hadisələrinin ehtimalını tapın.

Həlli. Aydındır ki, bu halda elementar hadisələr fəzası

$$\Omega = \{(i, j): i, j = \overline{1, 6}\} \text{ və } |\Omega| = 6^2 = 36.$$

Asanlıqla görmək olar ki,

$$A = \{(i, j) \in \Omega: i \cdot j \geq 20\} =$$

$$= \{(4, 5), (5, 4), (4, 6), (6, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}.$$

Göründüyü kimi, $|A| = 8$.

Ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

İndi isə B hadisəsinin ehtimalını hesablayaq. Bu məqsədlə B hadisəsinin əks hadisəsini daxil edək:

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \{\text{düşən rəqəmlərin hasilinin tək ədəd olması}\} = \\ &= \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (1, 5), (5, 1), (3, 5), (5, 3), (5, 5)\}. \end{aligned}$$

Beləliklə, $|\bar{B}| = 9$.

Deməli,

$$P(\bar{B}) = \frac{|\bar{B}|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Əks hadisənin ehtimalı düsturundan istifadə edərək

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

olduğunu əldə edərək.

Məsələ 7. $\{1, 2, \dots, N\}$ çoxluğundan təsadüfən götürülmüş bir natural ədədin qeyd olunmuş k natural ədədinə bölünməsi (A) ehtimalını, yəni p_N -i tapın. $\lim_{N \rightarrow \infty} p_N = ?$

Həlli. Aydındır ki, $|\Omega| = N$ və $|A| = \left[\frac{N}{k} \right]$.

Beləliklə, ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$p_N = P(A) = \frac{1}{N} \left[\frac{N}{k} \right]$$

olar. İndi isə $\lim_{N \rightarrow \infty} p_N$ limitini hesablayaq.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{k} \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left(\frac{N}{k} - \left\{ \frac{N}{k} \right\} \right),$$

burada $\left\{ \frac{N}{k} \right\}$ ilə $\frac{N}{k}$ -nin kəsr hissəsi işarə olunmuşdur.

Sonuncu münasibətdə $0 < \left\{ \frac{N}{k} \right\} < 1$ və $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \left\{ \frac{N}{k} \right\} = 0$ olduğu nəzərə alsaq

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_N = \frac{1}{k}$$

olar.

§1.5. Kombinatorikanın elementləri

Ehtimal nəzəriyyəsinə aid məsələlərin həlli zamanı kombinatorikanın elementlərindən istifadə olunur. Kombinatorika terminini riyaziyyata alman alimi Qolfrid Vilhelm Leybnis 1666-cı ildə yazdığı “Kombinator sənəti haqqında”

əsərində daxil etmişdir. Kombinatorika sözü latın dilindən olan “combina” sözündən götürülmüşdür və dilimizdə “birləşdirmək” mənasını verir. Kombinatorikanın ehtimal nəzəriyyəsində istifadə olunan bəzi prinsipləri və elementləri ilə tanış olaq.

Toplama prinsipi. Fərz edək ki, 2 əməliyyat aparmaq lazımdır. Əgər birinci əməliyyat n sayda, ikinci əməliyyat isə k sayda müxtəlif üsulla aparıla bilərsə, onda bu əməliyyatlardan hər hansı birini $n + k$ sayda müxtəlif üsulla aparmaq olar.

Bu prinsipi aşağıdakı kimi də ifadə edirlər:

Əgər A obyektini n üsulla, B obyektini isə k üsulla seçmək olarsa, onda A və ya B obyektini $n + k$ sayda müxtəlif üsulla seçmək olar.

Misal 1. Ticarət mərkəzində 10 növ köynək və 7 növ qalstuk satılır. 1 köynək və ya 1 qalstuk almaq üçün neçə müxtəlif seçim imkanı vardır?

Bu misalda $n = 10, k = 7$ -dir. Yalnız bir köynək və yaxud bir qalstuk alınacağına görə, toplama prinsipinə görə mümkün seçim sayı $10 + 7 = 17$ olar.

Vurma prinsipi. Fərz edək ki, ardıcıl olaraq 2 əməliyyat aparmaq lazımdır. Əgər birinci əməliyyat n üsulla və birinci əməliyyat bu üsullardan biri seçildikdən sonra ikinci əməliyyat isə k müxtəlif üsulla aparıla bilirsə, onda bu 2 əməliyyatı $n \cdot k$ sayda müxtəlif üsulla aparmaq olar.

Bu prinsipi aşağıdakı kimi də ifadə edirlər:

Fərz edək ki, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ çoxluğu n sayda elementdən, $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ çoxluğu isə k sayda elementdən ibarətdir. Bu halda birinci elementi A -dan, ikinci elementi isə B -

dən olmaqla $n \cdot k$ sayda (a_i, b_j) cütü düzəltmək mümkündür.

Misal 2. Ticarət mərkəzində 10 növ köynək və 7 növ qalstuk satılır. 1 qalstuk və 1 köynək almaq üçün neçə müxtəlif seçim imkanı vardır?

1 köynək və 1 qalstuk alınacağına görə, vurma prinsipinə görə mümkün seçim sayı $10 \cdot 7 = 70$ olar.

Fərz edək ki, n sayda elementdən ibarət olan $\{a_1, \dots, a_n\}$ çoxluğu verilmişdir. Bu çoxluqdan k sayda element seçmək tələb olunur. Aydındır ki, hər bir belə seçimin nəticəsi k elementli bir çoxluq olacaqdır. Məqsədimiz belə k elementli çoxluqların sayını tapmaqdan ibarətdir.

Ümumi halda 2 müxtəlif seçim sxemi vardır: **qaytar-mamaq şərti ilə** və **qaytarmaq şərti ilə**.

Qaytarmamaq şərti ilə seçimdə fərz olunur ki, k sayda element ya eyni anda seçilir, ya da qaytarmamaq şərti ilə ardıcıl olaraq seçilir. Belə seçim qaydası təkrarsız sxem adlanır. Qaytarmaq şərti ilə seçimdə isə fərz olunur ki, hər bir element seçilir və qeyd olunur, sonra həmin element çoxluğa qaytarılır və növbəti bir element seçilir. Belə seçim qaydası isə təkrarlı sxem adlanır.

Bu sxemlərdən hər hansı biri seçim edildikdən sonra alınan k elementli çoxluğa **k -seçim** də deyirlər. k -seçimlər də **nizamsız və nizamlı** olmaqla 2 sinfə ayrılırlar. Adətən nizamlı k -seçimləri $(a_1, \dots, a_k)$, nizamsız k -seçimləri isə $[a_1, \dots, a_k]$ kimi işarə edirlər. Məsələn, nizamsız seçimlər üçün $a_1 a_2$ və $a_2 a_1$ eyni, nizamlı seçimlər üçün isə $a_1 a_2$ və $a_2 a_1$ seçimləri fərqli hesab olunurlar.

1. Qaytarmamaq şərti ilə (təkrarsız) seçim.

Fərz edək ki, çıxarılan elementlər geri qaytarılmır və növbəti element götürülür. Aydındır ki, bu zaman bütün seçimlər təkrarsız olacaqdır.

- 1. Birləşmələr.** n elementli çoxluqdan götürülən təkrarsız və nizamsız k -seçimlərinin sayı

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

düsturu ilə hesablanır, burada $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$; $0! = 1$.

C_n^k ədədlərinə binomial əmsallar deyilir. Binomial əmsalların aşağıdakı xassələri vardır:

1. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$;
2. $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_n^0 = C_n^n = 1$;
3. $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.

Misal 3. $\{a_1, a_2, a_3\}$ çoxluğundan götürülən bütün 2 elementli seçimlər aşağıdakılardır:

$$a_1a_2; a_1a_3; a_2a_3.$$

Doğrudan da, bu halda $C_3^2 = 3$.

2. Yerləşmələr. n elementli çoxluqdan götürülən bütün k -elementli nizamlı seçimlərin sayı

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

düsturu ilə hesablanır.

n elementli çoxluğun k elementli nizamlanmış alt çoxluqlarına n elementdən k **elementli yerləşmələr** deyilir.

Misal 4. $\{a_1, a_2, a_3\}$ çoxluğunun 2 elementli nizamlı

seçimlər aşağıdakılardır:

$$a_1 a_2; a_1 a_3; a_2 a_3; a_2 a_1; a_3 a_1; a_3 a_2.$$

Doğrudan da, $A_3^2 = 2! \cdot C_3^2 = 6$.

3. Yerdəyişmələr. n elementli çoxluğun elementlərinin bütün mümkün müxtəlif yerdəyişmələrinin sayı

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

düsturu ilə hesablanır.

Misal 5. $\{a_1, a_2, a_3\}$ çoxluğundakı bütün yerdəyişmələrin sayı

$$P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! = 6.$$

Başqa sözlə, Ω çoxluğunun elementlərinin yerdəyişməsi ilə düzələn bütün alt çoxluqlarının sayı 6-dır. Bunu əyani olaraq da görə bilərik:

$$\begin{aligned} & a_1 a_2 a_3; a_1 a_3 a_2; a_2 a_1 a_3; \\ & a_2 a_3 a_1; a_3 a_1 a_2, a_3 a_2 a_1. \end{aligned}$$

Misal 6. “Ehtimal” sözünün hərflərinin bütün mümkün yerdəyişmələrinin sayını tapın.

Həlli. Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$P_7 = 7! = 5040.$$

II. Qaytarmaq şərti ilə (təkrarlı) seçim.

1.Təkrarlı birləşmələr. n elementdən k elementli təkrarlı birləşmələr elə çoxluqdur ki, onun tərkibinə hər bir element 1-dən k -ya qədər istənilən sayda element daxil ola

bilər, və ya heç daxil olmaya bilər. n elementdən k elementli təkrarlı birləşmələrin sayı C_{n+k-1}^k -ə bərabərdir.

Misal 7. Üç elementli $\{a_1, a_2, a_3\}$ çoxluğunun iki elementli təkrarlı birləşmələri aşağıdakılardır:

$$a_1a_2; a_1a_3; a_2a_3; a_1a_1; a_2a_2; a_3a_3.$$

Göründüyü kimi, 6 belə alt çoxluq vardır. Bunu təkrarlı birləşmələrin sayı düsturu ilə də tapa bilərik. Bu məsələdə $n=3$ və $k=2$ olduğundan

$$C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = 6.$$

Misal 8. İki elementli $\{a_1, a_2\}$ çoxluğunun elementlərindən düzələn üç elementli bütün təkrarlı birləşmələr aşağıdakılardır:

$$a_1a_1a_1; a_2a_2a_2; a_1a_1a_2; a_1a_2a_2.$$

Göründüyü kimi, 4 belə təkrarlı birləşmə vardır.

Bunu təkrarlı birləşmələrin sayı düsturu ilə də tapa bilərik. Bu məsələdə $n=2$ və $k=3$ olduğundan

$$C_{3+2-1}^3 = C_4^3 = 4.$$

2. Təkrarlı yerləşmələr. n elementdən k elementli təkrarlı yerləşmələrin sayı

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_k = n^k.$$

Misal 9. Üç elementli $\{a_1, a_2, a_3\}$ çoxluğunun iki elementli təkrarlı yerləşmələri aşağıdakılardır:

$$a_1a_2; a_1a_3; a_2a_3;$$

$$a_2a_1; a_3a_1; a_3a_2;$$

$$a_1a_1; a_2a_2; a_3a_3.$$

3. Təkrarlı yerdəyişmələr. n sayda elementdən n_1 saydası birinci tip, n_2 saydası ikinci tip, ..., n_k saydası isə k -cı tip elementlərdir, belə ki, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Bu halda bu çoxluqdakı bütün yerdəyişmələrin sayı

$$C_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Xüsusi halda çoxluq yalnız iki tip elementdən təşkil olunmuşdursa, yəni birinci tip elementdən k sayda, ikinci tip elementdən isə $(n - k)$ saydadırsa, bu halda bu çoxluqdakı bütün yerdəyişmələrin sayı

$$\frac{n!}{k! (n - k)!} = C_n^k$$

olar.

Misal 10. “Riyaziyyat” sözünün hərflərinin bütün yerdəyişmələrinin sayını tapın.

Həlli. Göründüyü kimi, “Riyaziyyat” sözündə “r”, “z” və “t” hərfləri bir dəfə, “i” və “a” hərfləri iki dəfə, “y” hərfi isə 3 dəfə təkrar olunur. Təkrarlı yerdəyişmələrin sayı düsturuna əsasən

$$\frac{10!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200.$$

İndi isə fizikada mühüm rol oynayan statistikalarla tanış olaq. Fərz edək ki, k sayda zərrəcik n sayda oyuğa (qutuya) yerləşdirilməlidir. Aşağıdakı 3 müxtəlif statistika vardır:

1. Maksvel-Boltsman statistikas. Bütün zərrəciklər müxtəlifdir və heç bir qadağan yoxdur. Bu halda bütün vəziy-

yətlərin sayı n^k , hər bir vəziyyətin ehtimalı isə $p = \frac{1}{n^k}$ olur.

2. Boze-Eynşteyn statistikas. Zərrəciklər eynidir (fərqləndirilmir) və hər bir oyuqda istənilən sayda zərrəcik ola bilər. Bu halda bütün vəziyyətlərin sayı C_{n+k-1}^k -dir. Beləliklə, hər bir vəziyyətin ehtimalı $p = \frac{1}{C_{n+k-1}^k}$ olur.

3. Fermi-Dirak statistikas. Zərrəciklər eynidir, lakin hər oyuqda yalnız bir zərrəcik ola bilər, yəni qadağan vardır. Bu halda vəziyyətlərin sayı C_n^k olar. Hər bir belə vəziyyətin ehtimalı isə $p = \frac{1}{C_n^k}$.

İndi isə kombinatorikaya aid məsələ həlli nümunələrinə baxaq.

Məsələ 1. Futbol üzrə Azərbaycan çempionatında 16 komanda iştirak edir. Hər bir komanda qalan digər komandalardan hər biri ilə bir oyunu öz meydanında digərini isə rəqib meydanında oynayır. Bütün mümkün oyunların sayını tapın.

Həlli. Aydındır ki, hər bir ev sahibi komandanı 16 üsulla, qonaq komandanı isə 15 üsulla seçmək mümkündür. Buna görə də vurma prinsipinə görə bütün oyunların sayı $16 \cdot 15 = 240$ olar.

Məsələ 2. Şahmat turnirində 7 nəfər yarışır. Hər bir şahmatçı hər bir rəqibi ilə yalnız bir oyun keçirir, yarışda cəmi neçə partiya oynanmalıdır?

Həlli. Aydındır ki, birinci iştirakçının hər birini 7 üsulla, ikinci iştirakçını isə 6 üsulla seçmək mümkündür. Vurma prinsipinə görə $7 \cdot 6 = 42$ cüt olacaqdır ki, burada hər iştirakçı iki dəfə nəzərə alınmışdır. Digər tərəfdən, şərtə

görə, hər bir cüt öz arasında yalnız bir partiya oynamalıdır. Buna görə də bütün mümkün partiyaların sayı 21 olar.

Məsələ 3. A şəhərindən B şəhərinə 4 yol, B şəhərindən C şəhərinə isə 2 yol vardır. A şəhərindən C şəhərinə neçə üsulla getmək mümkündür?

Həlli. A şəhərindən B şəhərinə gedilməsinə birinci əməliyyat kimi, B şəhərindən C şəhərinə gedilməsinə isə ikinci əməliyyat kimi baxaq. Bu halda A -dan B -yə 4 yoldan birini seçdikdən sonra, B -dən C -yə mümkün 2 yoldan biri ilə getmək olar. Beləliklə, birinci əməliyyatı yerinə yetirmək üçün 4 üsul vardır və bu üsulların hər birinə ikinci əməliyyatın 2 üsulu uyğun gələ bilər. Buna görə də vurma prinsipinə görə A şəhərindən C şəhərinə $4 \cdot 2 = 8$ üsulla getmək mümkündür.

Məsələ 4. 3 və 4 rəqəmlərinin köməyi ilə neçə ikirəqəmli ədəd düzəltmək mümkündür?

Həlli. Aydındır ki, ikirəqəmli ədədin birinci rəqəmini 2 üsulla (yəni, ya 3 rəqəmini, ya da 4 rəqəmini) seçmək mümkündür, bundan sonra ikinci rəqəmini də 2 müxtəlif üsulla seçmək mümkündür. Beləliklə, vurma prinsipinə görə belə ikirəqəmli ədədlərin sayı $2 \cdot 2 = 4$ olar.

Məsələ 5. 0 və 5 rəqəmlərinin köməyi ilə neçə dörd-rəqəmli ədəd düzəltmək mümkündür?

Həlli. Aydındır ki, dörd-rəqəmli ədədin ilk rəqəmini yalnız 1 üsulla (çünki 0 ilk rəqəm ola bilməz) seçmək mümkündür, bundan sonra ikinci, üçüncü və dördüncü rəqəminin hər birini isə 2 müxtəlif üsulla seçmək mümkündür. Beləliklə, vurma prinsipinə görə bütün belə dörd-rəqəmli ədədlərin sayı $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ olar.

Məsələ 6. 1, 3, 4, 6 rəqəmlərinin köməyi ilə neçə dörd rəqəmli ədəd düzəltmək olar?

Həlli. Aydındır ki, dörd rəqəmli ədədin hər bir rəqəmini 4 müxtəlif üsulla seçmək mümkündür. Buna görə də vurma prinsipinə görə $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ belə dörd rəqəmli ədəd vardır.

Məsələ 7. 1, 3, 4, 6 rəqəmlərinin hər birindən yalnız bir dəfə istifadə etməklə neçə dörd rəqəmli ədəd düzəltmək mümkündür?

Həlli. Aydındır ki, dörd rəqəmli ədədin ilk rəqəmini 4 müxtəlif üsulla seçmək mümkündür. Bundan sonra ikinci rəqəmini 3 üsulla, üçüncü rəqəmini 2, dördüncü rəqəmini isə yalnız 1 üsulla seçmək mümkündür. Buna görə də vurma prinsipinə görə $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ belə dörd rəqəmli ədəd düzəltmək mümkündür.

Məsələ 8. Bütün üç rəqəmli ədədlərin sayını tapın.

Həlli. Aydındır ki, üç rəqəmli ədədin ilk rəqəmi $1, 2, \dots, 9$ rəqəmlərindən hər hansı biri ola bilər, yəni 9 müxtəlif üsulla seçilə bilər. Bundan sonra ikinci rəqəm $0, 1, 2, \dots, 9$ rəqəmlərindən biri ola bilər, yəni 10 müxtəlif üsulla seçilə bilər. Nəhayət, sonuncu rəqəm də 10 üsulla seçilə bilər. Buna görə vurma prinsipinə əsasən bütün üç rəqəmli ədədlərin sayı $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ olar.

Məsələ 9. Rəqəmləri müxtəlif olan bütün üç rəqəmli ədədlərin sayını tapın.

Həlli. Vurma prinsipinə görə $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Məsələ 10. Üç rəqəmli cüt ədədlərin sayını tapın.

Həlli. Vurma prinsipinə görə $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$.

Məsələ 11. 28 domino daşını 4 oyunçu arasında neçə

üsulla paylaşmaq mümkündür?

Həlli. Aydındır ki, birinci oyunçu üçün 7 daş 28 daşın arasından seçilməlidir. Buna görə də birinci oyunçu üçün mümkün üsulların sayı C_{28}^7 , ikinci oyunçu üçün 4 daş yerdə qalan 21 daşın içərisindən seçilməlidir və s. Vurma prinsipinə görə

$$C_{28}^7 \cdot C_{21}^7 \cdot C_{14}^7 \cdot C_7^7 = \frac{28!}{7! 21!} \cdot \frac{21!}{7! 14!} \cdot \frac{14!}{7! 7!} = \frac{28!}{7! 7! 7! 7!}.$$

§1.6. Kombinatorikanın tətbiqi ilə ehtimalın klassik tərifinə aid məsələ həlli nümunələri

Məsələ 1. 10 simmetrik metal pul atılır. Pulların yarısında gerb üzünün düşməsi hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Əvvəlcə elementar hadisələr fəzasını quraq:

$$\Omega = \{\omega: \omega = (a_1, \dots, a_{10}), a_i = R \text{ və ya } G, i = \overline{1, 10}\}.$$

Kombinatorikanın vurma prinsipinə əsasən

$$|\Omega| = 2^{10} = 1024.$$

$A = \{5 \text{ metal pulda gerb üzünün düşməsi}\}$ hadisəsi üçün əlverişli halların sayını tapaq. Təkrarlı yerdəyişmələrin sayına görə

$$|A| = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252.$$

Ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{252}{1024} = \frac{63}{256}.$$

Məsələ 2. n sayda simmetrik metal pul atılır.

$A = \{\text{birinci və sonuncu metal pulda rəqəm üzünün düşməsi}\}$ hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Övvəlcə elementar hadisələr fəzasını quraq:

$$\Omega = \{\omega: \omega = (a_1, \dots, a_n), a_i = R \text{ və ya } G, i = \overline{1, n}\}.$$

Kombinatorikanın vurma prinsipinə əsasən

$$|\Omega| = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_n = 2^n.$$

A hadisəsini quraq:

$$A = \{\omega: \omega = (R, a_2, \dots, a_{n-1}, R), a_i = R \text{ və ya } G, i = \overline{2, n-1}\}.$$

İndi isə A hadisəsi üçün əlverişli halların sayını tapaq. Aydındır ki, birinci və sonuncu pullarda mütləq rəqəm üzü düşdüyü üçün hər biri üçün yalnız 1 variant, digər pullar üçün isə 2 variant vardır. Buna görə də vurma prinsipinə əsasən

$$|A| = 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n-2} \cdot 1 = 2^{n-2},$$

Ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}.$$

Məsələ 3. n sayda düzgün oyun zəri atılır. Yalnız birinci zərdə 1 rəqəminin düşməsi hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Övvəlcə elementar hadisələr fəzasını quraq:

$$\Omega = \{\omega: \omega = (a_1, \dots, a_n), a_i = \overline{1, 6}, i = \overline{1, n}\}.$$

Kombinatorikanın vurma prinsipinə əsasən

$$|\Omega| = \underbrace{6 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 6}_n = 6^n.$$

İndi isə ehtimalı axtarılan hadisəni quraq:

$$A = \{\omega: \omega = (1, a_2, \dots, a_n), a_i = \overline{2,6}, i = \overline{2, n}\}.$$

Aydındır ki, 1 rəqəmi yalnız birinci oyun zərində düşməlidir, qalan zərlərdə isə 2,3,...,6 rəqəmləri düşə bilər. Buna görə də vurma prinsipinə əsasən

$$|A| = 1 \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5}_{n-1} = 5^{n-1}.$$

Ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5^{n-1}}{6^n}.$$

Məsələ 4. Qutuda 4 ağ, 5 qara rəngli kürəcik vardır. Qutudan təsadüfi qaydada 3 kürəcik çıxarılır.

$A = \{\text{çıxarılan kürəciklərin hamısının ağ rəngli olması}\};$

$B = \{\text{çıxarılan kürəciklərdən ikisinin ağ, birinin qara rəngli olması}\}$ hadisələrinin ehtimallarını tapın.

Həlli. Aydındır ki, $|\Omega| = C_9^3$ və $|A| = C_4^3$.

Ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{21}.$$

Vurma prinsipinə əsasən

$$|B| = C_4^2 C_5^1.$$

Ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{C_4^2 C_5^1}{C_9^3} = \frac{5}{14}.$$

Məsələ 5. Tələbə 60 imtahan sualından 25-nin cavabını bilir. İmtahandan keçmək üçün 3 sualdan ən azı 2-nə cavab vermək lazım olduğunu bilərək, tələbənin imtahandan keçməsi hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Bütün mümkün halların sayı

$$C_{60}^3 = \frac{60!}{3! \cdot 57!} = \frac{58 \cdot 59 \cdot 60}{6} = 34220.$$

İmtahandan keçmək üçün 2 və ya 3 suala cavab vermək lazımdır. Tələbənin öyrəndiyi sualların sayı 25, öyrənmədiyi sualların sayı isə 35 olduğundan

$A = \{\text{tələbənin ən azı 2 suala cavab verməsi}\}$
hadisəsi üçün əlverişli halların sayı kombinatorikanın vurma və toplama prinsiplərinə görə

$$|A| = C_{25}^2 \cdot C_{35}^1 + C_{25}^3 = 10500 + 2300 = 12800.$$

Ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{C_{25}^2 \cdot C_{35}^1 + C_{25}^3}{C_{60}^3} = \frac{12800}{34220} = \frac{640}{1711}.$$

Məsələ 6. 100 lotereya biletidən 2-si uduşludur. Alınmış 3 biletin hamısının uduşsuz olması hadisəsinin (A) ehtimalını tapın.

Həlli. Əvvəlcə bütün mümkün halların sayını tapaq. Üç bilet alındığı üçün bu say 100 elementdən təkrarsız və nizamsız birləşmələrin sayına bərabər olacaq: $|\Omega| = C_{100}^3$.

İndi isə $A = \{\text{alınan 3 biletin uduşsuz olması}\}$ hadisəsi üçün əlverişli halların sayını tapaq. Bunun üçün hər 3 biletin uduşsuz olması lazımdır. Uduşsuz lotereya biletlərinin sayı 98 olduğu üçün $|A| = C_{98}^3$ olar. Beləliklə, axtarılan ehtimal

$$P(A) = \frac{C_{98}^3}{C_{100}^3} = \frac{152096}{161700} \approx 0,941.$$

Beləliklə, hər 3 biletin uduşsuz olması ehtimalı kifayət qədər yüksəkdir.

Məsələ 7. Lotereyada 100 bilet iştirak edir, onlardan 25-i uduşludur. Alınmış 3 biletin hamısının uduşsuz olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. 100 biletdən 3-ü alındığı üçün $|\Omega| = C_{100}^3$.

Ehtimalı axtarılan A hadisəsi üçün əlverişli halların sayı $|A| = C_{75}^3$.

Ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{C_{75}^3}{C_{100}^3} = \frac{67525}{161700} \approx 0,418.$$

Məsələ 8. 24 lotereya biletindən 10-u uduşludur. Seçilmiş 3 biletdən heç olmazsa, birinin uduşlu olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. $A = \{\text{seçilmiş 3 biletdən heç olmazsa, birinin uduşlu olması}\}$ və A hadisəsinin əks hadisəsini $\bar{A}$ daxil edək:

$\bar{A} = \{\text{seçilmiş 3 biletdən heç biri uduşlu deyil}\}.$

$\bar{A}$ hadisəsinin ehtimalını tapaq:

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{10}^0 \cdot C_{14}^3}{C_{24}^3} = \frac{91}{506}.$$

Beləliklə, heç olmazsa, bir biletin uduşlu olması ehtimalı

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{91}{506} = \frac{415}{506} \approx 0,82.$$

Məsələ 9. 52 kartdan 5-i təsadüfi olaraq seçilir. Seçilmiş kartlardan 2-sinin tuz olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Aydındır ki, $|\Omega| = C_{52}^5$

Ehtimalı axtarılan hadisəni A ilə işarə edək:

$A = \{\text{seçilmiş kartlardan ikisinin tuz olması}\}.$

52 kart içərisində 4 tuz olduğu üçün kombinatorikanın vurma prinsipinə əsasən

$$|A| = C_4^2 \cdot C_{48}^3.$$

Ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{27} \approx 0,037.$$

Məsələ 10. (Bric məsələsi). 52 kart qarışdırılır və 4 bərabər hissəyə bölünür. Hər bir oyunçuya 1 tuz düşməsi hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. 52 kartın 4 bərabər hissəyə bölünməsi üsullarının sayı 52 elementin təkrarlı yerdəyişmələrinin sayına bərabərdir:

$$|\Omega| = C_{52}(13,13,13,13) = \frac{52!}{13! 13! 13! 13!}.$$

İndi isə A hadisəsi üçün əlverişli hallar sayını tapaq. Məlumdur ki, 52 kartdan 4-ü tuzdur. Yerdə qalan 48 kartı 4 oyunçu arasında bölsək hər birində 12 kart olmaqla $\frac{48!}{(12!)^4}$ sayda üsulla bölmək olar. Yerdə qalan 4 tuzu da 4 oyunçu arasında 4! üsulla paylamaq olar. Beləliklə,

$$|A| = 4! \cdot \frac{48!}{12! 12! 12! 12!}.$$

Ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4! \cdot 48!}{12! 12! 12! 12!} \cdot \frac{13! 13! 13! 13!}{52!} = \frac{2197}{20825} \approx 0,1055.$$

Məsələ 11. Yeddi oturacağı olan skamyaya 7 nəfər təsadüfi qaydada oturur. Onların arasında iki dost vardır. Onların yanaşı oturması hadisəsinin (A) ehtimalını tapın.

Həlli. Bütün mümkün halların sayı $|\Omega| = 7! = 5040$.

İndi isə A hadisəsi üçün əlverişli halların sayını tapaq. Fərz edək ki, dostlar əl-ələ tutmuşlar və onlara bir nəfər kimi baxsaq, onda bütün yerdəyişmələrin sayı $6!$ olar. Dostların öz aralarındakı yerdəyişməsini də nəzərə alsaq, əlverişli halların sayı $2 \cdot 6!$ olar.

Ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2 \cdot 6!}{7!} = \frac{2}{7} \approx 0,2857.$$

Məsələ 12. 6 düzgün oyun zəri atılır. Zərlərdə müxtəlif rəqəmlərin düşməsi hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Əvvəlcə elementar hadisələr fəzasını quraq:

$$\Omega = \{\omega: \omega = (a_1, a_2, \dots, a_6); a_i = \overline{1,6}; i = \overline{1,6}\}.$$

Hər bir zərdə 6 mümkün rəqəmdən biri düşə bilər. Vurma prinsipinə əsasən

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^6.$$

Ehtimalı axtarılan hadisəni aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$A = \{\text{zərlərdə müxtəlif rəqəmlərin düşməsi}\} =$$

$$= \{\omega: \omega = (a_1, \dots, a_6); a_1 \neq \dots \neq a_6; a_i = \overline{1,6}; i = \overline{1,6}\}.$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$|A| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$$

Beləliklə, ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6!}{6^6}.$$

Məsələ 13. 1, 2, ..., n ədədləri təsadüfi qaydada qarışdırılır və yenidən düzülür. Birinci ədədin yerində qalması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Əvvəlcə bütün mümkün halların sayını tapaq. Başqa sözlə, bütün mümkün elementar hadisələrin sayını müəyyən edək. n elementli çoxluqdakı bütün mümkün yerdəyişmələrinin sayı $n!$ olduğundan $|\Omega| = n!$ olur.

Ehtimalı axtarılan hadisəni A ilə işarə edək: $A = \{\text{birinci ədədin yerində qalması}\}$.

Asanlıqla görmək mümkündür ki, $|A| = (n - 1)!$.

Beləliklə, ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{(n - 1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Məsələ 14 (Ad günləri məsələsi). Qrupun siyahısında 12 tələbə vardır. Onların ad günlərinin müxtəlif aylara düşməsi hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Əvvəlcə bütün mümkün halların sayını müəyyən edək.

12 tələbənin hər biri 12 aydan ixtiyari birində anadan ola bilər. Buna görə də bütün mümkün halların sayı təkrarlı yerləşmələrin sayına bərabərdir:

$$|\Omega| = 12^{12}.$$

İndi isə $A = \{\text{ad günlərinin müxtəlif aylara düşməsi}\}$ hadisəsi üçün əlverişli halların sayını müəyyən edək. Aydır ki, siyahıdakı 1 nömrəli tələbə 12 aydan hər hansı birində anadan ola bilər. Buna görə onun ad günü üçün 12 müxtəlif üsul vardır. Bundan sonra siyahıda 2-ci olan tələbə üçün 11 mümkün üsul qalır və s. Deməli, axtarılan say təkrarsız yerdəyişmələrin sayına bərabərdir, yəni

$$|A| = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 1 = 12!.$$

Beləliklə, ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12!}{12^{12}}.$$

Uyğun hesablamalardan sonra axtarılan ehtimalın çox kiçik olduğunu görmək mümkündür:

$$P(A) \approx 0,00005372.$$

Məsələ 15 (Ad günləri məsələsi). Qrupda n sayda tələbə vardır. Heç olmasa iki tələbənin eyni gündə anadan olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Əvvəlcə bütün mümkün halların sayını tapaq. Bir ildəki günlərin sayını 365 gün qəbul etsək, vurma prinsipinə əsasən $|\Omega| = 365^n$.

A ilə heç olmasa iki tələbənin eyni gündə anadan olması hadisəsinə işarə edək. Bu hadisənin əks hadisəsinə $\bar{A}$ ilə işarə edək, yəni

$$\bar{A} = \{\text{bütün tələbələrin fərqli günlərdə anadan olması}\}.$$

Tələbələrin heç birinin eyni gündə anadan olmaması üçün birinci tələbə 365 gündən hər hansı birində anadan ola bilər, bundan sonra ikinci tələbə qalan 364 gündən hər hansı

birində anadan ola bilər və s. Buna görə də vurma prinsipinə əsasən

$$|\bar{A}| = 365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1) = A_{365}^n.$$

Ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(\bar{A}) = \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = \frac{A_{365}^n}{365^n}.$$

Beləliklə,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}.$$

olar.

Bu ehtimalı aşağıdakı kimi də yazmaq olar:

$$P(A) = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right) \left(1 - \frac{2}{365}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{365}\right).$$

Bu ehtimalın qiymətinin n -dən asılılığını ifadə edən aşağıdakı cədvəli quraq:

n	4	16	22	23	40	64
$P(A)$	0,16	0,284	0,476	0,507	0,891	0,997

Cədvəldən göründüyü kimi, qrupdakı tələbələrin sayı artdıqca A hadisəsinin ehtimalı artır. Belə ki, tələbələrin sayı 23-dən böyük olduqda bu ehtimal 0,5-dən böyük olur, tələbələrin sayı 64 olduqda isə A hadisəsi praktik olaraq yəqin hadisə olur.

Məsələ 16. Kitab rəfində 10 kitab təsadüfi qaydada düzülmüşdür. Onların arasında nömrələnmiş 3 kitab vardır. Bu 3 kitabın yan-yan olmaları ehtimalını tapın.

Həlli. Kitabların bütün mümkün düzülüşlərinin sayı $10!$ olduğundan $|\Omega| = 10!$ olur.

Kitablar təsadüfi düzüldüyü üçün bu düzülüşlərin hər biri eyni ehtimallıdır. Ehtimalı axtarılan hadisəni A ilə işarə edək və bu hadisə üçün əlverişli halların sayını tapaq. 3 kitabın yan-yanə olması üçün bütün üsulların sayı $3!$ -dir. Bu düzülüşlərin hər birini yerləşdirmək üçün 8 yer vardır. Bu üç kitabın bir-birinə bağlandığını fərz edək. Bu halda biz bu 3 kitaba 1 kitab kimi baxsaq, cəmi 8 kitab olar və bu 8 kitabın bütün mümkün düzülüşlərinin sayı $8!$ -dir. Hər bir belə düzülüş üçün 3 kitabın yan-yanə olmaqla öz aralarında bütün yerdəyişmələrini də nəzərə alsaq, əlverişli halların sayı $|A| = 3! \cdot 8!$ olar.

Beləliklə, ehtimalın klassik tərifinə görə

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3! \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{15}.$$

Məsələ 17. Kitab rəfində 10 kitab təsadüfi qaydada düzülmüşdür. Onların 5-i riyaziyyata, 3-ü fizikaya və 2-si kimyaya aiddir. Hər bir elm sahəsinə aid olan kitabların yan-yanə olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Kitabların bütün mümkün düzülüşlərinin sayı $10!$ olar. Buna görə də

$$|\Omega| = 10!$$

Kitablar təsadüfi düzüldüyü üçün bu düzülüşlərin hər biri eyni ehtimallıdır. Ehtimalı axtarılan hadisəni A ilə işarə edək və bu hadisə üçün əlverişli halların sayını tapaq. Hər bir elm sahəsinə aid olan kitabların ayrıca bir qutuda olduğunu fərz edək. Aydındır ki, kitabların həmin qutular daxilində bütün mümkün yerdəyişmələri A hadisəsi üçün əlverişli olacaqdır. Digər tərəfdən bu qutuların öz aralarındakı

yerdəyişmələri sayını da əlavə etsək və vurma prinsipini tətbiq etsək A hadisəsi üçün əlverişli halların sayının $|A| = 5! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 3!$ olduğunu əldə edərək.

Beləliklə, ehtimalın klassik tərifinə görə

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 3!}{10!} = \frac{1}{420}.$$

Məsələ 18. 20 mərtəbəli binanın birinci mərtəbəsində liftə 3 nəfər mindi. Sərnişinlərin liftdən enməsinin bütün mümkün kombinasiyalarının eyni ehtimallı olduğunu qəbul edərək aşağıdakı hadisələrin ehtimallarını tapın:

- a) sərnişinlərin hər üçünün fərqli mərtəbələrdə enməsi;
- b) sərnişinlərin hər üçünün eyni mərtəbədə enməsi;
- c) sərnişinlərin ikisinin eyni mərtəbədə enməsi.

Həlli. Sərnişinlər 1-ci mərtəbədə liftə mindikləri üçün hər biri üçün ənə biləcəkləri mərtəbələrin sayı 19-dur. Buna görə də bu üç sərnişinin hər birinin enməsi üçün 19 mümkün variant vardı. Buna görə də vurma prinsipinə əsasən:

$$|\Omega| = 19^3.$$

a) $A = \{\text{sərnişinlərin hər üçünün fərqli mərtəbələrdə enməsi}\}$ hadisəsi üçün mümkün halların sayını tapaq. Birinci sərnişin üçün 19, ikinci sərnişin üçün 18 və üçüncü sərnişin üçün 17 variant mümkündür. Buna görə də vurma prinsipinə əsasən:

$$|A| = A_{19}^3 = 19 \cdot 18 \cdot 17.$$

Ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{19 \cdot 19 \cdot 19} = \frac{306}{361}.$$

b) $B = \{\text{sərnişinlərin hər üçünün eyni mərtəbədə enməsi}\}$

hadisəsi üçün mümkün halların sayını tapaq. Aydınadır ki, bu halda $|B| = 19$.

Ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{19}{19^3} = \frac{1}{361}.$$

c) Aydınadır ki, A , B və C hadisələri üçün

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

şerti ödənilir. Buradan

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{306}{361} - \frac{1}{361} = \frac{54}{361}.$$

Məsələ 19. Sərnişinlərin sayı k olan lift n mərtəbədə dayanır. Fərz edək ki, sərnişinlərin liftdən enməsinin bütün mümkün kombinasiyaları eyni ehtimallıdır. İxtiyari iki sərnişinin eyni mərtəbədə düşməməsi ehtimalını tapın.

Həlli. Elementar hadisələr fəzası

$$\Omega = \{\omega: \omega = (a_1, a_2, \dots, a_k), a_i = \overline{1, n}; i = \overline{1, k}\}.$$

Təkrarlı yerləşmə sxeminə uyğun olaraq:

$$|\Omega| = n^k.$$

Məsələnin şərtinə görə $p(\omega) = \frac{1}{n^k}$ -lar Ω fəzasında ehtimalların müntəzəm paylanması təşkil edir. Ehtimalı axtarılan $A = \{\text{iki sərnişinin eyni mərtəbədə enməməsi}\}$ hadisəsi aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$A = \{\omega \in \Omega: \omega = (a_1, a_2, \dots, a_k), a_k \neq a_l, k \neq l\}.$$

Beləliklə,

$$|A| = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = A_n^k.$$

Ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{A_n^k}{n^k}.$$

Məsələ 20. “Statistika” sözünün hərflərini təsadüfi olaraq seçməklə “taksi” sözünün yazılması ehtimalını tapın.

Həlli. Təkrarlı yerdəyişmələrin sayı düsturuna əsasən

$$|\Omega| = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!}.$$

olar. “Taksi” sözünün düzəldilməsi hadisəsini A ilə işarə edək. Kombinatorikanın vurma prinsipinə əsasən bu hadisə üçün əlverişli halların sayı

$$|A| = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2.$$

Ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{3150} \approx 0,000317.$$

Məsələ 21. “Riyaziyyat” sözünün hərflərini təsadüfi olaraq seçməklə “Ziya” sözünün yazılması ehtimalını tapın.

Həlli. Təkrarlı yerdəyişmələrin sayı düsturuna əsasən

$$|\Omega| = \frac{10!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200.$$

“Ziya” sözünün düzəldilməsi hadisəsini A ilə işarə edək. Kombinatorikanın vurma prinsipinə əsasən bu hadisə üçün

əlvərişli halların sayı $|A| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2$.

Ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{151200} = \frac{1}{12600} \approx 0,000079.$$

Məsələ 22. 36 ədəddən 5-ni doğru ardıcılıqla tapan şəxs lotereyada əsas uduşu –“cekpot”u qazanır. Bu hadisənin ehtimalını tapın.

Həlli. Əvvəlcə bütün mümkün halların sayını müəyyən edək. Vurma prinsipinə əsasən

$$|\Omega| = 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 = 45239040.$$

A hadisəsi yalnız və yalnız 5 ədəd doğru ardıcılıqla tapıldıqda baş verdiyi üçün $|A| = 1$.

Ehtimalın klassik tərifinə görə

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{45239040} \approx 0,00000002.$$

Göründüyü kimi, bu ehtimal yüz milyonda ikiyə bərabərdir, yəni çox kiçik ədəddir.

Əgər bu məsələnin şərtində 5 ədədin ardıcılığı nəzərə alınmazsa, yəni $B = \{36 \text{ ədəddən } 5\text{-nin doğru tapılması}\}$ hadisəsinin ehtimalının tapılması tələb olunarsa, bu halda $|B| = 5!$ olar və beləliklə, axtarılan ehtimal

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{120}{45239040} \approx 0,000002.$$

Göründüyü kimi, 5 rəqəmin ardıcılığı nəzərə alınmadıqda “cekpot”un ehtimalı 120 dəfə artaraq, milyonda ikiyə bərabər olur, yəni yenə də kifayət qədər kiçik ədəddir.

Məsələ 23. 100 lotereya biletindən 10-u uduşludur. Neçə bilet almaq lazımdır ki, heç olmazsa bir biletin uduşlu olması ehtimalı 0,5-dən böyük olsun.

Həlli. Alınan biletlərin sayını n ilə işarə edək. Bu biletlərdən heç olmasa birinin uduşlu olması ehtimalını p_n ilə işarə edək. Aydındır ki, n artdıqca p_n ehtimalı da artır. Məqsədımız elə ən kiçik n ədədi tapmaqdır ki, $p_n > 0,5$ olsun. Əks hadisənin ehtimalı düsturuna görə

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - \frac{C_{90}^n}{C_{100}^n} = 1 - \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdots (90 - (n - 1))}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots (100 - (n - 1))} = \\ &= 1 - \left(1 - \frac{10}{100}\right) \left(1 - \frac{10}{99}\right) \cdots \left(1 - \frac{10}{100 - (n - 1)}\right) > \\ &> 1 - \left(1 - \frac{10}{100}\right) \left(1 - \frac{10}{100}\right) \cdots \left(1 - \frac{10}{100}\right). \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$p_n > 1 - \left(1 - \frac{10}{100}\right)^n$$

olduğunu əldə edirik.

Yoxlamaqla görmək mümkündür ki,

$$p_4 = 0,34, \quad p_5 = 0,43, \quad p_6 = 0,56.$$

Deməli, məsələnin şərtini ödəyən $n = 6$ -dır.

Məsələlər.

1. Qutuda 4 ağ, 5 qara və 2 qırmızı rəngli kürəcik vardır. Təsadüfi olaraq seçilən 4 kürəcikdən ikisinin ağ, digər ikisinin isə qara və

qırmızı rəngli olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

$$\text{Cavab: } \frac{2}{11}.$$

2. n sayda simmetrik metal pul atılır.

$A = \{\text{bütün metal pullarda rəqəm üzünün düşməsi}\};$

$B = \{\text{birinci metal pulda rəqəm üzünün düşməsi}\};$

$C = \{\text{yalnız birinci metal pulda rəqəm üzünün düşməsi}\}$
hadisələrinin ehtimallarını tapın.

$$\text{Cavab: } P(A) = \frac{1}{2^n}; P(B) = \frac{1}{2}; P(C) = \frac{1}{2^n}.$$

3. n sayda düzgün oyun zəri atılır. Aşağıdakı hadisələrin ehtimallarını tapın.

$A = \{\text{birinci zərdə "6" üzünün düşməsi}\};$

$B = \{\text{birinci və sonuncu zərdə "6" üzünün düşməsi}\};$

$C = \{\text{yalnız üçüncü zərdə "6" üzünün düşməsi}\}.$

$$\text{Cavab: } P(A) = \frac{1}{6}; P(B) = \frac{1}{36}; P(C) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

4. $\{1, 2, \dots, 100\}$ çoxluğundan təsadüfi olaraq bir ədəd seçilir. Bu ədədin 3-ə qalıqsız bölünməsi hadisəsinin ehtimalını tapın.

$$\text{Cavab: } \frac{33}{100}.$$

5. 9 sərnəşin 3 vaqona təsadüfi qaydada minir. Aşağıdakı hadisələrin ehtimalını tapın:

$A = \{\text{hər vaqona 3 sərnəşinin minməsi}\};$

$B = \{\text{bir vaqona 4, digərinə 3 və üçüncüyə 2 sərnəşinin minməsi}\}.$

$$\text{Cavab: } \frac{9!}{(3!)^3 3^9}; \frac{9!}{4! 3! 2! 3^9}.$$

6. Yeddi mərtəbəli binanın ilk mərtəbəsində 3 sərnəşin liftə mindi. İkinci mərtəbədə başlayaraq hər bir sərnəşin istənilən mərtəbədə lifti eyni ehtimalla tərk edə bilər. Aşağıdakı hadisələrin ehtimalını tapın:

$A = \{\text{bütün sərnəşinlərin lifti 4-cü mərtəbədə tərk etməsi}\};$

$B = \{\text{bütün sərnəşinlərin lifti eyni anda (hər hansı mərtəbələrədən birində) tərk etməsi}\};$

$C = \{\text{bütün sərnişinlərin lifti müxtəlif mərtəbələrdə tərk etməsi}\}.$

Cavab: $1/216, 1/36, 5/9.$

7. $n + m$ lotereya biletindən n saydası uduşludur. Eyni zamanda ixtiyari k sayda lotereya bileti əldə olunur. Onlardan s saydasının uduşlu olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

$$\text{Cavab: } P = \frac{C_n^s \cdot C_m^{k-s}}{C_{n+m}^k}.$$

8. m sayda uduşlu bilet olan lotereyada n sayda bilet vardır. k sayda bileti olanın qalib gəlmə ehtimalını tapın.

$$\text{Cavab: } 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}.$$

9. Qutuda $1, 2, \dots, n$ rəqəmləri ilə nömrələnmiş kürəciklər var. Qutudan qaytarmaq şərti ilə k ($k \leq n$) sayda kürəcik çıxarılır. Çıxarılan kürəciklərin nömrələrinin artan ardıcılıq əmələ gətirməsi hadisəsinin ehtimalını tapın.

$$\text{Cavab: } \frac{C_n^k}{n^k}.$$

10. Qutuda $1, 2, \dots, n$ rəqəmləri ilə nömrələnmiş kürəciklər var. Təsadüfi qaydada k sayda kürəcik çıxarılır və çıxarılan kürəciklərin nömrəsi sıra ilə yazılır. Çıxarılma a) qaytarmaq şərti ilə; b) qaytarmamaq şərti ilə aparılırsa, m -ci kürəciyin qeyd olunmuş m -ci yerdə ($m \leq k$) olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

$$\text{Cavab: a) } 1/n(1 - 1/n)^{k-1}; \text{ b) } 1/n.$$

11. 36 rəqəmdən 5-ni doğru ardıcılıqla tapan şəxs lotereyada əsas uduşu – “cekpot”u qazanır.

- a) 4 rəqəmin tapılması; b) yalnız 3 rəqəmin tapılması hadisələrin ehtimallarını tapın.

$$\text{Cavab: a) } 0,00000053; \text{ b) } 0,00000013.$$

*Təsadüfi kəşfləri yalnız hazırlanmış
ağıllar edə bilər.*

Blez Paskal

§1.7. Ehtimal nəzəriyyəsinin bəzi tarixi məsələləri

Bu paraqrafda biz ehtimal nəzəriyyəsinin yaranmasında mühüm rol oynamış bəzi tarixi məsələlərlə tanış olacağıq. Orta əsrlərdə zər atılması ilə bağlı olan azarlı oyunlar çox geniş yayılmışdı. Azarlı oyunlara maraq göstərənlərdən biri də XIV Lüdovikin sarayında mühüm rol oynamış şevalye adlandırılan filosof, ədəbiyyatçı de Mere olmuşdur. Şevalye de Mere həm də bu oyunlarda müəyyən qanunauyğunluqlar aşkar etməyə çalışmış və bu məqsədlə o dövrün bir çox məşhur alimlərinə müxtəlif məktublar yazmışdır. Belə məktublardan bir neçəsi də Blez Paskala yazılmışdır. XVII əsrin böyük alimləri Tartaliya, Blez Paskal və Pyer Ferma arasında olmuş məşhur məktublarda məhz ehtimal nəzəriyyəsinə aid məsələlərin həlli öz əksini tapmışdır. Bu məktublarda olan məsələlərdən biri aşağıdakı kimidir:

Məsələ 1 (Tartaliya məsələsi). İki düzgün oyun zəri atılır. Düşən rəqəmlərin cəminin neçə olmasından mərc gəlmək daha sərfəlidir?

Həlli. İki düzgün oyun zəri atıldıqda elementar hadisələr fəzası aşağıdakı kimidir:

$$\Omega = \{\omega: \omega = (a_1, a_2), a_i = \overline{1,6}, i = 1,2\}.$$

Aşağıdakı cədvəli quraq:

Rəqəmlərin cəmi	Uyğun nəticələr	Üsulların sayı
2	(1,1)	1
3	(1,2); (2,1)	2
4	(1,3); (2,2); (3,1)	3
5	(1,4); (2,3); (3,2); (4,1)	4
6	(1,5); (2,4); (3,3); (4,2); (5,1)	5
7	(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)	6
8	(2,6); (3,5); (4,4); (5,3); (6,2)	5
9	(3,6); (4,5); (5,4); (6,3)	4
10	(4,6); (5,5); (6,4)	3
11	(5,6); (6,5)	2
12	(6,6)	1

Cədvəldən də göründüyü kimi, düşən rəqəmlərin cəminin 7 olmasından mərc gəlmək daha sərfəlidir. Çünki bu halda mümkün üsulların sayı daha çoxdur, yəni 6-dır. Ehtimalın klassik tərifinə görə düşən rəqəmlərin cəminin 7 olması (A) ehtimalı isə

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Məsələ 2 (Şəvalye de Mere məsələsi). 3 düzgün oyun zəri atılır. Düşən rəqəmlər cəminin 11 olması, yoxsa 12 olması ehtimalı daha böyükdür?

Qeyd edək ki, de Mere bu məsələni doğru həll edə bilməmişdir. O belə düşünmüşdür:

11 ədədini 6 müxtəlif yolla əldə etmək mümkündür:
(6,4,1); (6,3,2); (5,5,1); (5,4,2); (5,3,3); (4,4,3).

12 ədədini də 6 müxtəlif yolla əldə etmək mümkündür:

$(6,5,1); (6,4,2); (6,3,3); (5,5,2); (5,4,3); (4,4,4).$

Buna görə də de Mere hesab edirdi ki, cəmin 11 və 12 olması ehtimalı bir-birinə bərabərdir. Lakin Paskala məktubunda de Mere həm də yazırdı ki, zər atılması oyunlarını uzun müddət müşahidə edərək belə bir nəticəyə gəlmişdir ki, cəmin 11 olmasından mərc gələnələr daha çox qələbə qazanırlar, nəinki 12 olmasından mərc gələnələr. Cavab məktubunda və həm də Fermaya yazdığı məktubda Paskal, de Merenin düşüncələrindəki səhvi göstərmişdir. Belə ki, de Merenin baxdığı hallar eyni imkanlı hallar deyildir. Başqa sözlə, bu halda klassik tərifdəki mühüm şərt ödənmir. Məsələn, Merenin dediyi kimi cəmin 11 olmasını təmin edən $(6,4,1)$ nəticəsi 6 müxtəlif variantdan yalnız biridir. Halbuki, bu zaman 6 müxtəlif variant vardır:

$(6,4,1); (6,1,4); (1,6,4); (4,1,6); (4,6,1); (1,4,6).$

De Mere isə bu 6 variantdan yalnız birini götürmüşdür.

Asanlıqla görmək mümkündür ki, cəmin 12 olmasını təmin edən $(4,4,4)$ nəticəsi yalnız 1 halda, yəni hər bir zərdə 4 rəqəmi düşdükdə baş verə bilər.

Göründüyü kimi, de Mere elementar hadisələr fəzasını doğru qura bilməmişdir.

Bu məsələnin doğru həlli aşağıdakı kimidir:

3 oyun zəri atıldıqda elementar hadisələr fəzası aşağıdakı kimidir:

$$\Omega = \{\omega: \omega = (a_1, a_2, a_3), a_i = \overline{1,6}; i = 1,2,3\}.$$

Vurma prinsipinə görə bütün mümkün halların sayı $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ olar.

A ilə düşən rəqəmlərin cəminin 11, B ilə isə 12 olması hadisələrini işarə edək.

Asanlıqla görmək mümkündür ki, $|A| = 27$.

Doğrudan da, məsələn, 1, 4 və 6 kimi müxtəlif rəqəmlərdən istifadə olunmaqla cəmin 11-ə bərabər olmasını təmin edən $3! = 6$ sayda müxtəlif variant vardır:

$(1, 4, 6); (1, 6, 4); (4, 1, 6); (4, 6, 1); (6, 4, 1); (6, 1, 4)$.

Təkrar olunan rəqəmlərlə düzələn müxtəlif variantların sayı isə $\frac{3!}{1!2!} = 3$ olar. Məsələn, $(1,5,5); (5,1,5); (5,5,1)$.

Eyni qaydada asanlıqla $|B| = 25$ olduğunu əldə edərik.

Ehtimalın klassik tərifinə görə

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{27}{216}$$

və

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{25}{216}.$$

Beləliklə, $P(A) > P(B)$.

Məsələ 3 (Şəvalye de Mere məsələsi). 3 düzgün oyun zəri atılır. 6 üzünün heç olmasa bir dəfə düşməsindən mərc gəlmək sərfəlidirmi?

Həlli. Aydındır ki, 3 düzgün oyun zəri atıldıqda elementar hadisələrin sayı $|\Omega| = 6^3$ olar.

İndi isə A hadisəsini quraq:

$A = \{6 \text{ üzünün heç olmasa bir dəfə düşməsi}\}.$

Aydındır ki, A hadisəsinin ehtimalını tapmaq üçün əvvəlcə onun əks hadisəsi olan

$$\bar{A} = \{6 \text{ üzünün düşməməsi}\}$$

hadisəsinin ehtimalını tapmaq:

$$P(\bar{A}) = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}.$$

Beləliklə,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0,44.$$

Göründüyü kimi, bu hadisənin ehtimalı $\frac{1}{2}$ -dən kiçikdir. Buradan aydın olur ki, məhz buna görə də de Mere mərc zamanı tez-tez məğlub olurmuş. Buna görə də o, riyaziyyatçılara müraciət etmişdir. Riyaziyyatçılar məsələni həll etdikdən sonra ona bundan sonra 4 oyun zəri atıldıqda eyni hadisənin baş verməsindən mərc gəlməyi məsləhət görmüşlər. Doğrudan da, 4 oyun zəri atıldıqda bu hadisənin ehtimalı

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5^4}{6^4} = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0,51.$$

Məsələ 4 (Qaliley məsələsi). 3 düzgün oyun zəri atılır. Cəmin 9, yoxsa 10 olması ehtimalı daha böyükdür? (Bu məsələnin həlli oxucuya həvalə olunur).

Məsələ 5 (Dalamber səhvi). Metal pul 2 dəfə atılır. Heç olmasa 1 dəfə gerb üzünün düşməsi hadisəsinin (A) ehtimalını tapmaq tələb olunur.

De Merenin yol verdiyi səhvi çox sonralar məşhur fransız riyaziyyatçısı və filosofu Jan Leron Dalamber də

təkrarlamışdır. Belə ki, o da elementar hadisələr fəzasını qurarkən elementar hadisələrin eyni ehtimallı olması şərtinin pozulduğunu gözdən qaçırmışdır.

Dalamber belə düşünmüşdür:

“gerb üzü ya birinci dəfə, ya ikinci dəfə düşəcəkdir, ya heç düşməyəcəkdir. Bütün halların sayı 3, əlverişli halların sayı isə 2-dir. Buna görə də axtarılan ehtimal $2/3$ -yə bərabərdir”.

Halbuki, elementar hadisələrin sayı Dalamberin dediyi kimi 3 yox, 4-dür:

$$\Omega = \{GG, GR, RG, RR\}.$$

Ehtimalı axtarılan A hadisəsi isə aşağıdakı kimidir:

$$A = \{GG, GR, RG\}.$$

Ehtimalın klassik tərifinə görə

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}.$$

Rulet oyunu. Rulet fransızca "kiçik təkər" deməkdir və bir kazino oyununun adıdır. Bu təkər 37 sektora bölünmüşdür və 0-da 36-ya qədər nömrələnmişdir (00 əlavə edildiyi üçün Amerika ruletində 38 sektor vardır). Sıfırıncı sektor “zero” adlanır və yaşıl rəngdə olur. 1 nömrəli sektor qırmızı olmaqla qalan sektorlar növbə ilə qırmızı və qara rəngli olur. Təkər üzərində nömrələr ardıcıl düzülməmişdir. Bu oyunu oynayan oyunçular mərclərini qırmızı və ya qara rənglərə, tək və ya cüt ədədlərə və ya konkret ədədə yerləşdirə bilirlər. Qazanan nömrəni və rəngi müəyyənləşdirmək

üçün, ruleti müəyyən bir istiqamətə çevirdikdən sonra kiçik top, təkərin çərçivəsinin dairəvi yolunu təşkil edən digər istiqamətdə dairəvi yola atılır. İlk rulet növünün 17-ci əsrdə Blez Paskal tərəfindən hazırlandığı düşünülür.

Məsələ 6. 18 qırmızı, 18 qara və bir “sıfır” yazılmış 37 xanadan ibarət rulet oyununda 10 manat qoyulur və əgər top qırmızı xanaya düşərsə, 10 manat qazanırıq, əks halda isə 10 manat itiririk.

Bu oyunda qazancın orta miqdarını tapaq.

Həlli. Aydındır ki, hər dəfə qazanmaq ehtimalı

$$p = \frac{18}{37} = 0,486,$$

itirmək ehtimalı isə

$$q = \frac{19}{37} = 0,514.$$

Beləliklə, orta qazancın miqdarı

$$10p + (-10)q = 10 \cdot 0,486 - 10 \cdot 0,514 = -0,27 \text{ manat.}$$

Beləliklə, rulet oyununda 10 manat qoyan oyunçu orta hesabla 27 qəpik zərərdə olur.

Uduşun ədalətli bölünməsi haqqında məsələ. Ehtimal nəzəriyyəsinin digər maraqlı tarixi məsələlərindən biri uduşun ədalətli bölünməsi haqqında məsələdir. Bu məsələnin çox maraqlı tarixçəsi vardır. 1494-cü ildə italyan riyaziyyatçısı Luka Paçioli özünün riyaziyyata aid ensiklopedik əsərlər küllüsünü çap etdirmişdir və burada aşağıdakı məsələnin həllinə cəhd etmişdir:

Məsələ 7. Oyun zəri ilə oynayan iki oyunçu razılaşırlar ki, əgər onlardan biri oyunun k partiyasını udarsa, o, qalib

hesab olunur və qoyulmuş məbləği götürür. Hər iki oyunçu üçün partiyanın uduşlu olması eyni imkanlıdır. Lakin birinci oyunçu a sayda partiyanı ($a < k$), ikinci oyunçu isə b sayda partiyanı ($b < k$) udduqdan sonra oyun dayandırılır. Onda oyuna qoyulmuş məbləği ədalətli olaraq necə bölüşdürmək lazımdır?

L.Paçiolli bu məsələnin düzgün həllini tapa bilməmişdir. O, təklif etmişdir ki, məbləğ oyunçular arasında müəyyən nisbətdə bölünməlidir. Belə ki, birinci oyunçuya $\frac{a}{a+b}$, ikinci oyunçuya $\frac{b}{a+b}$ məbləği verilməlidir.

1550-ci ildən sonra digər italyan riyaziyyatçısı Ceramolo Kardano Paçiollinin həllini haqlı olaraq tənqid etsə də özü də məsələni yalnız həll etmişdir. Bu məsələ düzgün həllini təxminən 100 il sonra 1654-cü ildə məşhur fransız riyaziyyatçıları B.Paskal və P.Ferma arasında olan məktublaşma zamanı tapmışdır. B.Paskal bu məsələni $k = 3, a = 2, b = 1$ olduqda aşağıdakı kimi həll etmişdir:

Fərz edək ki, I oyunçu $a = 2$ oyun partiyasını və II oyunçu isə $b = 1$ oyun partiyasını udduqda oyun dayandırılmışdır.

Məbləğin necə bölüşdürülməsi hələlik aydın deyil. Lakin əgər oyunçular bir partiya da oynasalar, məbləğin bölüşdürülməsi aydınlaşar.

Belə ki, əslində, bu partiyayı birinci oyunçu qazansa, onda qalib olar və bütün məbləği birinci oyunçu götürər. Əgər bu partiyayı ikinci oyunçu udsa, onda ədalətli olar ki, bütün məbləğ yarıya bölünsün, çünki hər iki oyunçuda iki uduş olur.

Beləliklə, birinci oyunçu bütün məbləği və ya məblə-

ğın yarısını qazana bilər, yəni birinci oyunçu üçün ortalama məbləğ

$$\frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

olur. İkinci oyunçu üçün isə ortalama məbləğ

$$\frac{0 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

olur, çünki ikinci oyunçu ya heç nə qazanmır, ya da məbləğin yarısını qazanır.

Deməli, məbləğ oyunçular arasında Paciollinin təklif etdiyi kimi 2:1 nisbətində deyil, 3:1 nisbətində bölünməlidir.

Məsələ 8. (Çebışev məsələsi). 6 düzgün oyun zəri atılır. Oyunçu 10 manat pul vahidi qoyur. Əgər düşən rəqəmlərin cəmi 6 və ya 36 olarsa, bu halda oyunçu 78 manat, düşən rəqəm cəmi 7 və ya 35 olarsa, 24 manat qazanır. Əgər cəmi 8 və ya 34 olarsa 4 manat qazanır. Digər hallarda isə heç nə qazanmır. Bu oyun oyunçu üçün sərfəlidirmi?

Həlli. Oyun zərlərini nömrələyək:

$$\Omega = \{\omega: \omega = (a_1, \dots, a_6); a_i = \overline{1,6} \ i = \overline{1,6}\}.$$

Aydındır ki, $n = |\Omega| = 6^6 = 46656$.

Zərdə düşən rəqəmlərin cəmini S ilə işarə edək:

$$S = a_1 + \dots + a_6.$$

Aydındır ki,

$$P(S = 6) = P(S = 36) = \frac{1}{n}$$

Çünki hər iki halda yalnız bir əlverişli hal vardır:

$$(1,1,1,1,1,1) \text{ və } (6,6,6,6,6,6).$$

Beləliklə, oyunçunun 78 manat qazanması ehtimalı

$$p_1 = \frac{2}{n} = \frac{2}{46656} = 0,000042866941$$

olar.

Eyni qayda ilə

$$P\{S = 7\} = P\{S = 35\} = \frac{6}{n}.$$

Beləliklə, oyunçunun 24 manat qazanması ehtimalı

$$p_2 = \frac{2 \cdot 6}{n} = \frac{2 \cdot 6}{46656} \approx 0,000257202646.$$

Nəhayət, oyunçunun 4 manat qazanması ehtimalı

$$p_3 = \frac{2 \cdot 21}{n} = 0,00090206761.$$

Beləliklə, oyunçunun oyunda heç olmasa bir dəfə qazanc əldə etməsi ehtimalı

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0,001200274.$$

İndi isə oyunçunun orta qazancını tapaq:

$$(78 \cdot p_1 + 24 \cdot p_2 + 4 \cdot p_3) \cdot 100 = 1,311 \text{ manat.}$$

Beləliklə, oyunçunun orta qazancının qoyulan məbləğ-dən təxminən 10 dəfə kiçik olduğunu görürük. Deməli, oyun sərfəli deyil.

Hər bir verilmiş anda "trivial" və "mümkün olmayan" arasında nazik bir təbəqə vardır. Riyazi kəşflər məhz bu təbəqədə edilir. Sifariş edilmiş təbiiqi məsələ əksər hallarda ya trivial həll olunur, ya da ümumiyyətlə həll olunmur ...

A.N.Kolmoqorov

§1.8. Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomatik quruluşu. Kolmoqorov aksiomları

Elementar hadisələr fəzası sonlu və ya hesabi çoxluq olduqda onun ixtiyari alt çoxluğu təsadüfi hadisədir. Bu faktı elementar hadisələr fəzası kontinyum güclü olan çoxluqlar olduqda demək olmaz. Belə ki, Ω elementar hadisələr fəzası kontinyum güclü olduqda (məsələn, $\Omega = [a, b]$) onun istənilən alt çoxluğunun ehtimal ölçüsünü birqiymətli təyin etmək mümkün olmur. Nəticələr çoxluğu kontinyum çoxluq olduqda sınağın riyazi modelini qurmaq bu sınaqla bağlı hadisələr küllüsünü təyin etmək lazım gəlir. Bu məqsədlə aşağıdakı tərif verək:

Tərif 1. $\mathcal{A}$ ilə Ω -nın müəyyən alt çoxluqlar sinfini işarə edək. Əgər

1) ixtiyari $A \in \mathcal{A}$ üçün $\bar{A} \in \mathcal{A}$,

2) ixtiyari $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ üçün $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$

şərtləri ödənilərsə, bu halda $\mathcal{A}$ sinfinə **hadisələr cəbri** və ya sadəcə **cəbr** deyilir.

Cəbrin tərifindən çıxır ki, $\Omega \in \mathcal{A}$ və $\emptyset \in \mathcal{A}$.

De Morqan qanunlarına görə həm də $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

Beləliklə, hadisələr cəbri tamamlanma və sonlu sayda birləşmə və kəsişmə əməllərinə görə qapalı sinifdir.

İndi isə σ -cəbr anlayışını verək.

Tərif 2. Ω -nın müəyyən boş olmayan alt çoxluqları çoxluğunu $\mathcal{F}$ ilə işarə edək. $\mathcal{F}$ sinfi üçün

1) ixtiyari $A \in \mathcal{F}$ üçün $\bar{A} \in \mathcal{F}$,

2) hesabi sayda $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ üçün $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

şərtləri ödənilərsə, bu halda $\mathcal{F}$ sinfinə **hadisələr σ -cəbri** və ya sadəcə **σ -cəbr** deyilir.

Bu tərifdən görünür ki, $\Omega \in \mathcal{F}$ və $\emptyset \in \mathcal{F}$ və $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Hadisələr σ -cəbri tamamlanma, hesabi sayda birləşmə və kəsişmə əməllərinə görə qapalı sinifdir. Təriflərdən görün-düyü kimi, hər bir σ -cəbr həm də cəbrdir, lakin tərsi doğru deyil.

Qeyd edək ki, Ω sonlu olduqda cəbr və σ -cəbr anlayışları üst-üstə düşür.

Cəbr və σ -cəbrə aid aşağıdakı misalları göstərək:

1. $\mathcal{F}_* = \{\emptyset, \Omega\}$ çoxluqlar çoxluğu minimal σ -cəbrdir.
2. $\mathcal{F}^* = \{\Omega - \text{nın bütün alt çoxluqları}\}$ sinfi maksimal minimal σ -cəbrdir.
3. $\mathcal{F}_A = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ sinfi isə A hadisəsinin doğurduğu σ -cəbrdir.

Qeyd edək ki, bu çoxluqlar sistemi bölgülərin doğurduğu sistemin xüsusi halıdır. $\mathfrak{D} = \{D_1, D_2, \dots\}$ ilə Ω -nın boş olmayan çoxluqlara müəyyən hesabi bölgüsünü işarə edək:

$$\Omega = D_1 \cup D_2 \cup \dots; D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j.$$

Onda bu bölgünün elementlərinin ($\emptyset$ da daxil olmaqla) sonlu və ya hesabi sayda birləşmələrindən ibarət olan çoxluqların $\alpha(\mathfrak{D})$ sistemi σ -cəbrdir.

4. Ω sonlu elementar hadisələr fəzası olsun.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}.$$

Bu çoxluğun alt çoxluqlarından ibarət olan aşağıdakı çoxluqlar çoxluğuna (sisteminə) baxaq:

$$\mathcal{F}_1 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \emptyset, \Omega\}$$

sistemi σ -cəbrdir.

$$\mathcal{F}_2 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \emptyset, \Omega\}$$

çoxluqlar sistemi isə cəbr deyil. Çünki

$$\overline{\{\omega_1\}} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\} \notin \mathcal{F}_2.$$

Başqa sözlə, $\{\omega_1\}$ elementinin tamamlanması $\mathcal{F}_2$ sisteminə daxil deyil.

Qeyd edək ki, σ -cəbrlərin kəsişməsi σ - cəbrdir.

Aşağıdakı misal göstərir ki, σ -cəbrlərin birləşməsi σ -cəbr olmaya da bilər.

Misal. Ω sonlu elementar hadisələr fəzası olsun.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}.$$

Bu çoxluğun alt çoxluqlarından ibarət olan aşağıdakı çoxluqlar çoxluğuna (sisteminə) baxaq:

$$\mathcal{F}_1 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \emptyset, \Omega\} \text{ və}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \emptyset, \Omega\}$$

sistemləri σ - cəbrdir. Lakin

$$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \emptyset, \Omega\}$$

çoxluqlar çoxluğu isə σ - cəbr deyil. Çünki

$$\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} = \{\omega_1, \omega_2\} \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2.$$

Stoxastik eksperimentin riyazi modelini qurmaq üçün iki obyektə Ω elementar hadisələr fəzası və $\forall A \in \mathcal{F}$ hadisəsinin ehtimalının verilməsi ilə tanış olaq:

$(\Omega, \mathcal{F})$ ölçülən fəzasında təyin olunmuş aşağıdakı aksiomları ödəyən həqiqi qiymətli $P(A)$ funksiyası ehtimal adlanır:

$$P_1) P(A) \geq 0; \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

$$P_2) A_i \in \mathcal{F}; \quad i = 1, 2, \dots; \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j \text{ üçün}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

$$P_3) P(\Omega) = 1.$$

P_1, P_2, P_3 aksiomları **Kolmoqorov aksiomları** adlanır. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ üçlüyünə **ehtimal fəzası** deyilir. Ehtimal fəzası aparılan stoxastik eksperimentin riyazi modelini ifadə edir. Kolmoqorov aksiomlarını ödəyən ehtimal fəzalarını qurmaq olar (məsələn, diskret ehtimal fəzası, həndəsi ehtimal fəzası). Bu o deməkdir ki, Kolmoqorov aksiomları ziddiyyətsizdir.

Bu aksiomlar sistemi tam deyildir. Bu o deməkdir ki, bu aksiomlar sistemində ehtimal ölçüsünü müxtəlif üsullarla vermək olar. Ancaq tələb olunur ki, normallıq şərti ödənsin. Məsələn, düzgün zərin bir dəfə atılması eksperimentində

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_6) = \frac{1}{6}. \quad (1)$$

Başqa bir halda zərin bir dəfə atılması eksperimentində

$$P(\omega_i) = \frac{i}{21} \quad (2)$$

götürə bilərik. Burada ω_i elementar hadisəsi zərdə i üzünün yuxarı düşməsi hadisəsidir. (1) və (2) bərabərlikləri ilə verilmiş ehtimallar Kolmoqorov aksiomlarını ödəyir.

Ehtimal nəzəriyyəsinin Kolmoqorov aksiomları sisteminin tam olmaması məhz müxtəlif məsələlərdə rast gəlinən təbii halların nəticəsindədir. Doğrudan da, əgər zər düzgündürsə, ehtimalı (1) ilə, düzgün deyilsə (onun kütləsi elə paylanmışdırsa ki, hər bir uzun düşmə ehtimalı o üz üzərindəki rəqəm ilə mütənasibdir), onda ehtimalı (2) ilə vermək münasibdir.

İndi isə ədəd oxunda Borel çoxluğu anlayışını verək.

Ədəd oxunun (a, b) , $a, b \in R$ kimi aralıqlarının sonlu və ya hesabi sayda birləşməsi və tamamlanması ilə alınan çoxluqlara ədəd oxunda **Borel çoxluqları** deyilir.

Borel çoxluqları sinfi kifayət qədər genişdir. Göstərək ki, bütün bir nöqtəli çoxluqlar, bütün sonlu və sonsuz intervallar Borel çoxluqlarıdır. Ədəd oxunun Borel çoxluqları sinfini $\beta(R)$ ilə işarə edək.

Göstərək ki, $\{a\} \in \beta(R)$.

Doğrudan da, tərifə görə

$$\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \in \beta(R).$$

Beləliklə,

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \in \beta(R).$$

Göstərək ki, $[a, b] \in \beta(R)$.

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$[a, b] = \{a\} \cup (a, b) \cup \{b\} \in \beta(R).$$

Eyni qayda ilə görmək olar ki, $(a, b) \in \beta(R)$ və $[a, b] \in \beta(R)$.

Sonsuz aralıqların da $\beta(R)$ Borel siqma cəbrinə daxil olduğunu asanlıqla görmək mümkündür. Məsələn, $(a, \infty) \in \beta(R)$, çünki $(a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, n) \in \beta(R)$. Bundan başqa, $[a, \infty) = \{a\} \cup (a, \infty)$ göstərildiyindən və sağdakı çoxluqların hər biri Borel çoxluğu olduğundan onların birləşməsi də Borel çoxluğu olur və deməli, $[a, \infty) \in \beta(R)$.

Asanlıqla göstərmək mümkündür ki,

$$\overline{(a, \infty)} = (-\infty, a] \in \beta(R),$$

$$(-\infty, a) = (-\infty, a] \setminus \{a\} \in \beta(R).$$

Aşağıdakı teoremdə verilən ehtimal ölçüsünün kəsilməzlik xassəsi sonlu additiv ehtimal ölçüsünün hesabi additiv olmasını təmin edir.

Teorem. Fərz edək ki, $\mathcal{A}$ cəbrində sonlu additiv $P = P(A)$ çoxluq funksiyası verilmişdir, belə ki, $P(\Omega) = 1$. Onda aşağıdakı dörd şərt bir-birinə ekvivalentdir:

- 1) P -hesabi-additivdir (P -ehtimaldır),
- 2) P yuxarıdan kəsilməzdir, yəni istənilən $A_n \in \mathcal{A}$, $n \geq 1$, $A_n \subseteq A_{n+1}$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A).$$
- 3) P aşağıdan kəsilməzdir, yəni ixtiyari $A_n \in \mathcal{A}$, $n \geq 1$, $A_n \supseteq A_{n+1}$, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A).$$
- 4) P "sıfırda" kəsilməzdir, yəni istənilən $A_n \in \mathcal{A}$, $n \geq 1$, $A_{n+1} \subseteq A_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0.$$

Bu teoremin isbatı [28]-də verilmişdir.

*Riyaziyyat – fərqli şeyləri
eyni adla adlandırmaq incəsənətidir.*

Anri Puankare

§1.9. Ehtimalın xassələri

Kolmoqorov aksiomlarından istifadə etməklə ehtimalın bəzi xassələrini verək. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzası olsun.

1. Qeyri mümkün hadisənin ehtimalı.

$$P(\emptyset) = 0.$$

İsbatı. $\emptyset \cup \Omega = \Omega$ olduğu üçün
 $P(\emptyset \cup \Omega) = P(\Omega).$

Digər tərəfdən $\emptyset \cap \Omega = \emptyset$ olduğundan additivlik aksiomuna əsasən

$$P(\emptyset) + P(\Omega) = P(\Omega).$$

Beləliklə,

$$P(\emptyset) = 0.$$

2. Əks hadisənin ehtimalı.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

İsbatı. $A \cup \bar{A} = \Omega$ olduğundan
 $P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega).$

$A \cap \bar{A} = \emptyset$ olduğundan additivlik aksiomuna əsasən

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega).$$

Nəhayət, P_3 aksiomuna görə $P(\Omega) = 1$ olduğu üçün
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$
 olduğunu əldə edirik.

3. Monotonluq xassəsi. Əgər $A \subseteq B$ olarsa, onda
$$P(A) \leq P(B).$$

İsbatı. $B = A \cup C$ olduğu üçün
$$P(B) = P(A \cup C).$$

Digər tərəfdən $A \cap C = \emptyset$ olduğundan additivlik aksiomuna əsasən

$$P(B) = P(A) + P(C).$$

P_1 aksiomuna görə $P(C) \geq 0$ olduğundan sonuncu münasibətdə $P(C)$ -ni atsaq,

$$P(B) \geq P(A)$$

olduğunu əldə edərək.

Nəticə. İxtiyari A hadisəsinin ehtimalı $0 \leq P(A) \leq 1$.

4. Fərqi ehtimalı. A və B ixtiyari hadisələrdirsə,

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B).$$

İsbatı. $C_1 = A \cap B$ və $C_2 = B \setminus A$, $B = C_1 \cup C_2$ işarə edək.

$$P(B) = P(C_1 \cup C_2).$$

$C_1 \cap C_2 = \emptyset$ olduğu üçün additivlik aksiomuna əsasən

$$P(B) = P(C_1) + P(C_2).$$

Buradan

$$P(C_2) = P(B) - P(C_1).$$

$$C_1 = A \cap B \text{ və } C_2 = B \setminus A \text{ olduğundan}$$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B).$$

Nəticə. Əgər $A \subseteq B$ olarsa, bu halda

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

5. İki hadisənin birləşməsinin ehtimalı. A və B ixtiyari hadisələrdirsə, bu halda

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

İsbatı. $A \cup B = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ işarə edək, belə ki,

$$C_1 = A \setminus B, C_2 = A \cap B, C_3 = B \setminus A.$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$P(A \cup B) = P(C_1 \cup C_2 \cup C_3).$$

Additivlik aksiomuna görə

$$P(A \cup B) = (C_1 \cup C_2 \cup C_3) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3).$$

burada $C_1 = A \setminus B$, $C_2 = A \cap B$, $C_3 = B \setminus A$.

Beləliklə,

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A) =$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Nəticə. İxtiyari A və B hadisəsi üçün

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

Bu xassə ehtimalın yarımadditivlik xassəsi adlanır.

6. Simmetrik fərqin ehtimalı. İxtiyari A və B hadisələri üçün

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2 P(A \cap B).$$

İsbatı. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ olduğu üçün

$$P(A \Delta B) = P((A \cup B) \setminus (A \cap B)).$$

$A \cup B$ və $A \cap B$ uyuşmayan hadisələr olduğundan

$$\begin{aligned} P(A \Delta B) &= P(A \cup B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - 2 P(A \cap B). \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2 P(A \cap B).$$

İndi isə elmi ədəbiyyatda Puankare düsturları adlanan (bax, [29], s.11) aşağıdakı düsturları verək:

Teorem (Puankare). n sayda $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \geq 1$ hadisələri verilmişdir.

1) $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin birləşməsinin ehtimalı

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots +$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots \\
& \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n).
\end{aligned}$$

2) $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin kəsişməsinin ehtimalı

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cup A_{i_2}) + \dots + \\
& + \dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}) + \dots \\
& \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cup \dots \cup A_n).
\end{aligned}$$

İndi isə mövzuya aid məsələlər verək.

Məsələ 1. Lotereya oyununda satışa 1000 bilet çıxarılmışdır. Məlumdur ki, 1 biletə 100 manat, 10 biletə 20 manat, 20 biletə 2 manat, 50 biletə isə 1 manat uduş qoyulmuşdur. Bir nəfər 1 bilet alır. Həmin biletin azı 2 manat udması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Ehtimalı axtarılan hadisəni A ilə işarə edək. Aşağıdakı hadisələri də daxil edək:

$A_1 = \{\text{alınmış biletin 2 manat udması}\},$

$A_2 = \{\text{alınmış biletin 20 manat udması}\},$

$A_3 = \{\text{alınmış biletin 100 manat udması}\}.$

Aydın ki,

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

A_i hadisələri uyuşmayan hadisələr olduğu üçün

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) =$$

$$= \frac{20}{1000} + \frac{10}{1000} + \frac{1}{1000} = \frac{31}{1000} = 0,031.$$

Məsələ 2. A və B uyuşmayan hadisələrdir. $P(A) = 0,3$ və $P(B) = 0,4$ olarsa, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ ehtimalını tapın.

Həlli. A və B uyuşmayan hadisələr olduğuna görə
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B).$

Digər tərəfdən De-Morqan qanununa əsasən

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) =$$

$$= 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0,3 - 0,4 = 0,3.$$

Bəzən ehtimalın additivlik xassəsindən doğru istifadə etmədikdə mənasız nəticələr alınır. Bununla bağlı aşağıdakı misala baxaq.

Məsələ 3. Müəyyən şirkətin daxil olan sifarişləri vaxtında yerinə yetirməsi ehtimalının 0,8 olması məlumdur. Daxil olmuş 3 sifarişdən heç olmasa birinin vaxtında yerinə yetirilməsi hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. A_i ilə i -ci sifarişin yerinə yetirilməsi hadisəsini işarə edək. Bu halda ehtimalın additivlik xassəsini tətbiq etsək yalnız nəticə əldə edərik:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) =$$

$$= 0,8 + 0,8 + 0,8 = 2,4.$$

Göründüyü kimi, ehtimal 1-dən böyük alındı. Bu isə ola bilməz. Bu onunla bağlıdır ki, məsələdəki A_i hadisələri uyuşan hadisələrdir. Doğrudan da, məsələn, birinci sifarişin vaxtında yerinə yetirilməsi digər iki sifarişin də vaxtında yerinə yetirildiyini istisna etmir.

§1.10. Həndəsi ehtimal

Ehtimal nəzəriyyəsinə elə sınaqlara rast gəlinir ki, onların riyazi modelini diskret ehtimal fəzasının köməyi ilə qurmaq olmur.

Məsələn, R radiuslu hədəfin vurulması stoxastik eksperimentinə uyğun elementar hadisələr fəzası

$$\Omega = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

kimidir.

Belə sınaqların riyazi modelini qurmaq üçün diskret ehtimal düsturundan istifadə etmək mümkün olmur. Bu halda yeni anlayış olan həndəsi ehtimal anlayışından daxil edilir.

$[0, 1)$ yarımintervalına təsadüfi qaydada nöqtə seçilməsi eksperimentinə baxaq. Bu eksperimentə uyğun elementar hadisələr fəzası $\Omega = [0, 1)$ olar. Bu stoxastik eksperimentin qeyri-hesabi sayda nəticəsi olduğundan hər bir ω üçün $P(\omega) = 0$ olduğu aydındır. Beləliklə,

$$\sum_{\omega \in [0, 1)} P(\omega) = 0$$

olduğunu alırıq. Lakin difər tərəfdən

$$1 = P(\Omega) = P([0, 1))$$

olmalıdır. Göründüyü kimi, bu halda Ω elementar hadisələr fəzasından, yəni $[0, 1)$ -dən olan intervalların hər birinə müəyyən qayda ilə uyğun ehtimallar götürmək lazımdır. Məsələn, intuitiv olaraq aydındır ki, $[0, 1)$ -ə ixtiyari qaydada atılmış nöqtənin $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ və $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ intervallarına düşmə ehtimalları bərabər olmalıdır (aydındır ki, bu ehtimalların hər birinin $\frac{1}{2}$ -ə bərabər olması daha doğru olardı); nöqtənin $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ parçasına düşmə ehtimalı onun $\left[0, \frac{1}{3}\right)$ parçasına düşmə ehtimalından böyük olmalıdır; əgər nöqtənin $\left[0, \frac{1}{3}\right)$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right)$ parçalarına düşmə ehtimalları $\frac{1}{2}$ -ə bərabər götürülərsə, nöqtənin $\left[0, \frac{2}{3}\right)$ parçasına düşmə ehtimalı $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ -yə bərabər olmalıdır və s.

Yuxarıdakı düşüncələri nəzərə alaraq həndəsi ehtimal anlayışı verilir.

Fərz edək ki, $R^n, n > 1$ Evklid fəzasında sonlu Lebeq ölçüsünə (n -ölçülü həcmə) malik olan $\Omega = \{\omega\}$ oblastı verilmişdir.

Qeyd edək ki, Lebeq ölçüsü həqiqi oxda uzunluq, müstəvidə sahə, fəzada isə həcm anlayışının ümumiləşməsidir.

Ω -nın bütün alt Borel çoxluqlarını $\beta(\Omega)$ ilə işarə edək. İxtiyari $A \in \beta(\Omega)$ hadisəsinin baş vermə ehtimalını belə təyin edək:

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}, \quad (1)$$

burada $mes(A)$ ilə A çoxluğunun Lebeq ölçüsü işarə olunmuşdur (measure- ölçü).

(1) düsturu həndəsi ehtimal düsturu adlanır. (1) düsturunun köməyiylə bir çox sahələrdə meydana çıxan eksperimentin riyazi modelini qurmaq olur. Həndəsi ehtimalın tətbiqinə aid aşağıdakı məsələlərə baxaq:

Məsələ 1. Təsadüfi A nöqtəsi $[0, 1]$ parçasında müntəzəm paylanmışdır və onu iki hissəyə bölür. Parçanın kiçik hissəsinin uzunluğunu η ilə işarə edək. İxtiyari x üçün $P\{\eta \leq x\}$ ehtimalını tapın.

Həlli. Aydındır ki, bu stoxastik eksperimentə uyğun elementar hadisələr fəzası $\Omega = [0, 1]$ olar. Buna görə də

$$mes(\Omega) = 1.$$

İndi isə ehtimalı axtarılan A hadisəsi üçün əlverişli çoxluğu quraq. Şərtə görə təsadüfi A nöqtəsi parçanın istənilən yerində ola bilər. Bu nöqtənin absisini ξ ilə işarə etsək, parçanın bir hissəsinin uzunluğu ξ , yerdə qalan hissəsinin uzunluğu $1 - \xi$ olar. Asanlıqla görmək mümkündür ki, parçanın kiçik hissəsinin uzunluğu

$$\eta = \min(\xi, 1 - \xi)$$

olar. Beləliklə,

$$P(\eta \leq x) = P(\min(\xi, 1 - \xi) \leq x) =$$

$$= 1 - P(\min(\xi, 1 - \xi) \geq x) =$$

$$= 1 - P(\xi \geq x, 1 - \xi \geq x) =$$

$$= 1 - P(x \leq \xi \leq 1 - x).$$

A nöqtəsinin müntəzəm paylandığını nəzərə alsaq ehtimalın həndəsi tərifinə görə

$$P(\eta \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

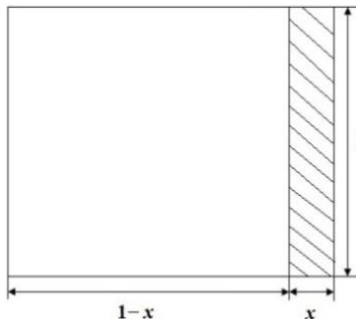
Məsələ 2. Tərəfi 1 olan kvadratın daxilindən təsadüfi olaraq bir nöqtə seçilir. Həmin nöqtədən kvadratın a) qeyd olunmuş tərəfinə, b) kvadratın ən yaxın tərəfinə qədər məsafənin x -i aşmaması ehtimalını tapın.

Həlli. a) Aydındır ki, $mes(\Omega) = 1^2 = 1$.

Şəkildə ştrixlənmiş sahə ehtimalı axtarılan hadisə üçün əlverişli halları ifadə edir.

Asanlıqla görmək olar ki,

$$mes(A) = x \cdot 1 = x.$$

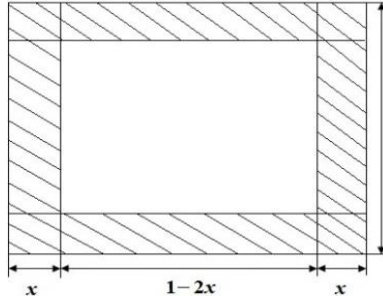


Həndəsi ehtimal düsturuna görə ixtiyari $x \in (0,1)$ üçün

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = \frac{x}{1} = x.$$

- b) Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$mes(B) = 1 - (1 - 2x)^2.$$



Həndəsi ehtimal düsturuna görə ixtiyari $x \in (0,1)$ üçün

$$P(B) = \frac{mes(B)}{mes(\Omega)} = 1 - (1 - 2x)^2 = 4x(1 - x).$$

Məsələ 3. $x^2 + bx + c = 0$ kvadrat tənliyinin b və c əmsallarının hər biri $[0,2]$ parçasından təsadüfi olaraq seçilir. Kvadrat tənliyin həqiqi kökünün olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Əvvəlcə bu stoxastik eksperimentə uyğun elementar hadisələr fəzasını quraq. b və c əmsallarının hər biri $[0,2]$ parçasından təsadüfi olaraq seçildiyi üçün

$$\Omega = \{(b, c): 0 \leq b \leq 2, 0 \leq c \leq 2\}$$

olar. Beləliklə, bütün mümkün (b, c) cütləri koordinat sisteminə sahəsi 4 olan kvadrat əmələ gətirir və buna görə də

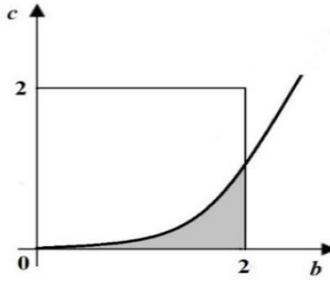
$$mes(\Omega) = 4.$$

Ehtimalı axtarılan hadisəni A ilə işarə edək. Kvadrat tənliyin həqiqi kökünün olması üçün $D = b^2 - 4c \geq 0$ şərti

ödənilməlidir. Buna görə də A hadisəsini aşağıdakı kimi yazı bilərik:

$$A = \left\{ (b, c) \in \Omega: c \leq \frac{b^2}{4} \right\}.$$

Deməli, kvadrat tənliyin kökünün həqiqi olmasını təmin edən (b, c) cütləri aşağıdakı şəkildəki rənglənmiş fiquru əmələ gətirir.



Bu fiqurun sahəsi

$$mes(A) = \int_0^2 \frac{b^2}{4} db = \frac{1}{4} \cdot \frac{b^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{2}{3}$$

olur.

Beləliklə, ehtimalın həndəsi tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = \frac{1}{6}.$$

Məsələ 4 (görüş haqqında məsələ). İki dost saat 12:00 ilə 13:00 arasında görüşməyi və bir-birini 5 dəqiqə gözləməyi şərtləşirlər. Görüşün baş tutması ehtimalını tapın.

Həlli. Əvvəlcə elementar hadisələr fəzasını quraq:

$$\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 60, \quad 0 \leq y \leq 60\}.$$

Aydındır ki,

$$\text{mes}(A) = 60 \cdot 60 = 3600.$$

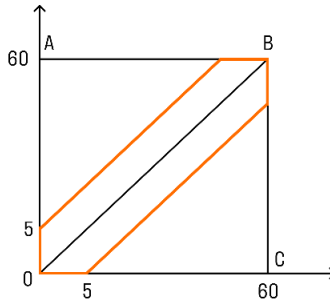
Görüşün baş tutması hadisəsini A ilə işarə edək. Aydındır ki, görüşün baş tutması üçün aşağıdakı bərabərsizliklər ödənilməlidir:

$$y - x < 5, \quad y > x,$$

$$x - y < 5, \quad x > y.$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$\text{mes}(A) = 60 \cdot 60 - 50 \cdot 50 = 3600 - 2500 = 1100.$$



Beləliklə,

$$P(A) = \frac{\text{mes}(A)}{\text{mes}(\Omega)} = \frac{11}{36} = 0,305.$$

Məsələlər.

1. Radiusu 8 olan dairənin daxilindən təsadüfi olaraq bir nöqtə seçilir. Həmin nöqtənin bu dairə içində çəkilmiş və radiusu 5 olan dairə ilə əmələ gələn zolağa düşməsi hadisəsinin ehtimalını tapın.

$$\text{Cavab: } P(A) = \frac{39}{64}$$

2. Absis oxunun L -uzunluqlu OA parçasında təsadüfi qaydada $B(x)$ nöqtəsi qeyd olunmuşdur. OB və BA parçalarından

kiçiyinin uzunluğunun $\frac{1}{3}$ -dən böyük olması hadisəsinin ehtimalını tapın. Fərz olunur ki, nöqtənin parça üzərinə düşmə ehtimalı parçanın uzunluğuna mütənasibdir və onun ədəd oxunda yerləşməsindən asılı deyildir.

Cavab: $\frac{1}{3}$

3. Təsadüfi qaydada hər biri ikini aşmayan 2 müsbət x və y ədədləri götürülmüşdür. xy hasilinin vahiddən böyük olmaması və y/x nisbətinin ikidən böyük olmaması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Cavab: koordinatların mümkün qiymətləri:

$$0 < x \leq 2, 0 < y \leq 2;$$

koordinatların əlverişli qiymətləri:

$$0 < x \leq \sqrt{2}/2, 0 < y \leq \sqrt{2} \text{ və}$$

$$\sqrt{2}/2 < x \leq 2, 1/2 \leq y \leq \sqrt{2};$$

$$P = (1 + 3\ln 2)/8 \approx 0,38.$$

4. $[-1, 2]$ parçasından təsadüfi qaydada iki ədəd götürülmüşdür. Onların cəminin birdən böyük, hasilinin birdən kiçik olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

$$\text{Cavab: } \frac{2}{9}\ln 2 + \frac{1}{12} \approx 0,237.$$

5. Kvadrat daxilinə təsadüfi A və B nöqtələri atılır. Diametri AB parçasına bərabər olan dairənin tamamilə verilmiş kvadratin daxilində olması ehtimalını tapın.

6. **Byuffon məsələsi.** Müstəviyə bir-birindən $2a$ məsafədə yerləşən paralel düz xətlər çəkilmişdir. Müstəviyə ixtiyari qaydada $2l$ uzunluqlu ($l < a$) bir iynə atılır. İynənin bu düz xətlərdən hər hansı birini kəsməsi hadisəsinin ehtimalını tapın.

7. **Bertran paradoksu.** Dairə içərisində ixtiyari bir vətər seçilir. Bu vətərin uzunluğunun dairə içərisinə çəkilmiş bərabərtərəfli üçbucağın tərəfindən böyük olması ehtimalını tapın.

§1.11. Şerti ehtimal

Ehtimal nəzəriyyəsinin müəyyən məsələlərinin həlli zamanı bir A hadisəsinin nəticəsinin digər B hadisəsinə təsirini araşdırmaq zərurəti yaranır. Hadisələr arasında əlaqəni xarakterizə etmək üçün şərti ehtimal anlayışı daxil edilir. Şerti ehtimalın tərifini verməzdən öncə aşağıdakı misala baxaq.

Misal. Qutuda 3 ağ və 4 qara rəngli kürəcik vardır. Qutudan təsadüfi olaraq qaytarmamaq şərti ilə ardıcıl olaraq 2 kürəcik çıxarılır:

$A = \{\text{birinci çıxarılan kürəciyin ağ rəngli olması}\},$

$B = \{\text{ikinci çıxarılan kürəciyin ağ rəngli olması}\}.$

Asanlıqla görmək olar ki, B hadisəsinin ehtimalı A hadisəsinin baş verib verməməsindən asılı olaraq müxtəlif olur. Əgər A hadisəsi baş verirsə, bu halda

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Əgər A hadisəsi baş vermirsə, bu halda

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Beləliklə, A hadisəsinin nəticəsi B hadisəsinin ehtimalına təsir edir. Belə hadisələrə asılı hadisələr deyilir. Belə hadisələri öyrənmək üçün şərti ehtimal anlayışı daxil edilir.

Tərif. Fərz edək ki, $A, B \in \mathcal{F}$. Əgər $P(A) > 0$ olarsa,

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (1)$$

ifadəsinə B hadisəsinin A hadisəsinə nəzərən **şerti ehtimalı** deyilir.

Göstərmək olar ki, $P(A) > 0$ olduqda şərti ehtimal Kolmoqorov aksiomlarını ödəyir:

1. $P(B|A) \geq 0$, ixtiyari $A, B \in \mathcal{F}$ üçün,

$$2. P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A), \quad B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j,$$

3. $P(\Omega|A) = 1$.

Doğrudan da,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq 0$$

olduğu üçün 1-ci xassə aydındır.

2. $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ olduğundan şərti ehtimalın tərifinə görə

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|A\right) &= \frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \cap A))}{P(A)} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A). \end{aligned}$$

3. Şərti ehtimalın tərifinə görə

$$P(\Omega|A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

Şərti ehtimalın aşağıdakı xassələrini qeyd edək.

1) $P(B|B) = 1$, $P(\emptyset|A) = 0$,

2) $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$,

3) $B_1 \subseteq B_2$ olduqda

$$P(B_1|A) \leq P(B_2|A),$$

4) $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ olduqda

$$P(B_1 \cup B_2 | A) = P(B_1|A) + P(B_2|A).$$

Qeyd edək ki, $P(B) > 0$ olduqda A hadisəsinin B hadisəsinə nəzərən şərti ehtimalı da təyin olunur:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (2)$$

(1) və (2)-yə əsasən

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A), P(A) > 0,$$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B), P(B) > 0.$$

Bu düsturlara ehtimalların vurulması düsturu deyilir. Ehtimalların vurulması düsturu ümumi şəkildə aşağıdakı teoremdə verilmişdir:

Teorem. Fərz edək ki, $A_1, A_2, \dots, A_n, i = \overline{1, n}$, hadisələri verilmişdir və $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Bu halda

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

düsturu doğrudur.

Bu teorem riyazi induksiya üsulu ilə isbat edilə bilər.

Qeyd. Şərti ehtimal yeni ehtimal fəzası doğurur. Belə ki, sınaq nəticəsində A hadisəsi baş vermişdirsə $P(A) > 0$. Bu halda biz Ω elementar hadisələr fəzasını $\Omega_A = A$ kimi daralda bilərik. B hadisəsi əvəzinə isə $B_A = A \cap B$ hadisəsinə

baxa bilərik. Beləliklə biz $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ehtimal fəzası əvəzinə $(\Omega_A, \mathfrak{F}_A, P_A)$ ehtimal fəzasına keçə bilərik, burada

$$\Omega_A = \Omega \cap A \text{ və } \mathfrak{F}_A = \{A \cap B; B \in \mathfrak{F}\}.$$

$P(B)$ ehtimalı əvəzinə isə

$$P_A(B) \equiv P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ehtimalı götürülə bilər.

İndi isə mövzu ilə bağlı məsələlərə baxaq.

Məsələ 1. Bir oyun zəri bir dəfə atılır. Düşən rəqəmin cüt olması şərti daxilində “4” üzünün düşməsi hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Aydındır ki, $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ və $|\Omega| = 6$.

İndi isə hadisələri daxil edək.

$$A = \{\text{düşən rəqəmin cüt olması}\} = \{2, 4, 6\} \text{ və}$$

$$B = \{4 \text{ rəqəminin düşməsi}\} = \{4\}.$$

Asanlıqla görmək olar ki,

$$A \cap B = \{4\}.$$

Göründüyü kimi,

$$|A| = 3 \text{ və } |A \cap B| = 1.$$

Şərti ehtimalın tərifinə əsasən

$$P(B|A) = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{1}{3}.$$

Məsələ 2. $\{1, 2, \dots, 100\}$ çoxluğundan bir ədəd təsadüfi seçilir. Bu ədədin ikirəqəmli olduğu məlumdursa, onun 5-ə qalıqsız bölünməsi hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Şərtdən görünür ki, elementar hadisələr fəzası

$\Omega = \{1, 2, \dots, 100\}$ çoxluğudur və $|\Omega| = 100$.

A hadisəsini daxil edək:

$$A = \{\text{seçilən ədədin ikirəqəmli olması}\} = \{10, 11, \dots, 99\}.$$

Asanlıqla müəyyən etmək olar ki, $|A| = 90$.

İndi isə B hadisəsini daxil edək:

$$B = \{\text{seçilən ədədin 5-ə bölünməsi}\} = \{5, 10, 15, \dots, 100\}.$$

A və B hadisələrinin kəsişməsi $A \cap B = \{10, 15, \dots, 95\}$ hadisəsi olar və $|A \cap B| = 18$.

Bunları şərti ehtimalın tərifində nəzərə alsaq,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}.$$

Məsələ 3. Qutuda 00, 01, ..., 99 kimi nömrələnmiş 100 kürəcik var. Təsadüfi olaraq bir kürəcik çıxarılır. Çıxarılan kürəcik üzərindəki rəqəmlərin hasilinin sıfır olduğunu bilərək, onların cəminin 4-dən kiçik olmaması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Bu halda elementar hadisələr fəzası $\Omega = \{00, 01, \dots, 99\}$ olar. Aydındır ki, $|\Omega| = 100$.

A hadisəsini daxil edək:

$$A = \{(i, j): i \cdot j = 0\} = \{00, 01, \dots, 09, 10, 20, \dots, 90\}.$$

Beləliklə, $|A| = 19$.

İndi isə B hadisəsini daxil edək:

$$B = \{(i, j): i + j \geq 4\} =$$

$$= \{04, 05, \dots, 09, 13, 14, \dots, 19, 22, 23, \dots, 29, 31, 32, \dots, 39, 40, \dots, 99\}.$$

A və B hadisələrinin kəsişməsi

$$A \cap B = \{04, 05, 06, \dots, 09, 40, \dots, 90\}.$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki, $|A \cap B| = 12$.

Bunları şərti ehtimalın tərifində nəzərə alsaq,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{12}{19}.$$

Məsələ 4. Fərz edək ki, A və B hadisələri verilmişdir $P(A) > 0$ və $P(B) > 0$. Göstərin ki, əgər $P(A|B) = P(B|A)$ olarsa, bu halda $P(A) = P(B)$ bərabərliyi doğrudur.

Həlli. Şərtə görə $P(A|B) = P(B|A)$. Şərti ehtimalın tərifindən istifadə etsək,

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}.$$

Digər tərəfdən $P(B \cap A) = P(A \cap B)$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\frac{1}{P(A)} = \frac{1}{P(B)}.$$

Beləliklə,

$$P(A) = P(B).$$

Məsələ 5. Qutuda 7 ağ və 5 qara rəngli kürəcik vardır. Qara kürəciklər 1-dən 5-ə qədər, ağ kürəciklər isə 6-dan 12-dək nömrələnmişdir. Qutudan təsadüfi olaraq bir kürəcik götürülür. Bu kürəciyin cüt nömrəli olduğu məlumdursa, onun qara rəngli olması ehtimalını tapın.

Həlli. Aşağıdakı hadisələri daxil edək:

$$A = \{\text{çıxarılmış kürəciyin cüt nömrəli olması}\};$$

$B = \{\text{çıxarılmış kürəciyin qara rəngli olması}\}.$

Məqsədimiz $P(B|A)$ şərti ehtimalını tapmaqdır. Asanlıqla görmək olar ki,

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Digər tərəfdən,

$$P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Şərti ehtimalın tərifinə əsasən

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3}.$$

Məsələ 6. Qutuda 7 ağ və 3 qara kürəcik vardır. Qaytar-mamaq şərti ilə qutudan 3 kürəcik çıxarılır. Çıxarılmış kürəciklər içərisindən bir qara kürəciyin olduğu məlumdur-sa, digər iki kürəciyin ağ rəngli olması ehtimalını tapın.

Həlli. Aşağıdakı hadisələri daxil edək:

$B = \{\text{çıxarılmış kürəciklərin ikisinin ağ, birinin isə qara rəngli olması}\},$

$A = \{\text{çıxarılmış kürəciklərdən heç olmasa birinin qara rəngli olması}\},$

$\bar{A} = \{\text{çıxarılmış kürəciklərin arasında qara kürəcik olmaması}\}.$

Məqsədimiz $P(B|A)$ şərti ehtimalının tapılmasıdır.

$B \subset A$ olduğunu nəzərə alaraq şərti ehtimalın tərifinə əsasən

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}.$$

İndi isə A və B hadisələrinin ehtimalını hesablayaq.
Asanlıqla görmək olar ki,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{35}{120} = \frac{17}{24}$$

B hadisəsinin ehtimalı isə

$$P(B) = \frac{C_7^2 \cdot C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{21}{40}$$

Beləliklə,

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{63}{85}.$$

Məsələ 7. Qutuda nömrələnmiş 5 kürəcik vardır. Kürəciklər təsadüfi olaraq qaytarmamaq şərti ilə bir-birinin ardınca qutudan çıxarılır. Kürəciklərin nömrələrinin artma sırası ilə çıxarılması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Aşağıdakı hadisələri daxil edək. $i = \overline{1,5}$ üçün
 $A_i = \{i \text{ nömrəli kürəciyin } i - \text{ci addımda çıxarılması}\}$
 Axtarılan ehtimal aşağıdakı kimi olar:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_5) =$$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_5|A_1 \cap \dots \cap A_4) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{120}.$$

§1.12. Hadisələrin asılı olmazlığı

Asılı olmazlıq anlayışı ehtimal nəzəriyyəsinin ən mühüm və özünəməxsus anlayışlarından biridir. Bir hadisənin nəticəsi digər hadisənin ehtimalına təsir etmirsə, belə hadisələrə asılı olmayan və ya səbəbə görə asılı olmayan hadisələr deyilir.

Tərif 1. Fərz edək ki, $A, B \in \mathcal{F}$. Əgər $P(A) > 0$ üçün

$$P(B|A) = P(B)$$

olarsa, yəni B hadisəsinin şərti ehtimalı şərtsiz ehtimalına bərabər olarsa, bu halda deyirlər ki, B hadisəsi A hadisəsindən asılı deyil.

Qeyd edək ki, asılı olmazlıq anlayışı simmetrik anlayışdır.

Yəni B hadisəsi A hadisəsindən asılı deyilsə, onda A hadisəsi də B hadisəsindən asılı deyildir. Doğrudan da, $P(A) > 0$ və həm də $P(B) > 0$ olarsa, bu halda şərti ehtimalın tərifindən istifadə etsək

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Beləliklə, A hadisəsi də B hadisəsindən asılı deyildir.

Qeyd edək ki, tərif 1-də $P(A) > 0$ şərti qoyulur. Lakin asılı olmazlığın elə tərifini də vermək mümkündür ki, $P(A) = 0$ halını da əhatə etsin.

Tərif 2. Əgər

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

olarsa, onda A və B hadisələri **asılı olmayan hadisələr** adlanır. Əks halda, yəni bərabərlik ödənilməzsə, A və B ha-

disələri asılı hadisələr adlanır.

Tərif 2-nin $P(A) = 0$ olduqda da ödənildiyini göstərmək mümkündür.

Doğrudan da, $P(A) = 0$ olsun. Bu halda sağ tərəf sıfır olacaq. Göstərək ki, sol tərəf də sıfıra bərabərdir. Aydındır ki,

$$A \cap B \subseteq A.$$

Buna görə də ehtimalın monotonluq xassəsinə əsasən

$$P(A \cap B) \leq P(A) = 0.$$

Ehtimal mənfi qiymətlər ala bilmədiyi üçün sonuncu münasibətdən $P(A \cap B) = 0$ olduğunu əldə edərik. Bu isə o deməkdir ki, $P(A) = 0$ olduqda da $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ münasibəti ödənilir.

Asılı olmayan hadisələrlə bağlı aşağıdakı teoremlər doğrudur:

Teorem 1. A və B asılı olmayan hadisələr olsun. Onda 1) A və $\bar{B}$, 2) $\bar{A}$ və B , 3) $\bar{A}$ və $\bar{B}$ cütləri də asılı olmayan hadisələrdir.

İsbatı. 1) Şərtə görə

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Göstərək ki, A və $\bar{B}$ asılı olmayan hadisələrdir, yəni

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B}).$$

Hadisələr üzərində əməllərə görə

$$A \cap \bar{B} = A \setminus B.$$

Deməli,

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}).$$

Beləliklə, A və $\overline{B}$ hadisələri asılı olmayan hadisələrdir.

2)-nin doğruluğu eyni qaydada isbat olunur.

3) Göstərək ki, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$.

Doğrudan da, De Morqan qanununa əsasən

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \Omega \setminus (A \cup B).$$

Buradan

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\Omega) - P(A \cup B) = \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A)P(B)) = \\ &= 1 - P(A) - P(B)(1 - P(A)) = \\ &= P(\overline{A}) - P(B)P(\overline{A}) = P(\overline{A})P(\overline{B}). \end{aligned}$$

Beləliklə, teorem isbat olundu.

Teorem 2. Aşağıdakı hökmlər bir-birinə ekvivalentdir:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad (1)$$

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B) > 0, \quad (2)$$

$$P(A|B) = P(A|\overline{B}), \quad 0 < P(B) < 1. \quad (3)$$

İsbatı. (1) və (2)-nin ekvivalent olduğu aydındır. (1)-dən (3)-ün alındığını göstərək. Bu məqsədlə (1)-in hər iki tərəfindən $P(B)P(A \cap B)$ -ni çıxaraq:

$$P(A \cap B) - P(A \cap B)P(B) = P(A)P(B) - P(A \cap B)P(B).$$

Buradan

$$P(A \cap B)(1 - P(B)) = P(B) (P(A) - P(A \cap B)).$$

Ehtimalın məlum xassələrindən istifadə etsək

$$P(A \cap B)P(\overline{B}) = P(B) P(A \cap \overline{B}).$$

$0 < P(B) < 1$ şərtini nəzərə alaraq

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}.$$

Buradan

$$P(A|B) = P(A|\overline{B}).$$

Beləliklə, (1)-dən (3) alınır. (3)-dən (1)-in alınmasının göstərilməsi oxucuya həvalə olunur.

Teorem 2 isbat olundu.

Teorem 3. Əgər $P(A) = 0$ və ya $P(A) = 1$ olarsa və B ixtiyari hadisədirsə, onda A və B asılı olmayan hadisələrdir.

İsbatı. Fərz edək ki, $P(A) = 0$. Bu halda ehtimalın monotonluq xassəsinə əsasən

$$P(A \cap B) \leq P(A) = 0$$

olur. Deməli,

$$P(A \cap B) = 0.$$

Beləliklə, bu halda

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

münasibəti ödənilir və deməli, A və B hadisələri asılı olmayan hadisələrdir.

İndi isə fərz edək ki, $P(A) = 1$. Bu halda $P(\bar{A}) = 0$ olur. Bu isə o deməkdir ki, $\bar{A}$ və B asılı olmayan hadisələrdir. Buna görə də Teorem 1-ə əsasən A və B hadisələri də asılı olmayan hadisələr olacaqdır.

Beləliklə, Teorem 3 isbat olundu.

Nəticə. İxtiyari B hadisəsi üçün B və $\emptyset$, həmçinin B və Ω hadisələri də asılı olmayan hadisələrdir.

Qeyd. Bəzən uyuşmayan hadisələr anlayışı ilə hadisələrin asılı olmazlığı anlayışını qarışdırırlar. Halbuki, bu anlayışlar tamamilə fərqli anlayışlardır. Aydındır ki, uyuşmayan hadisələr üçün $P(A \cap B) = 0$, yəni bu hadisələr eyni zamanda baş verə bilməzlər. Buna görə də uyuşmayan hadisələr üçün $P(A) > 0$ və $P(B) > 0$ olduqda

$$P(A|B) = P(B|A) = 0. \quad (4)$$

Asılı olmayan hadisələr üçün isə bir-biri ilə “əlaqəsi” yoxdur deyə bilmərik. Belə ki, asılı olmayan hadisələr eyni eksperimentdə baş verə də bilərlər, çünki

$$P(A|B) \neq 0 \text{ və } P(B|A) \neq 0.$$

Baxmayaraq ki, asılı olmayan hadisələrdən birinin baş verməsi digərinin baş verməsinə təsir etmir:

$$P(A|B) = P(B) \text{ və } P(B|A) = P(B). \quad (5)$$

(4) və (5) ifadələri bu anlayışlar arasındakı fərqi aydın göstərir (bax, [25], s.241).

Teorem 4. A və B asılı olmayan hadisələr olsun. Əgər

bu hadisələr həm də uyuşmayan hadisələdirsə, onda bu hadisələrdən ən azı birinin ehtimalı sıfıra bərabərdir.

İsbatı. Şərtə görə A və B uyuşmayan hadisələdir, yəni $A \cap B = \emptyset$. Buna görə də

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0.$$

Digər tərəfdən şərtə görə A və B asılı olmayan hadisələrdir, yəni

$$P(A)P(B) = P(A \cap B) = 0.$$

Beləliklə, $P(A)$ və $P(B)$ ehtimallarının ya hər hansı biri, ya da hər ikisi sıfırdır.

Beləliklə, Teorem 4 isbat olundu.

Teorem 5. Fərz edək ki, $P(A) > 0, P(B) > 0$. Əgər A və B hadisələri uyuşmayan hadisələdirsə, onda bu hadisələr bir-birindən asılıdır.

İsbatı. Doğrudan da, A və B uyuşmayan hadisələdirsə, yəni $A \cap B = \emptyset$ olarsa, bu halda $P(A \cap B) = 0$ olur. Digər tərəfdən şərtə görə $P(A) > 0, P(B) > 0$. Buna görə də

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B),$$

yəni A və B asılı hadisələrdir.

Beləliklə, teorem isbat olundu.

Hadisələrin sayı üç və daha artıq olanda cüt-cüt asılı olmazlıq və külliyyatca asılı olmazlıq anlayışları ortaya çıxır.

Tərif 3. Əgər $A, B, C \in \mathcal{F}$ üçün

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ P(A \cap C) = P(A)P(C) \\ P(B \cap C) = P(B)P(C) \end{cases} \quad (*)$$

münasibətləri ödənilərsə, A, B və C hadisələrinə **cüt-cüt asılı olmayan hadisələr** deyilir.

Tərif 4. Əgər A, B, C hadisələri cüt-cüt asılı olmayan hadisələdirsə və əlavə olaraq

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) \quad (**)$$

ödənilərsə, bu hadisələrə **külliyyatca asılı olmayan hadisələr** deyilir.

Tərifdən görünür ki, külliyyatca asılı olmayan hadisələr cüt-cüt asılı olmayan hadisələrdir. Lakin bu faktın tərsi doğru deyildir, yəni əgər hadisələr cüt-cüt asılı deyilsə, onlar külliyyatca asılı da ola bilərlər. Bununla bağlı aşağıdakı misal verək.

Misal 1. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ olsun və $p_i = \frac{1}{4}$, $i = \overline{1,4}$.

Aşağıdakı hadisələri daxil edək:

$$A = \{\omega_1, \omega_2\}, B = \{\omega_1, \omega_3\} \text{ və } C = \{\omega_1, \omega_4\}.$$

Asanlıqla görmək olar ki,

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{1}{2}.$$

İndi isə bu hadisələrin kəsişməsini tapaq:

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C = \{\omega_1\}.$$

Buradan

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}.$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, tərif 3-dəki hər üç bərabərlik ödənilir, lakin

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C).$$

Deməli, A , B və C hadisələri cüt-cüt asılı olmayan hadisələrdir, lakin külliyyatca asılıdırlar.

Qeyd edək ki, (**) münasibətinin ödənilməsindən hadisələrin cüt-cüt asılı olması çıxmır. Bununla bağlı aşağıdakı misalı verək.

Misal 2. İki düzgün oyun zəri atılır.

$$A = \{\omega: \omega = (i, j): i = 1, 2, 3; j = \overline{1, 6}\},$$

$$B = \{\omega: \omega = (i, j): i = 1, 6; j = 3, 4, 5\},$$

$$C = \{\omega: \omega = (i, j): i + j = 9\}$$

hadisələri üçün (**) münasibətləri ödənilir, lakin bu hadisələr cüt-cüt asılıdırlar.

İndi isə hadisələrin asılı olmazlığının tərifini n sayda hadisə üçün aşağıdakı kimi verək.

Tərif 5. Əgər istənilən $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$, $2 \leq k \leq n$ indeksləri üçün

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

bərabərliyi ödənərsə, bu halda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinə **külliyyatca asılı olmayan hadisələr** və ya sadəcə **asılı olmayan hadisələr** deyilir.

Bu tərifdən görünür ki, $A_1, \dots, A_n$ hadisələrindən götürülmüş istənilən $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ hadisələri də asılı olmayan hadisələrdir. $r = 2$ olduqda külliyyatca asılı olmazlıqdan cüt-cüt asılı olmazlıq alınır.

Tərif 6. $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin ixtiyari cütü asılı olmayan hadisələdirsə, bu halda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələri **cüt-cüt asılı olmayan hadisələr** adlanır.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin cüt-cüt asılı olmazlığı ixtiyari $i \neq j; i, j = \overline{1, n}$ üçün

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

bərabərlikləri ödənilməlidir.

İndi isə mövzu ilə bağlı məsələ həlli nümunələri ilə tanış olaq.

Məsələ 1. Üç simmetrik metal pul atılır.

$A = \{\text{üçüncü pulda rəqəm üzünün düşməsi}\},$

$B = \{\text{birinci pulda gerb üzünün düşməsi}\}$

hadisələrinin asılı olmadığını göstərin.

Həlli. Bu halda elementar hadisələr fəzası

$$\Omega = \{RRR, RRG, RGR, RGG, GGG, GGR, GRG, GRR\}.$$

Aydındır ki,

$$A = \{RRR, GGR, RGR, GRR\},$$

$$B = \{GGG, GGR, GRG, GRR\}.$$

Digər tərəfdən

$$A \cap B = \{GGR, GRR\}.$$

Ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A) = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{1}{2}; P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Buradan

$$\frac{1}{4} = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Beləliklə, bu hadisələr asılı olmayan hadisələrdir.

Məsələ 2. Üç simmetrik metal pul atılır.

$A = \{\text{azı iki pulda gerb düşməsi}\},$

$B = \{\text{birinci pulda gerb düşməsi}\}$

hadisələrinin asılı olub olmadığını müəyyən edin.

Həlli. Bu halda elementar hadisələr fəzası

$$\Omega = \{GGG, GGR, GRG, RGG, RRR, RRG, RGR, GRR\}.$$

Aydın ki,

$$A = \{GGG, GGR, GRG, RGG\}$$

və

$$B = \{GGG, GGR, GRG, GRR\}.$$

Bu hadisələrin kəsişməsi

$$A \cap B = \{GGG, GGR, GRG\}.$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$P(A) = \frac{1}{2}; \quad P(B) = \frac{1}{2}; \quad P(A \cap B) = \frac{3}{8}.$$

Beləliklə,

$$\frac{3}{8} = P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Deməli, A və B hadisələri asılı hadisələrdir.

Məsələ 3. İki düzgün oyun zəri atılır. Aşağıdakı hadisələrin asılı olub olmadığını araşdırın:

$$A = \{\text{birinci zərdə tək ədəd düşməsi}\},$$

$$B = \{\text{ikinci zərdə tək ədəd düşməsi}\},$$

$$C = \{\text{düşən rəqəmlər cəminin tək ədəd olması}\}.$$

Həlli. Asanlıqla görmək olar ki,

$$P(A) = \frac{1}{2}; \quad P(B) = \frac{1}{2}; \quad P(C) = \frac{1}{2}.$$

Digər tərəfdən

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Beləliklə, A , B və C hadisələri cüt-cüt asılı olmayan hadisələrdir. Lakin $A \cap B \cap C = \emptyset$ olduğundan

$$0 = P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}.$$

Deməli, bu hadisələr külliyyatca asılı hadisələrdir.

Məsələ 4. Birinci qutuda 2 ağ və 6 qara rəngli, ikinci qutuda isə 3 ağ və 5 qara rəngli kürəcik vardır. Hər qutudan təsadüfi olaraq bir kürəcik çıxarılır. Bu kürəciklərin hər ikisinin ağ rəngli olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Aşağıdakı hadisələri daxil edək:

$A = \{\text{birinci qutudan çıxarılan kürəciyin ağ rəngli olması}\},$
 $B = \{\text{ikinci qutudan çıxarılan kürəciyin ağ rəngli olması}\}.$

Aydındır ki, ehtimalı axtarılan hadisə A və B hadisələrinin kəsişməsi olacaqdır:

$A \cap B = \{\text{hər iki kürəciyin ağ rəngli olması}\}.$

A və B hadisələri asılı olmayan hadisələr olduğundan

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{32}.$$

Məsələ 5. Bir atıcı hədəfə atəş açır. Onun hər 5 atəşindən üçünün hədəfə dəydiyi məlumdur (yəni hədəfi vurma ehtimalı $\frac{3}{5}$ -dür). Atıcının hədəfi ilk dəfə 3-cü atəş zamanı vurması ehtimalını tapın.

Həlli. A ilə hədəfin 3-cü atəşdə vurulması hadisəsinə işarə edək. B_i ilə hədəfin i -ci atəşdə vurulması hadisəsinə işarə edək. $\bar{B}_i$ əks hadisələr olsun. Şərtdən aydındır ki, $P(B_i) = \frac{3}{5}$ və $P(\bar{B}_i) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$

Aydındır ki, $A = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap B_3$. Digər tərəfdən B_i -lər

asılı olmayan hadisələr olduğu üçün

$$P(A) = P(\overline{B_1}) \cdot P(\overline{B_2}) \cdot P(B_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{125} = 0,096.$$

Məsələ 6. 6 düzgün oyun zəri atılır. Zərlərdə müxtəlif rəqəmlərin düşməsi hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Aşağıdakı hadisələri daxil edək:

$A_1 = \{\text{birinci zərdə 6 müxtəlif rəqəmdən hər hansı birinin düşməsi}\},$

$A_2 = \{\text{ikinci zərdə birinci zərdəkindən fərqli rəqəmin düşməsi}\},$

$A_3 = \{\text{üçüncü zərdə birinci zərdəkindən fərqli rəqəmin düşməsi}\}$

və s.

Aydındır ki,

$$P(A_1) = 1; \quad P(A_2|A_1) = \frac{5}{6};$$

$$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{4}{6}; \dots; \quad P(A_6|A_1 \cap \dots \cap A_5) = \frac{1}{6}.$$

Beləliklə, axtarılan ehtimal

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_6) = \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6!}{6^6}.$$

Məsələ 7. Neçə düzgün oyun zəri atmaq lazımdır ki, zərlərdən heç birində 6 üzünün düşməməsi hadisəsinin ehtimalı 0,3-dən kiçik olsun?

Həlli. Aşağıdakı hadisələri daxil edək:

$A = \{\text{zərlərdən heç birində 6 üzünün düşməməsi}\},$

$A_i = \{i\text{-ci zərdə 6 düşməməsi}\}.$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$P(A_i) = \frac{5}{6}.$$

Aydındır ki, A_i hadisələrinin kəsişməsi zərlərdən heç birində 6 düşməməsini ifadə edir:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{\text{zərlərdən heç birində 6 düşməməsi}\}.$$

A_i hadisələri asılı olmayan hadisələr olduğundan

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Şərtə görə

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,3$$

olmalıdır. Bu bərabərsizliyin hər iki tərəfini $\frac{5}{6}$ əsasdan loqarifmləyərək $n > 6,6$ olduğunu əldə edərək. Beləliklə, məsələnin şərtini ödəyən zərlərin sayı $n \geq 7$ olmalıdır.

Məsələ 8. $1, 2, \dots, n$ ədədləri təsadüfi qaydada qarışdırılır və yenidən düzülür. A_k ilə k -cı ədədin öz yerində qalması hadisəsini işarə edək. Göstərin ki, A_1 və A_2 hadisələri bir-birindən asılı hadisələrdir.

Həlli. Əvvəlcə bütün mümkün halların sayını, başqa sözlə, bütün mümkün elementar hadisələrin sayını müəyyən edək. n elementli çoxluqda bütün mümkün təkrarsız yerdəyişmələrin sayı $n!$ olduğu üçün $|\Omega| = n!$ olar.

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$|A_k| = (n-1)!.$$

Aydındır ki, 1 və 2 ədədlərinin öz yerlərində qalması $A_1 \cap A_2$ olacaqdır və $|A_1 \cap A_2| = (n-2)!$.

Beləliklə, ehtimalın klassik tərifinə əsasən

$$P(A_k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Lakin

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Beləliklə, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$ münasibəti ödənilmir. Deməli, A_1 və A_2 hadisələri asılı hadisələrdir.

Məsələ 9. 6 qız və 3 oğlandan ibarət qrup üç müxtəlif masada oturmalıdır. Hər bir masada 2 qız və 1 oğlan oturması hadisəsinin (A) ehtimalını tapın.

Həlli. Aşağıdakı hadisələri daxil edək. A_i ilə i -ci masada 2 qız və 1 oğlan oturması hadisəsini işarə edək. Aydındır ki,

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

Digər tərəfdən A_i hadisələri asılı hadisələr olduğu üçün

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

düsturundan istifadə etməliyik. Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$P(A_1) = \frac{C_6^2 \cdot C_3^1}{C_9^3} = \frac{15 \cdot 3}{84} = \frac{15}{28}.$$

A_1 hadisəsinin baş verdiyini qəbul edərək $P(A_2 | A_1)$ ehtimalını tapa bilərik:

$$P(A_2 | A_1) = \frac{C_2^1 \cdot C_4^2}{C_6^3} = \frac{2 \cdot 6}{20} = \frac{3}{5}.$$

Nəhayət, A_1 və A_2 hadisələrinin baş verdiyini qəbul edərək

$$P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{C_1^1 \cdot C_2^2}{C_3^3} = 1$$

olduğunu əldə edərik. Beləliklə,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \\ &= P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{15}{28} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{28}. \end{aligned}$$

Məsələ 10. Metal pul gerb üzü düşənə qədər atılır. İlk üç sınaqda gerb üzünün düşməsi ehtimalını tapın.

Həlli. $A_i = \{i\text{-ci sınaqda gerb üzünün düşməsi}\}$ olsun. Bu hadisələr bir-birindən asılı hadisələr olduğu üçün

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \\ &= P(A_1) P(A_2) P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Məsələ 11. Hədəfi vurma ehtimalları uyğun olaraq 0,2 və 0,3 olan iki atıcı hədəfə növbə ilə atəş açır. Hədəfi ilk vuran atıcı qalib hesab olunur. İkinci atıcının qalib gəlməsi ehtimalını tapın.

Həlli. Aşağıdakı hadisələri daxil edək:

$A = \{\text{ikinci atıcının qalib gəlməsi}\},$

$B = \{\text{hədəfi birinci atıcının vurməsi}\},$

$C = \{\text{hədəfi ikinci atıcının vurməsi}\}.$

$\bar{B}$ və $\bar{C}$ ilə uyğun olaraq B və C hadisələrinin əks hadisələrini işarə edək. Ehtimalı axtarılan A hadisəsini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$A = (\bar{B} \cap C) \cup (\bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{B} \cap C) \cup \dots$$

Aydındır ki, B və C hadisələri asılı olmayan hadisələrdir və deməli, $\bar{B}$ və C , həmçinin $\bar{B}$ və $\bar{C}$ hadisələri də asılı olmayan hadisələrdir. Bundan əlavə mötərizə içərisində olan hadisələr uyuşmayan hadisələr olduğu üçün

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\bar{B} \cap C) + P(\bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{B} \cap C) + \\ &+ P(\bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{B} \cap C) + \dots = \\ &= P(\bar{B})P(C) + P(\bar{B})P(\bar{C})P(\bar{B})P(C) + \\ &+ P(\bar{B})P(\bar{C})P(\bar{B})P(\bar{C})P(\bar{B})P(C) + \dots = \\ &= P(\bar{B})P(C) \left(1 + P(\bar{B})P(C) + (P(\bar{B})P(C))^2 + \dots \right). \end{aligned}$$

olduğunu əldə edərik.

Şərtə görə,

$$P(B) = \frac{2}{10}; P(C) = \frac{3}{10}.$$

Aydındır ki, əks hadisələrin ehtimalı

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{8}{10}; P(\bar{C}) = 1 - P(C) = \frac{7}{10}.$$

Bu ehtimalları nəzərə alsaq A hadisəsinin ehtimalını tapa bilərik:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{8}{10} \cdot \frac{3}{10} \left(1 + \frac{8}{10} \cdot \frac{3}{10} + \left(\frac{8}{10} \cdot \frac{3}{10} \right)^2 + \dots \right) = \\ &= \frac{24}{100} \left(1 + \frac{56}{100} + \left(\frac{56}{100} \right)^2 + \dots \right) = \frac{24}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{56}{100}} = \frac{6}{11}. \end{aligned}$$

Məsələ 12. Fərz edək ki, hədəfin vurulması hadisəsinin ehtimalı p -dir. 4 atəşdən 2-sinin hədəfə dəyməsi hadisəsinin ehtimalı olan $P_4(2)$ -ni tapmaq tələb olunur.

Həlli. Hər bir atəş zamanı hədəfin vurulması hadisəsinin A ilə, onun əks hadisəsinin isə $\bar{A}$ ilə işarə edək. Hədəfin iki dəfə vurulması hadisəsinin aşağıdakı uyuşmayan hadisələrin cəmi şəklində göstərə bilərik:

$$A \cap A \cap \bar{A} \cap \bar{A}; A \cap \bar{A} \cap A \cap \bar{A}; A \cap \bar{A} \cap \bar{A} \cap A;$$

$$\bar{A} \cap A \cap A \cap \bar{A}; \bar{A} \cap A \cap \bar{A} \cap A; \bar{A} \cap \bar{A} \cap A \cap A.$$

Bu hadisələrin sayı $C_4^2 = 6$ -dir. Digər tərəfdən uyuşmayan bu hadisələrin hər birinin ehtimalı $p^2(1-p)^2$ -dir. Beləliklə,

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 (1-p)^2.$$

Məsələ 13. A və B oyunçuları əvvəlcə oyun zərini, sonra isə 2 dəfə metal pul atırlar. Oyun zərində 1 və ya 2 rəqəmi düşərsə, A oyunçusu qalib gəlir, metal pulun atılmasında heç olmazsa, bir dəfə gerb üzü düşərsə, B oyunçusu qalib gəlir. Oyun ədalətliirmi?

Həlli. Oyun zərinin atılması zamanı 1 və ya 2 rəqəminin düşməsi ehtimalı

$$P_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Gerb üzünün düşməməsi hadisəsinin ehtimalı:

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Heç olmazsa, bir dəfə gerb üzünün düşməsi ehtimalı:

$$P_3 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Oyun zərinin atılması zamanı 2-dən böyük rəqəmin düşməsi hadisəsinin ehtimalı:

$$P_4 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

İki dəfə gerb düşməsi ehtimalı:

$$P_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

A oyunçusunun qalib gəlməsi ehtimalı:

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

B oyunçusunun qalib gəlməsi ehtimalı:

$$P(B) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}.$$

Oyun ədalətli deyil, belə ki, B oyunçusunun qalib gəlməsi ehtimalı daha çoxdur.

§1.7-də ehtimal nəzəriyyəsinin bəzi tarixi məsələləri ilə tanış olduq. Belə məsələlərdən biri də asılı olmayan hadisələrlə bağlıdır. Doğrudur, o zaman bu anlayış hələ verilməmişdi, lakin intuiativ səviyyədə istifadə olunurdu.

Məsələ 14 (Şevalye de Mere paradoksu). De Mere belə bir oyun təklif etmişdir:

Mən 2 oyun zərini 24 dəfə atıram, əgər heç olmasa, 1 dəfə hər iki zərdə eyni zamanda 6 üzü düşsə, qalib hesab olunuram. Rəqibim isə eyni zamanda 4 oyun zərini 1 dəfə atır, əgər heç olmasa, 1 dəfə 6 üzü düşsə, qalib hesab olunur. İlk baxışda ona elə gəlmişdir ki, özü üçün daha şanslı variantı seçmişdir. Lakin bu halda udmaq əvəzinə daha tez-tez

uduzduğunu görərək, B.Paskala müraciət edir. Paskalın de Merelyə cavabı ilə tanış olaq:

A ilə 2 oyun zəri 24 dəfə atıldıqda, heç olmasa 1 dəfə hər iki zərdə eyni zamanda 6 üzünün düşməsi hadisəsini, yəni de Merenin qalib gəlməsi hadisəsini, $\bar{A}$ ilə isə A -nın əks hadisəsini işarə edək. $\bar{A}_i$ ilə zərləri i -ci dəfə atıldıqda hər iki zərdə eyni zamanda 6 üzünün düşməməsi hadisəsini işarə edək. Aydındır ki,

$$\bar{A} = \bigcap_{i=1}^{24} \bar{A}_i.$$

$\bar{A}_i$ -lərin külliyyatca asılı olmayan hadisələr olduğunu və $P(\bar{A}_i) = \frac{35}{36}, i = \overline{1, 24}$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$P(\bar{A}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{24} \bar{A}_i\right) = \prod_{i=1}^{24} P(\bar{A}_i) = (P(\bar{A}_i))^{24} = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}.$$

Beləliklə,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,49.$$

İndi isə rəqibin qələbəsi hadisəsinin (B) ehtimalını hesablayaq.

$\bar{B}$ ilə isə B -nin əks hadisəsini, $\bar{B}_i$ ilə isə zəri i -ci zərdə 6 üzü düşməməsi hadisəsi olsun. Aydındır ki,

$$\bar{B} = \bigcap_{i=1}^4 \bar{B}_i.$$

Digər tərəfdən, $\bar{B}_i$ hadisələri külliyyatca asılı olmayan hadisələrdir və

$$P(\bar{B}_i) = \frac{5}{6}, \quad i = \overline{1,4}.$$

Deməli,

$$P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,51.$$

Göründüyü kimi,

$$P(A) < P(B).$$

Deməli, Şevalye de Merenin tez-tez məğlub olması təsadüfi deyilmiş.

Yuxarıdakı məsələyə ədəbiyyatda bəzən Hüygens məsələsi də deyirlər. Buna bənzəyən başqa bir məsələ məşhur italyan alimi Qalileyin adı ilə bağlıdır (bax, §1.7).

Məsələlər.

1. İki düzgün oyun zəri atılır. $A = \{\text{eyni üzlərin düşməsi}\}$ və $B = \{\text{ikinci zərdə 3 düşməsi}\}$ hadisələrinin asılı olub olmadığını müəyyən edin.
2. İki düzgün oyun zəri atılır. $A = \{\text{düşən rəqəmlər cəminin tək ədəd olması}\}$ və $B = \{\text{ikinci zərdə 5 və ya 6 düşməsi}\}$ hadisələrinin asılı olub olmadığını müəyyən edin.
3. İki düzgün oyun zəri atılır. $A = \{\text{hər iki zərdə 1 düşməsi}\}$ və $B = \{\text{hər iki zərdə 2 düşməsi}\}$ hadisələrinin asılı olub olmadığını müəyyən edin.
4. **Bernşteyn misalı.** Bir üz qırmızı, bir üz yaşıl, bir üz mavi, sonuncu üz isə hər üç rəngin qarışığından olan rənglərlə boyanmış tetraedr müstəvi üzərinə təsadüfi olaraq atılır.

$$A = \{\text{üzərində qırmızı rəng olan üzün düşməsi}\},$$

$B = \{\text{üzərində mavi rəng olan üzün düşməsi}\},$

$C = \{\text{üzərində yaşıl rəng olan üzün düşməsi}\}$

hadisələrinin cüt-cüt asılı olmadığını, lakin külliyyatca asılı olduğunu göstərin.

§1.13. Heç olmasa bir hadisənin baş verməsi ehtimalı

Fərz edək ki, sınaq nəticəsində külliyyatca asılı olmayan n təsadüfi hadisə və ya onlardan bir neçəsi baş verə bilər (xüsusi halda biri baş verə bilər və ya heç biri baş verməz). Bu hadisələrin hər birinin baş verməsi ehtimalı verilmişdir: $p_k = P(A_k), k = \overline{1, n}$.

Külliyyatca asılı olmayan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrindən heç olmasa birinin baş verməsi hadisəsini A ilə işarə edək. Göstərmək olar ki, bu hadisənin ehtimalı

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n, \quad (1)$$

burada $q_k = P(\bar{A}_k), k = \overline{1, n}$.

Doğrudan da, A və $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ əks hadisələr olduğu üçün onların ehtimalları cəmi vahidə bərabərdir:

$$P(A) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n) = 1.$$

Digər tərəfdən $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ hadisələri külliyyatca asılı olmadıqları üçün

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n) =$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n)$$

və ya

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n$$

olduğunu əldə edərik.

Xüsusi halda, əgər külliyatca asılı olmayan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrinin ehtimalları eynidirsə, yəni $P(A_k) = p, k = \overline{1, n}$, olarsa, onda bu hadisələrdən heç olmasa birinin baş verməsi ehtimalı

$$P(A) = 1 - q^n, \quad q = 1 - p. \quad (2)$$

İndi isə mövzuya aid məsələ həlli nümunələri verək.

Məsələ 1. Bir-birindən asılı olmayaraq işləyən üç şirkətin müəyyən tapşırığı vaxtında yerinə yetirməsi ehtimalı uyğun olaraq 0,7; 0,4 və 0,8 -dir. Bu tapşırığın heç olmasa bir şirkət tərəfindən vaxtında yerinə yetirilməsi hadisəsinin (A) ehtimalını tapın.

Həlli. Şərtə görə $p_1 = 0,7$; $p_2 = 0,4$ və $p_3 = 0,8$. Buradan $q_1 = 0,3$; $q_2 = 0,6$ və $q_3 = 0,2$ olar. Beləliklə, (1) düsturuna əsasən

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,2 = 0,964.$$

Məsələ 2. Düşmən təyyarəsi 2 müxtəlif hava hücumundan müdafiə qurğusu ilə atəşə tutulur. Bu qurğuların hədəfi vurma ehtimallarının uyğun olaraq 0,84 və 0,9 olduğu məlumdur. Heç olmasa bir qurğunun təyyarəni vurması ehtimalını tapın.

Həlli. Şərtə görə $p_1 = 0,84$ və $p_2 = 0,9$. Buradan $q_1 = 0,16$ və $q_2 = 0,1$ olar. Beləliklə, (1) düsturuna əsasən

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 = 1 - 0,16 \cdot 0,1 = 0,984.$$

Göründüyü kimi, hədəfin heç olmasa bir qurğu tərəfindən vurulması ehtimalı 0,984 kifayət qədər böyük ehtimaldır. Bu isə o deməkdir ki, üçüncü qurğudan istifadə

etməyə ehtiyac yoxdur və beləliklə, bu ehtimalı bilmək imkan verir ki, silaha və sursata qənaət olunsun.

Məsələ 3. Atıcının hədəfi vurma ehtimalı 0,4-dür. O, azı neçə atəş açmalıdır ki, 0,9-dan az olmayan ehtimalla hədəfi vursun?

Həlli. Şərtə görə $p = 0,4$. Buradan $q = 0,6$. Beləliklə, (2) düsturuna əsasən

$$1 - q^n \geq 0,9$$

olmalıdır. Beləliklə, $n \geq 5$. Deməli, hədəfin 0,9 dan kiçik olmayan ehtimalla vurulması üçün atıcı hədəfə azı 5 atəş açmalıdır.

§1.14. Tam ehtimal və Bayes düsturları

Praktiki məsələlərin həllində geniş istifadə olunan iki mühüm düsturla tanış olaq. Əvvəlcə tam ehtimal düsturunu verək. Tam ehtimal düsturu baş verməsi müəyyən şərtlərdən (hipotezlərdən) asılı olan hadisənin ehtimalını tapmağa imkan verir.

Tərif. Əgər $H_1, H_2, \dots, H_n$ hadisələri

$$1. H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j,$$

$$2. \bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega$$

şərtlərini ödəyərsə, bu halda deyirlər ki, onlar hadisələrin **tam qrupunu əmələ** gətirir. H_i -lərə **hipotezlər** və ya **fərziyyələr** də deyirlər.

Fərz edək ki, $H_1, H_2, \dots, H_n$ tam qrup əmələ gətirən hadisələrdir və $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$. Onda H_i -lərdən hər hansı ilə birgə baş verə bilən ixtiyari $A \in \mathcal{F}$ hadisəsinin ehtimalı

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i) \quad (1)$$

düsturu ilə tapıla bilər. (1) **tam ehtimal düsturu** adlanır.

(1) düsturunun doğruluğunu göstərək. Doğrudan da,

$$A = A \cap \Omega = A \cap \bigcup_{i=1}^n H_i = \bigcup_{i=1}^n (A \cap H_i).$$

Ehtimal ölçüsünün additivlik xassəsindən və ehtimalların vurulması düsturundan istifadə edərək

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (A \cap H_i)\right) = \sum_{i=1}^n P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)$$

olduğunu əldə edərək. Beləliklə, (1) düsturunun doğruluğunu göstərdik.

İndi isə tam ehtimal düsturunun tətbiqinə aid aşağıdakı məsələlərə baxaq.

Məsələ 1. Birinci qutuda 1 ağ, 9 qara; ikincidə isə 1 qara və 5 ağ kürəcik var. Hər bir qutudan qaytarmamaq şərti ilə bir kürəcik götürülür. Qalan kürəciklər isə 3-cü boş qutuya qoyulur. 3-cü boş qutudan çıxarılan kürəciyin ağ rəngdə olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Əvvəlcə A hadisəsini daxil edək:

$A = \{3\text{-cü qutudan çıxarılan kürəciyin ağ rəngli olması}\}.$

İndi isə hipotezləri quraq:

$H_1 = \{1\text{-ci və } 2\text{-ci qutudan ağ rəngli kürəciyin çıxarılması}\},$

$H_2 = \{1\text{-ci və } 2\text{-ci qutudan qara rəngli kürəciyin çıxarılması}\},$

$H_3 = \{1\text{-ci qutudan ağ, } 2\text{-ci qutudan qara rəngli kürəciyin}$

çıxarılması},

$H_4 = \{1\text{-ci qutudan qara, 2-ci qutudan ağ rəngli kürəciyin çıxarılması}\}.$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$P(H_1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6}, \quad P(H_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6},$$

$$P(H_3) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6}, \quad P(H_4) = \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{6}.$$

İndi isə $P(A|H_i)$ ehtimallarını tapaq:

$$P(A|H_1) = \frac{4}{14}, \quad P(A|H_2) = \frac{6}{14},$$

$$P(A|H_3) = \frac{5}{14}, \quad P(A|H_4) = \frac{5}{14}.$$

Beləliklə, tam ehtimal düsturuna əsasən

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^4 P(H_i) \cdot P(A|H_i) = \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{4}{14} + \frac{3}{20} \cdot \frac{6}{14} + \frac{1}{60} \cdot \frac{5}{14} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{14} = \frac{38}{105}. \end{aligned}$$

Məsələ 2. Statistik olaraq məlumdur ki, müəyyən böyük bankdan götürülən kreditin 10%-ni dövlət orqanları, 30%-ni digər kiçik banklar, 60%-ni isə fiziki şəxslər götürür və kreditin qaytarılmaması ehtimalı 0,01; 0,05 və 0,2-dir. Kreditin vaxtında qaytarılmaması ehtimalını (kredit riskini) tapın.

Həlli. Əvvəlcə A hadisəsini daxil edək:

$A = \{\text{kreditin vaxtında qaytarılmaması}\}.$

İndi isə hipotezləri quraq:

$H_1 = \{\text{kreditin dövlət orqanları tərəfindən götürülməsi}\},$

$H_2 = \{\text{kreditin kiçik banklar tərəfindən götürülməsi}\},$

$H_3 = \{\text{kreditin fiziki şəxslər tərəfindən götürülməsi}\}.$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$P(H_1) = 0,1, \quad P(H_2) = 0,3, \quad P(H_3) = 0,6.$$

İndi isə $P(A|H_i)$ ehtimallarını tapaq:

$$P(A|H_1) = 0,01, \quad P(A|H_2) = 0,05, \quad P(A|H_3) = 0,2.$$

Beləliklə, tam ehtimal düsturuna əsasən

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(A|H_i) = 0,136.$$

Məsələ 3. Üç eyni qutu vardır. Birinci qutuda 3 ağ, 4 qara, ikinci qutuda 2 ağ, 3 qara, üçüncü qutuda isə 6 qara kürəcik vardır. Təsadüfi olaraq bir qutu seçilir və oradan bir kürəcik çıxarılır. Bu kürəciyin ağ rəngli olması ehtimalını tapın.

Həlli. Əvvəlcə ehtimalı axtarılan hadisəni daxil edək:

$A = \{\text{təsadüfi seçilmiş qutudan çıxarılan kürəciyin ağ olması}\}$

İndi isə hipotezləri daxil edək:

$H_i = \{i\text{-ci qutunun seçilməsi}\}, i = 1, 2, 3.$

Aydındır ki, $P(H_i) = \frac{1}{3}.$

Asanlıqla görmək olar ki,

$$P(A|H_1) = \frac{3}{7}, \quad P(A|H_2) = \frac{2}{5}, \quad P(A|H_3) = 0.$$

Beləliklə, tam ehtimal düsturuna əsasən

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(A|H_i) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{2}{5} + 0 \right) = \frac{29}{105}.$$

Məsələ 4. Qutuda 5 mavi, 3 qırmızı, 2 yaşıl kürəcik vardır. Kürəciklər qaytarmamaq şərtlə bir-bir çıxarılır. İkinci çıxarılan kürəciyin mavi rəngli olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Əvvəlcə ehtimalı axtarılan hadisəni daxil edək:

$A = \{\text{ikinci çıxarılan kürəciyin mavi rəngli olması}\}.$

İndi isə hipotezləri daxil edək:

$H_1 = \{\text{birinci çıxarılan kürəciyin mavi rəngli olması}\},$

$H_2 = \{\text{birinci çıxarılan kürəciyin qırmızı rəngli olması}\},$

$H_3 = \{\text{birinci çıxarılan kürəciyin yaşıl rəngli olması}\}.$

Aydınır ki,

$$P(H_1) = \frac{5}{10}, \quad P(H_2) = \frac{3}{10}, \quad P(H_3) = \frac{2}{10}.$$

Asanlıqla görmək olar ki,

$$P(A|H_1) = \frac{4}{9}, \quad P(A|H_2) = \frac{5}{9}, \quad P(A|H_3) = \frac{5}{9}.$$

Beləliklə, tam ehtimal düsturuna əsasən

$$P(A) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}.$$

Qeyd edək ki, birinci çıxarılan kürəciyin rəngi məlum olarsa, bu ehtimal artar. Məsələn, ilk çıxarılan kürəciyin mavi olmadığı məlum olarsa, bu halda A hadisəsinin ehtimalı $\frac{5}{9}$ - ə

bərabər olar.

Məsələ 5. Qrupda 5 əlaçı, 10 yaxşı oxuyan və 15 zəif oxuyan tələbə var. İmtahan zamanı əlaçılar həmişə əla qiymət, yaxşı oxuyanlar eyni ehtimalla əla və yaxşı qiymətlər, zəif oxuyan tələbələr isə eyni ehtimalla kafi və qeyri-kafi qiymətlər alır. Aşağıdakı hadisələrin ehtimalını tapın:

$A = \{\text{təsadüfi seçilmiş tələbənin əla qiymət alması}\},$

$B = \{\text{təsadüfi seçilmiş tələbənin yaxşı qiymət alması}\},$

$C = \{\text{təsadüfi seçilmiş tələbənin kafi qiymət alması}\},$

$D = \{\text{təsadüfi seçilmiş tələbənin qeyri-kafi qiymət alması}\}.$

Həlli. Aşağıdakı hipotezləri daxil edək:

$H_1 = \{\text{seçilmiş tələbənin əlaçı olması}\},$

$H_2 = \{\text{seçilmiş tələbənin yaxşı oxuyan tələbə olması}\},$

$H_3 = \{\text{seçilmiş tələbənin zəif oxuyan tələbə olması}\}.$

Məsələnin şərtindən aydındır ki,

$$P(H_1) = \frac{5}{30}, \quad P(H_2) = \frac{10}{30}, \quad P(H_3) = \frac{15}{30}.$$

İndi isə aşağıdakı şərti ehtimalları hesablayaq:

$$P(A|H_1) = 1, \quad P(A|H_2) = P(B|H_2) = \frac{1}{2},$$

$$P(B|H_3) = P(C|H_3) = P(D|H_3) = 1.$$

Tam ehtimal düsturuna əsasən

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(A|H_i) = 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

Eyni qayda ilə hesablamaq olar ki,

$$P(B) = 0 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3};$$

$$P(C) = \frac{1}{6}; \quad P(D) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Məsələ 6 (Oyunçunun müflis olması haqqında).

Metal pulun atılması ilə bağlı aşağıdakı oyuna baxaq, belə ki, bu oyunda oyunçu gerb və ya rəqəm üzünü seçdikdən sonra metal pul atılır. Əgər oyunçunun öncədən dediyi üz düşərsə, onda o, 1 manat qazanır, əks halda, 1 manat uduzur. Fərz edək ki, oyunçunun ilkin kapitalı x manatdır, oyunçunun məqsədi a məbləğini qazanmaqdır. Oyun a məbləğini qazanana qədər və ya mövcud kapitalı uduzana qədər davam edir. Arzuolunan a məbləğini qazanmadan oyunçunun uduzması hadisəsinin ehtimalını tapmaq tələb olunur.

Həlli. Aydındır ki, bu ehtimal x ilkin kapitalından və yekun a məbləğindən asılıdır. x kapitalı olan oyunçunun müflis olma ehtimalını $p(x)$ ilə işarə edək. Onda daxil olunan işarələmələrə əsasən, ilkin addımda qazanmaq şərti ilə müflis olma hadisəsinin ehtimalı $p(x+1)$ olacaq, belə ki, qazandıqdan sonra oyunçunun kapitalı $x+1$ məbləğinə bərabər olacaq. Analoji olaraq, ilkin addımda uduzmaq şərti ilə müflis olma hadisəsinin ehtimalı $p(x-1)$ olacaq, belə ki, uduzduqdan sonra oyunçunun kapitalı $x-1$ məbləğinə bərabər olacaq. Oyunçunun birinci addımda qazanma hadisəsini H_1 ilə, uduzma hadisəsini isə H_2 ilə işarə edək. Oyunçunun müflis olma hadisəsi A olsun. Bu halda müflis olmanın şərti ehtimalları aşağıdakı düsturlarla ifadə olunur:

$$P(A|H_1) = p(x+1), \quad P(A|H_2) = p(x-1).$$

H_1 və H_2 tam qrup hadisələri əmələ gətirir, belə ki, oyunçu ilk addımda ya qazanır, ya uduzur, aydındır ki,

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}.$$

Tam ehtimal düsturuna əsasən $p(x)$ ehtimalı üçün aşağıdakı tənlik alınır:

$$p(x) = \frac{1}{2}(p(x+1) + p(x-1)), \quad 1 \leq x \leq a-1,$$

belə ki, $p(0) = 1, p(a) = 0$.

Bu tənliyin həlli $p(x) = C_1 + C_2x$ xətti funksiyasıdır, burada əmsallar aşağıdakı sərhəd şərtlərindən təyin olunmalıdır:

$$p(0) = C_1 = 1.$$

Eyni qayda ilə,

$$p(a) = C_1 + C_2a = 0.$$

Beləliklə, x ilkin kapitalına malik oyunçunun axtarılan $p(x)$ müflis olma ehtimalı üçün yekun ifadəni alırıq:

$$p(x) = 1 - \frac{x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a.$$

İndi isə Bayes düsturları ilə tanış olaq. Tam ehtimal düsturunda qoyulmuş məsələnin tərs məsələsinin həlli üçün Bayes düsturlarından istifadə olunur.

$H_1, H_2, \dots, H_n$ tam qrup əmələ gətirən hadisələr və $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$ ehtimalları məlum olsun. Fərz edək ki, $P(A) > 0$ və sınaq nəticəsində A hadisəsi baş vermişdir. Onda

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

(2)-yə Bayes düsturları deyilir.

(2) düsturlarının doğruluğunu göstərək. Şerti ehtimalın tərifinə əsasən

$$P(A \cap H_i) = P(H_i)P(A|H_i), \quad P(H_i) > 0,$$

və

$$P(A \cap H_i) = P(A)P(H_i|A), \quad P(A) > 0.$$

Sol tərəflərin bərabərliyindən sağ tərəflərin də bərabərliyi alınır:

$$P(A)P(H_i|A) = P(H_i)P(A|H_i).$$

Digər tərəfdən şərtə görə $P(A) > 0$ olduğu üçün sonuncu bərabərlikdən

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$$

olduğunu əldə edərək.

Nəhayət, məxrəcdə $P(A)$ əvəzinə tam ehtimal düsturu-nu yazaraq Bayes düsturlarını əldə edərək.

Qeyd edək ki, $P(H_i)$ ehtimalları **aprior ehtimallar** (eksperimentdən əvvəlki), $P(H_i|A)$ şərti ehtimalları isə **aposterior** (eksperimentdən sonrakı) ehtimallar adlanır. Bayes düsturları aposterior ehtimalların köməyi ilə aprior ehtimalları qiymətləndirməyə imkan verir. Başqa sözlə, Bayes düsturları A hadisəsinin baş verməsini qəbul edərək, sınaqdan əvvəl irəli sürülən fərziyyələrin ehtimallarını dəqiqləşdirməyə imkan verir. Bayes düsturları riyazi statistikada, iqtisadiyyatda, tibbi diaqnostikada s. istifadə olunur.

İndi isə Bayes düsturlarına aid məsələ həlli nümunələri verək.

Məsələ 7. Birinci qutuda 2 ağ, 3 qara, ikinci qutuda 5 ağ və 2 qara rəngli kürəcik vardır. Təsadüfi olaraq bu qutulardan biri seçilir və oradan bir kürəcik çıxarılır. Çıxarılan kürəciyin ağ rəngli olduğu məlumdur. Birinci qutunun seçilmiş olması ehtimalını tapın.

Həlli. $H_1 = \{\text{birinci qutunun seçilməsi}\},$

$H_2 = \{\text{ikinci qutunun seçilməsi}\}.$

Aydındır ki,

$$P(H_1) = \frac{1}{2}, \quad P(H_2) = \frac{1}{2}.$$

İndi isə şərti ehtimalları tapaq:

$$P(A|H_1) = \frac{2}{5}, \quad P(A|H_2) = \frac{5}{7}.$$

Bayes düsturuna əsasən

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{\sum_{i=1}^2 P(H_i) \cdot P(A|H_i)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7}} = \frac{14}{39}.$$

Qeyd edək ki, bu halda ikinci qutunun seçilməsi ehtimalı

$$P(H_2|A) = \frac{25}{39}$$

daha böyükdür. Bu onunla bağlıdır ki, ikinci qutuda ağ kürəciklərin sayı daha çoxdur.

Məsələ 8. Statistik olaraq məlumdur ki, müəyyən böyük bankdan götürülən kreditin 10%-ni dövlət orqanları, 30%-ni digər kiçik banklar, 60%-ni isə fiziki şəxslər götürür və kreditin qaytarılmaması ehtimalı 0,01; 0,05 və 0,2-dir.

Kredit şöbəsinə kreditin qaytarılmaması haqqında məlumat daxil oldu. Kreditin hər hansı kiçik bank tərəfindən qaytarılmaması ehtimalını tapın.

Həlli. Əvvəlcə A hadisəsini daxil edək:

$$A = \{\text{kreditin vaxtında qaytarılmaması}\}.$$

İndi isə hipotezləri quraq:

$$H_1 = \{\text{kreditin dövlət orqanları tərəfindən götürülməsi}\},$$

$$H_2 = \{\text{kreditin kiçik banklar tərəfindən götürülməsi}\},$$

$$H_3 = \{\text{kreditin fiziki şəxslər tərəfindən götürülməsi}\}.$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$P(H_1) = 0,1, \quad P(H_2) = 0,3, \quad P(H_3) = 0,6.$$

İndi isə şərti ehtimalları tapaq:

$$P(A|H_1) = 0,01, \quad P(A|H_2) = 0,05, \quad P(A|H_3) = 0,2.$$

Bu ehtimalları Bayes düsturunda nəzərə alsaq

$$P(H_2|A) = \frac{0,3 \cdot 0,05}{0,1 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,6 \cdot 0,2} \approx 0,11.$$

Beləliklə, H_2 hipotezinin aprior ehtimalı $P(H_2) = 0,3$ dəqiqləşdirilmiş oldu.

Məsələ 9. İqtisadçı-analitik müəyyən ölkədəki iqtisadi vəziyyəti şərti olaraq “yaxşı”, “orta” və “pis” olmaqla qiymətləndirə bilər və onların müəyyən bir zaman üçün ehtimallarını uyğun olaraq 0,15; 0,70 və 0,15 olaraq qiymətləndirir. Məlumdur ki, iqtisadi vəziyyətin göstəricisi olan bəzi indekslər vəziyyət “yaxşı” olduqda 0,6 ehtimalı, vəziyyət “orta” olduqda 0,3, vəziyyət “pis” olduqda isə 0,1 ehtimalı ilə artır. İqtisadi vəziyyət indeksinin artımı müşahidə olunmuşdursa, ölkə iqtisadiyyatının vəziyyətinin “yaxşı” olması ehtimalı nə qədərdir?

Həlli. Əvvəlcə A hadisəsini daxil edək: $A = \{\text{iqtisadi vəziyyət indeksinin artması}\}$.

İndi isə hipotezləri quraq:

$H_1 = \{\text{iqtisadi vəziyyətin "yaxşı" olması}\}$,

$H_2 = \{\text{iqtisadi vəziyyətin "orta" olması}\}$,

$H_3 = \{\text{iqtisadi vəziyyətin "pis" olması}\}$.

Məsələnin şərtindən aydındır ki,

$$P(H_1) = 0,15, \quad P(H_2) = 0,70, \quad P(H_3) = 0,15.$$

olacaqdır. $P(A|H_i)$ şərti ehtimalları isə

$$P(A|H_1) = 0,6, \quad P(A|H_2) = 0,3, \quad P(A|H_3) = 0,1.$$

Bayes düsturuna əsasən

$$P(H_1|A) = 0,285.$$

§1.15. Entropiya və informasiya miqdarı anlayışları

Entropiya termini təbiət elmlərində geniş istifadə olunur. Entropiya sözü qədim yunan sözü olub ἐν "içində" + τροπή isə "çevrilmə" mənasını verir. Bu söz ilk dəfə termodinamik sistemin vəziyyətinin funksiyası kimi termodinamika çərçivəsində tətbiq edilmişdir, enerjinin geri dönməz yayılmasının ölçüsünü ifadə edir. Fizikanın bu bölməsində entropiya anlayışı üçün termodinamik entropiya adı istifadə olunur; termodinamik entropiya adətən tarazlıq (dönən) prosesləri təsvir etmək üçün istifadə olunur. Statistik fizikada entropiya makroskopik vəziyyətin baş vermə ehtimalını xarakterizə edir və Boltzmann-Gibbs entropiyası kimi də tanınır. Entropiya anlayışı riyaziyyatda geniş istifadə olunur: informasiya nəzəriyyəsi və ehtimal nəzəriyyəsində.

Bu sahələrdə entropiya statistik yolla müəyyən edilir və statistik və ya informasiya entropiyası adlanır. Entropiyanın bu tərfi Şennon entropiyası adlanır. Qeyd edək ki, termodinamik və informasiya entropiyaları anlayışları müxtəlif anlayışlar kimi görünə də, onların ümumi fiziki mənası vardır: hər ikisi sistemin mikro hallarının sayının loqarifmidir. Bu anlayışlar arasındakı əlaqəni ilk dəfə Lüdviq Boltsman qurmuşdur. Tarazlıqda olmayan (geri dönməz) proseslərdə entropiya həm də sistemin vəziyyətinin tarazlığa yaxınlığının ölçüsü kimi xidmət edir: entropiya nə qədər böyükdürsə, sistem tarazlığa bir o qədər yaxındır. Başqa sözlə, termodinamik tarazlıq vəziyyətində sistemin entropiyası maksimumdur. Beləliklə, entropiya bir sistemin mürəkkəbliyinin, xotikliyin və ya qeyri-müəyyənliyinin ölçüsüdür. Sistemin elementləri hər hansı bir nizama nə qədər az tabe olsa, bu sistemin entropiyası da bir o qədər yüksəkdir. Şennon entropiyası anlayışını verməzdən əvvəl Xartli informasiya miqdarı anlayışını daxil edək.

Tərif 1. Məlumatda olan informasiya miqdarını təyin edən məlumatın loqarifmik ölçüsünə Xartli informasiya miqdarı deyilir:

$$I = k \log_2 n, \quad (1)$$

burada I məlumatdakı informasiyanın bitlərlə miqdarı, n istifadə olunan əlifbadakı simvolların sayı (əlifbanın gücü), k ötürülən məlumatdakı simvolların sayıdır.

(1) düsturu 1928-ci ildə Ralf Xartli tərəfindən verilmişdir.

Əlifbada bir simvolundakı informasiya miqdarı olan i -nin tapılması üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$i = \log_2 n.$$

Buradan alfavitin gücünü tapmaq mümkündür:

$$n = 2^i.$$

Fərz edək ki, A əlifbasının n sayda hərfindən istifadə olunmaqla məlumat yaradılır:

$$|A| = n.$$

Müxtəlif məlumatlar üçün mümkün variantların sayı:

$$M = n^k$$

burada M müxtəlif məlumatların mümkün sayı, n əlifbadakı hərflərin sayı, k isə məlumatdakı hərflərin sayıdır.

Misal 1. Fərz edək ki, əlifba 16 simvoldan ibarətdir:

"1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9", "0",
" + ", " - ", " * ", " / ", " ^ ", " # "

Məlumatın uzunluğu 10 simvoldan ibarətdir (məsələn, " $*123*1*3^4\#$ ").

Bu misalda əlifbanın gücü $n = 16$, məlumatın uzunluğu isə $k = 10$ -dur. Seçdiyimiz əlifba və məlumatın uzunluğundan istifadə etməklə $M = n^k = 16^{10}$ sayda məlumat tərtib edilə bilər. Xartli düsturuna əsasən müəyyən etmək olar ki, bu məlumatlardan birinin hər simvolunda olan informasiyanın miqdarı

$$i = \log_2 n = \log_2 16 = 4 \text{ bit}$$

olar.

(1) düsturuna əsasən bütün məlumatdakı informasiya miqdarı isə

$$I = k \log_2 n = 10 \log_2 16 = 40 \text{ bit}.$$

İnformasiya nəzəriyyəsi informasiyanın əldə edilməsi,

ötürülməsi, emal edilməsi və saxlanılması ilə bağlı kəmiyyət qanunauyğunluqlarını öyrənən elm sahəsidir. İnformasiyanın ötürülməsi proseslərinə xas olan təsadüfilik əlamətləri bu proseslərin tədqiqi zamanı ehtimal nəzəriyyəsinin metodlarından istifadəni zəruri edir. Məlumdur ki, ixtiyari informasiya ötürülməsi üçün əvvəlcə xüsusi simvollar vasitəsilə kodlaşdırılmalıdır.

Aydındır ki, müəyyən fiziki sistemin vəziyyəti təsadüfi olaraq dəyişirsə bu zaman müəyyən qeyri-müəyyənlik yaranır. Təbii olaraq belə sual meydana çıxır ki bu qeyri-müəyyənliyi necə ölçmək olar? Belə qeyri-müəyyənliklərə malik olan iki sistemi müqayisə edək:

1. Bir simmetrik metal pul atılır. Aydındır ki, bu zaman iki mümkün nəticə vardır. Gerb və ya rəqəm düşməsi.

2. İkinci stoxastik eksperiment olaraq bir oyun zərinin eksperimentinə baxaq. Aydındır ki, bu zaman altı mümkün nəticə vardır: 1,2,...,6. Göründüyü kimi ikinci stoxastik eksperimentin qeyri-müəyyənliyi daha çoxdur. İlk baxışda elə görünə bilər ki, qeyri-müəyyənlik dərəcəsi sistemin mümkün vəziyyətlərinin sayı ilə müəyyən edilir, lakin ümumi halda bu belə deyildir. Məsələn, saz və nasaz vəziyyətdə ola bilən bir qurğuya baxsaq və əvvəlcədən məlum olsa ki, onun saz vəziyyətdə olması ehtimalı 0,99, nasaz vəziyyətdə olması ehtimalı isə 0,01 -dirsə aydındır ki belə sistemin qeyri-müəyyənliyi çox azdır. Çünki biz əminliklə bu sistemin saz vəziyyətdə işləyəcəyini söyləyə bilərik. Oyun zərinin atılması eksperimentində iki nəticə vardır, lakin bu eksperimentin qeyri-müəyyənliyi çoxdur. Beləliklə, görürük ki hər hansı fiziki sistemin qeyri-müəyyənliyi təkcə onun ola biləcəyi

vəziyyətlərin sayından asılı olmayıb həm də bu vəziyyətlərdə olma ehtimallarından asılıdır.

İndi isə stoxastik eksperimentin entropiyası anlayışını verək.

Hər hansı bir stoxastik eksperimentin qeyri-müəyyənlik dərəcəsini təyin etmək üçün də entropiya anlayışını daxil edirlər. Fərz edək ki, hər hansı G sınağı aparılır və bu sınağa uyğun elementar hadisələr fəzası sonlu elementar hadisələr fəzasıdır, yəni diskret elementar hadisələr fəzasıdır:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\},$$

belə ki, hər bir elementar hadisələrin ehtimalları verilmişdir və
1. $p_i \geq 0, i = \overline{1, n}$; 2. $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Tərif 2.

$$H \equiv H(G) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$$

ədədinə G sınağının **entropiyası** deyilir. H -a bəzən $p_1, p_2, \dots, p_n$ paylanması **entropiyası** da deyilir.

Bu tərifə entropiyanın Şennon tərfi də deyilir.

Misal 2. Simmetrik metal pulun atılması eksperimentinin qeyri-müəyyənlik dərəcəsinin hesablayın.

Həlli. Ayrıdır ki, $\Omega = \{G, R\}$. Elementar hadisələrin ehtimalı $p_1 = P(G) = \frac{1}{2}$ və $p_2 = P(R) = \frac{1}{2}$. Bunları entropiyanın tərifində nəzərə alsaq,

$$\begin{aligned} H &= -(p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2) = \\ &= -\left(\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

Entropiyanın belə təyin olunmuş vahidi “ikilik vahid” adlanır və çox zaman bit (ingiliscə, “binary digit”) kimi işarə olunur. Beləliklə, stoxastik eksperimentin qeyri- müəyyənlik ölçüsü olaraq iki eyni ehtimallı nəticəsi olan eksperimentin qeyri-müəyyənliyi götürülür.

Misal 3. Gerb üzünün düşməsi ehtimalı $\frac{1}{3}$ olan simmetrik olmayan metal pulun atılması eksperimentinin qeyri-müəyyənlik dərəcəsinin (entropiyasını) hesablayın.

Həlli. Aydındır ki, $\Omega = \{G, R\}$, belə ki, şərtə görə $p_1 = P(G) = \frac{1}{3}$ və $p_2 = P(R) = \frac{2}{3}$.

Bunları entropiyanın tərifində nəzərə alsaq,

$$\begin{aligned} H &= -(p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2) = \\ &= -\left(\frac{1}{3} \log_2 \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \log_2 \frac{2}{3}\right) = -(-0,52 - 0,38) = 0,9. \end{aligned}$$

Misal 4. 0, 1,..., 9 rəqəmlərindən sadə ədədin seçilməsi sınağının qeyri-müəyyənlik dərəcəsini tapın.

Həlli. 10 rəqəmdən 4-ü sadədir: 2, 3, 5, 7. Buna görə də sadə ədədin götürülməsinin p_1 ehtimalı 0,4-ə bərabərdir. Əks hadisənin ehtimalı isə $p_2 = 1 - 0,4 = 0,6$ -dır.

Entropiyanın tərifinə görə

$$\begin{aligned} H &= \frac{4}{10} \log_2 \frac{10}{4} + \frac{6}{10} \log_2 \frac{10}{6} = \log_2 10 - \log_2 4 - \log_2 6 = \\ &= \log_2 5 - \log_2 3 - 2 \approx 2,5 - 1,6 = 0,9 \text{ bit.} \end{aligned}$$

Praktikada çox zaman iki və daha çox sistemin birləşməsindən ibarət olan mürəkkəb sistemin entropiyasını tap-

maq tələb olunur.

Mürəkkəb sistem dedikdə elə (X, Y) sistemi başa düşülür ki, onun vəziyyətləri X və Y sistemlərinin vəziyyətlərinin bütün mümkün kombinasiyalarından ibarətdir. Yəni əgər X sisteminin vəziyyətləri $x_1, \dots, x_n$ və Y sisteminin vəziyyətləri isə $y_1, \dots, y_m$ -dirsə, (X, Y) sisteminin vəziyyətləri $(x_i, y_j), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ olar.

Bu sistemin mümkün vəziyyətlərinin sayı $n \cdot m$ olar. Yəni X sisteminin x_i , Y sisteminin isə y_j vəziyyətində olma ehtimalını işarə edək.

$$H(X, Y) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} \log_2 p_{ij}$$

ədədinə (X, Y) **mürəkkəb sistemin entropiyası** deyilir.

Fərz edək ki, X və Y sistemləri asılı deyillər. Yəni sistemlər öz vəziyyətlərində bir-birindən asılı olmayaraq olurlar. Bu halda $p_{ij} = p_i \cdot p_j$ olduğu üçün $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$ yəni asılı olmayan sistemlərin birləşməsi zamanı onların entropiyaları cəmlənir.

Fərz edək ki, iki X və Y sistemi var və ümumi halda asılıdırlar. Fərz edək ki, X sistemi x_i vəziyyətindədir. $P(y_j | x_i)$ ilə X sisteminin x_i vəziyyətində olması şərtində Y sisteminin y_j vəziyyətində olması ehtimalını işarə edək:

$$P(y_j | x_i) = P\{Y \sim y_j | X \sim x_i\}.$$

Y sisteminin şərti entropiyası

$$H(Y | x_i) = - \sum_{j=1}^m P(y_j | x_i) \cdot \log_2 P(y_j | x_i)$$

kimi təyin olunur. Şərti entropiya X sisteminin x_i vəziyyə-tindən asılıdır. Bəzi vəziyyətlər üçün o, böyük, bəziləri üçün isə kiçik olacaq. Y sisteminin tam və ya orta entropiyasını təyin edək. Hesab edək ki, sistem müxtəlif vəziyyətlərdə ola bilər. Bunun üçün şərti entropiyanı uyğun vəziyyətin p_i ehtimalına vurub hasilləri toplamaq lazımdır:

$$H(Y|X) = \sum_{j=1}^m p_i H(Y|x_i).$$

$H(Y|X)$ entropiyası X sisteminin qeyri-müəyyənliyi götürül-dükdən sonra Y sisteminin qeyri-müəyyənliyini ifadə edir.

Əgər X və Y iki asılı sistemdirsə, onların birləşməsinin entropiyası:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X).$$

II FƏSİL

ASILI OLMAYAN SINAQLAR ARDICILLIĞI

*O şey ki, bizlərə lap aşikardır,
Orda da gizli bir xəzinə vardır.*

Nizami Gəncəvi

Praktikada bir çox məsələlərin həlli zamanı asılı olmayan sınaqlar ardıcılığının öyrənilməsi zərurəti yaranır.

Fərz edək ki, n sayda

$$G_1, G_2, \dots, G_n \quad (*)$$

nəticəsindən səbəbə görə asılı deyilsə, onda $(*)$ ardıcılığı səbəbə görə asılı olmayan sınaqlar ardıcılığı adlanır.

Sınaqların asılı olmazlığının riyazi tərifini verək. Sadəlik üçün $n = 2$ olsun. Fərz edək ki, G_1 və G_2 iki müxtəlif sınaq, $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ və $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ isə bu sınaqlara uyğun ehtimal fəzalarıdır. Həmçinin G_1 və G_2 sınaqlarının birlikdə aparılmasından ibarət olan “mürəkkəb” $G = G_1 \times G_2$ sınağına baxaq, bu sınağa uyğun ehtimal fəzasını $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ilə işarə edək. G sınağına uyğun elementar hadisələr fəzası Ω_1 və Ω_2 -nin düz hasili kimi olar:

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2): \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}.$$

$\mathcal{F}$ siqma cəbri isə aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \sigma\{A_1 \times A_2: A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}.$$

Başqa sözlə, $\mathcal{F}$ siqma cəbri Ω -nın $A = A_1 \times A_2$ şəkilli altçoxluqlarının doğurduğu σ -cəbrdir.

$\mathcal{F}$ siqma cəbrində P ehtimal ölçüsü aşağıdakı uzlaşma şərtlərini ödəyir:

$$P(A_1 \times \Omega_2) = P_1(A_1) \text{ və } P_2(A_2) = P(\Omega_1 \times A_2)$$

Tərif 1. Əgər ixtiyari $A \in \mathcal{F}$ üçün

$$\begin{aligned} P(A) &= P_1(A_1)P_2(A_2) = \\ &= P(A_1 \times \Omega_2) \cdot P(\Omega_1 \times A_2) \end{aligned}$$

olarsa, bu halda G_1 və G_2 sınaqlarına **asılı olmayan sınaqlar** deyilir.

Qeyd edək ki, xüsusi halda (*) sınaqlar ardıcılığı eyni bir sınağın təkrarlanmasından da ibarət ola bilər.

Misal 1. Bir simmetrik metal pul və bir düzgün oyun zəri eyni zamanda atılır. Metal pulda gerb üzünün, oyun zərində isə 2 rəqəminin düşməsi hadisənin ehtimalını tapın.

Həlli. Bu eksperimentə uyğun elementar hadisələr fəzasını quraq:

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(G, 1); (G, 2); \dots; (G, 6); (R, 1); (R, 2); \dots; (R, 6)\}$, burada

$$\Omega_1 = \{G, R\}; \Omega_2 = \{1, \dots, 6\}.$$

Aşağıdakı hadisələri daxil edək:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{G\} \subset \Omega_1; A_2 = \{2\} \subset \Omega_2 \text{ və} \\ A &= A_1 \times A_2 = \{(G, 2)\} \subset \Omega. \end{aligned}$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$P_1(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega_1|} = \frac{1}{2}; P_2(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega_2|} = \frac{1}{6}; P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{12}.$$

Beləliklə,

$$P(A) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

§2.1. Bernulli sxemi

Fərz edək ki, $G_1, G_2, \dots, G_n$ sınaqlar ardıcılığında hər sınaq iki nəticəyə malikdir: A və $\bar{A}$. Bu nəticələri şərti olaraq “+” (müsbət) və “–” (mənfi) nəticə adlandıraraq.

Əgər i -ci sınaqda “+” nəticə baş verirsə, $a_i = 1$, əks halda, yəni “–” nəticə baş verirsə, $a_i = 0$ qəbul edək və onların ehtimalını aşağıdakı kimi işarə edək:

$$P(a_i = 1) = p \text{ və } P(a_i = 0) = q,$$

belə ki, $p + q = 1$.

Beləliklə, $G_1, G_2, \dots, G_n$ sınaqlar ardıcılığında hər bir sınağın iki nəticəsi (“+” və “–”) var və bu nəticələrin baş vermə ehtimalları uyğun olaraq p və q olub sınağın nömrəsindən asılı deyil. Belə n sayda sınaqlar ardıcılığına **Bernulli sxemi** deyilir və hər bir sınaq **Bernulli sınağı** adlanır.

Məsələn, bir metal pulun atılması, hər hansı fabrikin istehsal etdiyi məhsulun yararlılığının yoxlanılması və s. Bernulli sınağına misaldır.

Bernulli sxeminə uyğun elementar hadisələr fəzası aşağıdakı kimi olar:

$$\Omega = \{\omega: \omega = (a_1, a_2, \dots, a_n); a_i = 0 \text{ və ya } 1, i = \overline{1, n}\}.$$

Beləliklə, ixtiyari $\omega \in \Omega$ elementar hadisəsinin ehtimalı

$$p(\omega) = p^{\sum_{i=1}^n a_i} \cdot q^{n - \sum_{i=1}^n a_i} \quad (1)$$

olar.

Bernulli sxemində n sayda sınaqda “+” nəticənin k dəfə baş verməsi hadisəsinin ehtimalının tapılması mühüm əhəmiyyətə malikdir. Bu hadisəni $A_n(k)$ ilə, onun ehtimalını

isə $P_n(k)$ ilə işarə edək. Qeyd edək ki, bu zaman “+” nəticənin hansı ardıcılıqla baş verməsinin əhəmiyyəti yoxdur. $A_n(k)$ hadisəsinə aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$A_n(k) = \{\omega: \omega = (a_1, \dots, a_n), a_1 + \dots + a_n = k, a_i = 0 \text{ və ya } 1\}.$$

İndi isə $A_n(k)$ hadisəsinin ehtimalını tapaq.

Aydındır ki, n sayda Bernulli sınağında “+” nəticə k dəfə baş verərsə, bu halda $\sum_{i=1}^n a_i = k$ olacaqdır və bunu (1)-də nəzərə almaqla diskret ehtimal fəzasında ehtimalın tərifindən istifadə etsək $A_n(k)$ hadisəsinin ehtimalı üçün aşağıdakı münasibəti əldə edərik:

$$\begin{aligned} P_n(k) &= P(A_n(k)) = \sum_{\omega \in A_n(k)} p(\omega) = \\ &= p^k \cdot q^{n-k} \cdot |A_n(k)|, \quad k = \overline{0, n}, \end{aligned} \quad (2)$$

burada $|A_n(k)|$ ilə $A_n(k)$ hadisəsinə daxil olan elementar hadisələrin sayı işarə olunmuşdur.

Asanlıqla görmək mümkündür ki, $|A_n(k)|$ simvolu 0 və 1-lərdən təşkil olunmuş, n həcmli $\omega = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ seçimində k sayda vahidlərin yerləşmə sayını göstərir. Kombinatorikadan məlumdur ki, çoxluq yalnız iki tip elementdən təşkil olunubsa, yəni birinci tip elementdən k sayda, ikinci tip elementdən isə $(n - k)$ saydadırsa, bu halda bu çoxluqdakı bütün yerdəyişmələrin sayı $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ olar. Başqa sözlə, axtarılan say təkrarlı yerdəyişmələrin sayına bərabərdir, yəni $|A_n(k)| = C_n^k$.

Beləliklə, Bernulli sxemində n sayda sınaqda “+” nəticənin k dəfə baş verməsi hadisəsinin ehtimalı aşağıdakı kimidir:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (3)$$

(3) düsturu **binomial paylanma düsturu** adlanır. Bu düstura ədəbiyyatda bəzən Bernulli düsturu da deyilir.

Asanlıqla görmək mümkündür ki, $\sum_{k=0}^n P_n(k) = 1$.

Doğrudan da,

$$\sum_{k=0}^n P_n(k) = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = (p + q)^n = 1$$

olduğunu əldə edərik.

(3) düsturundan istifadə etməklə aşağıdakı ehtimalları da tapmaq olar:

“müsbət” nəticənin

1) k -dan az sayda baş verməsi ehtimalı:

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1);$$

2) k -dan çox sayda baş verməsi ehtimalı:

$$P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n);$$

3) ən azı k sayda baş verməsi ehtimalı:

$$P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n);$$

4) ən çoxu k sayda baş verməsi ehtimalı:

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k);$$

5) ən azı k_1 ən çoxu k_2 sayda baş verməsi ehtimalı:

$$P_n(k_1, k_2) = P_n(k_1) + \dots + P_n(k_2);$$

6) müsbət nəticənin n sayda baş verməsi ehtimalı:

$$P_n(n) = p^n;$$

7) müsbət nəticənin baş verməməsi ehtimalı:

$$P_n(0) = q^n.$$

Bernulli sxemində müsbət nəticənin α -dan kiçik olmayan ehtimalla heç olmasa bir dəfə baş verməsi üçün aparılmalı olan sınaqların sayı

$$n \geq \frac{\ln(1 - \alpha)}{\ln(1 - p)}$$

bərabərsizliyini ödəyir.

Qeyd. Bernulli sxemində “+” nəticənin baş vermə sayını $\mu = \mu_n$ ilə işarə edək. Onda (3)-ü aşağıdakı şəkildə yazı bilərik:

$$P(\mu = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (4)$$

İndi isə Bernulli sxeminə aid məsələ həllinə baxaq.

Məsələ 1. Simmetrik metal pul 10 dəfə atılır. Gerb üzünün 4 dəfə düşməsi ehtimalını tapın.

Həlli. Şərtə görə sınaqların sayı $n = 10$. Metal pul simmetrik olduğu üçün $p = q = \frac{1}{2}$. Bunları nəzərə alaraq axtarılan ehtimalı Bernulli düsturuna əsasən tapa bilərik:

$$P_{10}(4) = C_{10}^4 \cdot p^4 \cdot q^6 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 =$$

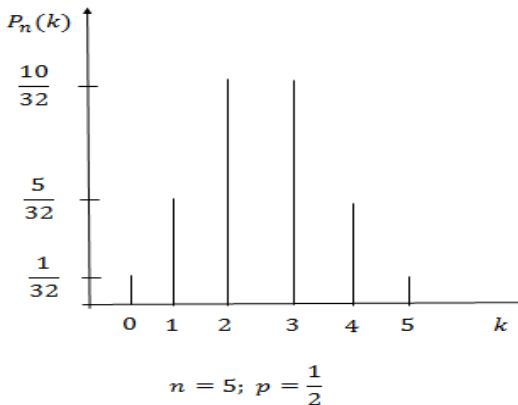
$$= \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{105}{512}.$$

Məsələ 2. Simmetrik metal pul 5 dəfə atılır. Gerb üzünün düşməsinə “müsbət” nəticə qəbul edərək $P_5(0), \dots, P_5(5)$ ehtimallarını hesablayın. Uyğun paylanma cədvəlini və $P_5(k), k = \overline{0, 5}$ ehtimallarının k -dan asılılıq qrafikini qurun.

Həlli. Şərtə görə sınaqların sayı $n = 5$ və $p = q = \frac{1}{2}$ olduğunu nəzərə alaraq axtarılan ehtimalları Bernulli düsturuna əsasən tapa bilərik. Beləliklə, $P_5(k), k = \overline{0, 5}$ ehtimallarının k -dan asılılıq cədvəli aşağıdakı kimidir:

k	0	1	2	3	4	5
$P_5(k)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

İndi isə $P_5(k), k = \overline{0, 5}$ ehtimallarının k -dan asılılıq qrafikini quraq:



Məsələ 3. Simmetrik metal pul 5 dəfə atılır. Gerb üzünün ən azı 1 dəfə düşməsi ehtimalını tapın.

Həlli. Şərtə görə asılı olmayan sınaqların sayı $n = 10$ və $p = q = \frac{1}{2}$.

Məqsədimiz

$$P_5(1) + \dots + P_5(5)$$

ehtimalı tapmaqdır.

Aydındır ki,

$$\sum_{k=0}^5 P_5(k) = 1$$

olmalıdır.

Buna görə də axtarılan ehtimal aşağıdakı kimidir:

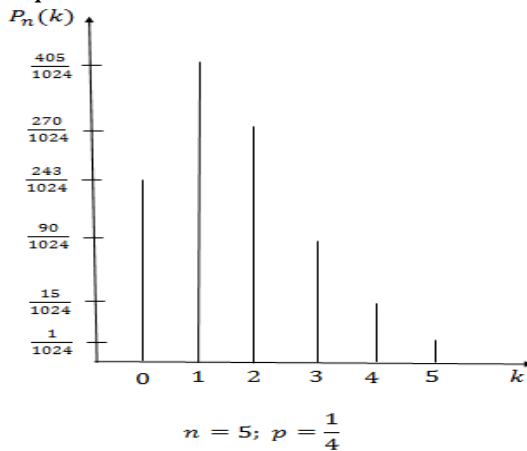
$$P_5(1) + \dots + P_5(5) = 1 - P_5(0) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}.$$

Məsələ 4. Simmetrik olmayan metal pul 5 dəfə atılır, belə ki, “müsbət” nəticə olan gerb üzünün düşməsi ehtimalı $\frac{1}{4}$ -dir. $P_5(0), \dots, P_5(5)$ ehtimallarını hesablayaraq paylanma cədvəlini və $P_5(k), k = \overline{0, 5}$ ehtimallarının k -dan asılılıq qrafikini qurun.

Həlli. Şərtə görə sınaqların sayı $n = 5$. Digər tərəfdən $p = \frac{1}{4}$ və $q = 1 - p = \frac{3}{4}$ olduğunu nəzərə alaraq axtarılan ehtimalları Bernulli düsturuna əsasən tapa bilərik:

k	0	1	2	3	4	5
$P_5(k)$	$\frac{243}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{270}{1024}$	$\frac{90}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

İndi isə $P_5(k), k = \overline{0, 5}$ ehtimallarının k -dan asılılıq qrafikini quraq:



Məsələ 5. Simmetrik metal pul $2n$ dəfə atılır. Gerb üzünün düşməsi sayının rəqəm üzünün düşməsi sayına bərabər olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Metal pul simmetrik olduğu üçün $p = q = \frac{1}{2}$. Simmetrik metal pul $2n$ dəfə atıldığı üçün həm gerb üzünün, həm də rəqəm üzünün n dəfə düşməsi ehtimalını tapmalıyıq. Bunları nəzərə alaraq axtarılan ehtimalı Bernulli düsturuna əsasən tapa bilərik:

$$P_{2n}(n) = C_{2n}^n \cdot p^n \cdot q^{2n-n} = C_{2n}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

Xüsusi halda, məsələn, $2n = 10$ olduqda

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0,246$$

olduğunu əldə edərik.

Əgər $2n = 100$ olarsa,

$$P_{100}(50) = C_{100}^{50} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \frac{100!}{50! \cdot 50!} \left(\frac{1}{2}\right)^{100}.$$

n -nin böyük qiymətlərində faktorialları hesablamaq üçün $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ Stirlinq düsturundan istifadə etsək,

$$P_{100}(50) \approx 0,0798$$

olduğunu əldə edərik.

Qeyd. Məsələ 5-də simmetrik metal pul atıldığı üçün əslində gözləmək olardı ki, gerb üzünün düşməsi sayının rəqəm üzünün düşməsi sayına bərabər olması hadisəsinin ehtimalı 0,5-ə yaxın olmalıdır. Lakin göründüyü kimi, bu heç də belə deyildir, hətta isbat olunur ki, sınaqların sayı artsa da bu ehtimal bir az da kiçilir. Bu fakt öz izahını arksinus qanununda tapır (bax, §3.3).

Məsələ 6. Bir lotereya biletinin uduşlu olması ehtimalı 0,01-dir. Aşağıdakı hadisələrdən hansının ehtimalı daha böyükdür: 4 biletdən 2-nin, yoxsa 5 biletdən 3-nün uduşlu olması?

Həlli. Şərtə görə hər bir sınaqda müsbət nəticənin ehtimalı $p = 0,01$ -dir və $q = 0,99$. Bernulli düsturuna əsasən

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot (0,01)^2 \cdot (0,99)^2 = 6 \cdot (0,01)^2 \cdot (0,99)^2.$$

Eyni qayda ilə

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot (0,01)^3 \cdot (0,99)^2 = 0,1 \cdot (0,01)^2 \cdot (0,99)^2.$$

Beləliklə, $P_4(2) > P_5(3)$.

Məsələ 7. Bir biletdə düşən uduş ehtimalı 0,2-yə bərabərdir. Alınmış 5 biletdən ikisinin uduşlu olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Məsələ təkrarlanan asılı olmayan sınaqlara aiddir, $n = 5$ bilet alınıb, hər bir biletin uduş ehtimalı $p = 0,2$ -dir, uduşsuz olması ehtimalı isə $q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8$. Bunları (3) düsturunda nəzərə alsaq

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 = 10 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 = 0,205.$$

Məsələ 8. Bir biletin uduş ehtimalı 0,3-ə bərabərdir. 8 bilet alınmışdır. Aşağıdakı hadisələrin ehtimallarını tapın:

a) heç olmasa, bir biletin uduşlu olması; b) üçdən az sayda biletin uduşlu olması.

Həlli. a) Bu halda $n = 8$, $p = 0,3$ olduğu üçün axtarılan ehtimal

$$P_8(1) + P_8(2) + \dots + P_8(8) = 1 - P_8(0) =$$

$$= 1 - C_8^0 \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^8 = 1 - 0,7^8 = 0,942.$$

Alınmış 8 biletdən heç olmazsa birinin uduşlu olması ehtimalı 0,942 və ya 94,2%-ə bərabərdir.

b) Bu halda $n = 8$, $p = 0,3$ və

$$P_8(0) + P_8(1) + P_8(2) =$$

$$= 0,7^8 + C_8^1 \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^7 + C_8^2 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^6 = 0,55.$$

Məsələ 9. Lotereya biletinin uduş ehtimalı 0,15-dir. Dörd biletdən heç olmazsa, birinin uduşlu olması hadisəsinin

ehtimalını tapın.

Həlli. $A = \{4 \text{ biletdən heç olmasa, birinin uduşlu olması}\}$
və A hadisəsinin əksi olan $\bar{A}$ hadisəsini daxil edək:

$$\bar{A} = \{4 \text{ biletdən heç biri uduşlu deyil}\}.$$

$\bar{A}$ hadisəsinin ehtimalını tapaq. $n = 4$; $p = 0,15$; $k = 0$ olduğunu (3) düsturunda nəzərə alsaq:

$$P(\bar{A}) = P_4(0) = C_4^0 \cdot 0,15^0 \cdot 0,85^4 = 0,85^4 = 0,522.$$

Beləliklə,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,522 = 0,478.$$

Məsələ 10. Simmetrik metal pulu neçə dəfə atmaq lazımdır ki, gerb üzünün heç olmasa bir dəfə düşməsi hadisəsi 0,9 -dan kiçik olmayan ehtimalla baş versin?

Həlli. Metal pul simmetrik olduğu üçün gerb üzünün düşməsi ehtimalı 0,5-dir. Onda gerb üzünün heç olmasa bir dəfə düşməsi ehtimalı

$$1 - (0,5)^n$$

olar. Məsələnin şərtinə görə

$$1 - (0,5)^n \geq 0,9.$$

Buradan

$$n \geq \log_2 10 \geq 4.$$

Beləliklə, metal pulu azı 4 dəfə atmaq lazımdır ki, gerb üzünün heç olmasa bir dəfə düşməsi hadisəsi 0,9 -dan kiçik olmayan ehtimalla baş versin.

Məsələ 11. Şirkəti yoxlayan auditin maliyyə pozuntusu tapması ehtimalı 0,9-dur. Yoxlama aparılmış 4 şirkətdən azı 2-sində maliyyə pozuntusu aşkar edilməsi ehtimalını tapın.

Həlli. Şərtə əsasən $n = 4$ və $p = 0,9$ olduğu üçün
 $P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 \cdot (0,9)^3 \cdot 0,1 + C_4^4 \cdot (0,9)^4 = 0,9477$.

Məsələ 12 (Banax məsələsi). İki kibrit qutusunun hər birində n sayda kibrit çöpü vardır. Simmetrik metal pul atılır və gerb üzü düşdükdə birinci qutudan, rəqəm üzü düşdükdə ikinci qutudan bir kibrit çöpü çıxarılıb kənara qoyulur. Birinci kibrit qutusu tam boşaldıqdan sonra ikinci qutuda k sayda kibrit çöpü qalması (A) hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Aşağıdakı hadisələri daxil edək:

$H_1 = \{\text{birinci qutudan kibrit çöpü çıxması}\},$

$H_2 = \{\text{ikinci qutudan kibrit çöpü çıxması}\}.$

Aydındır ki, atılan metal pul simmetrik olduğu üçün

$$P(H_1) = p = \frac{1}{2} \text{ və } P(H_2) = q = \frac{1}{2}.$$

Digər tərəfdən, birinci kibrit qutusu tam boşaldıqdan sonra ikinci qutuda k sayda kibrit çöpü qalması o deməkdir ki, metal pulu $2n - k$ dəfə atdıqdan sonra n dəfə gerb üzü, $n - k$ dəfə isə rəqəm üzü düşməlidir. Bu isə o deməkdir ki, $2n - k$ Bernulli sınaqlarında H_1 hadisəsi n dəfə baş verməlidir. Beləliklə,

$$P_{2n-k}(n) = C_{2n-k}^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = C_{2n-k}^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}.$$

Xüsusi halda, $n = 40$ və $k = 20$ götürsək, axtarılan ehtimal

$$P_{60}(40) \approx 0,01$$

olar.

Məsələ 13. Asılı olmayan sınaqlar A hadisəsi k dəfə baş

verənədək aparılır, belə ki, $P(A) = p$. Sınaqların n -ci addım-
da bitəcəyi ehtimalını tapın.

Həlli. A hadisənin k dəfə baş verməsi üçün n sayda
sınaq aparılması hadisəsinə B ilə işarə edək. Bu hadisə
aşağıdakı hadisələrin kəsişməsi kimi göstərilə bilər:

$D = \{n\text{-ci sınaqda } A \text{ hadisəsinin baş verməsi}\},$

$C = \{\text{ilk } (n - 1) \text{ sınaqda } A \text{ hadisəsinin } (k - 1) \text{ dəfə}\}$
baş verməsi}.

Asanlıqla görmək olar ki, $P(D) = p$. Bernulli düsturu-
runa əsasən

$$P(C) = P_{n-1}(k-1) = C_{n-1}^{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-k}.$$

Digər tərəfdən aydındır ki, D və C asılı olmayan
hadisələrdir.

Beləliklə,

$$P(B) = P(DC) = P(D)P(C) = C_{n-1}^{k-1} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Məsələlər.

1. Gerb üzünün düşməsi ehtimalı $1/3$ və rəqəm üzünün düşməsi
ehtimalı $2/3$ olan simmetrik olmayan metal pul 5 dəfə atılır.
 $P_5(0), P_5(1), \dots, P_5(5)$ ehtimallarını hesablayın və
 $P_n(k)$ ehtimallarının k -dan asılılığı qrafikini qurun.
2. 10 lotereya biletindən 2 -si uduşludur. Təsadüfi olaraq
götürülən 5 lotereya biletindən a) birinin, b) hamısının, c) heç
olmasa birinin uduşlu olması ehtimalını tapın.

Cavab: a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{7}{9}$

§2.2. Bernulli sxemində “müsbət” nəticənin baş verməsinin ən böyük ehtimalı sayı və maksimal ehtimal

Bernulli sxemində əgər n qeyd olunmuşdursa, bu halda $P_n(k)$ ehtimalları k arqumentindən asılı bir funksiya çevrilir. Belə bir sual qoyaq: Arqumentin hansı qiymətində bu funksiya özünün ən böyük qiymətini alır, daha sadə desək, $P_n(0), P_n(1), \dots, P_n(n)$ ədədlərindən ən böyüyü hansıdır? Beləliklə, biz verilmiş n sayda sınaqda müsbət nəticənin hansı sayının daha böyük ehtimalı olduğunu təyin etmək istəyirik.

Sınaqların sayı n -i qeyd etdikdə $P_n(k)$ ehtimalları “müsbət” nəticənin baş vermə sayı olan k -dan asılı olur. Bu zaman təbii olaraq belə sual meydana çıxır: k -nın hansı qiymətində $P_n(k)$ ən böyük qiymətini alır. Başqa sözlə, $P_n(0), P_n(1), \dots, P_n(n)$ ehtimallarından hansı ən böyükdür.

Tərif. $P_n(k)$ ehtimalı ən böyük qiymətini hər hansı k_0 nöqtəsində alırsa, həmin k_0 -a “müsbət” nəticənin baş verməsinin **ən böyük ehtimalı sayı**, $P_n(k_0)$ -a isə **maksimal ehtimal** deyilir.

Aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem. Fərz edək ki, Bernilli sxemində sınaqların sayı n qeyd edilmişdir. 1) Əgər $k_0 = (n + 1)p$ ədədi kəsir ədədlədirsə, onda $P_n(k)$ ehtimalları monoton artaraq $[k_0]$ nöqtəsində maksimum qiymətini alır və sonra monoton azalır.

2) Əgər $k_0 = (n + 1)p$ tam ədəddirsə, $P_n(k)$ ehtimalları maksimum qiymətini $k_0 - 1$ və k_0 nöqtələrində alır.

İsbatı. Bu məqsədlə iki ardıcıl $P_n(k - 1)$ və $P_n(k)$ ehtimallarını nəzərdən keçirək.

Bu münasibət aşağıdakı münasibətlə ekvivalentdir:

$$\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)} = \frac{n-k+1}{k} \frac{p}{q} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{kq} \quad (1)$$

(1)-dən görünür ki, $k < (n+1)p$ olduqda $\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)}$ nisbəti 1-dən böyük, əks halda isə 1-dən kiçik olur. Bu isə o deməkdir ki, $P_n(k)$ ehtimalı $[0, (n+1)p]$ yarımintervalında artan, $[(n+1)p, 0)$ yarımintervalında isə azalandır. Bu isə 1) hökmünün doğruluğunu göstərir. 2) hökmünün doğru olduğunu göstərmək üçün $k = (n+1)p$ götürmək kifayətdir.

Beləliklə, teorem isbat olundu.

Qeyd. Ən böyük ehtimalı k_0 sayı aşağıdakı bərabərsizliyi ödəyir:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p.$$

Asanlıqla görmək olar ki, bu ehtimalların maksimumu np -yə yaxın qiymətində alır. Doğrudan da, müsbət nəticənin ehtimalı və ya bir sınaqda A hadisəsinin ehtimalı p -yə bərabər olduğundan, sınağın n dəfə təkrar keçirildiyi zaman gözlənilir ki, A hadisəsinin baş vermə ehtimalı p -yə yaxındır, beləliklə, A hadisəsinin baş vermə sayı np -yə yaxın olar. Aşağıdakı teorem bu düşüncələrin doğruluğunu göstərir.

İndi isə mövzuya aid məsələ həlli nümunələri verək.

Misal 1. Simmetrik metal pul 5 dəfə atılır. Gerb üzünün düşməsinə "müsbət" nəticə qəbul edərək bu nəticənin baş verməsinin ən böyük ehtimalı sayını və maksimal ehtimalı tapın.

Həlli. Şərtə görə $n = 5$, $p = \frac{1}{2}$ – dir. $k_0 = (n + 1)p = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ tam ədəddir. Buna görə də $P_5(k)$ ehtimalları maksimum qiymətini $k_0 = 3$ və $k_0 - 1 = 2$ nöqtələrində alır. Uyğun maksimal ehtimallar isə

$$P_5(2) = P_5(3) = \frac{10}{32}.$$

Misal 2. Simmetrik olmayan metal pul 5 dəfə atılır, belə ki, müsbət nəticə olan gerb üzünün düşməsi ehtimalı $\frac{1}{4}$ – dir. Bu sınaqlarda “müsbət” nəticənin baş verməsinin ən böyük ehtimallı sayını və maksimal ehtimalı tapın.

Həlli. Şərtə görə $n = 5$, $p = \frac{1}{4}$ – dir. $k_0 = (n + 1)p = 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$ kəsr ədəddir. $[k_0] = 1$ olduğu üçün müsbət nəticənin ən böyük ehtimallı sayı 1-ə bərabərdir. Maksimal ehtimal isə

$$P_5(1) = \frac{405}{1024}$$

olar.

Misal 3. Sığorta agentinin müştəri ilə görüş nəticəsində müqavilə bağlama ehtimalı 0,1 -dir. 25 görüşdən sonra bağlanmış müqavilələrin ən böyük ehtimallı sayını tapın.

Həlli. Şərtə görə $n = 25$; $p = 0,1$; $q = 0,9$.

Ən böyük ehtimallı ədədi tapmaq üçün aşağıdakı ikiqat bərabərsizlikdən istifadə edəcəyik:

$$np - q \leq k \leq np + p.$$

İkiqat bərabərsizliyə əsasən

$$25 \cdot 0,1 - 0,9 \leq k \leq 25 \cdot 0,1 + 0,1.$$

Buradan

$$1,6 \leq k \leq 2,6.$$

Bu bərabərsizliyin yalnız bir tam həlli var: $k = 2$.

§2.3. Bernulli sxemi üçün limit teoremləri

Fərz edək ki, n sayda Bernulli sınaqlarında müsbət nəticənin sayı μ_n -dir. §2.1-dən bildiyimiz kimi,

$$P_n(k) \equiv P(\mu_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = \overline{0, n}, \quad p + q = 1.$$

Praktiki məsələləri həll edərkən, əgər n və k kifayət qədər böyük qiymətlər alarsa, onda (1) düsturunu tətbiq etmək əlverişli deyil. Çünki baxılan halda $P(\mu_n = k)$ və $P(k_1 \leq \mu_n \leq k_2)$ ehtimallarını hesablamaq üçün çoxlu hesablama tələb olunur. Belə hallarda asimptotik (təqribi) düsturlardan istifadə etmək əlverişli olur. Asimptotik düsturlar adlanan bu düsturlar Muavr-Laplasın lokal və integral teoremləri, Puasson teoremi ilə təyin olunur. Əvvəlcə Muavr-Laplasın lokal və integral teoremlərini isbatsız olaraq verək:

Muavr-Laplasın lokal limit teoremi. Fərz edək ki, n sayda Bernulli sınağı aparılır və “müsbət” nəticənin baş vermə ehtimalı olan p isə 0 və 1-dən fərqlidir ($0 < p < 1$). Onda n -in böyük qiymətlərində müsbət nəticənin k dəfə baş verməsi ehtimalı üçün təqribi bərabərlik doğrudur:

$$P_n(k) \sim \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \quad (1)$$

asimptotik düsturu $|k - np| = O(\sqrt{npq})$ şərtini ödəyən k -lar üçün doğrudur, burada $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

$\varphi(x)$ Qauss funksiyası adlanır:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

(1)-ni tətbiq edərkən $\varphi(x)$ -in qiymətlər cədvəlindən istifadə olunur. Bu cədvəldən istifadə edərkən $\varphi(x)$ -in aşağıdakı xassələrini bilmək lazımdır:

- 1) $\varphi(-x) = \varphi(x)$
- 2) $x \rightarrow \infty$ olduqda $\varphi(x) \rightarrow 0$.

Praktikada çox vaxt $x > 4$ olduqda $\varphi(x) \approx 0$ götürülür.

Muavr-Laplasın integral limit teoremi. Fərz edək ki, n sayda Bernulli sınağı aparılır və “müsbət” nəticənin baş vermə sayı μ_n – dir. Hər bir sınaqda müsbət nəticənin baş vermə ehtimalı isə p -dir. Onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P \left\{ a \leq \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b \right\} - (\Phi(b) - \Phi(a)) \rightarrow 0 \quad (2)$$

münasibəti $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ üçün müntəzəm ödənilir,

burada $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$.

$\Phi(x)$ funksiyasının aşağıdakı xassələrini qeyd edək:

- 1) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$,
- 2) $x \rightarrow \infty$ olduqda $\Phi(x) \rightarrow 1$.

3) Göstərmək olar ki,

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x).$$

Doğrudan da, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiyası cüt funksiya olduğu üçün

$$\int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \int_{-x}^{\infty} \varphi(t) dt.$$

Buna görə də

$$\begin{aligned} \Phi(x) + \Phi(-x) &= \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt + \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t) dt = \\ &= \int_{-x}^{\infty} \varphi(t) dt + \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1. \end{aligned}$$

4) $x \rightarrow \infty$ olduqda

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{\varphi(x)}{x}.$$

Doğrudan da, $\Phi'(x) = \varphi(x)$, $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$ olduğu üçün

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)/x}{1 - \Phi(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^{-2}\varphi(x) + x^{-1}\varphi(x)}{-\varphi(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) = 1. \end{aligned}$$

Muavr-Laplasın integral limit teoremindən aşağıdakı nəticələr alınır.

Nəticə 1. Bernulli sxemində $n \rightarrow \infty$ olduqda $\forall x \in R$ üçün

$$P\left\{\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right\} \rightarrow \Phi(x).$$

Nəticə 2. Bernulli sxemində istənilən $0 \leq k_1 \leq k_2 < \infty$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P(k_1 \leq \mu_n \leq k_2) - (\Phi(x_2) - \Phi(x_1)) \rightarrow 0,$$

burada $x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$, $i = 1, 2$.

Qeyd. Məsələ həlli zamanı $\Phi(x)$ funksiyasının qiymətlərini cədvəlidən istifadə olunur. Əsasən cədvəllərdə elmi ədəbiyyatda Laplas funksiyası adlanan

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

funksiyasının qiymətləri verilir (bax, cədvəl 2).

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x).$$

Qeyd edək ki, yuxarıda verdiyimiz Muavr–Laplasın lokal və integral teoremlərini $p = q = \frac{1}{2}$ olduqda 1756-cı ildə Muavr, ixtiyari p və q halı üçün isə 1812-ci ildə Laplas isbat etmişdir.

Muavr–Laplas təqribi düsturları $np(1-p) > 10$ olduqda daha yaxşı nəticə verir. Məsələn, $p = 0,1$ və yaxud $p = 0,9$ olduqda xətanın kiçik olması üçün sınaqların sayı

$n > 100$ olmalıdır. $p = 0,01$ və yaxud $p = 0,99$ olduqda xətanın kiçik olması üçün sınaqların sayı $n > 1000$ olmalıdır.

İndi isə məsələ həlli nümunələrinə baxaq.

Məsələ 1. Müəyyən qəsəbənin hər 100 mənzilindən 80-nin sığorta olunduğu müəyyən edilmişdir. 400 mənzildən 300-nün sığortaya malik olması ehtimalını tapın.

Həlli. Şərtə görə $n = 400$, $k = 300$, $p = 0,8$, $q = 0,2$. Bunları nəzərə alsaq

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{300 - 320}{\sqrt{64}} = \frac{-20}{8} = -2,5.$$

Qauss funksiyasının qiymətlər cədvəlinə əsasən $\varphi(-2,5) = 0,0175$. Bunu nəzərə alaraq Muavr-Laplasın lokal teoreminə əsasən axtarılan ehtimal aşağıdakı şəkildə olacaqdır.

$$P(\mu_n = k) \approx \frac{\varphi(-2,5)}{\sqrt{64}} \approx 0,0219.$$

Məsələ 2. Sığorta şirkəti 40000 müqavilə imzalamışdır. Bu müqavilələrin hər biri üzrə sığorta halının baş verməsi ehtimalı 0,02-dir. Sığorta hallarının 870-dən çox olmaması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Aydındır ki, $n = 40000$ və $p = 0,02$ və $q = 1 - p = 0,98$. Müqavilələrin sayı n böyük ədəd olduğu üçün Muavr-Laplasın integral teoreminin nəticəsindən istifadə edəcəyik:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

burada $x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$, $i = 1, 2$.

Məsələnin şərtini nəzərə alsaq $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = -28,57$ və $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = 2,5$ olduğunu əldə edərik.

Laplas funksiyasının tək funksiya olmasından və qiymətlər cədvəlindən istifadə edərək axtarılan ehtimalı tapa bilərik:

$$\begin{aligned} P_{40000}(0; 870) &\approx \Phi(2,5) - \Phi(-28,57) = \\ &= \Phi(2,5) + \Phi(28,57) \approx 0,4938 + 0,5 = 0,9938. \end{aligned}$$

Məsələ 3. Sənaye məhsulları böyük partiyalarla istehsal olunur. Hər bir partiyadan təsadüfi qaydada 20 məhsul vahidi götürülür və yoxlanılır. Partiya o zaman qəbul edilir ki, yararsızların sayı 3-dən çox olmasın. İstehsal olunan bütün məhsulun 10 %-i yararsız olarsa, partiyanın qəbul olunması ehtimalını tapın.

Həlli. Bu məsələni belə də ifadə etmək olar: 20 Bernulli sınağı aparılır və hər bir sınaqda müsbət nəticənin ehtimalı 0,1-dir. Müsbət nəticənin 3-dən çox olmaması ehtimalını

$$P_{20}(0) + P_{20}(1) + P_{20}(2) + P_{20}(3) = 0,867.$$

Məsələ 4. Simmetrik metal pulun atılması eksperimenti 100 dəfə aparılır. Gerb üzünün a) 50 dəfə; b) 50 dəfədən çox, 60 dəfədən az düşməsi ehtimalını tapın.

Həlli. a) Sınaqların sayı $n = 100$ kafi qədər böyük olduğu üçün və $npq = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25 > 10$ ödəndiyi üçün Muavr-Laplasın lokal teoremindən istifadə edə bilərik. Digər tərəfdən, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = 0$. $\varphi(x)$ funksiyasının müsbət x -lər üçün qiymətlər cədvəli verilmişdir. $\varphi(x)$ funksiyasının qiymətlər

mətləri cədvəlindən istifadə etsək, $\varphi(0) = 0,397 \dots$ olduğunu görürük. Bunları nəzərə alsaq,

$$P_{100}(50) \approx \frac{1}{5} \varphi(0) \approx 0,08$$

olduğunu alırıq. Alınan nəticə onu göstərir ki, simmetrik metal pulun 100 dəfə atılması eksperimentini çox dəfə təkrar etsək, orta hesabla 8% halda gerb üzü 50 dəfə düşəcək.

b) Bu halda Muavr-Laplasın integral teoremindən istifadə etməliyik. Bu halda $x_1 = \frac{50-50}{5} = 0$, $x_2 = \frac{60-50}{5} = 2$ və $\Phi_0(x)$ funksiyanının qiymətlər cədvəlinə görə $\Phi(2) = 0,477$ və $\Phi(0) = 0$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\sum_{k=50}^{60} P_{100}(k) \approx \Phi(2) - \Phi(0) = 0,477.$$

İndi isə Muavr-Laplasın integral teoremindən çıxan nəticələri verək.

Nəticə 1. Asılı olmayan sınaqların sayı n -in kafi qədər böyük qiymətlərində “müsbət” nəticənin baş verməsi sayı olan k -nın np hasilindən mütləq qiymətcə ən çoxu $\forall \varepsilon > 0$ qədər fərqlənməsi ehtimalı

$$P \left\{ \left| \frac{k}{n} - 0,15 \right| \leq 0,02 \right\} \approx 2\Phi \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}} \right).$$

Nəticə 2. Asılı olmayan sınaqların sayı n -in kafi qədər böyük qiymətlərində “müsbət” nəticənin baş verməsi sayı olan k -nın np hasilindən mütləq qiymətcə ən çoxu $\forall \varepsilon > 0$ qədər fərqlənməsi ehtimalı

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \delta\right\} \approx 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right).$$

Çox zaman əks məsələ qoyulur. Nə qədər sınaq aparmaq lazımdır ki, əvvəlcədən verilmiş $1 - 2\alpha$ ehtimalı ilə $\frac{k}{n}$ tezliyi p ehtimalından ən çoxu δ qədər fərqlənsin?

Bu şərti ödəyən ən kiçik n ədədini tapmaq üçün $2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = 1 - 2\alpha$ tənliyini həll etmək lazımdır. Bu tənliyin həlli naməlum p parametrindən asılı olacaq. Bu asılılıqdan qurtarmaq üçün

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \delta\right\} \geq 1 - 2\alpha$$

bərabərsizliyini həll etmək lazımdır.

$pq \leq \frac{1}{4}$ və $\Phi(x)$ monoton artan funksiya olduğundan

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \delta\right\} \approx 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) \geq 2\Phi(2\delta\sqrt{n}) = 1 - 2\alpha$$

və ya $\Phi(u_\alpha) = \frac{1-2\alpha}{2}$, burada $u_\alpha = 2\delta\sqrt{n}$ və $n \geq \frac{u_\alpha^2}{4\delta^2}$.

Qeyd edək ki, çox zaman $2\alpha = 0,005$ götürülür. Bu halda $u_\alpha = 2\delta\sqrt{n} = 1,96$ olur.

Məsələ 5. Fabrikin istehsal etdiyi məhsulun 15% -i ikinci növdür. Mağaza 1000 məhsul vahidi aldı. Alınmış məhsul partiyasının içərisində $15\% \pm 2\%$ -nin ikinci növ olması ehtimalını tapın.

Həlli. Şərtə görə $p = 0,15$, $\delta = 0,02$ və $n = 1000$. k ilə ikinci növ məhsulun sayını işarə edək. $\Phi_0(x)$ funksiyasının qiymətlər cədvəlindən istifadə edərək axtarılan ehtimalın

aşağıdakı kimi olduğunu əldə edirik:

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - 0,15\right| \leq 0,02\right\} \approx 2\Phi(1,77) = 2 \cdot 0,46 = 0,92.$$

Alınmış nəticə göstərir ki, 92% zamanətlə ikinci növ məhsul alınmış məhsul partiyasının $15\% \pm 2\%$ -ni təşkil edəcək.

Məsələ 6. Müəyyən fabrikin istehsal etdiyi məhsulun 4%-i yararsız olur. Nə qədər məhsul vahidi götürüb yoxlamaq lazımdır ki, götürülmüş partiyada yararsızların payı 4%-dən fərqi mütləq qiymətcə 1%-i aşmasın.

Həlli. Şərtə görə $p = 0,05$, $\delta = 0,01$, n isə naməlumdur. k ilə götürülmüş partiyada olan yararsızların sayını işarə edək. Bu halda

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - 0,04\right| \leq 0,01\right\} \approx 2\Phi\left(\frac{0,01\sqrt{n}}{\sqrt{0,04 \cdot 0,96}}\right) = 0,9$$

olmalıdır. Buradan

$$\Phi\left(\frac{0,01\sqrt{n}}{\sqrt{0,04 \cdot 0,96}}\right) = 0,45.$$

Cədvələ görə

$$\frac{0,01\sqrt{n}}{\sqrt{0,04 \cdot 0,96}} = 1,65.$$

Buradan $n = 1045$. Deməli, 1045 ədəd məhsul vahidini yoxlamaq lazımdır.

Qeyd edək ki, bu tip məsələlər statistik nəzarət nəzəriyyəsinə meydana çıxır. Muavr-Laplas teoremi çoxlu zaman və maliyyə vəsaitinə qənaət etməyə imkan verir. Çünki

istehsal olunmuş məhsulun hamısını yoxlamadan verilmiş partiyadakı yararsız məhsulların miqdarı ilə bağlı mühakimə yürütmək olur.

Məsələ 7. Sığorta şirkətinin 10 min nəfər müştərisi var. Hər müqavilənin dəyəri 500 manatdır. Sığorta halının baş vermə ehtimalı $p = 0,005$ -dir. Sığorta halı baş verdikdə şirkət müştəriyə 50 min manat ödəməlidir. Şirkət 0,95 ehtimalı ilə nə qədər gəlirə ümid edə bilər?

Həlli. Aydındır ki, şirkətin ümumi gəliri daxil olan sığorta haqları ilə sığorta ödənilməsinin fərqinə bərabərdir:

$$G = 500 \cdot 10 - 50 \cdot n_0 = 50(100 - n_0) \text{ min manat.}$$

n_0 -ı tapmaq üçün Muavr-Laplasın integral teoremindən istifadə edə bilərik. Çünki

$$npq = 10000 \cdot 0,005 \cdot 0,95 = 49,75 \geq 20.$$

Sığorta ödəmələrinin veriləcəyi müştərilərin sayını k ilə işarə edək.

$$\sum_{k=0}^{n_0} P_{10000}(k) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0,95.$$

Şərtə görə

$$x_1 = \frac{0 - np}{\sqrt{npq}} = -7,09; \quad x_2 = \frac{n_0 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Buradan

$$n_0 = 50 + x_2 \sqrt{49,75}.$$

Bunları nəzərə alsaq, $\Phi(x_2) = 0,9$. Cədvələ görə $x_2 = 1,645$ və deməli, $n_0 = 50 + x_2 \sqrt{49,75} = 61,6$.

Beləliklə, $G = 1920000$. Deməli, məsələnin şərtləri daxilində sığorta şirkəti 0,95 ehtimalı ilə 192 milyon manat gəlirə ümid edə bilər.

İndi isə Bernulli sxemi üçün Puasson teoremini verək.

Fərz edək ki, Bernulli sxemində sınaqların sayı n böyük qiymətlər alır, lakin hər sınaqda müsbət nəticənin ehtimalı olan p isə kiçik qiymətlər alır və p ehtimalı n -nin funksiyasıdır, yəni $p = p(n)$. Bu halda Muavr-Laplas teoremləri yaxşı nəticə vermir və yaxınlaşmaların xətası böyük olur. Buna görə Puasson aşağıdakı teoremi isbat etmişdir:

Teorem (Puasson, 1837). Fərz edək ki, Bernulli sxemində $n \rightarrow \infty$ və $p \rightarrow 0$, belə ki, $np \rightarrow \lambda > 0$ olur. Onda istənilən qeyd olunmuş $k = 0, 1, 2, \dots$, üçün

$$P_n(k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (3)$$

İsbatı. Bernulli düsturuna əsasən yazsa bilərik:

$$\begin{aligned} P_n(k) &= C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \frac{n! (np)^k}{k! (n-k)! n^k} (1-p)^{n-k} = \\ &= \frac{(np)^k}{k!} \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} (1-p)^{n-k} = \\ &= \frac{(np)^k}{k!} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right) (1-p)^{-k} (1-p)^n. \quad (4) \end{aligned}$$

Sonuncu münasibətdə teoremin şərtinə görə $n \rightarrow \infty$ olduqda $p = \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ və $np \rightarrow \lambda$. Bunları nəzərə alaraq asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right)^{-k} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right)^n = e^{-\lambda}.$$

Bu münasibətləri nəzərə alaraq (4)-də limitə keçsək, (3)-ü alırıq.

Bununla da Puasson teoremi isbat olundu.

Qeyd edək ki, burada $\pi_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, Puasson paylanması təşkil edirlər, çünki $\pi_k \geq 0$ və $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$.

Nəticə. n -nin kafi qədər böyük p -nin isə kiçik qiymətlərində aşağıdakı təqribi bərabərlikləri doğrudur:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Qeyd edək ki, praktiki məsələlərdə $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ təq-

ribi bərabərliyindən istifadə olunur və buraxılan xətanın qiymətləndirilməsində

$$\left| P_n(k) - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \leq \frac{\lambda^2}{n} \quad (5)$$

bərabərsizliyindən istifadə olunur.

Məsələ 8. Asılı olmayan 150 sınağın hər birində A hadisəsinin baş vermə ehtimalı 0,02 -dir. Bu hadisənin 5 dəfə baş verməsi ehtimalını tapın.

Həlli. Aydındır ki, sınaqların sayı $n = 150$ böyük, $p = 0,02$ isə kiçik ədəddir. $\lambda = np = 3$. Beləliklə, Puasson teoreminə əsasən

$$P_{150}(5) \approx \frac{3^5}{5!} e^{-3} \approx 0,1008.$$

Məsələ 9. Fərz edək ki, meyvə istehlakı ilə məşğul olan şirkət öz məhsulunu hər birində 100 ədəd olmaqla qutularda satır. Müəyyən olunmuşdur ki, hər 1000 məhsuldan 15 -i keyfiyyətsizdir. Alıcıların rəğbətini qazanmaq üçün şirkət öz fəaliyyətində müəyyən dəyişiklik etmək istəyir. Hər qutuya nə qədər məhsul qoymaq lazımdır ki, 0,8-dən kiçik olmayan ehtimalla hər qutuda 100-dən az olmayan sayda keyfiyyətli məhsul olsun.

Həlli. Məsələnin şərtinə uyğun olaraq fərz edək ki, hər qutuya əlavə olaraq x sayda məhsul qoymaq lazımdır. Aşağıdakı hadisələri daxil edək:

$A = \{100 + x \text{ sayda məhsulun ən azı } 100\text{-ü keyfiyyətlidir}\},$

$A_k = \{100 + k \text{ sayda məhsulun hamısı keyfiyyətlidir}\}.$

Aydındır ki,

$$A = \bigcup_{k=0}^x A_k.$$

Digər tərəfdən $\bigcap_{k=0}^x A_k = \emptyset$ olduğu üçün

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=0}^x A_k\right) = \sum_{k=0}^x P(A_k)$$

olduğunu yazı bilərik.

Qeyd edək ki, hər bir məhsul vahidinin keyfiyyətli olub-olmamasının yoxlanılmasına iki nəticəli sınaq kimi baxmaq olar. Şərtə görə təsadüfi qaydada götürülmüş hər hansı məhsul vahidinin keyfiyyətsiz olması ehtimalı 0,015 -dir, yəni kiçik ədəddir. Deməli, bu halda Puasson yaxınlaşmasından istifadə edə bilərik: $\lambda = np = 100 \cdot 0,015 = 1,5$. Beləliklə,

$$P(A_k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \approx \frac{(1,5)^k}{k!} e^{-1,5}, k = 0, 1, \dots, x.$$

Bunu nəzərə alsaq,

$$P(A) \approx e^{-1,5} \sum_{k=0}^x \frac{(1,5)^k}{k!}.$$

Şərtə görə $P(A) \geq 0,8$ olmalıdır.

Deməli, x dəyişəni

$$e^{-1,5} \sum_{k=0}^x \frac{(1,5)^k}{k!} \geq 0,8$$

bərabərsizliyini ödəməlidir.

x -in konkret qiymətlərinə baxaq:

Məsələn, $x = 1$ olduqda $P(A) \approx 0,56$,

$x = 2$ olduqda isə $P(A) \approx 0,809$ olur.

Göründüyü kimi, $x = 2$ olduqda isə $P(A) \geq 0,8$ şərti ödənilir. Yəni məsələnin şərtləri daxilində hər qutuya 102 məhsul vahidi qoyulsa, 0,8-dən kiçik olmayan ehtimalla hər qutuda 100-dən az olmayan sayda keyfiyyətli məhsul olmasını təmin etmək mümkündür.

Məsələ 10. Müəyyən şəhərdə olan 1000 ev yanğından sığortalanmışdır. Belə ki, hər bir ev üçün illik 200 manat sığorta haqqı müəyyən olunmuşdur. Yanğın hadisəsi baş verdikdə, yəni sığorta halı yarandıqda şirkət müştəriyə 100000 manat ödənilməlidir. Bu şəhər üçün yanğın baş verməsi ehtimalı 0,003-dür. Şirkətin il ərzində zərərə uğraması hadisəsinin (A) ehtimalını tapın.

Həlli. Şərtə görə şirkət il ərzində 200000 manat sığorta haqqı toplayır. Buna görə də əgər il ərzində azı 3 evdə yanğın baş verərsə, şirkət zərərə uğrayır. Çünki bu halda müştərilərə 300000 manat, yəni şirkətin topladığı sığorta haqlarından çox ödəmə etməlidir.

Aydındır ki, axtarılan ehtimalı tapmaq üçün Puasson teoremindən istifadə etmək lazımdır. Çünki $n = 1000$ böyük ədəddir, $p = 0,003$ kiçik ədəddir və $\lambda = np = 3 < 10$.

$\bar{A}$ ilə A -nın əks hadisəsini işarə edək:

$\bar{A} = \{3\text{-dən az sayda evdə yanğın olması}\}.$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$P(\bar{A}) = P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) =$$

$$= \frac{3^0}{0!} e^{-3} + \frac{3^1}{1!} e^{-3} + \frac{3^2}{2!} e^{-3} =$$

$$= 0,0498 + 0,1494 + 0,2241 = 0,4233.$$

Buradan

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0,5767.$$

Beləliklə, şirkətin il ərzində zərərə uğraması ehtimalı 0,5-dən böyükdür. Bu isə o deməkdir ki, şirkət öz fəaliyyə-tində dəyişiklik etməlidir, əks halda onun iflası qaçılmazdır.

§2.4. Bernulli sxemin üçün böyük ədədlər qanunu

Böyük ədədlər qanunu haqqında ilk teorem “Ars conjectandi” (“Fərziyyələr sənəti”) kitabında Yakob Bernulli (1654-1705) tərəfindən isbat edilmişdir. Bu kitab müəllifin ölümündən 8 il sonra 1713-cü ildə çap olunmuşdur. Böyük ədədlər qanunu ifadəsini 1837-ci ildə Puasson təklif etmişdir.

Bernulli teoremi (1713). Fərz edək ki, μ_n Bernulli sxemində müsbət nəticənin baş verməsi sayı, $0 < p < 1$ isə hər bir sınaqda müsbət nəticənin ehtimalıdır. Onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P \left\{ \left| \frac{\mu_n}{n} - p \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0. \quad (1)$$

İsbatı. Bilirik ki, n -in böyük qiymətlərində A hadisəsinin ən böyük ehtimallı sayı olan k_0 ədədi np kəmiyyə-tindən demək olar ki, fərqlənir. Buna görə də göstərməliyik ki, sınaqların sayı çox böyük olduqda A hadisəsinin baş vermə sayı olan k_0 ədədi çox böyük ehtimalla np kəmiyyə-tindən çox az fərqlənəcəkdir, yəni ən çoxu εn qədər fərqlənə-

cəkdir, burada ε kifayət qədər kiçik ədəddir.

Başqa sözlə, göstərməliyik ki, n -in kafi qədər böyük qiymətlərində

$$P\{|\mu_n - np| > \varepsilon n\}$$

ehtimalı çox kiçik olacaqdır.

Beləliklə,

$$P\{|\mu_n - np| > \varepsilon n\} = \sum_{|k - np| > \varepsilon n} P_n(k). \quad (2)$$

Yazılmış cəmin hər bir həddində

$$\left| \frac{k - np}{\varepsilon n} \right| > 1$$

olduğuna görə

$$\left(\frac{k - np}{\varepsilon n} \right)^2 > 1$$

olar.

Əgər bu cəmin hər bir $P_n(k)$ həddini

$$\left(\frac{k - np}{\varepsilon n} \right)^2 P_n(k)$$

ifadəsi ilə əvəzləsək, onda bu cəmi artırabilirik. Buna görə də

$$\begin{aligned} P\{|\mu_n - np| > \varepsilon n\} &\leq \sum_{|k - np| \geq \varepsilon n} \left(\frac{k - np}{\varepsilon n} \right)^2 P_n(k) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \sum_{|k - np| \geq \varepsilon n} (k - np)^2 P_n(k). \end{aligned}$$

Buradan

$$P\{|\mu_n - np| > \varepsilon n\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \sum_{k=0}^n (k - np)^2 P_n(k). \quad (3)$$

(3) ifadəsindəki cəmi aşağıdakı kimi yazı bilərik:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k - np)^2 P_n(k) &= \\ &= \sum_{k=0}^n k^2 P_n(k) - 2np \sum_{k=0}^n k P_n(k) + \\ &+ n^2 p^2 \sum_{k=0}^n P_n(k) = I_2 - 2np I_1 + n^2 p^2, \quad (4) \end{aligned}$$

burada

$$I_1 = \sum_{k=0}^n k P_n(k) \text{ və } I_2 = \sum_{k=0}^n k^2 P_n(k).$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k=1}^n k P_n(k) = \sum_{k=1}^n \frac{kn!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)! [(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = \\ &= np \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{l! (n-1-l)!} p^l (1-p)^{n-1-l} = np \sum_{l=0}^{n-1} P_{n-1}(l). \end{aligned}$$

Sonuncu $\sum_{i=0}^{n-1} P_{n-1}(l)$ cəmi vahidə bərabərdir.

Beləliklə,

$$I_1 = \sum_{k=0}^n k P_n(k) = np. \quad (5)$$

İndi isə (4) -dəki I_2 cəmini hesablayaq. Bu məqsədlə əvvəlcə $\sum_{k=1}^n k(k-1)P_n(k)$ cəmini hesablayaq:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k-1)P_n(k) &= \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{m=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{m!(n-2-m)!} \cdot p^m(1-p)^{n-2-m} = \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{m=0}^{n-2} P_{n-2}(m) = n(n-1)p^2. \end{aligned}$$

Bunları nəzərə alsaq,

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{k=1}^n k^2 P_n(k) = \sum_{k=1}^n k(k-1)P_n(k) + \sum_{k=1}^n k P_n(k) = \\ &= n(n-1)p^2 + np = n^2 p^2 + np(1-p). \end{aligned} \quad (6)$$

Beləliklə, I_1 və I_2 aldığımız ifadələri (4) münasibətində nəzərə alsaq,

$$\sum_{k=0}^n (k - np)^2 P_n(k) = np(1-p) \quad (7)$$

olduğunu əldə edərik.

Beləliklə,

$$0 \leq P\{|\mu_n - np| > \varepsilon n\} \leq \frac{np(1-p)}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}. \quad (8)$$

Ehtimal mənfə olmayan qiymətlər aldığı üçün (8)-dən (1) münasibətinin doğruluğu əldə edilir. Bununla da Bernulli teoremi isbat olundu.

Qeyd 1. Qeyd edək ki, Bernulli teoreminin hökmünü Muavr-Laplasın lokal teoremindən də əldə etmək olar. Doğrudan da, ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1. \end{aligned}$$

Qeyd 2. Bəzən Bernulli teoremindən doğru olmayan nəticələr çıxarırlar ki, sınaqlar sayı n -nin artması ilə nisbi tezliklər ardıcılığı monoton olaraq ehtimala yığılır, yəni $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{n} = p$. Lakin bu belə deyildir. Bu teoremdə hökm olunur ki, n -nin kafi qədər böyük qiymətlərində nisbi tezliyin ehtimaldan çox fərqlənməsi hadisəsinin ehtimalı sıfıra yaxınlaşır. Başqa sözlə, hətta sınaqlar seriyasının kafi qədər böyük olması halında da

$$\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right|$$

kəmiyyətinin ixtiyari ε -dan kiçik olmasını təmin etməyə imkan vermir. Başqa sözlə, ε ədədini seçməklə belə biz hökm edə bilmərik ki, sınaqlar sayı n kafi qədər böyük olan ixtiyari

seriya üçün

$$\left| \frac{\mu_n}{n} - p \right| \leq \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödəniləcəkdir. Hər zaman elə sınaqlar seriyası tapılacaqdır ki, $\left| \frac{\mu_n}{n} - p \right| \leq \varepsilon$ bərabərsizliyi pozulacaq. Lakin sınaqlar sayı n artdıqca belə sınaqlar seriyasının müşahidə olunması ehtimalı sıfıra yaxınlaşır. Başqa sözlə, n artdıqca $\left| \frac{\mu_n}{n} - p \right| > \varepsilon$ hadisəsinin baş verdiyi sınaqlar seriyası prinsipcə mümkün olsa da n artdıqca onun ehtimalı azalır.

Bernulli teoremi nisbi tezliklərin dayanıqlığı xassəsini ifadə edir. Təcrübədən məlumdur ki, məsələn, düzgün oyun zərinin atılmasını çoxsaylı təkrar etsək cüt rəqəm düşməsi hadisəsinin $\frac{\mu_n}{n}$ nisbi tezliyi bir sınaqdakı ehtimalı olan $\frac{1}{2}$ -ə yaxın olur.

Bernulli teoreminə əsasən ixtiyarı $\varepsilon > 0$ və $1 - \varepsilon$ çox yaxın β ədədi üçün elə $n(\varepsilon, \beta)$ ədədi tapmaq olar ki, ixtiyarı $n \geq n(\varepsilon, \beta)$ üçün

$$P \left\{ \left| \frac{\mu_n}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right\} \geq \beta.$$

münasibəti ödənilir. Başqa sözlə, β -dan kiçik olmayan ehtimalla

$$p - \varepsilon \leq \frac{\mu_n}{n} \leq p + \varepsilon.$$

Əgər β ehtimalı $1 - \varepsilon$ çox yaxındırsa $n \geq n(\varepsilon, \beta)$ üçün $p - \varepsilon \leq \frac{\mu_n}{n} \leq p + \varepsilon$ hadisəsi praktik olaraq yəqin hadisə olacaq.

İndi isə böyük ədədlər qanunu ilə bağlı məşhur paradoksu verək (bax, [23]).

a) Paradoksun tarixi. Riyaziyyatda az qanun tapılar ki, böyük ədədlər qanunu kimi yalnız başa düşülsün. Bernulli teoreminə əsasən, əgər düzgün metal pulu n dəfə atılırsa və bu zaman gerb üzü μ_n sayda düşərsə, onda n artıqca μ_n/n nisbəti (gerb üzünün düşməsinin nisbi tezliyi) $\frac{1}{2}$ -ə yaxınlaşır. Daha dəqiq desək, ixtiyari müsbət ε və δ ədədləri və kifayət qədər böyük n ədədi (ε və δ ədədlərindən asılı) üçün $\left| \frac{\mu_n}{n} - \frac{1}{2} \right|$ kəmiyyətinin ε -dan kiçik olması ehtimalı $(1 - \delta)$ -ni aşır:

$$P \left\{ \left| \frac{\mu_n}{n} - \frac{1}{2} \right| > \varepsilon \right\} > 1 - \delta.$$

b) Paradoks. Oyunçular çox vaxt əmindilər ki, düzgün metal pulu atdıqda gerb üzü çox sayda düşərsə, onda böyük ədədlər qanununa əsasən, rəqəm üzünün düşməsi zərurəti artır. (Əks halda, kifayət qədər çox sayda metal pulun atılması zamanı gerb və rəqəm üzlərinin təxmini bərabər sayda düşməsi hadisəsi pozulardı). Digər tərəfdən, aydındır ki, metal pulun “yaddaşı” yoxdur, buna görə də metal pul gerb və ya rəqəm üzünə neçə dəfə düşməsinə “bilmir”. Bu səbəbdən metal pulun artıq 1000 dəfə ardıcıl gerb üzü düşübsə də, gerb üzünün düşmə şansı hər dəfə $\frac{1}{2}$ -ə bərabərdir. Bu Bernulli teoreminə zidd deyilmi?

c) Paradoksun izahı. Bernulli teoreminə görə metal pul kifayət qədər çox sayda atıldıqda gerb və rəqəm üzləri təxmini eyni sayda düşür, amma əsas məsələ burasındadır ki, burada “təxmini” nə deməkdir? Gerb və rəqəm üzlərinin

düşməsi sayları arasındakı fərqi çox kiçik olmasını zənn edən oyunçu yanılır, belə ki, Bernulli teoreminə görə gerb üzünün düşməsinin metal pulun atılması sayına nisbəti təqribi $\frac{1}{2}$ -dir (1-ə yaxın ehtimalla) və ya gerb üzünün düşmə sayının rəqəm üzünün düşmə sayına nisbəti təqribi 1 -ə bərabərdir. Başqa sözlə, metal pulun atılması sayı artdıqca bu ədədlərin loqarifmlərinin fərqi 0 -a yaxınlaşır. Əgər ədədlərin fərqi kiçik olsaydı, bu, metal pulun “yaddaş”ının olmamasına zidd olardı.

Misal. Düzgün oyun zəri 300 dəfə atılır. “5” üzünün düşməsi hadisəsini A ilə, bu hadisənin baş vermə sayını isə $\mu_n(A)$ ilə işarə edək. Zər düzgün olduğu üçün intuitiv olaraq aydındır ki, $\frac{\mu_{300}(A)}{300}$ nisbi tezliyi $\frac{1}{6}$ -ə yaxın olacaqdır, amma nə dərəcədə yaxın olduğunu söyləmək mümkün deyil. Bu məqsədlə

$$\left| \frac{\mu_{300}(A)}{300} - \frac{1}{6} \right| \leq 0,01$$

hadisəsinin ehtimalını qiymətləndirək.

Nəticə 2-yə əsasən

$$P \left\{ \left| \frac{\mu_{300}(A)}{300} - \frac{1}{6} \right| \leq 0,01 \right\} \approx 2\Phi(0,46) \approx 0,35.$$

Qeyd edək ki, misalda sınaqların sayını artırısaq, məsələn, $n = 600$ götürsək, bu halda axtarılan ehtimal

$$P \left\{ \left| \frac{\mu_{600}(A)}{600} - \frac{1}{6} \right| \leq 0,01 \right\} \approx 2\Phi(0,61) \approx 0,46.$$

olar.

Əgər sınaqların sayını bir qədər də artırısaq, məsələn, $n = 900$

$$P \left\{ \left| \frac{\mu_{900}(A)}{900} - \frac{1}{6} \right| \leq 0,01 \right\} \approx 2\Phi(0,75) \approx 0,55.$$

$n = 1200$ olduqda

$$P \left\{ \left| \frac{\mu_{1200}(A)}{1200} - \frac{1}{6} \right| \leq 0,01 \right\} \approx 2\Phi(0,86) \approx 0,61.$$

Göründüyü kimi, n artdıqca nisbi tezliklərin $\frac{1}{6}$ -ə yaxın olması ehtimalı artır.

Qeyd edək ki, Bernulli teoreminin gücləndirilmiş forması 1909-cu ildə Borel tərəfindən isbat olunmuşdur (bax, §7.3).

§2.5. Müxtəlif ehtimallı iki nəticəli asılı olmayan sınaqlar

Bernulli sxemində hər bir sınaqda hadisənin baş vermə ehtimalı eyni olduğu fərz olunur. Lakin bəzi praktik məsələlərdə bu ehtimallar müxtəlif də ola bilər.

Fərz edək ki, asılı olmayan n sayda sınaq aparılır, belə ki, birinci sınaqda A hadisəsinin baş vermə ehtimalı p_1 , ikinci sınaqda p_2 və s. n -ci sınaqda isə p_n -dir. A hadisəsinin baş verməməsi ehtimalları uyğun olaraq $q_1, \dots, q_n$ olsun. n sınaqda A hadisəsinin k dəfə baş verməsi ehtimalını $P_n(k)$ ilə işarə edək.

Tərif. $\psi_n(z) = \prod_{k=1}^n (p_k z + q_k)$ funksiyasına $P_n(k)$ ehtimallarının **doğuran funksiyası** deyilir.

Bu halda A hadisəsinin k dəfə baş verməsi ehtimalı

olan $P_n(k)$ doğuran funksiyaının z -in qüvvətlərinə görə ayrılışında z^k -nin əmsalına bərabərdir.

Məsələn, $n = 2$ olduqda

$$\begin{aligned}\psi_2(z) &= (p_1z + q_1)(p_2z + q_2) = \\ &= p_1q_2z^2 + (p_1q_2 + q_1p_2)z + q_1q_2.\end{aligned}$$

Buradan A hadisəsinin 2 dəfə baş verməsi ehtimalını z^2 -nin əmsalına, yəni $P_2(2) = p_1p_2$ -yə, 1 dəfə baş vermə ehtimalı $P_2(1) = p_1q_2 + q_1p_2$ -yə və baş verməməsi ehtimalı $P_2(0) = q_1q_2$ -yə bərabərdir.

Məsələ 1. Üç atıcı hədəfə güllə atır. Hər bir atıcı üçün hədəfin vurulması ehtimalı uyğun olaraq 0,9; 0,8 və 0,7-dir.

$A = \{\text{hədəfə iki güllə dəyməsi}\}$ və $B = \{\text{hədəfə ən azı iki güllə dəyməsi}\}$ hadisələrinin ehtimallarını tapın.

Həlli. Məsələni həll etmək üçün

$$\psi_n(z) = \prod_{k=1}^n (p_k z + q_k)$$

münasibətindən istifadə edəcəyik. Məsələnin şərtini nəzərə alsaq,

$$\begin{aligned}\psi_3(z) &= (0,9z + 0,1) \cdot (0,8z + 0,2) \cdot (0,7z + 0,3) = \\ &= 0,504z^3 + 0,398z^2 + 0,092z + 0,006\end{aligned}$$

olduğunu əldə edərik.

Buradan z^2 -in əmsalı A hadisəsinin ehtimalını verəcək, yəni $P(A) = 0,398$.

B hadisəsi yalnız o zaman baş verir ki, hədəfə ya 2 ya da 3 güllə dəymiş olsun, buna görə də z^3 və z^2 -nin əmsalını toplamaq lazımdır:

$$P(B) = 0,504 + 0,398 = 0,902.$$

§2.6. Polinomial sxem

Bernulli sxemi yalnız iki nəticəli sınaqları öyrənməyə imkan verir. Lakin elə məsələlər var ki, sınağın ikidən çox sayda nəticəsi ola bilər.

Fərz edək ki, k sayda $A_1, \dots, A_k$ nəticəsi olan G sınağı aparılır, belə ki, $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ və $\bigcup_{i=1}^k A_i = \Omega$. Bu nəticələrin ehtimallarını uyğun olaraq $p_1, \dots, p_k$ ilə işarə edək: $P(A_i) = p_i, i = \overline{1, k}$, belə ki, $p_i \geq 0$ və $\sum_{i=1}^k p_i = 1$.

Fərz edək ki, G sınağı n dəfə təkrar olunur. Onda asılı olmayan n sınaqda A_1 nəticəsinin m_1 dəfə, ... A_k nəticəsinin m_k dəfə baş verməsi ehtimalı belə tapıla bilər:

$$P_n(m_1, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot \dots \cdot m_k!} p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}, \quad (1)$$

burada $\sum_{i=1}^k m_i = n$.

Qeyd edək ki, $k = 2$ olduqda polinomial sxemdən Bernulli sxemi alınır.

Məsələ 1. Müəyyən fabrikin istehsal etdiyi məhsulun 80%-i birinci növ, 15% - ikinci növ, 5% isə üçüncü növ olur. Təsadüfi qaydada götürülmüş 6 məhsul vahidinin 4-nün birinci növ, 1-nin ikinci növ, 1-nin isə üçüncü növ olması ehtimalını tapın.

Həlli. A_i ilə seçilmiş məhsulun i -ci növ olması hadisəsinə işarə edək. Şərtə görə

$$P(A_1) = p_1 = 0,8; P(A_2) = p_2 = 0,15; P(A_3) = p_3 = 0,05.$$

Bunları nəzərə alsaq,

$$P_6(4, 1, 1) = \frac{6!}{4! \cdot 1! \cdot 1!} (0,8)^4 \cdot 0,15 \cdot 0,05 = 0,092.$$

Məsələ 2. A, B və C şirkətlərinin müəyyən sifarişi alması ehtimalları uyğun olaraq, 0,4; 0,4 və 0,2-dir. Sifariş bir-birindən asılı olmayaraq verilir. Sifarişlərin 4-nün də eyni şirkətə verilməsi ehtimalını tapın.

Həlli. (1) düsturuna əsasən

$$\begin{aligned} P_4(4, 0, 0) + P_4(0, 4, 0) + P_4(0, 0, 4) &= \\ &= \frac{4!}{4! \cdot 0! \cdot 0!} (0,4)^4 \cdot (0,4)^0 \cdot (0,2)^0 + \\ &+ \frac{4!}{0! \cdot 4! \cdot 0!} (0,4)^0 \cdot (0,4)^4 \cdot (0,2)^0 + \\ &+ \frac{4!}{0! \cdot 0! \cdot 4!} (0,4)^0 \cdot (0,4)^0 \cdot (0,2)^4 = \\ &= 0,0256 + 0,0256 + 0,0016 = 0,0528. \end{aligned}$$

Məsələ 3. Oyun zəri beş dəfə atılır. Üç dəfə cüt rəqəm, bir dəfə 1 düşməsi və bir dəfə də ya 3 ya da 5 rəqəminin düşməsi hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Aşağıdakı hadisələri daxil edək:

$$A_1 = \{\text{cüt rəqəm düşməsi}\},$$

$A_2 = \{\text{bir dəfə 1 rəqəminin düşməsi}\},$

$A_3 = \{\text{ya 3, ya da 5 düşməsi}\}.$

Aydındır ki,

$$p_1 = P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad p_2 = P(A_2) = \frac{1}{6}, \quad p_3 = P(A_3) = \frac{1}{3}.$$

Beləliklə, polinomial sxemə görə

$$P_5(3,1,1) = \frac{5!}{3!1!1!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{36}.$$

Məsələ 4. Maliyyə bazarında hər hansı səhmin qiyməti gün ərzində 0,5 ehtimal ilə 1 pul vahidi qalxa bilər, 0,3 ehtimal ilə 1 pul vahidi düşə bilər və 0,2 ehtimal ilə dəyişməz. 5 ticarət günü ərzində səhmin qiymətinin 2 vahid qalxması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Aydındır ki, ehtimalı axtarılan A hadisənin baş verməsi üçün aşağıdakı iki müxtəlif hadisə ola bilər:

Səhmin qiyməti 2 gün ərzində qalxır və 3 gün dəyişmir,

Səhmin qiyməti 3 gün artır, 1 gün azalır və 1 gün dəyişməz qalır.

Beləliklə, polinomial sxemə əsasən

$$P(A) = P_5(2; 0,3) + P_5(3; 1,1) = 0,17.$$

III FƏSİL

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT

VƏ ONUN EHTİMAL PAYLANMASI

§3.1. Təsadüfi kəmiyyət anlayışı və onun paylanma funksiyası

Təsadüfi kəmiyyət anlayışı ehtimal nəzəriyyəsinin ən mühüm anlayışlarından biridir.

Tərif 1. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş, həqiqi qiymətli $\mathcal{F}$ -ölçülən $\xi = \xi(\omega)$ ədədi funksiyasına **təsadüfi kəmiyyət** deyilir: $\xi: \Omega \rightarrow R$.

$\mathcal{F}$ -ölçülənlik o deməkdir ki, ixtiyari $x \in R$ üçün

$$\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \quad (1)$$

şərtinin ödənilməsi başa düşülür.

Tərifdən görünür ki, təsadüfi kəmiyyətin argumenti elementar hadisələrdir. Başqa sözlə təsadüfi kəmiyyət sınağın nəticələrinin funksiyasıdır. Bu o deməkdir ki, təsadüfi kəmiyyətin aldığı konkret qiymətləri qabaqcadan söyləmək olmaz. Amma təsadüfi kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətlər çoxluğunu əvvəlcədən vermək olar.

Misal 1. Bir metal pulun bir dəfə atılması eksperimentində gerb üzünün düşməsi sayını ξ ilə işarə edək. Aydındır ki, ξ -nin iki mümkün qiyməti olacaqdır 0 və 1. Lakin bu qiymətlərdən hansını alacağını dəqiq söyləmək mümkün deyil. Başqa sözlə, ξ sınağın nəticəsindən asılı olaraq qiymət alan funksiyadır, yəni təsadüfi kəmiyyətdir.

Misal 2. Metal pul 3 dəfə atılır. Gerb üzünün düşməsi sayını ifadə edən ξ kəmiyyətinin mümkün qiymətləri 0, 1, 2, 3 olar.

Misal 3. Hədəfin ilk dəfə vurulmasına qədər açılan atəşlərin sayı təsadüfi kəmiyyətdir.

Misal 4. Hədəfin mərkəzindən vurulma nöqtəsinə qədər olan məsafə təsadüfi kəmiyyətdir.

Misal 5. Müəyyən bir canlının yaşama müddəti, müəyyən bir cihazın fasiləsiz işləmə müddəti də təsadüfi kəmiyyətə misal ola bilər.

Aşağıdakı misal təsadüfi kəmiyyətin tərifindəki $\mathcal{F}$ -ölçülənlik şərtinin mühüm olduğunu göstərir.

Misal 6. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ olsun. $\mathcal{F}$ ilə Ω -nın bütün mümkün alt çoxluqlarının doğurduğu σ -cəbri işarə edək. İxtiyari $A \in \mathcal{F}$ hadisəsinin ehtimalını aşağıdakı kimi təyin edək:

$$P(A) = \frac{|A|}{4}.$$

Ω -da ξ funksiyası təyin edək: $\xi(\omega_k) = k, k = \overline{1,4}$.

ξ funksiyası Ω -da təsadüfi kəmiyyətdirmi?

Bu suala cavab vermək üçün ξ funksiyasının $\mathcal{F}$ -ölçülən olduğunu göstərmək lazımdır.

1. $x < 1$ olduqda $\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} = \emptyset \in \mathcal{F}$.
2. $1 \leq x < 2$ olduqda $\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} = \{\omega_1\} \in \mathcal{F}$.
3. $2 \leq x < 3$ olduqda $\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} = \{\omega_1, \omega_2\} \in \mathcal{F}$.
4. $3 \leq x < 4$ olduqda $\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \in \mathcal{F}$.
5. $x \geq 4$ olduqda $\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} = \Omega \in \mathcal{F}$.

Deməli, təyin olunmuş ξ funksiyası $\mathcal{F}$ -ölçüləndir və beləliklə, təsadüfi kəmiyyətdir.

İndi isə ölçülənlik şərtinin pozulmasına aid misal quraq.

Misal 7. Misal 6-nın şərtləri daxilində $\mathcal{F}$ olaraq aşağıdakı σ -cəbri götürək:

$$\mathcal{F}^* = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \Omega\}.$$

Aydındır ki,

1. $x < 1$ olduqda $\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} = \emptyset \in \mathcal{F}^*$.

2. $1 \leq x < 2$ olduqda $\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} = \{\omega_1\} \notin \mathcal{F}^*$.

Göründüyü kimi, ξ funksiyası $\mathcal{F}^*$ σ -cəbrinə nəzərən ölçülən deyil. Başqa sözlə, bu halda ξ funksiyası Ω elementar hadisələr fəzasında təyin olunsada, təsadüfi kəmiyyət deyildir.

İndi isə təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası anlayışını verək.

Qeyd edək ki, təsadüfi kəmiyyətin tərifindəki $\mathcal{F}$ -ölçülənlik şərti imkan verir ki, ixtiyari $x \in R$ üçün

$$\{\xi \leq x\} = \{\omega: \xi(\omega) \leq x\}$$

hadisə olsun və onun ehtimalı təyin edilə bilsin. Aydındır ki, bu ehtimal x -dan asılı bir funksiya olur.

Tərif 2. $F_\xi(x) = P\{\omega: \xi(\omega) \leq x\}$, $x \in R$ funksiyasına ξ təsadüfi kəmiyyətinin **paylanma funksiyası** deyilir.

Bu funksiyanın təyin oblastı həqiqi ədədlər çoxluğu $R = (-\infty, +\infty)$, qiymətlər çoxluğu isə $[0, 1]$ parçasıdır, yəni $0 \leq F_\xi(x) \leq 1$.

Paylanma funksiyasının aşağıdakı mühüm xassələri vardır.

Xassə 1. Paylanma funksiyası azalmayan funksiya, yəni ixtiyari $x_1 < x_2$ üçün

$$F(x_1) \leq F(x_2).$$

İsbatı. $x_1 < x_2$ götürək. Onda asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$\{\xi \leq x_2\} = \{\xi \leq x_1\} \cup \{x_1 < \xi \leq x_2\}.$$

Bu ifadənin hər iki tərəfindən ehtimal alaraq və ehtimalın additivlik xassəsini tətbiq edərək

$$P\{\xi \leq x_2\} = P\{\xi \leq x_1\} + P\{x_1 < \xi \leq x_2\}$$

olduğunu əldə edərik. Buradan

$$\begin{aligned} P\{x_1 < \xi \leq x_2\} &= P\{\xi \leq x_2\} - P\{\xi \leq x_1\} = \\ &= F(x_2) - F(x_1). \end{aligned} \quad (2)$$

$P\{x_1 < \xi \leq x_2\} \geq 0$ olduğu üçün

$$F(x_1) \leq F(x_2).$$

Xassə 2. Paylanma funksiyası sağdan kəsilməzdir:

$$F(x_0 + 0) = F(x_0),$$

burada $F(x_0 + 0)$ ilə $F(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsindəki sağ limiti işarə olunmuşdur:

$$F(x_0 + 0) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} F(x).$$

İsbatı. Aşağıdakı hadisələr ardıcılığını daxil edək:

$$B_n = \left\{ x < \xi \leq x + \frac{1}{n} \right\}.$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki, $B_{n+1} \subseteq B_n$, $n = 1, 2, \dots$ və $n \rightarrow \infty$ olduqda $B_n \downarrow \emptyset$.

Buna görə $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P(B_n) = P\left\{ \xi \leq x + \frac{1}{n} \right\} - P\{\xi \leq x\} = F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x) \rightarrow 0.$$

Bu isə o deməkdir ki,

$$F(x_0 + 0) = F(x_0).$$

Xassə 3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \equiv F(-\infty) = 0$ və

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \equiv F(+\infty) = 1.$$

İsbatı. Bu xassənin isbatı ehtimal ölçüsünün additivlik xassəsindən alınır. Aşağıdakı hadisələri daxil edək:

$$A_n = \{n - 1 < \xi \leq n\}.$$

Aydındır ki,

$$\Omega = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} A_n \quad \text{və} \quad \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} A_n = \emptyset.$$

Bunları nəzərə alsaq,

$$\begin{aligned} 1 = P(\Omega) &= P\left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N+1}^N P(A_n) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N+1}^N P\{n - 1 < \xi \leq n\} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N+1}^N (F(n) - F(n - 1)) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (F(N) - F(-N)) = F(+\infty) - F(-\infty). \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$F(+\infty) - F(-\infty) = 1$$

olduğunu əldə edirik. Digər tərəfdən

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

olduğu üçün $F(-\infty) = 0$ və $F(+\infty) = 1$.

Beləliklə, xassə 3 isbat olundu.

Aşağıdakı teoremi isbatsız olaraq verək:

Teorem 1. Fərz edək ki, $F(x)$ funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir:

- 1) azalmayan funksiyadır;
- 2) sağdan kəsilməzdir;
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \equiv F(-\infty) = 0$ və $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \equiv F(+\infty) = 1$.

Onda $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş elə $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti var ki, $F(x)$ funksiyası həmin təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasıdır: $F(x) = F_{\xi}(x) = P\{\xi \leq x\}$.

Paylanma funksiyası məlum olduqda təsadüfi kəmiyyətin $(x_1, x_2]$ intervalından qiymət alması ehtimalı

$$P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

kimi tapılır. Bu münasibət (2)-dən alınır.

Paylanma funksiyası məlum olduqda ξ təsadüfi kəmiyyətinin müəyyən x qiymətini alması ehtimalını tapmaq mümkündür:

$$P\{\xi = x\} = F(x) - F(x - 0).$$

Doğrudan da,

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x - \frac{1}{n} < \xi \leq x \right\}$$

olduğu üçün, ehtimal ölçüsünün kəsilməzliyi aksiomuna əsasən

$$P\{\xi = x\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ x - \frac{1}{n} < \xi \leq x \right\} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(F(x) - F\left(x - \frac{1}{n}\right) \right) = F(x) - F(x - 0).$$

Tərif 3. $\xi: \Omega \rightarrow R$ inikası zamanı $\xi(\omega) \in B \subseteq R$ şərtini ödəyən bütün ω elementar hadisələr çoxluğuna B ədədi çoxluğunun proobrazı deyilir və $\xi^{-1}(B)$ kimi işarə edilir:

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega: \xi(\omega) \in B\}.$$

$\xi^{-1}(B)$, $B \in \beta(R)$ proobrazlar küllüsü σ -cəbr əmələ gətirir (göstərin). Bu σ -cəbri $\mathcal{F}_\xi$ ilə işarə edək. $\mathcal{F}_\xi$ -ə ξ təsadüfi kəmiyyətinin doğurduğu σ -cəbr deyəcəyik. Aydındır ki, $\mathfrak{F}_\xi \subseteq \mathfrak{F}$.

Göstərmək olar ki, $\mathcal{F}_\xi$ σ -cəbri $\{\omega: \xi \leq x\}$, $x \in R$ çoxluqlarını özündə saxlayan ən kiçik σ -cəbrdir.

Proobraz anlayışının köməyi ilə təsadüfi kəmiyyətin tərifini belə də vermək olar.

Tərif 4. İxtiyari $B \in \beta(R)$ çoxluğunun proobrazı

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega: \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

olarsa, bu halda $\xi = \xi(\omega)$ ədədi funksiyasına təsadüfi kəmiyyət deyilir.

Tərif 5.

$$P_\xi(B) = P\{\xi^{-1}(B)\} = P\{\xi \in B\} \quad (3)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $P_\xi(B)$, $B \in \beta(R)$ ehtimal ölçüsü ξ təsadüfi kəmiyyətinin $(R, \beta(R))$ -də ehtimal paylanması adlanır.

Beləliklə, hər bir $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti həqiqi

oxda $(R, \beta(R), P_\xi(\cdot))$ ehtimal fəzası yaradır. Burada $P_\xi(\cdot)$ ehtimal ölçüsü (3) düsturu ilə təyin olunur.

Misal. $(R, \beta(R), P_\xi(\cdot))$ ehtimal fəzasında $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətini aşağıdakı kimi təyin edək:

$$\xi = \xi(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}$$

Bu təsadüfi kəmiyyətin doğurduğu σ -cəbr aşağıdakı kimi olar:

$$\mathcal{F}_\xi = \{R, \emptyset, \{\omega \geq 0\}, \{\omega < 0\}\}.$$

Teorem 2. $F(x)$ paylanma funksiyasının kəsilməzlik nöqtələri çoxluğu ən çoxu hesabidir.

İsbati. $P\{\xi = x\} = F(x) - F(x - 0)$ bərabərliyindən çıxır ki, əgər x nöqtəsi kəsilmə nöqtəsidirsə, bu halda $P\{\xi = x\} > 0$ olar. İxtiyari $n \geq 1$ üçün $P\{\xi = x\} \geq \frac{1}{n}$ şərtini ödəyən x kəsilmə nöqtələrinin sayı n -dən çox ola bilməz, çünki əks halda $P_\xi(R) = P\{\xi^{-1}(R)\} = P\{\xi \in \Omega\} = 1$ şərti pozulardı. $P\{\xi = x\} \geq \frac{1}{n}$ şərtini ödəyən x nöqtələri çoxluğunu B_n ilə işarə etsək, $F(x)$ funksiyasının bütün kəsilmə nöqtələri çoxluğu $B = \bigcup_n B_n$ olar. Bu çoxluq isə ən çoxu hesabi çoxluqdur.

Məsələlər.

1. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti verilmişdir. Göstərin ki,

$$\begin{aligned} &\{\omega: \xi \geq x\}; \quad \{\omega: \xi < x\}; \quad \{\omega: \xi > x\}; \quad \{\omega: \xi = x\}; \\ &\{\omega: a \leq \xi < b\}; \quad \{\omega: a < \xi \leq b\} \end{aligned}$$

çoxluqlarının hər biri təsadüfi hadisədir, yəni $\mathcal{F}$ σ -cəbrinə

daxildir.

2. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında $\xi = \xi(\omega)$ və $\eta = \eta(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətləri verilmişdir. Göstərin ki,

$$\{\omega: \xi \leq \eta\}; \{\omega: \xi < \eta\}; \{\omega: \xi > \eta\}; \{\omega: \xi = \eta\}$$

çoxluqlarının hər biri təsadüfi hadisədir, yəni $\mathcal{F}$ σ -cəbrinə daxildir.

3. Fərz edək ki, ehtimal fəzasında $\xi = \xi(\omega)$ və $\eta = \eta(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətləri verilmişdir. Göstərin ki, $c \cdot \xi$; $\xi + c$; $|\xi|$; $\xi \pm \eta$; $\xi \cdot \eta$ və $P\{\omega: \eta \neq 0\} = 1$ olduqda, $\frac{\xi}{\eta}$ təsadüfi kəmiyyətlərdir.

4. Göstərin ki, paylanma funksiyası məlum olduqda ξ təsadüfi kəmiyyətlə bağlı müxtəlif ehtimalları tapmaq mümkündür:

$$P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1 - 0),$$

$$P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F(x_2 - 0) - F(x_1 - 0),$$

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = F(x_2 - 0) - F(x_1),$$

$$P\{\xi < x\} = F(x - 0),$$

burada $F(x - 0) \equiv \lim_{x \rightarrow x-0} F(x)$.

§3.2. Diskret paylanmalar

Ω elementar hadisələr çoxluğu sonlu və ya hesabi çoxluq olduğu üçün ξ təsadüfi kəmiyyətinin qiymətlər çoxluğu da sonlu və ya hesabi olacaqdır. Əgər ξ təsadüfi kəmiyyətinin aldığı qiymətlər çoxluğu sonlu olarsa, belə təsadüfi kəmiyyətlər **sadə təsadüfi kəmiyyətlər** adlanır. Hesabi sayda qiymətlər çoxluğuna malik olan təsadüfi kəmiyyətlər **diskret təsadüfi kəmiyyətlər** adlanır. Aydındır ki, sadə təsadüfi kəmiyyət də diskret təsadüfi kəmiyyətdir.

Fərz edək ki, ξ təsadüfi kəmiyyəti sonlu sayda $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymətləri alır və

$A_k = \{\omega: \xi(\omega) = x_k\}$ olsun. Aydındır ki,

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega.$$

Sadə təsadüfi kəmiyyətlərə aid olan hadisənin indikatoru anlayışı ilə tanış olaq.

Hər hansı B hadisəsinin indikatoru aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$I_B = I_B(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in B \\ 0, & \omega \notin B \end{cases}$$

İndikatorun aşağıdakı xassələri vardır:

- 1) $I_\Omega = 1, I_\emptyset = 0.$
- 2) $A \subseteq B \Rightarrow I_A \leq I_B.$
- 3) $A \cap B = \emptyset$ olduqda $I_{A+B} = I_A + I_B$
- 4) İxtiyari A və B hadisələri üçün $I_{A+B} = I_A + I_B - I_{A \cap B}.$
- 5) $I_{\bigcap_i A_i} = \prod_i I_{A_i}.$

İndikator anlayışı ehtimal nəzəriyyəsində hesablama işlərini sadələşdirir və riyazi ifadənin kompakt yazılışını təmin edir.

İndikator anlayışından istifadə edərək ξ diskret kəmiyyətini belə yazmaq olar:

$$\xi = \sum_{k=1}^n x_k \cdot I_{A_k}, \quad A_k = \{\omega: \xi(\omega) = x_k\}$$

Tərif 1. Fərz edək ki, ξ təsadüfi kəmiyyəti

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, qiymətlərini

$$p_k = P\{\xi = x_k\}, \quad k \geq 1$$

ehtimalları ilə alır:

$$1. p_k \geq 0 \quad \forall$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

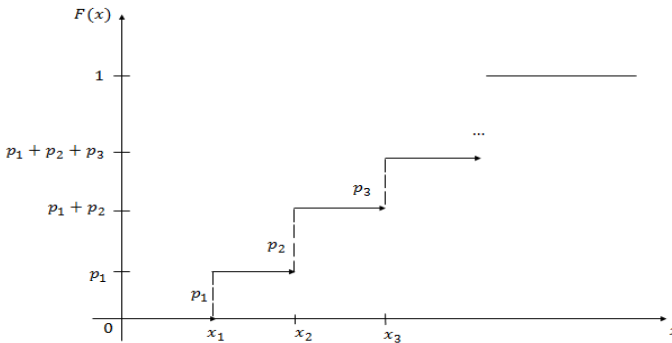
(x_k, p_k) , $k \geq 1$ cütlər çoxluğuna ξ təsadüfi kəmiyyətinin **paylanma qanunu** deyilir. $\{p_k\}$, $k \geq 1$ ehtimallar ailəsinə **diskret paylanma** deyilir. Diskret paylanma bəzən cədvəl şəklində verilir:

x_k	x_1	x_2	...
p_k	p_1	p_2	...

Diskret təsadüfi kəmiyyətlərin aldığı qiymətlərin müəyyən bir çoxluğa daxil olma hadisəsinin ehtimalını tapmaq üçün, paylanma funksiyası anlayışından istifadə olunur. Diskret təsadüfi kəmiyyətlər üçün paylanma funksiyasının ifadəsi belədir:

$$F_{\xi}(x) = \sum_{k: x_k \leq x} p_k.$$

Diskret paylanmanın paylanma funksiyasının qrafiki aşağıdakı kimidir:



Göründüyü kimi, diskret təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası hissə-hissə sabit funksiya olub ixtiyari i üçün bütün $x \neq x_i$ nöqtələrində kəsilməzdir və ixtiyari i üçün $x = x_i$ nöqtələrində birinci növ kəsilməliyə malikdir.

Misal 1. Fərz edək ki, ξ diskret təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu aşağıdakı cədvəl şəklində verilmişdir:

x_k	-1	0	2	4
p_k	0,3	0,1	0	0,6

Paylanma funksiyasını tapın və qrafikini qurun.

Həlli. Cədvəldən görünür ki, ξ diskret təsadüfi kəmiyyətinin qiymətləri ədəd oxunu 5 kəsişməyən aralığa bölür. Bu aralıqların hər birində paylanma funksiyasının qiymətini müəyyən edək.

1) $x < -1$ olduqda

$$F(x) = P\{\xi \leq x\} = P\{\emptyset\} = 0.$$

2) $-1 \leq x < 0$ olduqda

$$F(x) = p_1 = 0,3.$$

3) $0 \leq x < 2$ olduqda

$$F(x) = \sum_{k: x_k \leq x} p_k = p_1 + p_2 = 0,3 + 0,1 = 0,4.$$

4) $2 \leq x < 4$ olduqda

$$F(x) = \sum_{k: x_k \leq x} p_k = p_1 + p_2 + p_3 = 0,3 + 0,1 + 0 = 0,4.$$

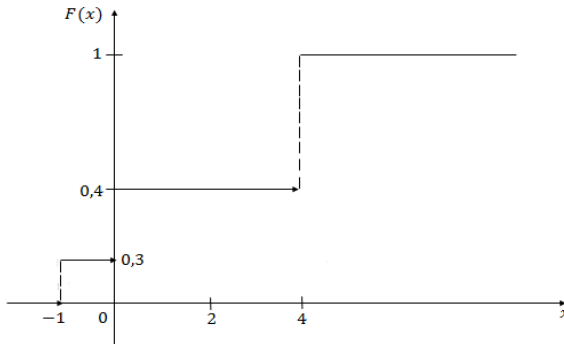
5) $x \geq 4$ olduqda

$$F(x) = \sum_{k: x_k \leq x} p_k = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

Beləliklə,

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < -1 \\ 0,3; & -1 \leq x < 0 \\ 0,4; & 0 \leq x < 2 \\ 0,4; & 2 \leq x < 4 \\ 1; & x \geq 4 \end{cases}$$

Bu funksiyanın qrafiki aşağıdakı kimidir:



Misal 2. Fərz edək ki, metal pul 1 dəfə atılır. Bu halda $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$; $\omega_1 = G$; və $\omega_2 = R$. Bu eksperimentə uyğun σ -cəbr olaraq Ω -nın bütün alt çoxluqları çoxluğunu götürək;

$$\mathcal{F} = \{\emptyset; \{\omega_1\}; \{\omega_2\}; \Omega\}.$$

Bu $\mathcal{F}$ σ -cəbrində P ehtimal ölçünü təyin edək:

$$P(\emptyset) = 0; \quad P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}; \quad P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}; \quad P(\Omega) = 1.$$

Asanlıqla görmək olar ki, belə təyin olunmuş $P(A)$ funksiyası Kolmoqorov aksiomlarını ödəyir və deməli, $A \in \mathcal{F}$ hadisəsinin baş vermə ehtimalıdır.

Misal 3. 1000 lotereya bileti vardır: 5 biletdə 500 manat, 10 biletdə 100 manat, 20 biletdə 50 manat və 50 biletdə 10 manat uduş nəzərdə tutulmuşdur. Bir biletdə düşən uduşun miqdarını ifadə edən ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu tapın.

Həlli. Şərtə görə ξ təsadüfi kəmiyyətinin mümkün qiymətləri 0, 10, 50, 100 və 500 olacaqdır. Uduşa düşməyən biletlərin sayı $1000 - (5 + 10 + 20 + 50) = 915$ olar. Buna görə də

$$P\{\xi = 0\} = \frac{915}{1000} = 0,915.$$

Eyni qayda ilə

$$P\{\xi = 10\} = \frac{50}{1000} = 0,05,$$

$$P\{\xi = 50\} = \frac{20}{1000} = 0,02,$$

$$P\{\xi = 100\} = \frac{10}{1000} = 0,01,$$

$$P\{\xi = 500\} = \frac{5}{1000} = 0,005.$$

Beləliklə, ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu aşağıdakı cədvəl şəklində vermək mümkündür:

x_k	0	10	50	100	500
p_k	0,915	0,05	0,02	0,01	0,005

Misal 4. İki düzgün oyun zəri atılır.

a) düşən rəqəmlərin maksimumunu ifadə edən ξ təsadüfi kəmiyyətinin, b) düşən rəqəmlər cəmini ifadə edən η təsadüfi kəmiyyətinin b) düşən rəqəmlərin minimumunu ifadə edən η təsadüfi kəmiyyətinin c) düşən rəqəmlər cəmini ifadə edən θ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu tapın.

Həlli. a) Aydındır ki, bu $\xi = \max\{i, j\}$ təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətləri $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ -dir.

Bu qiymətlərin ehtimalını tapaq.

$$p_1 = P\{\xi = 1\} = \frac{1}{36}; \quad p_2 = P\{\xi = 2\} = \frac{3}{36};$$

$$p_3 = P\{\xi = 3\} = \frac{5}{36}; \quad p_4 = P\{\xi = 4\} = \frac{7}{36};$$

$$p_5 = P\{\xi = 5\} = \frac{9}{36}; \quad p_6 = P\{\xi = 6\} = \frac{11}{36}.$$

Tapılmış ehtimalları nəzərə alaraq ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu aşağıdakı cədvəl şəklində verə bilərik:

k	1	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

b) Aydındır ki, bu $\eta = \min\{i, j\}$ təsadüfi kəmiyyətin

mümkün qiymətləri $\{1,2,3,4,5,6\}$ -dir.

Bu qiymətlərin ehtimalını tapaq.

$$p_1 = P\{\eta = 1\} = \frac{11}{36}; \quad p_2 = P\{\eta = 2\} = \frac{9}{36};$$

$$p_3 = P\{\eta = 3\} = \frac{7}{36}; \quad p_4 = P\{\eta = 4\} = \frac{5}{36};$$

$$p_5 = P\{\eta = 5\} = \frac{3}{36}; \quad p_6 = P\{\eta = 6\} = \frac{1}{36}.$$

Tapılmış ehtimalları nəzərə alaraq η təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu aşağıdakı cədvəl şəklində verə bilərik:

k	1	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

c) Düşün rəqəmlər cəmini ifadə edən $\theta = i + j$ təsadüfi kəmiyyətinin mümkün qiymətləri $\{2,3,4, \dots, 12\}$ -dir. Bu qiymətlərin ehtimalını tapaq.

Asanlıqla görmək mümkündür ki, θ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu aşağıdakı kimidir:

Məsələn, cəmin 6 -a bərabər olması üçün 5 variant vardır: (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1).

Buna görə də,

$$p_6 = P\{\theta = 6\} = \frac{5}{36}.$$

Beləliklə, η təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu aşağıdakı cədvəl şəklində verə bilərik:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_k	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

İndi isə bəzi diskret paylanmaları verək:

1.Cırlaşmış paylanma.

$$P\{\xi = c\} = 1, \quad c = \text{const.}$$

2.Bernulli paylanması.

$$P\{\xi = k\} = p^k q^{1-k}, \quad k = 0, 1; \quad p + q = 1.$$

Burdan

$$P\{\xi = 0\} = q \text{ və } P\{\xi = 1\} = p.$$

Qeyd edək ki, Bernulli paylanması bəzən aşağıdakı kimi də verilir:

$$P\{\xi = -1\} = q \text{ və } P\{\xi = 1\} = p, \quad p + q = 1.$$

3.Binomial paylanma.

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}; \quad k = \overline{0, n}; \quad p + q = 1$$

Aydındır ki, $\sum_{k=0}^n P\{\xi = k\} = 1$.

Doğrudan da,

$$\sum_{k=0}^n P\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1.$$

Qeyd edək ki, binomial qanun ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyət Bernulli sxemində müsbət nəticənin baş verməsi sayını ifadə edir.

Misal 5. Qutuda 15 qara və 5 ağ rəngli kürəcik vardır.

Qaytarmaq şərti ilə təsadüfi qaydada 3 kürəcik götürülür. ξ ilə çıxarılan qara rəngli kürəciklərin sayını, η ilə isə çıxarılmış kürəciklərin içərisində olan ağ rəngli kürəciklərin sayını işarə edək.

- a) 1 qara və 2 ağ kürəcik götürülməsi ehtimalını tapın,
- b) ən azı bir qara kürəciyin götürülməsi ehtimalını tapın,
- c) $P(|\xi| \leq 1 \mid \xi < 3)$ ehtimalını hesablayın.

Həlli. a) Aydındır ki, ξ təsadüfi kəmiyyəti parametrləri $n = 3$ və $p = 3/4$ olan binomial paylanmaya malikdir. Asanlıqla görmək mümkündür ki, η təsadüfi kəmiyyəti də parametrləri $n = 3$ və $p = 1/4$ olan binomial paylanmaya malikdir.

$$P\{\xi = 1\} = C_3^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}.$$

Aydındır ki,

$$P\{\eta = 2\} = P\{\xi = 1\}.$$

b) Asanlıqla görmək olar ki,

$$P\{\xi \geq 1\} = 1 - P\{\xi < 1\} = 1 - P\{\xi = 0\} =$$

$$= 1 - C_3^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{63}{64}.$$

c) Şərti ehtimaldan istifadə etsək

$$P\{|\xi| \leq 1 \mid \xi < 3\} = \frac{P\{(-1 \leq \xi \leq 1) \cap (\xi < 3)\}}{P\{\xi < 3\}} =$$

$$= \frac{P\{0 \leq \xi \leq 1\}}{1 - P\{\xi = 3\}} = \frac{P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\}}{1 - C_3^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0} =$$

$$= \frac{\frac{1}{64} + \frac{9}{64}}{1 - \frac{27}{64}} = \frac{10}{37}.$$

4. Puasson paylanması.

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0; k = 0, 1, 2, \dots$$

$\lambda > 0$ ədədi paylanmanın parametri adlanır.

Göstərək ki,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{\xi = k\} = 1$$

Doğrudan da,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Puasson paylanması bəzən nadir hadisələr qanunu da adlanır.

Qeyd edək ki, Puasson paylanması bir çox tətbiqi məsələlərdə, o cümlədən fizikada radiaktiv parçalanma məsələlərində tətbiq olunur. Məlumdur ki, hər bir Ra radiy atomu radioaktiv parçalanma zaman α -zərrəciklər şüalanır. Fərz edək ki, müəyyən T zaman intervalında mövcud olan n sayda radiy atomu digər atomlardan asılı olmayaraq p ehtimalı ilə parçalanır. Bu prosesə biz Bernulli sınaqları kimi baxa bilərik, belə ki, müsbət nəticənin baş verməsi sayı olan ξ təsadüfi kəmiyyəti T zamanı ərzində yaranan α -zərrəciklərin sayını ifadə edir. Radioaktiv parçalanma prosesi çox yavaş getdiyi üçün p ehtimalı çox kiçik olur. Bununla yanaşı

atomların sayı n kifayət qədər çox olduğu üçün ξ təsadüfi kəmiyyəti Puasson paylanmasına malik olur.

Ümumiyyətlə, Puasson paylanması eyni zaman (və ya məkan) aralığında bir-birindən asılı olmayaraq baş verən eyni orta intensivlikli hadisələrin sayını ifadə edir.

5. Həndəsi paylanma.

$$P\{\xi = k\} = pq^{k-1}; \quad k = 1, 2, \dots,$$

belə ki, $0 < p < 1, 0 < q < 1$ və $p + q = 1$.

Göstərək ki, $\sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi = k\} = 1$.

Doğrudan da, $0 < q < 1$ olduğu üçün sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmi düsturundan istifadə edərək

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \frac{1}{1-q} = 1$$

olduğunu əldə edərək.

Qeyd edək ki, həndəsi qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət Bernulli sxemində müsbət nəticənin ilk dəfə baş verməsinə qədər aparılan sınaqların sayını ifadə edir.

İndi isə həndəsi paylanmanın mühüm xassəsini verək.

Fərz edək ki, ξ təsadüfi kəmiyyəti həndəsi paylanma qanunu ilə paylanmışdır. Bu halda aşağıdakı münasibət doğrudur:

$$P\{\xi = n + k | \xi \geq n\} = P\{\xi = k\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Bu xassəyə **keçmişin unudulması xassəsi** deyilir. Elmi ədəbiyyatda bu xassəyə Markov xassəsi də deyilir.

Doğrudan da,

$$\{\xi = n + k\} \subset \{\xi \geq n\}$$

olduğundan,

$$\{\xi = n + k\} \cap \{\xi \geq n\} = \{\xi = n + k\}.$$

Şerti ehtimal düsturuna əsasən

$$\begin{aligned} P\{\xi = n + k | \xi \geq n\} &= \frac{P(\{\xi = n + k\} \cap \{\xi \geq n\})}{P\{\xi \geq n\}} = \\ &= \frac{P\{\xi = n + k\}}{P\{\xi \geq n\}} = \frac{q^{n+k} \cdot p}{\sum_{k=n}^{\infty} q^k p} = p \cdot q^k = P\{\xi = k\}. \end{aligned}$$

Bu xassəni belə ifadə etmək olar: n -ci addıma qədər müsbət nəticə baş verməyibsə, onun $(n + k)$ -cı addımda baş verməsi ehtimalı yalnız k -dan asılıdır.

Diskret paylanmalardan yalnız həndəsi paylanma qanunu üçün keçmişin unudulması xassəsi ödənilir.

6. Mənfi binomial paylanma. Əgər $k = r, r + 1, \dots$; $p + q = 1$ üçün

$$P\{\xi = k\} = C_{n-1}^{r-1} \cdot p^r \cdot q^{k-r}$$

olarsa, bu halda deyirlər ki, ξ təsadüfi kəmiyyəti **mənfi binomial paylanmaya** malikdir. Bu paylanma bəzən **Paskal paylanması** da adlanır. Xüsusi halda $r = 1$ olduqda mənfi binomial paylanmadan həndəsi paylanma alınır.

Asanlıqla göstərmək olar ki, $\sum_{k=r}^{\infty} P\{\xi = k\} = 1$.

Qeyd edək ki, mənfi binomial qanun ilə paylanmış ξ təsadüfi kəmiyyəti Bernulli sxemində r sayda “müsbət” nəti-

cənin baş verməsinə qədər aparılan sınaqların sayını ifadə edir. Aydındır ki, bu halda “mənfi” nəticələrin sayını ifadə edən $\eta = \xi - r$ təsadüfi kəmiyyətin paylanması aşağıdakı kimi yazmaq mümkündür:

$$P\{\eta = m\} = C_{m+r-1}^m \cdot p^r \cdot q^m; \quad m = 0, 1, \dots$$

7. Hiperhəndəsi paylanma.

$$P\{\xi = k\} = \frac{C_m^k C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r}, \quad k = 0, 1, \dots, \min\{r, m\}.$$

Bu paylanma qanunu iqtisadi nəzarət nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır. Fərz edək ki, n sayda məhsul vahidindən m saydası yararsızdır. Təsadüfi qaydada seçilmiş r sayda məhsulun içərisində yararsızların sayını ifadə edən təsadüfi kəmiyyət hiperhəndəsi qanunla paylanır.

Misal 6. 25 elektrik lampasından ibarət partiyadan təsadüfi qaydada 5 lampa götürülür və sınaqdan çıxarılır. Əgər sınaq prosesi nəticəsində 5 lampanın heç biri sıradan çıxmırsa və ya yalnız biri sıradan çıxarsa, partiya qəbul olunur. Əgər 25 lampanın 4-ü yararsızdırsa, partiyanın qəbul olunması ehtimalını tapın.

Həlli. Aydındır ki, seçilmiş 5 lampanın içərisində neçəsinin yararsız olduğu naməlumdur, yəni təsadüfi kəmiyyətdir. Həmin sayı ξ ilə işarə edək. Məsələnin şərtindən aydındır ki, ξ təsadüfi kəmiyyəti hiperhəndəsi paylanmaya malik olacaq və

$$P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} = \frac{C_4^0 \cdot C_{25-4}^5}{C_{25}^5} + \frac{C_4^1 \cdot C_{25-4}^{5-1}}{C_{25}^5} = 0,834.$$

Deməli, partiyanın qəbul olunması ehtimalı 0,834-ə bərabərdir.

Qeyd edək ki, $\frac{r}{n}$ nisbəti azaldıqda hiperhəndəsi paylanma r və $p = \frac{m}{n}$ parametrlı binomial paylanmaya yaxınlaşar. Əgər bu misalda $p = \frac{m}{n} = \frac{4}{25} = 0,16$ parametrlı binomial paylanma götürsəydik, partiyanın qəbul olunması ehtimalı 0,817 olardı, yəni azalardı. Çünki bu misalda seçim ümumi sayın 20% -ni təşkil edir. Buna görə də binomial paylanmanın yaxşı yaxınlaşma verəcəyini gözləmək olmaz.

§3.3. Mütləq kəsilməz paylanmalar

Əgər $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası hər bir $x \in (-\infty, +\infty)$ nöqtəsində kəsilməz funksiya olarsa, bu halda təsadüfi kəmiyyətin ixtiyari qiymətini alması ehtimalı sıfıra bərabər olur. Əgər x_0 nöqtəsi $F(x)$ funksiyasının kəsilməzlik nöqtəsidirsə, bu halda $\{\omega: \xi = x_0\}$ təsadüfi hadisəsi mümkün hadisə olsa da, onun ehtimalı sıfıra bərabərdir:

$$P\{\omega: \xi = x_0\} = 0.$$

Doğrudan da, istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$P\{\omega: x_0 - \varepsilon < \xi \leq x_0\} = F(x_0) - F(x_0 - \varepsilon)$$

münasibəti doğrudur. Buradan isə

$$P\{\omega: \xi = x_0\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (F(x_0) - F(x_0 - \varepsilon)) = 0$$

olduğunu əldə edərək. Bu isə onu göstərir ki, paylanma funksiyası kəsilməz olan təsadüfi kəmiyyətin hər bir qiymətini alması ehtimalı sıfır olduğu üçün, diskret təsadüfi kəmiyyətlərdən fərqli olaraq, belə təsadüfi kəmiyyəti onun ala biləcəyi qiymətlərin ehtimalları ilə xarakterizə etmək mümkün deyil. Bu baxımdan ədəd oxunun nöqtələrini $(x, x + \Delta x]$ yarımintervalları ilə əvəz edib, ξ təsadüfi kəmiyyətinin $(x, x + \Delta x]$ yarımintervalından qiymət alması ehtimalını Δx -ə bölsək, təsadüfi kəmiyyətin müəyyən xarakteristikasını almalıyıq.

Tərif 1.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{\omega: x < \xi \leq x + \Delta x\}}{\Delta x}$$

limitinə (əgər varsa) ξ təsadüfi kəmiyyətinin **paylanmasının sıxlıq funksiyası** deyilir və $p(x)$ ilə işarə olunur.

Bunu aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Beləliklə, əgər $F(x) = P\{\xi \leq x\}$ paylanma funksiyası diferensiallandırsa, təsadüfi kəmiyyətin paylanmasının sıxlıq funksiyası onun paylanma funksiyasının törəməsinə bərabərdir.

İndi isə mütləq kəsilməz paylanma anlayışını verək.

Tərif 2. Əgər $p(x) \geq 0$ funksiyası varsa ki, ixtiyari x həqiqi ədədi üçün

$$F(x) = P\{\xi \leq x\} = \int_{-\infty}^x p(y) dy \quad (1)$$

ayrılığı mümkün olsun, bu halda deyirlər ki, ξ təsadüfi kəmiyyəti mütləq kəsilməz paylanmaya malikdir.

(1) bərabərliyindən sıxlıq funksiyasının aşağıdakı xassələrini almaq olar:

$$1) p(x) \geq 0,$$

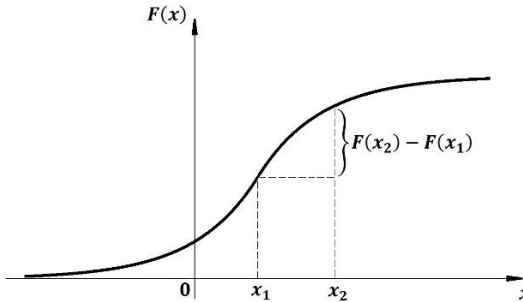
$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$

Birinci xassə $0 \leq F(x) \leq 1$, ikinci xassə isə $F(+\infty) = 1$ olmasından alınır.

(1) bərabərliyi göstərir ki, mütləq kəsilməz paylanmaları vermək üçün onların sıxlıq funksiyasını vermək kifayətdir.

Qeyd edək ki, $F(x)$ paylanma funksiyası məlum olduqda

$$P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$



Şəkil 1. $P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\}$ ehtimalının paylanma funksiyası vasitəsilə həndəsi təsviri.

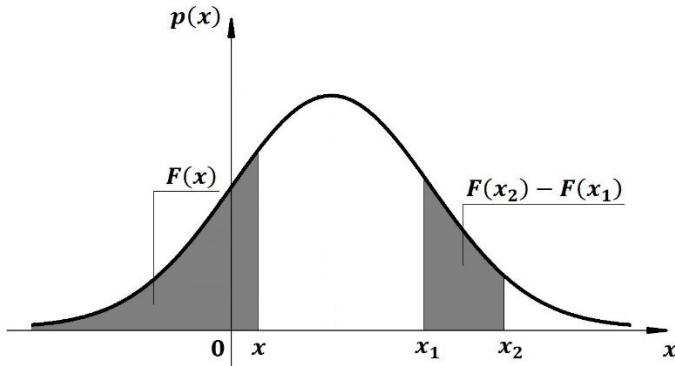
Əgər $p(x)$ sıxlıq funksiyası məlumdursa, bu halda təsadüfi kəmiyyətin müəyyən $[x_1, x_2]$ parçasından qiymət alması

ehtimalını tapmaq mümkündür:

$$P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx. \quad (2)$$

Doğrudan da,

$$\begin{aligned} P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} &= F(x_2) - F(x_1) = \\ &= \int_{-\infty}^{x_2} p(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} p(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} p(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} p(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx. \end{aligned}$$



Şəkil 2. $F(x)$ paylanma funksiyasının və $P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\}$ ehtimalının həndəsi təsviri.

Qeyd edək ki, mütləq kəsilməz paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətin konkret x_0 qiymətini alması ehtimalının sıfıra bərabər olmasını (2) münasibətindən istifadə etməklə

də göstərmək olar.

Doğrudan da, $\{\xi = x_0\}$ hadisəsini aşağıdakı kimi göstərmək mümkündür:

$$\{\xi = x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x_0 - \frac{1}{n} < \xi \leq x_0 \right\}.$$

Kəsilməzlik aksiomundan istifadə etsək,

$$\begin{aligned} P\{\xi = x_0\} &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x_0 - \frac{1}{n} < \xi \leq x_0 \right\}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ x_0 - \frac{1}{n} < \xi \leq x_0 \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0} p(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Qeyd edək ki, əgər x nöqtəsi $p(x)$ sıxlıq funksiyasının kəsilməzlik nöqtəsidirsə, onda $\Delta \rightarrow 0$ olduqda

$$P\{x < \xi < x + \Delta\} = p(x)\Delta + \alpha(\Delta),$$

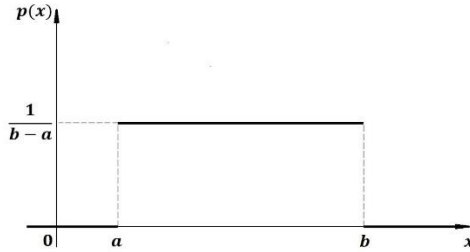
burada $\alpha(\Delta)$ sonsuz kiçik kəmiyyətdir. Bu bərabərlik onu göstərir ki, $p(x)$ sıxlıq funksiyasının qiyməti nə qədər böyükdürsə, ξ təsadüfi kəmiyyətinin verilmiş kiçik $(x, x + \Delta)$ intervalından qiymət alma ehtimalı bir o qədər böyükdür.

Bəzi mütləq kəsilməz paylanmaları verək.

1. $[a, b]$ parçasında müntəzəm paylanma. Bu paylanmanın sıxlıq funksiyası isə aşağıdakı kimidir:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

$[a, b]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin paylanması sıklıq funksiyasının qrafiki aşağıdakı şəkildədir:



Şəkil 3. Müntəzəm paylanmanın sıklıq funksiyası.

Aydındır ki, $p(x) \geq 0$ və

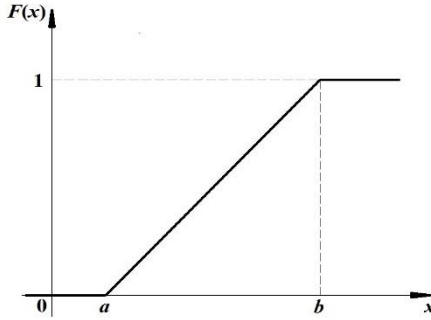
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$

Doğrudan da,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx &= \int_{-\infty}^a p(x) dx + \int_a^b p(x) dx + \int_b^{+\infty} p(x) dx = \\ &= \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = 1. \end{aligned}$$

$[a, b]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin paylama funksiyası və onun qrafiki isə aşağıdakı kimidir:

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq b, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b, \\ 0, & x < a. \end{cases}$$



Şəkil 4. Müntəzəm paylanma funksiyası.

Misal 1. Avtobus dayanacağına saat 10:00-da gəldiyimizi fərz edək. Məlumdur ki, avtobusun dayanacağına gəlməsi anını saatın dəqiqələri ilə ifadə edən ξ təsadüfi kəmiyyəti 10:00 ilə 10:30 arasında müntəzəm qanunla paylanmışdır. Aşağıdakı hadisələrin ehtimalını tapın:

- Avtobusu gözləmə müddətinin 10 dəqiqədən çox olması;
- Əgər avtobus saat 10:15-ə qədər hələ gəlməmişdirsə, bu halda onun ən azı 10 dəqiqə sonra gəlməsi.

Həlli. a) Şərtə görə ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 30, \\ \frac{x}{30}, & 0 \leq x < 30, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Bunu nəzərə alsaq,

$$P\{\xi > 10\} = 1 - P\{\xi \leq 10\} = 1 - F(10) = 1 - \frac{10}{30} \approx 0,667.$$

b) Axtarılan ehtimalı tapmaq üçün şərti ehtimalın tərifindən istifadə edək:

$$P\{\xi > 25 | \xi > 15\} = \frac{P(\{\xi > 25\} \cap \{\xi > 15\})}{P\{\xi > 15\}} = \frac{P\{\xi > 25\}}{P\{\xi > 15\}} =$$

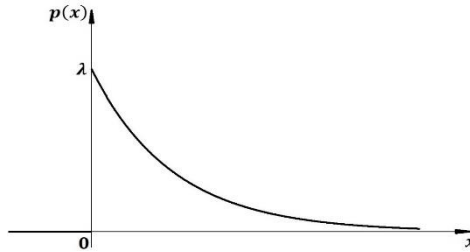
$$= \frac{1 - P\{\xi \leq 25\}}{1 - P\{\xi \leq 15\}} = \frac{1 - F(25)}{1 - F(15)} = \frac{1 - \frac{25}{30}}{1 - \frac{15}{30}} = \frac{1}{3} \approx 0.333.$$

2. Üstlü (eksponensial) paylanma. Sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

burada $\lambda > 0$ paylanmanın parametridir.

Üstlü paylanmanın sıxlıq funksiyasının qrafiki aşağıdakı kimidir:



Şəkil 5. Üstlü paylanmanın sıxlıq funksiyası.

Aydındırki, $p(x) \geq 0$ və

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$

Doğrudan da,

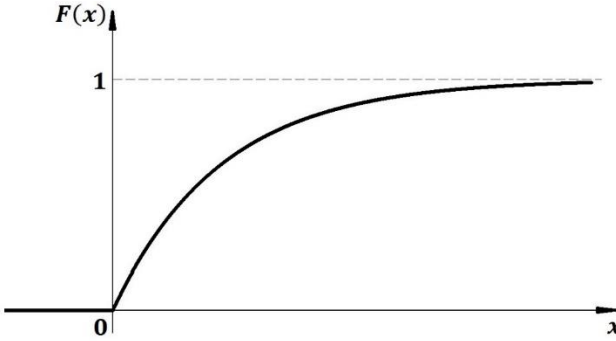
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \int_{-\infty}^0 p(x) dx + \int_0^{+\infty} p(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{\lambda}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^A \right) = 1.$$

Göstərmək olar ki, üstlü paylanmanın paylanma funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Bu funksiyanın qrafiki aşağıdakı kimidir:



Şəkil 6. Üstlü paylanma funksiyası.

Üstlü paylanma **keçmişin unudulması** xassəsi adlanan aşağıdakı xassəni ödəyir:

$$P\{\xi > s + t | \xi > t\} = P\{\xi > s\}.$$

Doğrudan da, şərti ehtimalın tərifindən istifadə etsək və $\{\xi > s + t, \xi > t\} = \{\xi > s + t\}$ olmasını nəzərə alsaq,

$$\begin{aligned} P\{\xi > s + t | \xi > t\} &= \frac{P\{\xi > s + t, \xi > t\}}{P\{\xi > t\}} = \\ &= \frac{P\{\xi > s + t\}}{P\{\xi > t\}} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

olduğu əldə edilir. Üstlü paylanma üçün isə $P\{\xi > s\} = e^{-\lambda s}$ -dir. Beləliklə, üstlü paylanmanın keçmişin unudulması xassəsini ödədiyi göstərildi.

Qeyd edək ki, keçmişin unudulması xassəsini diskret paylanmalardan yalnız həndəsi paylanma ödəyir.

Üstlü paylanma ehtiyatların idarə olunması nəzəriyyəsinə, sığorta nəzəriyyəsinə, kütləvi xidmət nəzəriyyəsinə və s. tətbiq olunur.

Qeyd edək ki, üstlü paylanma həm də Puasson paylanması ilə bağlıdır. Baş vermə ehtimalı kiçik olan hadisələri bəzən nadir adlandırmaq olar. Əgər ξ təsadüfi kəmiyyəti iki nadir hadisə arasında olan zamanı ifadə edirsə, bu təsadüfi kəmiyyət $\lambda > 0$ parametrlı üstlü paylanmaya malik olur.

3. İkitərəfli üstlü paylanma (Laplas paylanması).

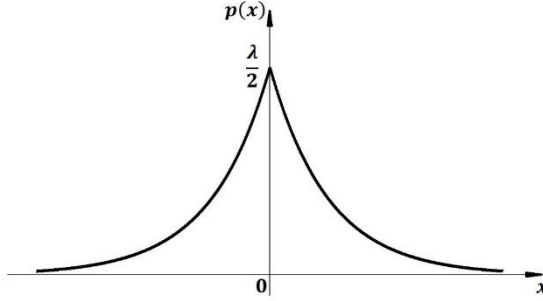
Paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad \lambda > 0$$

kimi verilən təsadüfi kəmiyyətə (α, λ) parametrlı ikitərəfli üstlü paylanma qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyət deyilir.

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} dx = 1.$$



Şəkil 7. İkitərəfli üstlü paylanmanın sıxlıq funksiyası.

Göstərmək olar ki, ikitərəfli üstlü paylanmanın paylanma funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda x}, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

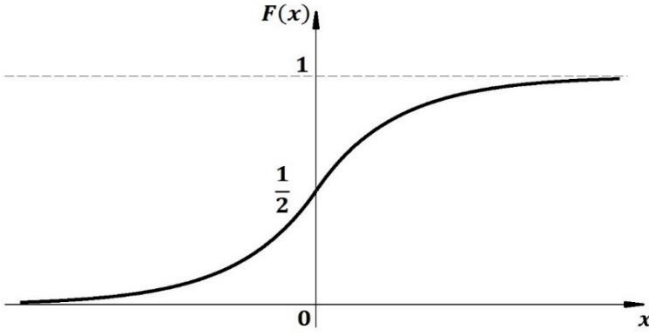
Doğrudan da, $x < 0$ olduqda

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{\lambda}{2} e^{\lambda t} dt = \frac{1}{2} e^{\lambda t} \Big|_{-\infty}^x = \frac{1}{2} e^{\lambda x},$$

$x \geq 0$ olduqda isə

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} dt = 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}.$$

İkitərəfli üstlü paylanma funksiyasının qrafiki aşağıdakı kimidir:



Şəkil 8. İkitərəfli üstlü paylanma funksiyası.

4. Qamma paylanma. Sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

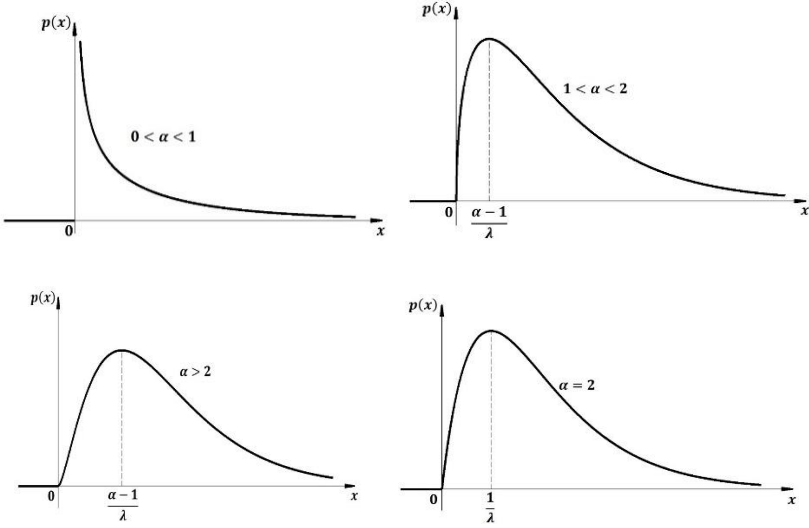
olan təsadüfi kəmiyyətə (α, λ) , $\alpha > 0, \lambda > 0$ parametrlı qamma paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyət deyilir.

Burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$, $\alpha > 0$ funksiyası Eylerin qamma funksiyasıdır və məlumdur ki,

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \quad \Gamma(1) = \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$\alpha = n \in N$ olduqda $\Gamma(n + 1) = n!$ olur və qamma paylanmadan Erlanq paylanmalar sinfi alınır. Qeyd edək ki, $\alpha = 1$ olduqda üstlü paylanma alınır.

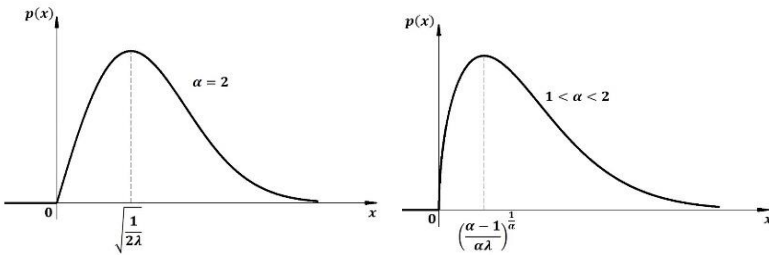
α parametrlinin müxtəlif qiymətləri üçün qamma paylanmanın sıxlıq funksiyasının qrafiki aşağıdakı kimidir:

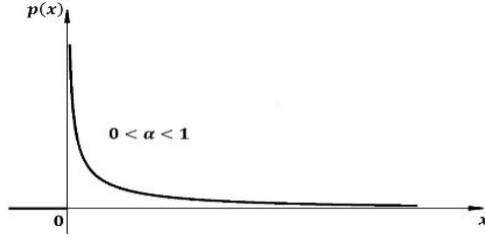


Şəkil 9. Qamma paylanmanın sıxlıq funksiyası

6. Veybul paylanması. (α, λ) parametrlı Veybul paylanmasının sıxlıq funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$p(x) = \alpha \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha}, \quad x \geq 0, \alpha > 0, \lambda > 0.$$





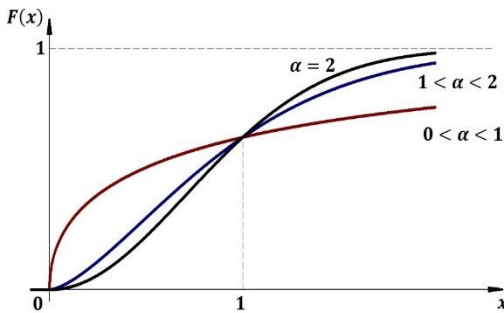
Şəkil 10. Veybul paylanmasının sıxlıq funksiyası

Veybul paylanmasının paylanma funksiyası isə aşağıdakı şəkildədir:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x^\alpha}, \alpha > 0, \lambda > 0.$$

Qeyd edək ki, $\alpha = 1$ götürsək, Veybul paylanması üstlü paylanmaya çevrilir.

Veybul paylanması etibarlılıq və sığorta nəzəriyyəsində geniş istifadə olunur. Yuxarıda təsvir edildiyi kimi, üstlü paylanma, adətən, hər hansı qurğunun imtina ehtimalının sabit olduğu halda imtinaya qədər olan müddətin qiymətləndirilməsi üçün bir model kimi istifadə olunur. Əgər imtina ehtimalı zamanla dəyişirsə, bu halda Veybul paylanması istifadə edilir.



Şəkil 11. Veybul paylama funksiyası

Əgər ξ təsadüfi kəmiyyəti $\lambda > 0$ parametrlı üstlü paylanmaya malik olarsa, $\sqrt{\xi}$ təsadüfi kəmiyyəti $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$ parametrlı Reley paylanmasına malik olur:

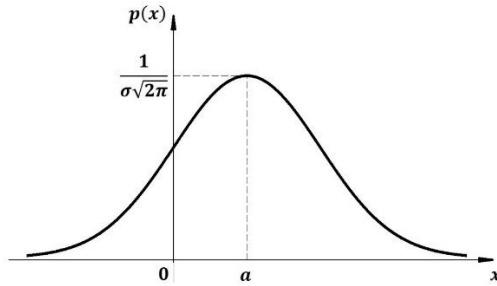
$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right); x \geq 0, \sigma > 0.$$

Göründüyü kimi, Reley paylanması Veybul paylanmasının xüsusi halıdır.

7. Normal paylanma. Paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x, a \in R, \quad \sigma > 0$$

olan ξ təsadüfi kəmiyyətinə (a, σ) parametrlı **normal qanunla** paylanmış təsadüfi kəmiyyət deyilir. Normal paylanma Qauss paylanması da adlanır. Normal paylanmanın sıxlıq funksiyasının qrafiki Qauss əyrisi adlanır və aşağıdakı kimidir:



Şəkil 12. Normal paylanmanın sıxlıq funksiyası (Qauss əyrisi)

Aydındır ki, $p(x) \geq 0$.

Göstərək ki,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$

Doğrudan da,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Sonuncu integralda dəyişəni əvəz edək:

$$\frac{x-a}{\sigma} = t \Rightarrow x = \sigma t + a \Rightarrow dx = \sigma dt.$$

Bunları nəzərə alsaq

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1,$$

burada $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ integralı Eyler-Puasson integralıdır və qiyməti $\sqrt{2\pi}$ -yə bərabərdir.

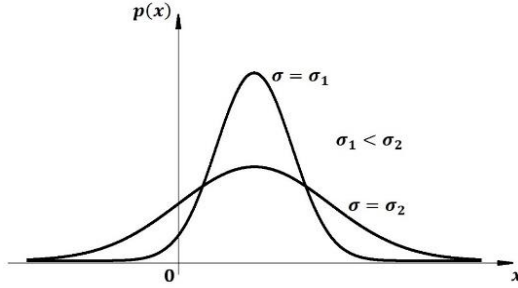
Qeyd edək ki,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} p(x) = 0.$$

İndi isə normal paylanmanın parametrlrin rolunu araşdıraq.

1. a parametri sıxlıq funksiyasının qrafikinə (Qauss əyrisinin) koordinat sistemindəki yerini müəyyən edir: a parametri artırsa, Gauss əyrisi sağa, a parametri azalırsa, formasını saxlayaraq sola doğru hərəkət edir.

2. σ parametri Gauss əyrisinin formasını müəyyən edir. Əgər σ artarsa, Gauss əyrisi absis oxuna sıxılır, əks halda Gauss əyrisi yuxarıya doğru dartılır.



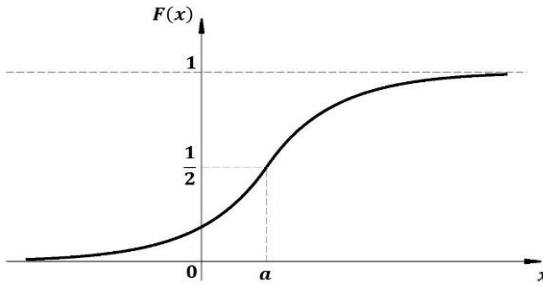
Şəkil 13. σ parametrinə görə Qauss əyrisinin forması

Əgər $a = 0$ və $\sigma = 1$ olarsa, standart normal paylanma adlanır.

Normal paylanmanın paylanma funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$F_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Bu funksiyanın qrafiki aşağıdakı kimidir:



Şəkil 14. Normal paylanma funksiyası

$F_{a,\sigma}(x)$ funksiyasını standart normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası olan

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

funksiyası ilə ifadə edək:

$$\begin{aligned} F_{a,\sigma}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Qeyd edək ki,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} F_{a,\sigma}(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{2}, & x = a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

Doğrudan da,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} F_{a,\sigma}(x) = \begin{cases} \Phi(-\infty), & x < a, \\ \Phi(0), & x = a, \\ \Phi(\infty), & x > a. \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{2}, & x = a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

Normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin $[x_1, x_2]$ intervalından qiymət alması ehtimalını $\Phi(x)$ funksiyası ilə ifadə etmək olar:

$$\begin{aligned} P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} &= F_{a,\sigma}(x_2) - F_{a,\sigma}(x_1) = \\ &= \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

İndi isə normal paylanma üçün **“üç siqma” qaydasını**

verək. Əgər ξ təsadüfi kəmiyyəti normal qanunla paylanmışdırsa, onda

$$P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Sonuncu integralda $t = \frac{x-a}{\sigma}$ dəyişəni daxil etsək,

$$\begin{aligned} P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\frac{x_1-a}{\sigma}}^{\frac{x_2-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\frac{x_2-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\frac{x_1-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ &= \Phi_0\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

burada $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – Laplas funksiyasıdır.

Əgər $x_1 = a - 3\sigma$, $x_2 = a + 3\sigma$ götürsək,

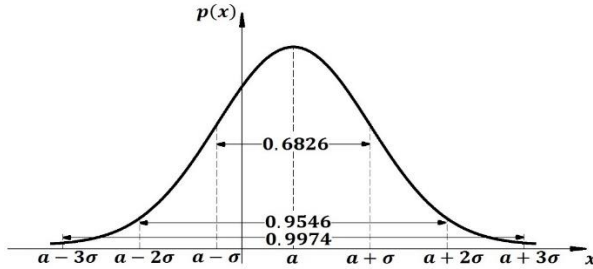
$$\begin{aligned} P\{a - 3\sigma \leq \xi \leq a + 3\sigma\} &= \\ &= P\{|\xi - a| \leq 3\sigma\} = \Phi_0(3) - \Phi_0(-3). \end{aligned}$$

Laplas funksiyasının tək olduğunu və $\Phi_0(3) \approx 0,4985$ qiymətini nəzərə alsaq,

$$P\{a - 3\sigma \leq \xi \leq a + 3\sigma\} = \\ = \Phi_0(3) - \Phi_0(-3) = 2\Phi_0(3) \approx 0,997$$

olduğunu əldə edərək.

Beləliklə, normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət $[a - 3\sigma, a + 3\sigma]$ parçasından kənarda qiymət alması ehtimalı çox kiçikdir, yəni təqribən 0,003-ə bərabərdir.



Şəkil 15. Normal paylanma üçün “üç siqma” qanunu

6. Maksvel paylanması. Paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{x^2}{\alpha^3} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$$

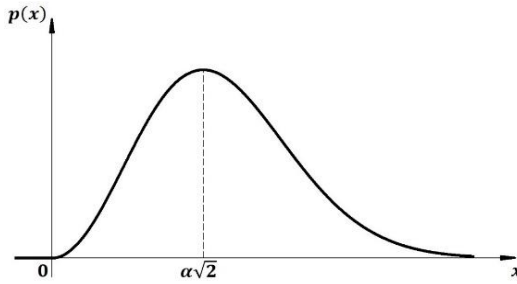
olan mənfi olmayan qiymətlər alan ξ təsadüfi kəmiyyətinə Maksvell qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyət deyilir. Burada $\alpha > 0$ paylanmanın parametridir.

Qeyd edək ki, Maksvel paylanması fizikada meydana gəlmişdir. Bu paylanma ideal qaz molekullarının hərəkət sürətinin paylanmasını ifadə edir.

Maksvel paylanması normal paylanma ilə sıx bağlıdır. Əgər ξ_1, ξ_2 və ξ_3 asılı olmayan və hər biri $(0, \sigma^2)$ parametrlili

normal paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlədirsə, bu halda $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ təsadüfi kəmiyyəti Maksvel paylanmasına malik olur.

Beləliklə, Maksvel paylanması təsadüfi vektorun uzunluğunun paylanması kimi qəbul edilə bilər, belə ki, bu təsadüfi vektorun koordinatları üçölçülü dekart koordinat sistemində asılı olmayan və hər biri $(0, \sigma^2)$ parametrlili normal paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlərdir.



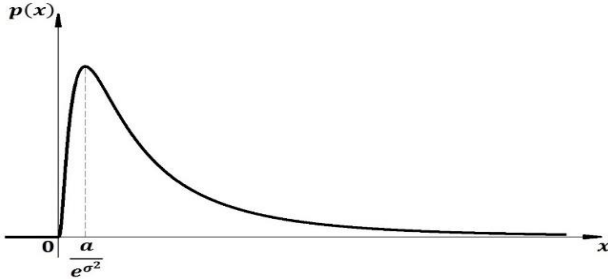
Şəkil 16. Maksvel paylanmasının sıxlıq funksiyası

7. Loqarifmik normal paylanma. Paylanma sıxlığı funksiyası

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi} x} e^{-\frac{(\ln x - \ln a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0, \quad \sigma > 0$$

şəklində olan ξ təsadüfi kəmiyyətinə **loqarifmik normal qanunla** paylanmış təsadüfi kəmiyyət deyilir. Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$



Şəkil 17. Loqarifmik normal paylanmanın sıxlıq funksiyası

Doğrudan da, dəyişəni əvəz etməklə,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \ln a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

olduğunu əldə edərək.

Loqarifmik normal paylanma funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$F(x) = P\{\xi \leq x\} = P\{\ln \xi \leq \ln x\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln x} e^{-\frac{(t - \ln a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Qeyd edək ki, $\ln \xi$ təsadüfi kəmiyyəti normal qanunla paylanmışdırsa, bu halda ξ təsadüfi kəmiyyəti loqarifmik normal paylanmaya malik olur. Loqarifmik normal paylanma iqtisadiyyatda, xüsusən, gəlirlər və bank hesablarının və s. paylanmasını ifadə edir. Loqarifmik normal paylanma səhm qiymətlərinin və digər aktivlərin ehtimal paylanmasını modelləşdirmək üçün geniş istifadə olunur.

Məsələn, maliyyə riyaziyyatından məlum olan Black-Scholes-Merton opsiyon qiyməti modelində loqnormal paylanma istifadə olunur, belə ki, aktivin qiymətinin loqnormal qanun

ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyət olduğu göstərilmişdir.

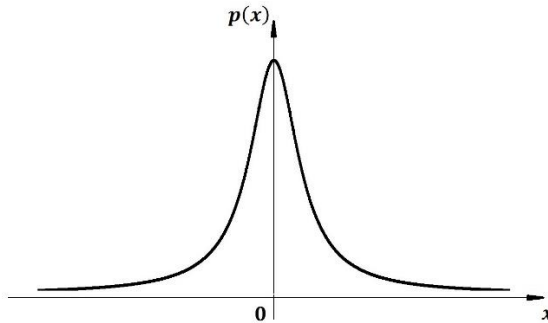
Qeyd edək ki, loqarifmik normal paylanma təsadüfi kəmiyyətlərin hasili nəzəriyyəsinə normal paylanmanın təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin tədqiqindəki rolu oynayır. Məlumdur ki, müəyyən şərtlər daxilində n sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətin hasilinin paylanması $n \rightarrow \infty$ olduqda loqarifmik normal paylanmaya yaxınlaşır.

8. Koşi paylanması. Paylanmanın sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

olan ξ təsadüfi kəmiyyətinə **Koşi qanunu** ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyət deyilir. Aydındır ki, $p(x) \geq 0$. Asanlıqla görmək olar ki,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$



Şəkil 18. Koşi paylanmasının sıxlıq funksiyası

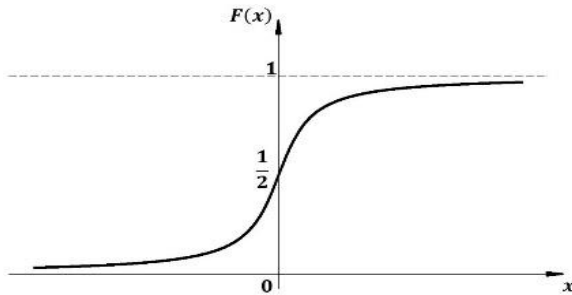
Doğrudan da,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} (-a)) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1.\end{aligned}$$

İndi isə Koşi paylanması paylanma funksiyasını tapaq:

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^x p(u)du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^x \frac{du}{1+u^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} (-a)) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Koşi paylanması paylanma funksiyasının qrafiki aşağıdakı kimidir:



Şəkil 19. Koşi paylanma funksiyası

Qeyd edək ki, Koşi paylanması sıxlıq funksiyasının “qolları” sıfıra zəif yaxınlaşır (üstlü və normal paylanma ilə

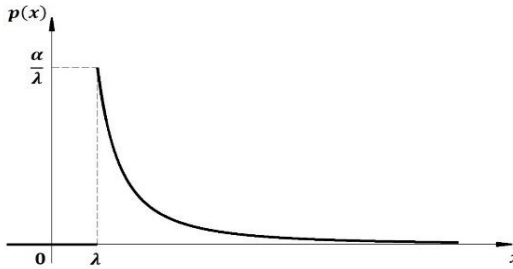
müqayisə edin). Belə paylanmalar elmi ədəbiyyatda ağır qalıqlı paylanmalar adlanır.

Qeyd edək ki, Koşi paylanması Lorens paylanması da adlanır. Bu paylanma fizikada müntəzəm genişlənən spektr xətlərinin paylanmasını ifadə edir. Koşi paylanması həmçinin xətti rəqs sistemlərində rezonans tezliklərinin ətrafında amplitud-tezlik xarakteristikaları təsvir edir.

9. Pareto paylanması. (α, λ) parametrlı Pareto paylanmasının sıxlıq funksiyası:

$$p(x) = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{x} \right)^{\alpha+1}, \quad \alpha > 0, \quad x > \lambda > 0.$$

Bu funksiyanın qrafiki aşağıdakı kimidir:



Şəkil 20. Pareto paylanmasının sıxlıq funksiyası

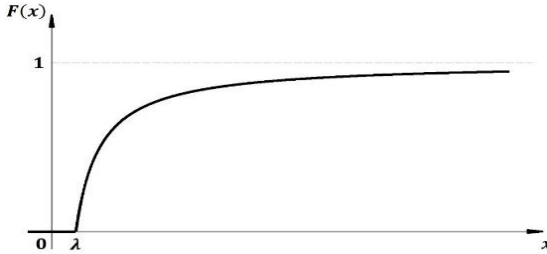
Asanlıqla göstərmək olar ki, Pareto qanununun paylanma funksiyası

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{x} \right)^{\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad x > \lambda > 0.$$

Doğrudan da,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \frac{\alpha}{\lambda} \int_{\lambda}^x \left(\frac{\lambda}{t} \right)^{\alpha+1} dt =$$

$$= -\lambda^\alpha (x^{-\alpha} - \lambda^{-\alpha}) = 1 - \left(\frac{\lambda}{x}\right)^\alpha.$$



Şəkil 21. Pareto paylanma funksiyası

Bu paylanma qanunu italyan alimi V.Paretonun gəlirlərin paylanması ilə bağlı elmi işindən başlayaraq (1897) iqtisadi statistikanın müxtəlif məsələləri ilə bağlı geniş yayılmışdır. Hesab olunurdu ki, Pareto paylanması müəyyən səviyyəni aşmış gəlirlərin paylanmasını yaxşı təsvir edir. Məsələn, vergi orqanlarını illik gəlirlərinin paylanması maraqlandırır. Bu və bu kimi paylanmalar təxminən Pareto paylanması ilə üst-üstə düşür. Pareto paylanması həmçinin sığorta nəzəriyyəsində də istifadə olunur.

10.Beta paylanması. Paylanma sıxlığı funksiyası

$$p(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

olan ξ təsadüfi kəmiyyətinə (α, β) parametrlili **beta qanunu** ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyət deyilir, burada $B(\alpha, \beta)$ – beta funksiyası adlanır. Məlumdur ki,

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = B(\alpha, \beta).$$

Buna görə də

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = 1$$

münasibəti ödənilir.

Xüsusi halda, $\alpha = 1$ və $\beta = 1$ olduqda beta paylanma $[0,1]$ parçasında müntəzəm paylanmaya çevrilir.

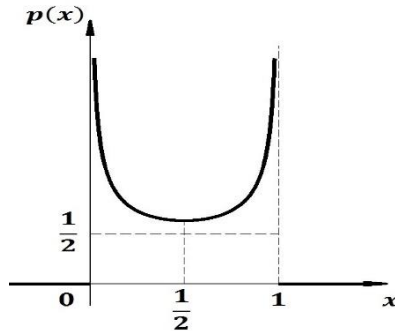
Xüsusi halda, $(1-\alpha, \alpha)$ parametrlili beta paylanma **arksinus paylanmasına** çevrilir və onun sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} x^{-\alpha} (1-x)^{\alpha-1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Xüsusi halda $\alpha = \frac{1}{2}$ olduqda isə arksinus paylanmasının sıxlıq funksiyası aşağıdakı kimi olur:

$$p(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Bu funksiyanın qrafiki aşağıdakı kimidir:



Şəkil 22. $\alpha = \frac{1}{2}$ parametrlili arksinus paylanmasının sıxlıq funksiyası

$\alpha = \frac{1}{2}$ olduqda isə arksinus paylanmasının uyğun

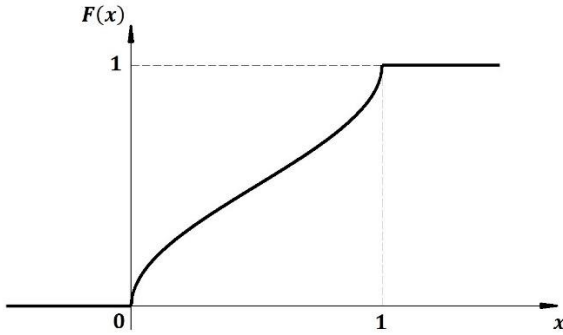
paylanma funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}.$$

Doğrudan da,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x p(t) dt = \int_0^x \frac{1}{\pi \sqrt{t(1-t)}} dt = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\pi \sqrt{1-u^2}} du = \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin u \Big|_0^{\sqrt{x}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Bu funksiyanın qrafiki aşağıdakı kimidir:



Şəkil 23. $\alpha = \frac{1}{2}$ parametrlı arksinus paylanma funksiyası

Qeyd edək ki, arksinus paylanması təsadüfi dolaşmalarla bağlı meydana çıxır. Aşağıdakı teoremi isbatsız olaraq verək (bax, məsələn, [27], s.100):

Teorem (Arksinus qanunu). Simmetrik Bernulli dolaşmasının qrafikinin absis oxundan yuxarıda olduğu zaman payı olan $\frac{T_n}{n}$ -nin limit paylanması hər bir $0 \leq x \leq 1$ üçün aşağıdakı kimidir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{T_n}{n} \leq x \right\} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}.$$

Bu qanun təsadüfi dolaşmalardakı fluktuasiyaların təbiətini izah edir. Aşağıdakı misala baxaq.

Misal. Fərz edək ki, iki oyuncu simmetrik metal pul atır və gerb üzü düşdükdə I oyuncu, rəqəm üzü düşdükdə isə II oyuncu 1 manat qazanır. Başqa sözlə, bu oyuna sıfır vəziyyətindən başlayan və eyni ehtimalla sağa və ya sola bir addım atan hissəciyin simmetrik təsadüfi dolaşması kimi də baxa bilərik. Arksinus paylanması sıklıq funksiyasının qrafikindən çox maraqlı nəticə əldə etmək olur. Qrafikdən görünür ki, (bax, şəkil 22) bu sıklıq funksiyası $\frac{1}{2}$ nöqtəsində minimum qiymətini alır. Belə çıxır ki, ilk baxışda ədalətli kimi görünən oyun heç də ədalətli deyilmiş. Belə ki, oyunçuların hər ikisinin bərabər zaman müddətində uduşda olması ehtimalı ən az ehtimallıdır. Əksinə, nə qədər paradoksal olsa da, oyunçulardan birinin hiss olunacaq dərəcədə öndə olduğu oyunlar daha böyük ehtimallıdır.

I oyunçunun öndə (trayektoriyaların 0-dan yuxarıda, yəni müsbət hissədə) olduğu, II oyunçunun isə geridə (trayektoriyaların 0-dan aşağıda, yəni mənfi hissədə) olduğu atışların sayına baxaq. İlk baxışda gözləmək olardı ki, bu saylar təqribən eyni olmalıdır. Başqa sözlə, düşünmək olardı ki, qrafikin absis oxundan yuxarıda olduğu zaman payı olan $\frac{T_n}{n}$ -nin $\frac{1}{2}$ -ə yaxın olması ehtimalı ən böyükdür. Lakin bu belə deyildir, əksinədir. Bu ehtimal ən kiçikdir. Gözlənilməyinin əksinə, $\frac{T_n}{n}$ nisbətinin 0 və n -ə yaxın qiymətlər alması ehtimalı ən böyükdür. (bax, [27], s.100).

Simmetrik metal pulun 10000 dəfə atılması eksperimenti zamanı oyunçulardan hər hansı biri 0,1 ehtimalı ilə ən azı 9930 atışda, 0,2 ehtimalı ilə isə ən azı 9750 atışda lider olacaqdır.

İlk baxışda elə görünə bilər ki, bu vəziyyət böyük ədədlər qanunu ilə ziddiyyət təşkil edir (bax, §2.4). Lakin bu belə deyildir. Böyük ədədlər qanunu sınaqlar sayı qeyri-məhdud artdıqda doğrudur və ayrıca götürülmüş hər bir seriyada nə baş verdiyi haqqında heç nə demir. Məhz arksinus qanunu göstərir ki, sonsuz sınaqlar seriyasının konkret götürülmüş məhdud hissəsində heç-heçə olması az ehtimallıdır.

Beləliklə, paradoksal bir vəziyyət yaranır. Simmetrik Bernulli təsadüfi dolaşmasında sırf ardıcıl qayıtmaları arasında olan dalğalar çox uzun ola bilər. Bu isə o deməkdir ki, liderliyin tez-tez dəyişməsi ehtimalı çox azdır. Qəribədir ki, 10000 atış zamanı liderliyin ən çoxu 8 dəfə dəyişməsi ehtimalı 0,14-dən böyük, 78 dəfədən çox dəyişməsi ehtimalı isə təqribən 0,12-yə bərabərdir.

İndi isə mütləq kəsilməz paylanmalarla bağlı məsələ həlli nümunələri verək.

Məsələ 1. ξ təsadüfi kəmiyyəti α parametrlı üstlü qanunla paylanmışdır:

$$P\{\xi \leq x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$\eta = \{\xi\}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyasını tapın (burada $\{\xi\}$ ilə ξ təsadüfi kəmiyyətinin kəsir hissəsi işarə olunmuşdur, $\{\xi\} = \xi - [\xi]$).

Həlli. Tam ehtimal düsturunu tətbiq etsək və $\{[\xi] = k\} =$

$\{k \leq \xi < k + 1\}$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\begin{aligned}
 F_{\eta}(x) &= P\{\eta \leq x\} = P\{\{\xi\} \leq x\} = P\{\xi - [\xi] \leq x\} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{\xi - [\xi] \leq x, [\xi] = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{\xi - k \leq x, [\xi] = k\} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{\xi - k \leq x, k \leq \xi < k + 1\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{k \leq \xi \leq k + x\} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} F_{\xi}(x + k) - F_{\xi}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k} (1 - e^{-\alpha x}) = \frac{1 - e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha}}.
 \end{aligned}$$

Buradan isə paylanma sıxlığı funksiyasını tapa bilərik:

$$p_{\eta}(x) = F'_{\eta}(x) = \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha}}.$$

Məsələ 2. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı funksiyası

$$p(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} \cdot (x - 1)^2; & x \in [0, 2] \\ 0; & x \notin [0, 2] \end{cases}$$

a) $F(x) = ?$

b) $P\{-1 \leq \xi \leq 1,5\}$ ehtimalını tapın.

Həlli. a) Uyğun paylanma funksiyasını tapaq:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

ayrılışından istifadə edək.

1) $x < 0$ olduqda $F(x) = 0$,

2) $0 \leq x < 2$ olduqda

$$F(x) = \int_0^x \frac{3(t-1)^2}{2} dt = \frac{(x-1)^3}{2} + \frac{1}{2}.$$

b) $P\{-1 \leq \xi \leq 1,5\} = F(1,5) - F(-1) = \frac{9}{16}.$

Məsələ 3. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı funksiyası

$$p(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

verilmişdir. Bu təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasını tapın.

Həlli. $x < 1$ olduqda

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = 0$$

$x \geq 1$ olduqda

$$F(x) = 0 + \int_1^x \frac{3}{t^4} dt = 1 - \frac{1}{x^3}.$$

Beləliklə, axtarılan paylanma funksiyası

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^3}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

Məsələ 4. $[0, 1]$ parçasında təsadüfi ξ nöqtəsi götürülür. $[0, \xi]$ və $[\xi, 1]$ parçasının kiçiyinin uzunluğunu η ilə, böyüyünün uzunluğunu isə $\zeta = 1 - \eta$ işarə edək:
 $\eta = \min(\xi; 1 - \xi), \quad \zeta = \max(\xi; 1 - \xi).$

İsbat edin ki, η və ζ təsadüfi kəmiyyətləri uyğun olaraq $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ və $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmışlar.

Həlli. $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ olduqda

$$\begin{aligned} F_{\eta}(x) &= P\{\eta \leq x\} = P\{\min(\xi, 1 - \xi) \leq x\} = \\ &= P\{\xi \leq x\} + P\{1 - \xi \leq x\} = \\ &= P\{\xi \leq x\} + P\{\xi > 1 - x\} = \\ &= x + (1 - (1 - x)) = 2x. \end{aligned}$$

Beləliklə, η təsadüfi kəmiyyəti $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ parçalarında müntəzəm qanunla paylanmışdır və

$$F_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

ζ təsadüfi kəmiyyətinin $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ parçalarında müntəzəm qanunla paylandığı bənzər şəkildə isbat olunur.

Məsələ 5. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı funksiyası verilmişdir.

$$p(x) = \frac{c}{e^{-x} + e^x}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$P\{\xi \leq 1\}$ ehtimalını tapın.

Həlli. Əvvəlcə c sabitini tapaq.

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{e^{-x} + e^x} dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cd(e^x)}{1 + e^{2x}} = \int_0^{\infty} \frac{cdt}{1 + t^2} = c \cdot \arctgt|_0^{\infty} = \frac{c\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Buradan $c = \frac{2}{\pi}$.

İndi isə paylanma funksiyasını tapaq:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x)dx = \int_{-\infty}^x \frac{2}{\pi(e^{-t} + e^t)} dt = \frac{2}{\pi} \arctge^x.$$

Beləliklə,

$$P\{\xi \leq 1\} = F(1) = \frac{2}{\pi} \arctge.$$

Məsələ 6. Aparılmış tədqiqatlar göstərir ki, əhalinin verilmiş bankdakı əmanətlərinin miqdarı $a = 530$ və $\sigma^2 = 0.64$ parametrlərinə malik loqarifmik normal qanunla paylanmış ξ təsadüfi kəmiyyəti ilə təsvir olunur. Əmanətlərinin miqdarı 1000 manatdan böyük olan əmanətçilərin payını tapın.

Həlli. Əmanətlərinin miqdarı 1000 manatdan kiçik olmayan əmanətçilərin payı

$$P\{\xi > 1000\} = 1 - P\{\xi \leq 1000\} = 1 - F(1000)$$

olar. ξ təsadüfi kəmiyyəti loqarifmik normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyəti olduğu üçün $\ln\xi$ təsadüfi kəmiy-

yəti normal qanunla paylanmaya malik olur. Buna görə də

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{\ln x - \ln a}{\sigma}\right)$$

olar. Burada $\Phi_0(x)$ – Laplas funksiyasıdır.

Beləliklə,

$$\begin{aligned} F(1000) &= \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{\ln 1000 - \ln 530}{\sqrt{0,64}}\right) = \\ &= \frac{1}{2} + \Phi(0,79) \approx 0,785 \end{aligned}$$

olduğunu əldə edərik. Burada Laplas funksiyasının qiymətlər cədvəlinə əsasən $\Phi_0(0,79) \approx 0,285$ nəzərə alınmışdır. Digər tərəfdən,

$$P\{\xi > 1000\} = 1 - F(1000) \approx 1 - 0,785 \approx 0,215.$$

Beləliklə, hər 1000 əmanətçidən təxminən 215-nin əmanətinin miqdarı 1000 manatdan çoxdur.

Məsələ 7. Fərz edək ki, hər hansı səhmin (qiymətli kağızın) t anındakı qiyməti $S(t)$ və $t + \Delta t$ anındakı qiyməti isə $S(t + \Delta t)$ -dir. Bu səhmin Δt zaman müddətində qiymətinin nisbi dəyişməsi $\xi \equiv \frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}$ hər bir qeyd olunmuş t üçün loqnormal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir. Riyazi gözləməsi $a = 45$ manat və kvadratik orta meyli $\sigma = 7$ manat olan $\ln \xi$ təsadüfi kəmiyyətinin 50-dən böyük qiymət alması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Şərtə görə ξ təsadüfi kəmiyyəti loqnormal paylanmaya malik olduğu üçün $\ln \xi$ təsadüfi kəmiyyəti normal

paylanmaya malik olar. Buna görə də Laplas funksiyasının qiymətlər cədvəlindən istifadə edərək axtarılan ehtimalı aşağıdakı kimi tapa bilərik:

$$\begin{aligned} P\{50 < \ln \xi < \infty\} &= \Phi_0(\infty) - \Phi_0\left(\frac{50 - 45}{7}\right) = \\ &= 0,5 - \Phi_0(0,71) = 0,5 - 0,2611 = 0,2389. \end{aligned}$$

Məsələ 8. Fərz edək ki, məsələ 8-dəki $\ln \xi$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi $a = 50$ manatdır. Əgər səhmin qiymətinin dəyişməsinin loqarifminin 45 manat ilə 55 manat arasında olması ehtimalı 0,7-yə bərabər olarsa, onun 60 manatdan az olmayacağı ehtimalını tapın.

Həlli. Şərtə görə ξ təsadüfi kəmiyyəti loqnormal paylanmaya malik olduğu üçün $\ln \xi$ təsadüfi kəmiyyəti normal paylanmaya malik olar. Buna görə də

$$0,7 = P\{45 \leq \ln \xi \leq 55\} = P\{|\ln \xi - 50| \leq 5\} = 2\Phi_0\left(\frac{5}{\sigma}\right).$$

Buradan

$$\Phi_0\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 0,35.$$

Laplas funksiyasının qiymətlər cədvəlinə əsasən

$$\frac{5}{\sigma} = 1,04.$$

Buradan $\sigma = 4,81$.

Beləliklə,

$$\begin{aligned} P\{\ln \xi \geq 60\} &= P\{60 \leq \ln \xi < \infty\} = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{60 - 50}{4,81}\right) = \\ &= 0,5 - \Phi_0(2,08) = 0,5 - 0,4812 = 0,0188. \end{aligned}$$

Məsələlər.

1. Bir düzgün oyun zərinin atılması eksperimentində müşahidə oluna bilən $A = \{\text{düşən rəqəmlər cüt olması}\}$ və $B = \{\text{düşən rəqəmlərin 3-ə bölünməsi}\}$ hadisələrinin indikatorlarını uyğun olaraq I_A və I_B ilə işarə edək.

a) I_A -nin paylanma qanununu;

b) I_B -nin paylanma qanununu;

c) $\xi = I_A + I_B$ təsadüfi kəmiyyətinin doğurduğu bölgünü və onun paylanma qanununu tapın.

Cavab: a) $P\{I_A = 1\} = 1/2$; b) $P\{I_A = 1\} = 1/3$;

c) $P\{\xi = 0\} = 1/3$; $P\{\xi = 1\} = 1/2$; $P\{\xi = 2\} = 1/6$.

2. 28 domino daşından təsadüfi qaydada biri seçilir. Bu daşın üzərində olan rəqəmlər cəmini ifadə edən ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu tapın.

Cavab: $P\{\xi = k\} = 1/28, k = 0, 1, 11, 12$;

$P\{\xi = k\} = \frac{1}{14}, k = 2, 3, 9, 10$;

$P\{\xi = k\} = 3/28, k = 4, 5, 7, 8$;

$P\{\xi = 6\} = 1/7$.

3. İsbat edin ki, $F(x)$ kəsilməz paylanma funksiyasıdırsa, bu halda ixtiyari n və k natural ədədləri üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^n(x) dF^k(x) = \frac{k}{(n+k)}.$$

4. ξ təsadüfi kəmiyyəti $[1,2]$ parçasında müntəzəm paylanmışdır. $P\{2 < \xi^2 < 5\}$ ehtimalını tapın.

Cavab: $2 - \sqrt{2}$.

5. ξ təsadüfi kəmiyyəti $[-1,3]$ parçasında müntəzəm paylanmışdır. $P\{\xi^2 \leq 2\}$ ehtimalını tapın.

Cavab: $(1 + \sqrt{2})/4$.

6. ξ təsadüfi kəmiyyəti $p_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$ sıxlıqlı Koşi paylanmasına malikdir. $\eta = \xi^2/(1 + \xi^2)$, $\zeta = 1/(1 + \xi^2)$ kəmiyyətlərinin paylanmasının sıxlığını tapın.

$$\text{Cavab: } p_{\eta}(x) = p_{\zeta}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x}}, 0 < x < 1.$$

7. Təsadüfi B nöqtəsi mərkəzi $A = (0, a)$ nöqtəsində olan $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ çevrəsində müntəzəm paylanmışdır. Təsadüfi $C = (\xi, 0)$ nöqtəsi isə A və B nöqtələrindən keçən düz xəttin absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsidir. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma və sıxlıq funksiyalarını tapın. (ξ paylanması Koşi paylanması adlanır.)

$$\text{Cavab: } \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x}{a}, \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2}, -\infty < x < \infty.$$

§3.4. Sinqulyar paylanma. Lebeq teoremi

Bundan əvvəlki paraqraflarda biz diskret və mütləq kəsilməz paylanmalarla tanış oldu. Lakin elə paylanma növü də vardır ki, o nə diskret paylanmalar sinfinə, nə də mütləq kəsilməz paylanmalar sinfinə daxil deyil. Belə paylanmalar sinqulyar paylanma adlanır. Bu paylanmaları xarakterizə etmək üçün artım nöqtəsi anlayışından istifadə olunur.

Tərif 1. Əgər $\forall \varepsilon > 0$ üçün $F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) > 0$ olarsa, onda x nöqtəsinə $F(x)$ -in artım nöqtəsi deyilir.

Aydındır ki, hər bir kəsilmə nöqtəsi artım nöqtəsidir, lakin funksiyanın kəsilməzlik nöqtəsi də artım nöqtəsi ola bilər. Məsələn, $[a, b]$ parçasında müntəzəm paylanma funksiyası üçün hər bir $x \in [a, b]$ artım nöqtəsidir.

Tərif 2. Paylanma funksiyası kəsilməz olan və bütün artım nöqtələri çoxluğunun Lebeq ölçüsü sıfıra bərabər olan

paylanmaya **sinqulyar paylanma** deyilir.

Başqa sözlə, sinqulyar paylanma funksiyası kəsilməz funksiyadır və onun sanki hər yerdə (Lebeq ölçüsünə görə) törəməsi sıfıra bərabərdir.

Sinqulyar paylanma funksiyasına misal olaraq Kantor funksiyasını göstərə bilərik. Bu funksiya aşağıdakı üsulla qurulur. $[0,1]$ parçasını 3 bərabər hissəyə bölək və

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

götürək. $F_1(x)$ funksiyası qalan nöqtələrdə xətti interpolasiyanın köməyiylə təyin olunur. Sonra $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ və $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ parçalarının hər birini yenidən 3 hissəyə bölərək aşağıdakı funksiyanı təyin edək:

$$F_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ \frac{1}{4}, & x \in \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \\ \frac{3}{4}, & x \in \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Bu prosesi davam etdirsək $F_n(x), n \geq 1$ funksiyalar ardıcılığı qurarıq ki, onun limiti azalmayan $F(x)$ funksiyası olar. Belə əldə edilmiş $F(x)$ funksiyasına **Kantor funksiyası** deyilir. Asanlıqla görmək mümkündür ki, $F(x)$ Kantor funksiyasının $\mathcal{N}$ artım nöqtələri çoxluğunun Lebeq ölçüsü

sıfıra bərabərdir. Doğrudan da, $F(x)$ funksiyasının qurulmasından görünür ki, onun sabit olduğu intervalların $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ və s. ümumi uzunluğu

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

olur. Buradan alırıq ki, $\mathcal{N}$ artım nöqtələr çoxluğunun λ Lebeq ölçüsü $\lambda(\mathcal{N}) = 0$ olur. Kantor funksiyasına uyğun ölçünü μ ilə işarə etsək, görürük ki, $\mu(\mathcal{N}) = 1$. Bu halda deyirlər ki, μ ölçüsü λ Lebeq ölçüsünə nəzərən sinqulyardır.

Lebeq teoremi. İxtiyari $F(x)$ paylanma funksiyasını

$$F(x) = a_1 F_d(x) + a_2 F_m(x) + a_3 F_s(x)$$

kimi təsvir etmək olar, burada $a_i \geq 0, a_1 + a_2 + a_3 = 1$, $F_d(x)$ – diskret paylanma funksiyası, $F_m(x)$ – mütləq kəsilməz paylanma funksiyası və $F_s(x)$ – sinqulyar paylanma funksiyasıdır.

§3.5. Təsadüfi vektorlar. Çoxölçülü paylanmalar

Fərz edək ki, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ fəzasında $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ təsadüfi kəmiyyətləri verilib. Onda ξ -yə n -ölçülü vektor deyəcəyik. Təsadüfi vektor ölçülən funksiyadır:

$$\xi: \Omega \rightarrow R^n$$

Aydındır ki,

$$\{\omega: \xi_1 \leq x_1, \xi_2 \leq x_2, \dots, \xi_n \leq x_n\} = \bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \leq x_i\} \in \mathcal{F}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
 P\{\xi_1 \leq x_1, \xi_2 \leq x_2, \dots, \xi_n \leq x_n\} = \\
 = F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)
 \end{aligned} \quad (1)$$

təyin olunur. $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyasına **n -ölçülü paylanma funksiyası** deyilir. Bu funksiyaya bəzən $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin **birgə paylanma funksiyası** da deyilir. Beləliklə, n -ölçülü paylanma funksiyası n dəyişənli funksiyadır.

Birölçülü halda olduğu kimi n -ölçülü paylanma funksiyasının da aşağıdakı xassələri var:

- 1) hər bir x_k , $k = \overline{1, n}$ dəyişəninə görə $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyası azalmayan funksiyadır;
- 2) hər bir x_k , $k = \overline{1, n}$ dəyişəninə görə bu funksiya sağdan kəsilməzdir;
- 3) argumentlərdən biri $-\infty$ olduqda paylanma 0 olur:

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_{i-1}, -\infty, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0,$$

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(+\infty, +\infty, \dots, +\infty) = 1.$$

- 4) n -ölçülü paylanma funksiyasından k -ölçülü paylanma funksiyası belə alınır:

$$\begin{aligned}
 F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_k, +\infty, +\infty, \dots, +\infty) = \\
 = F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k}(x_1, x_2, \dots, x_k).
 \end{aligned}$$

Xüsusi halda birölçülü paylanma üçün

$$F_{\xi_i}(x_i) = F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(+\infty, \dots, +\infty, x_i, +\infty, \dots, +\infty). \quad (2)$$

Qeyd edək ki, çoxölçülü paylanma verildikdə birölçülü bütün paylanmaları, yəni ξ vektorunun hər bir ξ_i koordinatının paylanmasını (2)-nin köməyiylə tapa bilərik. Lakin ξ_i koordinatının paylanma funksiyası məlum olduqda n -

ölçülü paylanma funksiyasını bərpa edə bilmərik.

$F_{\xi_1}(x)$ və $F_{\xi_2}(y)$ marginal paylanmalar adlanır.

Qeyd edək ki, ikiölçülü vektor üçün

$$\begin{aligned} P\{x_1 \leq \xi_1 \leq x_2, y_1 \leq \xi_2 \leq y_2\} = \\ = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \end{aligned}$$

3.5.1. Çoxölçülü diskret paylanma

ξ_1 və ξ_2 diskret təsadüfi kəmiyyətlər olsun, belə ki, ξ_1 təsadüfi kəmiyyəti $x_1, \dots, x_n \dots$ və ξ_2 isə $y_1, \dots, y_n \dots$ qiymətlərini alır.

$p_{ij} = P\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}, i, j = 1, 2, \dots$ ehtimallar ailəsinə ikiölçülü diskret paylanma deyilir, belə ki,

$$1. p_{ij} \geq 0$$

$$2. \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$$

olmalıdır.

İkiölçülü diskret paylanma məlum olduqda bu təsadüfi kəmiyyətlərin hər birinin paylanmasını əldə etmək olar:

$$p_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$$

burada $p_i = P\{\xi_1 = x_i\}$.

Analoji olaraq,

$$p_j = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$$

burada $p_j = P\{\xi_2 = y_j\}$.

Məsələ 1. ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması aşağıdakı kimi verilmişdir:

$$P\{\xi = 0, \eta = 0\} = 0,05; P\{\xi = 0, \eta = 1\} = 0,2;$$

$$P\{\xi = 1, \eta = 0\} = 0,5; P\{\xi = 1, \eta = 1\} = 0,25.$$

Bu təsadüfi kəmiyyətlərin hər birinin paylanma qanununu (marginal paylanmaları) tapın.

Həlli. Öncə ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu tapaq. Göründüyü kimi, ξ -nin mümkün qiymətləri 0 və 1-dir. Verilmiş birgə paylanma qanunundan istifadə edərək bu qiymətlərin ehtimallarını hesablayaq.

Aydındır ki,

$$\{\xi = 0\} = \{\xi = 0, \eta = 1\} \cup \{\xi = 0, \eta = 0\}.$$

Ehtimalın additivlik xassəsinə əsasən

$$P\{\xi = 0\} = P\{\xi = 0, \eta = 1\} +$$

$$+ P\{\xi = 0, \eta = 0\} = 0,2 + 0,05 = 0,25.$$

Eyni qayda ilə

$$P\{\xi = 1\} = P\{\xi = 1, \eta = 1\} +$$

$$+ P\{\xi = 1, \eta = 0\} = 0,25 + 0,5 = 0,75.$$

Beləliklə, ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması qanunu aşağıdakı cədvəl şəklindədir:

x_k	0	1
p_k	0,25	0,75

İndi isə η təsadüfi kəmiyyətinin paylanması qanunu tapaq:

$$P\{\eta = 0\} = P\{\xi = 1, \eta = 0\} + \\ + P\{\xi = 0, \eta = 0\} = 0,5 + 0,05 = 0,55.$$

Eyni qayda ilə

$$P\{\eta = 1\} = P\{\xi = 1, \eta = 1\} + \\ + P\{\xi = 0, \eta = 1\} = 0,25 + 0,2 = 0,45.$$

Beləliklə, η təsadüfi kəmiyyətinin paylanması qanunu aşağıdakı cədvəl şəklindədir:

x_k	0	1
p_k	0,55	0,45

Məsələ 2. ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması aşağıdakı kimi verilmişdir:

$$P\{\xi = 0, \eta = 0\} = 0,1; P\{\xi = 0, \eta = 1\} = 0,15; \\ P\{\xi = 1, \eta = 0\} = 0,45; P\{\xi = 1, \eta = 1\} = 0,3.$$

Bu təsadüfi kəmiyyətlərin hər birinin paylanma qanununu tapın.

Həlli. Öncə ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu tapaq.

$$P\{\xi = 0\} = P\{\xi = 0, \eta = 1\} + \\ + P\{\xi = 0, \eta = 0\} = 0,15 + 0,1 = 0,25.$$

Eyni qayda ilə

$$P\{\xi = 1\} = P\{\xi = 1, \eta = 1\} +$$

$$+ P\{\xi = 1, \eta = 0\} = 0,3 + 0,45 = 0,75.$$

Beləliklə, ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu aşağıdakı cədvəl şəklindədir:

x_k	0	1
p_k	0,25	0,75

İndi isə η təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu tapaq:

$$P\{\eta = 0\} = P\{\xi = 1, \eta = 0\} +$$

$$+ P\{\xi = 0, \eta = 0\} = 0,45 + 0,1 = 0,55;$$

Birgə paylanma qanununa əsasən

$$P\{\eta = 1\} = P\{\xi = 1, \eta = 1\} +$$

$$+ P\{\xi = 0, \eta = 1\} = 0,4 + 0,15 = 0,45.$$

Beləliklə, η təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu aşağıdakı cədvəl şəklindədir:

x_k	0	1
p_k	0,55	0,45

Məsələ 1 və 2-nin müqayisəsi göstərir ki, verilmiş tə-

sadüfi kəmiyyətlərin birgə paylanma qanunları müxtəlif olsa da, onların marginal paylanmaları eynidir.

3.5.2. Çoxölçülü mütləq kəsilməz paylanma.

Əgər n -ölçülü elə $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyası varsa ki, $\forall x_1, x_2, \dots, x_n$ həqiqi ədədləri üçün

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 dy_2 \dots dy_n \quad (3)$$

olarsa, onda deyirlər ki, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ vektoru R^n -də mütləq kəsilməz paylanmaya malikdir. $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyasına paylanmanın **sıxlıq funksiyası** deyilir.

n -ölçülü paylanma funksiyasının xassələrindən sıxlıq funksiyasının xassələrini alırıq:

$$1) p_{\xi}(x) \geq 0$$

$$2) \int_{R^n} p_{\xi}(x) dx = 1$$

$$3) p_{\xi}(x) = p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}.$$

Xüsusi halda $n = 2$ olarsa,

$$p_{\xi_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} p_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) dx_2.$$

Misal 1. ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanma sıxlığı funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$p_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 6(1 - x - y), & x > 0, y > 0, x + y < 1 \\ 0, & \text{qalan hallarda} \end{cases}.$$

$p_{\xi}(x)$ marginal paylanma sıxlığı funksiyasını və $F_{\xi}(x)$ paylanma funksiyasını tapın.

Həlli. $p_{\xi\eta}(x, y)$ verildikdə $p_{\xi}(x)$ tapmaq üçün

$$\begin{aligned} p_{\xi}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi\eta}(x, y) dy = \int_0^{1-x} p_{\xi\eta}(x, y) dy = \\ &= \int_0^{1-x} 6(1 - x - y) dy = 3(1 - x)^2. \end{aligned}$$

Misal 2. Şirkət məhsulunun əvvəlcədən danışılmış gün vaxtında çatdırılmasına qərantıya verir. Lakin bu həmin gün ərzində istənilən saat ola bilər. Müştərilərdən biri istəyir ki, məhsul sifariş verilən gün çatdırılsın. Fərz edək ki, ξ məhsulun çatdırılması zamanıdır ($0 \leq \xi \leq 1$). η isə sifarişin verilməsi zamanıdır ($0 \leq \eta \leq 1$). İş fəaliyyətindən məlumdur ki, məhsul eyni ehtimalla sutkanın istənilən anında daxil ola bilər. Aydındır ki, ξ və η kəmiyyətlərinin birgə paylanması

$$p(x, y) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

olar. Bu isə ikiölçülü müntəzəm paylanmadır.

a) Sifarişin verilməsi və məhsulun daxil olmasının günün birinci yarısında olması ehtimalını tapın;

b) Sifarişin məhsul daxil olduqdan sonra verilməsi ehtimalını tapın;

c) Sifarişin məhsul daxil olduqdan ən çoxu yarım sutka ərzində daxil olması ehtimalını tapın.

Həlli. a) Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$P\left\{0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}; 0 \leq \eta \leq \frac{1}{2}\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} dx dy = \frac{1}{4}.$$

b) Məsələnin şərtini nəzərə alsaq,

$$P\{0 \leq \xi \leq 1; \eta > \xi\} = \int_0^1 \int_0^x dx dy = \frac{1}{2}.$$

c) Bu hal tez korlanan məhsullar üçündür:

$$\begin{aligned} P\left\{0 \leq \xi \leq 1; \xi \leq \eta \leq \xi + \frac{1}{2} \leq 1\right\} &= \\ &= P\left\{0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}; \xi \leq \eta \leq \xi + \frac{1}{2}\right\} + \\ &+ P\left\{\frac{1}{2} < \xi \leq 1; \xi \leq \eta \leq 1\right\} = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_x^{\frac{1}{2} + x} dx dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_x^1 dx dy = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Məsələ 3. ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanma sıxlığı funksiyası verilmişdir:

$$p_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2e^{-(x_1^2+x_2^2)}, & x_1 > 0, x_2 > 0 \\ 0, & \text{qalan hallarda} \end{cases}$$

$\eta = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasını və sıxlıq funksiyasını tapın.

Həlli. Əvvəlcə η təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasını tapaq.

$$\begin{aligned} F_{\eta}(y) &= \int_0^y \int_0^{\sqrt{y^2 - x_1^2}} 4x_1x_2 e^{-(x_1^2 + x_2^2)} dx_2 dx_1 = \\ &= \int_0^y 2x_1(e^{-x_1^2} - e^{-y^2}) dx_1 = 1 - (1 + y^2)e^{-y^2}. \end{aligned}$$

İndi isə paylanma sıxlığı funksiyasını tapaq:

$$p_{\eta}(y) = F'(y) = 2y^3 \cdot e^{-y^2}; \quad y > 0.$$

Məsələ 4. İki müxtəlif paylanma sıxlığı funksiyası verilmişdir:

$$p_{\xi_1, \xi_2}(x, y) = x + y \quad \text{və}$$

$$f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(y + \frac{1}{2}\right); \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

Bu paylanma sıxlığı funksiyalarına uyğun marginal paylanma sıxlığı funksiyalarını tapın.

Həlli. $x \in [0, 1]$ olduqda

$$p_{\xi_1}(x) = \int_0^1 p_{\xi_1, \xi_2}(x, y) dy = \left(xy + \frac{y^2}{2}\right) \Big|_{y=0}^1 = x + \frac{1}{2}.$$

Eyni qayda ilə

$$f_{\xi_1}(x) = \int_0^1 f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}\right) \Big|_{y=0}^1 = x + \frac{1}{2}.$$

Göründüyü kimi, iki müxtəlif birgə paylanma sıxlığı funksiyası uyğun marginal sıxlıq funksiyaları eyni ola bilər.

§3.6. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər

Fərz edək ki, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ fəzasında $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətləri verilmişdir.

Tərif 1. Əgər ixtiyari $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$ üçün

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n) \quad (1)$$

bərabərliyi ödənərsə, onda $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ -ə **asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətləri** deyilir.

Fərz edək ki, ξ və η diskret təsadüfi kəmiyyətlərdir və

$$p_i = P\{\xi = x_i\}, \quad p_j = P\{\eta = y_j\}, \\ p_{ij} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Əgər ixtiyari i, j üçün

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j$$

olarsa ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər adlanır.

Mütləq kəsilməz paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlər üçün (1) bərabərliyini sıxlıq funksiyası terminində aşağıdakı şəkildə göstərə bilərik:

$$p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{\xi_1}(x_1) \cdot p_{\xi_2}(x_2) \cdot \dots \cdot p_{\xi_n}(x_n) \quad (2)$$

(2) göstərir ki, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün n ölçülü birgə paylanmanın sıxlıq funksiyası onların sıxlıq funksiyaları hasilinə bərabərdir.

Məsələ 1. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və bu təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma funksiyaları $F_i(x) = P\{\xi_i \leq x\}$, $i = \overline{1, n}$ verilmişdir. $\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ və $\min\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma funksiyalarını tapın.

Həlli. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu üçün

$$\begin{aligned} F_{\max}(x) &= P\{\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \leq x\} = \\ &= P\{\xi_1 \leq x; \xi_2 \leq x; \dots; \xi_n \leq x\} = \\ &= P\{\xi_1 \leq x\} \dots P\{\xi_n \leq x\} = F_1(x) \dots F_n(x). \end{aligned}$$

Xüsusi halda ξ_i -lər həm də eyni paylanmaya malik olarsa,

$$F_{\max}(x) = (F_1(x))^n.$$

İndi isə $\min\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasını tapaq. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu üçün

$$\begin{aligned} F_{\min}(x) &= P\{\min\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \leq x\} = \\ &= 1 - P\{\min\{\xi_1, \dots, \xi_n\} > x\} = \\ &= 1 - P\{\xi_1 > x; \dots; \xi_n > x\} = \end{aligned}$$

$$= 1 - \bar{F}_1(x) \dots \bar{F}_n(x),$$

burada $\bar{F}_i(x) = 1 - F_i(x)$.

Xüsusi halda ξ_i -lər həm də eyni paylanmaya malik olarsa,

$$F_{min}(x) = 1 - (\bar{F}_1(x))^n.$$

Məsələlər.

1. ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə sıxlıq funksiyası verilmişdir:

$$p_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp \left\{ - \left(\frac{(x - a_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(y - a_2)^2}{2\sigma_2^2} \right) \right\}.$$

ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olub olmadığını müəyyən edin.

2. ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə sıxlıq funksiyası verilmişdir:

$$p_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1 + y^2 + x^2 + x^2y^2)}, \quad x, y \in R$$

ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olub olmadığını müəyyən edin.

§3.7. Təsadüfi kəmiyyətin funksiyası

Fərz edək ki, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti, $g(x)$ kəsilməz və monoton funksiyası (müəyyənlik üçün monoton artan olsun) verilmişdir. Bu halda $\eta = g(\xi)$ funksiyası təsadüfi kəmiyyət olacaq.

Doğrudan da, $\forall x \in R$

$$\{\omega: \eta \leq x\} = \{\omega: g(\xi) \leq x\} = \{\omega: \xi \leq g^{-1}(x)\} \in \mathcal{F}.$$

Beləliklə, η funksiyası $\mathcal{F}$ - ölçüləndir.

Təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$\begin{aligned} F_{\eta}(x) &= P\{\omega: \eta \leq x\} = P\{\omega: g(\xi) \leq x\} = \\ &= P\{\omega: \xi \leq g^{-1}(x)\} = F_{\xi}(g^{-1}(x)). \end{aligned}$$

Əgər $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti mütləq kəsilməz paylanmaya malik olarsa, bu halda $\eta = g(\xi)$ təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası:

$$p_{\eta}(x) = \left| (g^{-1}(x))' \right| p_{\xi}(g^{-1}(x)).$$

Misal 1. ξ üstlü paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyət və $g(x) = 5x + 3$ olsun. $\eta = g(\xi) = 5\xi + 3$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasını və sıxlıq funksiyasını tapın.

Həlli. Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$g^{-1}(x) = \frac{x - 3}{5}.$$

Beləliklə, η təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası

$$F_{\eta}(x) = F_{\xi}(g^{-1}(x)) = F_{\xi}\left(\frac{x - 3}{5}\right) = 1 - e^{-\frac{\lambda(x-3)}{5}}, x \geq 3.$$

olar. η təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası isə

$$p_{\eta}(x) = \left| \left(\frac{x - 3}{5} \right)' \right| p_{\xi}\left(\frac{x - 3}{5}\right) = \frac{\lambda}{5} e^{-\frac{\lambda(x-3)}{5}}, \quad x \geq 3.$$

Misal 2. ξ təsadüfi kəmiyyəti $(0,1)$ parametrlı normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət və $g(x) = x^2$ olsun. $\eta = g(\xi) = \xi^2$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı funksiyasını tapın.

Həlli. Asanlıqla görmək mümkündür ki, $x \geq 0$ olduqda

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= P\{\xi^2 \leq x\} = P\{|\xi| \leq \sqrt{x}\} = P\{-\sqrt{x} \leq \xi \leq \sqrt{x}\} = \\ &= \Phi_\xi(\sqrt{x}) - \Phi_\xi(-\sqrt{x}) = 2\Phi_\xi(\sqrt{x}) - 1, \end{aligned}$$

burada $\Phi_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

$p_\eta'(x) = F_\eta(x)$ olduğunu nəzərə alsaq axtarılan paylanma sıxlığı funksiyasını əldə edərik:

$$p_\eta(x) = F_\eta'(x) = 2(\sqrt{x})' p_\xi(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}}; \quad x > 0.$$

Məsələ 3. ξ təsadüfi kəmiyyəti $\left[-\frac{\pi}{2k}; \frac{\pi}{2k}\right]$ parçasında müntəzəm paylanmaya malikdir. $\eta = a \cdot \sin \xi$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı funksiyasını tapın.

Həlli. Məsələni həll etmək üçün

$$p_\eta(x) = \left| (g^{-1}(x))' \right| p_\xi(g^{-1}(x)).$$

düsturundan istifadə edəcəyik.

Digər tərəfdən $g(x) = a \cdot \sin x$ olduğu üçün asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$g^{-1}(x) = \frac{1}{k} \arcsin \frac{x}{a}; \quad -a < x < a.$$

Bu funksiyaadan törəmə alaq:

$$(g^{-1}(x))' = \frac{1}{k\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Digər tərəfdən ξ təsadüfi kəmiyyəti $\left[-\frac{\pi}{2k}; \frac{\pi}{2k}\right]$ parçasında müntəzəm paylanmaya malik olduğu üçün onun paylanma sıxlığı funksiyası

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{k}{\pi}; & |x| \leq \frac{\pi}{2k} \\ 0; & |x| > \frac{\pi}{2k} \end{cases}$$

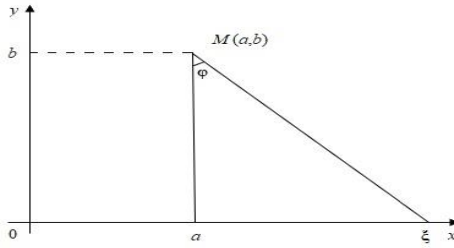
Beləliklə, bunları $p_{\eta}(x)$ -nın ifadəsində nəzərə alsaq

$$p_{\eta}(x) = \left| (g^{-1}(x))' \right| p_{\xi}(g^{-1}(x)) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad |x| \leq a.$$

olduğunu əldə edərik. Qeyd edək ki, əldə edilmiş paylanma sıxlığı funksiyası arksinus qanununun sıxlıq funksiyasıdır.

Məsələ 4. $M(a, b)$ nöqtəsindən çıxan şüanın həmin nöqtədən absis oxuna çəkilməmiş perpendikulyar ilə əmələ gətirdiyi φ bucağı $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmışdır. Bu şüanın absis oxu ilə kəsişdiyi nöqtənin absisini göstərən ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma və ehtimal sıxlığı funksiyalarını tapın.

Həlli. Məsələnin şərtinə əsasən aşağıdakı təsviri vermək olar:



Asanlıqla görmək mümkündür ki, paylanma funksiyası

$$F(x) = P\{\xi \leq x\} = P\{a + btg\varphi \leq x\} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{actg} \frac{x-a}{b}, x \in (-\infty, \infty).$$

Sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{b}{b^2 + (x-a)^2}.$$

İndi isə təsadüfi kəmiyyətin funksiya anlayışından istifadə etməklə təsadüfi kəmiyyətlərin kompüterdə modelləşdirilməsi üsulu ilə tanış olaq. Təsadüfi kəmiyyətlərin kompüterdə modelləşdirilməsi üçün $[0, 1]$ parçasında müntəzəm paylanmadan və random operatorundan istifadə olunur. Təsadüfi kəmiyyətlərin kompüterdə modelləşdirilməsinin riyazi əsasını aşağıdakı teorem təşkil edir.

Teorem. Fərz edək ki, ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $F_\xi(x)$ kəsilməz funksiyadır. Onda $\eta = F_\xi(\xi)$ təsadüfi kəmiyyəti $[0, 1]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir, yəni

$$R_\eta(x) = P\{\eta \leq x\} = x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

İsbatı. Doğrudan da,

$$\begin{aligned} R_\eta(x) &= P\{\eta \leq x\} = P\{F_\xi(\xi) \leq x\} = \\ &= P\{\xi \leq F_\xi^{-1}(x)\} = x, \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

bu isə $[0, 1]$ parçasında müntəzəm paylanma funksiyasıdır.

Qeyd edək ki, bu teoremin tərsi də doğrudur.

Fərz edək ki, η təsadüfi kəmiyyəti $[0, 1]$ parçasında müntəzəm paylanıb, $F(x)$ isə kəsilməz paylanma funksiyasıdır. Onda $\xi = F^{-1}(\eta)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $F(x)$ -dir. Doğrudan da,

$$P\{\xi \leq x\} = P\{F^{-1}(\eta) \leq x\} = P\{\eta \leq F(x)\} = F(x).$$

Bu isə o deməkdir ki, $\xi = F^{-1}(\eta)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $F(x)$ funksiyasıdır.

İndi isə bu teoremdən istifadə etməklə bəzi paylanmaların modelləşdirilməsi üçün düsturlar əldə edək.

1.Həndəsi paylanmanın modelləşdirilməsi. Həndəsi paylanmanın paylanma funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$F(x) = P\{\eta \leq x\} = 1 - (1 - p)^{x-1}.$$

Buradan

$$1 - (1 - p)^{\eta-1} = \xi.$$

Beləliklə,

$$\eta = 1 + \frac{\ln(1 - \xi)}{\ln(1 - p)}.$$

2.Veybul paylanmasının modelləşdirilməsi. Veybul paylanmasının paylanma funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$F(x) = P\{\eta \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x^\alpha}; \quad x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0.$$

Buradan

$$1 - e^{(1-\lambda\eta^\alpha)} = \xi.$$

Beləliklə,

$$\eta = \left(-\frac{1}{\lambda} - \ln(1 - \xi)\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

§3.8. Asılı olmayan iki təsadüfi kəmiyyətin cəminin paylanması

Təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin paylanmasının tədqiqi ehtimal nəzəriyyəsində mühüm yer tutur. Əvvəlcə asılı olmayan ξ_1 və ξ_2 sadə təsadüfi kəmiyyətlərin $\eta = \xi_1 + \xi_2$ cəminin paylanmasını tapaq.

Fərz edək ki, ξ_1 təsadüfi kəmiyyəti $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ çoxluğundan, ξ_2 isə $Y = \{y_1, \dots, y_l\}$ çoxluğundan qiymətlər alır. Onda $\xi_1 + \xi_2$ cəmi $Z = \{z: z = x_i + y_j, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, l}\}$ çoxluğundan qiymətlər alacaq. ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, bu halda

$$P\{\xi_1 + \xi_2 = z\} = \sum_{i=1}^k P\{\xi_1 = x_i\}P\{\xi_2 = z - x_i\}$$

düsturu doğrudur.

Doğrudan da,

$$P\{\xi_1 + \xi_2 = z\} = \sum_{\{(i,j): x_i + y_j = z\}} P\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}.$$

ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$P\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\} = P\{\xi_1 = x_i\}P\{\xi_2 = y_j\}$$

olduğundan istənilən $z \in Z$ üçün

$$\begin{aligned} P\{\xi_1 + \xi_2 = z\} &= \sum_{\{(i,j): x_i + y_j = z\}} P\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\} = \\ &= \sum_{i=1}^k P\{\xi_1 = x_i\}P\{\xi_2 = z - x_j\}. \end{aligned}$$

Sonuncu cəmdə əgər $z - x_j \notin Y$ olarsa, bu halda $P\{\xi_2 = z - x_j\} = 0$ götürülür.

Misal 1. ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan Bernulli təsadüfi kəmiyyətləri olarsa, yəni

$$P\{\xi_1 = 1\} = P\{\xi_2 = 1\} = p,$$

$$P\{\xi_1 = 0\} = P\{\xi_2 = 0\} = q$$

olarsa, bu halda $z = \{0, 1, 2\}$ olur və

$$P\{\eta = 0\} = P\{\xi_1 = 0\}P\{\xi_2 = 0\} = q^2,$$

$$P\{\eta = 1\} = P\{\xi_1 = 0\}P\{\xi_2 = 1\} + P\{\xi_1 = 1\}P\{\xi_2 = 0\} = 2pq,$$

$$P\{\eta = 2\} = P\{\xi_1 = 1\}P\{\xi_2 = 1\} = p^2$$

olar.

Qeyd edək ki, induksiya metodu ilə göstərmək olar ki, asılı olmayan n sayda $\xi_1, \dots, \xi_n$ Bernulli təsadüfi kəmiyyətlərinin $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ cəmi binomial paylanmaya malikdir, yəni

$$P\{S_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, k = \overline{0, n}.$$

Misal 2. Bir həftə ərzində daxil olan sığorta hallarının sayı ν təsadüfi kəmiyyətidir və

$$P\{\nu = n\} = \frac{1}{2^{n+1}}, n \geq 0.$$

Bundan başqa bir həftə ərzində olan sığorta hallarının sayı ixtiyari başqa həftələr ərzində olan sığorta hallarından asılı deyil. İki həftə ərzində 3 sığorta halı müraciətinin olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. ν_1 -lə birinci, ν_2 ilə isə ikinci həftə ərzində daxil olan sığorta hallarının sayını işarə edək. ν_1 və ν_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu üçün

$$\begin{aligned} P\{\nu_1 + \nu_2 = n\} &= \sum_{k=0}^n P\{\nu_1 = k\} P\{\nu_2 = n - k\} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k+1}} \frac{1}{2^{n-k+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{n+1}{2^{n+2}}. \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$P\{\nu_1 + \nu_2 = 3\} = \frac{4}{2^5} = \frac{1}{8}.$$

Asılı olmayan ixtiyari ξ_1 və ξ_2 kəmiyyətlərinin cəminin paylanma funksiyası üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$\begin{aligned} F_{\xi_1 + \xi_2}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_2}(x - y) dF_{\xi_1}(y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_1}(x - y) dF_{\xi_2}(y). \end{aligned} \quad (1)$$

Doğrudan da, ümumi halda

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x) = P\{\xi_1 + \xi_2 \leq x\} = \iint_{(x_1, x_2): x_1+x_2 \leq x} dF(x_1, x_2),$$

burada $F(x_1, x_2) = F_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)$ funksiyası ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanma funksiyasıdır.

Təsadüfi kəmiyyətlər asılı olmadığından aldığımız ifadəni aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\begin{aligned} F_{\xi_1+\xi_2}(x) &= \iint_{(x_1, x_2): x_1+x_2 \leq x} dF_{\xi_1}(x_1) dF_{\xi_2}(x_2) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dF_{\xi_1}(x_1) \int_{-\infty}^{x-x_1} dF_{\xi_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_2}(x-x_1) dF_{\xi_1}(x_1). \end{aligned}$$

Qeyd edək ki, burada təkrar inteqrallar haqqında Fubini teoremi tətbiq edilmişdir. Beləliklə, (1) düsturunu əldə etmiş oluruq. (1) düsturuna $F_{\xi_1}(x)$ və $F_{\xi_2}(x)$ paylanma funksiyalarının **bürünmə** və ya **kompozisiya düsturu** deyilir. Deməli, iki asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətin cəminin paylanma funksiyası onların paylanma funksiyalarının bürünməsinə bərabərdir və $F_{\xi_1+\xi_2} = F_{\xi_1} * F_{\xi_2}$ kimi işarə olunur.

(1) düsturundan aşağıdakı faktı almaq olar.

Əgər ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərindən hər hansı birinin sıxlıq funksiyası varsa, onda onların cəminin də sıxlıq funksiyası var.

Doğrudan da, fərz edək ki, $p_{\xi_1}(x)$ funksiyası ξ_1 təsadüfi

kəmiyyətinin sıxlıq funksiyasıdır. Onda (1) düsturundan alırıq

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(x-y)dF_{\xi_2}(y). \quad (2)$$

(2) ilə təyin olunan $p_{\xi}(x)$ funksiyasının paylanma sıxlığı funksiyası olduğunu yoxlamaq olar. Bunun üçün $p_{\xi_1+\xi_2}(x) \geq 0$ və $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1+\xi_2}(x)dx = 1$ olduğunu yoxlamaq lazımdır. Fubini teoreminə əsasən

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(x-y)dF_{\xi_2}(y) \right) dx &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dF_{\xi_2}(y) \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(x-y)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(z)dz = 1 \end{aligned}$$

olduğunu alırıq.

Hər iki təsadüfi kəmiyyətin sıxlıq funksiyası olarsa, bu halda

$$\begin{aligned} p_{\xi_1+\xi_2}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(x-y)p_{\xi_2}(y)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_2}(x-y)p_{\xi_1}(y)dy. \end{aligned} \quad (3)$$

(3) düsturuna sıxlıq funksiyalarının bürünmə düsturu deyilir. (1) və (3) bürünmə düsturlarının köməyi ilə biz asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminin paylanması və sıxlıq funksiyasını toplananların paylanma və sıxlıq funksiyası ilə ifadə edirik.

$F(x)$ funksiyasının özü ilə n -qat bürünməsini $F^{*(n)}(x)$ işarə edək, belə ki, $F^{*(0)}(x) \equiv 1$ və $F^{*(1)}(x) \equiv F(x)$. Bu halda asılı olmayan və eyni $F(x)$ paylanma funksiyasına malik n sayda $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəminin paylanma funksiyası aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$F^{*(n)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^{*(n-1)}(x-y) dF(y), \quad n \geq 2.$$

Təsadüfi kəmiyyətlərdən birinin paylanma sıxlığı funksiyası mövcud olduqda cəmin də paylanma sıxlığı funksiyası mövcud ola bilər. Bununla bağlı aşağıdakı misalı verək.

Misal 1. ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətdir. ξ təsadüfi kəmiyyəti mütləq kəsilməz paylanmaya malikdir və sıxlıq funksiyası $p_\xi(x)$ -dir. η təsadüfi kəmiyyəti isə diskret paylanmaya malikdir:

x_k	-1	2	3
p_k	0,2	0,1	0,7

$\xi + \eta$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı funksiyasını tapın.

Həlli. Öncə $\xi + \eta$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasını tapaq. ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyət olduğu üçün cəmin paylanma funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$\begin{aligned}
 F_{\xi+\eta}(x) &= P\{\xi + \eta \leq x\} = \\
 &= P\{\eta = -1; \xi \leq x + 1\} + P\{\eta = 2; \xi \leq x - 2\} + \\
 &\quad + P\{\eta = 3; \xi \leq x - 7\} = \\
 &= P\{\eta = -1\} \cdot P\{\xi \leq x + 1\} + P\{\eta = 2\} \cdot P\{\xi \leq x - 2\} + \\
 &\quad + P\{\eta = 3\} \cdot P\{\xi \leq x - 7\} = \\
 &= 0,2 \cdot F_{\xi}(x + 1) + 0,1 \cdot F_{\xi}(x - 2) + 0,7 \cdot F_{\xi}(x - 7).
 \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$\begin{aligned}
 p_{\xi+\eta}(x) &= \left(F_{\xi+\eta}(x) \right)' = \\
 &= 0,2 \cdot p_{\xi}(x + 1) + 0,1 \cdot p_{\xi}(x - 2) + 0,7 = p_{\xi}(x - 7).
 \end{aligned}$$

İndi isə mövzuya aid misallara baxaq.

Məsələ 1. ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan və hər biri eksponensial paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətdir. $\xi_1 + \xi_2$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı funksiyasını tapın.

Həlli. Kompozisiya düsturuna əsasən

$$\begin{aligned}
 p_{\xi_1+\xi_2}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x-y)p_{\xi_2}(y)dy = \\
 &= \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda y} e^{-\lambda(x-y)} dy = \lambda^2 x e^{-\lambda x}.
 \end{aligned}$$

Qeyd edək ki, alınmış sıxlıq funksiyası 2-ci tərtib Erlanq paylanmasının sıxlıq funksiyasıdır.

Məsələ 2. ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. ξ_1 təsadüfi kəmiyyəti $[0, 1]$ parçasında müntəzəm qanunla, ξ_2 isə $\lambda = 1$ parametrlı eksponensial qanunla paylanmışdır. Bu təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin paylanma sıxlığı funksiyasını tapın.

Həlli. Şərtə görə ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma sıxlığı funksiyaları aşağıdakı kimidir:

$$p_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1]; \end{cases} \quad p_{\xi_2}(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Kompozisiya düsturundan

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(y)p_{\xi_2}(x-y)dy = \int_0^1 p_{\xi_2}(x-y)dy$$

olduğunu alırıq.

Əgər $0 < y < x$ olarsa, inteqralaltı funksiya $p_{\xi_2}(x-y) > 0$; $y \notin (0, x)$ olduqda isə, $p_{\xi_2}(x) = 0$ olur. Beləliklə, $0 < x \leq 1$ qiymətlərində

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_0^x e^{-(x-y)}dy = 1 - e^{-x}.$$

Digər tərəfdən $x > 1$ olduqda

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_0^1 e^{-(x-y)}dy = (e-1) \cdot e^{-x}$$

olduğu alınır.

Beləliklə, $\xi_1 + \xi_2$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması-
nın sıxlıq funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - e^{-x}, & 0 < x \leq 1; \\ (e - 1)e^{-x}, & x > 1. \end{cases}$$

Məsələ 3. ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan və hər biri standart normal paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətdir. $\xi_1 + \xi_2$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı funksiyasını tapın.

Həlli. Şərtə görə verilmiş təsadüfi kəmiyyətlərin hər birinin sıxlıq funksiyası

$$p_{\xi_1}(x) = p_{\xi_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

şəklindədir. Bunu kompozisiya düsturunda nəzərə alaq:

$$\begin{aligned} p_{\xi_1+\xi_2}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x-y)p_{\xi_2}(y) dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2+(x-y)^2)} dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2y(x-y))} dy = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{y(x-y)} dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2+xy} dy = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

Beləliklə, hər biri standart normal qanunla paylanmış asılı olmayan iki təsadüfi kəmiyyətin cəmi də standart

normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir.

Məsələlər.

1. ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan və $[0, 1]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir. Bu təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin paylanma sıxlığı funksiyasını tapın.
2. Fərz edək ki, ξ_1 təsadüfi kəmiyyəti $[a, b]$ parçasında müntəzəm paylanmaya malikdir və ondan asılı olmayan ξ_2 təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $F(x) = P\{\xi_2 \leq x\}$ -dir. $\xi = \xi_1 + \xi_2$ cəminin paylanma sıxlığı funksiyasını tapın.

$$\text{Cavab: } p_{\xi}(x) = \frac{F(x-a)-F(x-b)}{b-a}$$

3. ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər və hər biri uyğun olaraq (n_1, p) və (n_2, p) parametrli binomial qanunla paylanmışdır. Göstərin ki, $\xi_1 + \xi_2$ təsadüfi kəmiyyəti $(n_1 + n_2, p)$ parametrli binomial paylanmaya malikdir.
4. ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər və hər biri uyğun olaraq $\lambda_1 > 0$ və $\lambda_2 > 0$ parametrli Puasson paylanmasına malikdir. Göstərin ki, $\xi_1 + \xi_2$ təsadüfi kəmiyyəti $\lambda_1 + \lambda_2$ parametrli Puasson paylanmasına malikdir.
5. ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər və hər biri uyğun olaraq $\lambda_1 > 0$ və $\lambda_2 > 0$ parametrli üstlü qanunla paylanmışdır. Bu təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin paylanma sıxlığı funksiyasını tapın.

$$\text{Cavab: } \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)x}$$

6. ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər və hər biri uyğun olaraq (α, λ_1) və (α, λ_2) parametrli qamma paylanmaya malikdir. Göstərin ki, $\xi_1 + \xi_2$ təsadüfi kəmiyyəti $(\alpha, \lambda_1 + \lambda_2)$ parametrli qamma paylanmasına malikdir.
7. ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər və hər biri uyğun olaraq (a_1, σ_1) və (a_2, σ_2) parametrli normal paylanmaya malikdir. Göstərin ki, $\xi_1 + \xi_2$ təsadüfi kəmiyyəti $(a_1 + a_2, \sigma_1 +$

σ_2) parametrlı normal paylanmaya malikdir.

8. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ asılı olmayan və hər biri $p_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ sıxlıq funksiyalı Koşi paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyətlərdir. $\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı funksiyasını tapın.

$$\text{Cavab: } p_{\eta_n}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

§3.9. Asılı olmayan iki təsadüfi kəmiyyətin hasilinin və nisbətinin paylanması

Fərz edək ki, ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Bu halda bu təsadüfi kəmiyyətlərin hasili olan $\xi_1 \xi_2$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı funksiyası aşağıdakı düsturla tapılır:

$$p_{\xi_1 \xi_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}\left(\frac{z}{x}\right) p_{\xi_2}(x) \frac{1}{|x|} dx.$$

Fərz edək ki, ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Bu halda $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı funksiyası aşağıdakı düsturla tapılır:

$$p_{\frac{\xi_1}{\xi_2}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(zx) p_{\xi_2}(x) |x| dx.$$

Məsələ 1. ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan və hər biri standart normal paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətdir. $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı funksiyasını tapın.

Həlli. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin nisbətinin

paylanma sıxlığı funksiyası düsturundan istifadə edək:

$$\begin{aligned}
 p_{\xi_1, \xi_2}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(zx) p_{\xi_2}(x) |x| dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2 x^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} |x| dx = \\
 &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp\left\{-(z^2 + 1) \frac{x^2}{2}\right\} x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x d\left(e^{-(z^2 + 1) \frac{x^2}{2}}\right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{-(z^2 + 1)} \left(0 - \int_0^{\infty} e^{-(z^2 + 1) \frac{x^2}{2}} dx\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{z^2 + 1}.
 \end{aligned}$$

Göründüyü kimi, $(0,1)$ parametrlı normal paylanmaya malik asılı olmayan iki təsadüfi kəmiyyətin nisbəti Koşi paylanmasına malikdir.

Məsələ 2. Fərz edək ki, ξ təsadüfi kəmiyyəti sığorta şirkətinə illik daxilolmaların miqdarını, η isə il ərzində ödənilmiş sığorta ödəmələrinin həcmiini ifadə edir. $\tau = \frac{\eta}{\xi}$ nisbəti sığorta şirkətinin il ərzində uğurlu fəaliyyətini xarakterizə edən təsadüfi kəmiyyətdir. ξ və η -nın uyğun olaraq $\lambda = 2$ və $\lambda = 1$ parametrlı üstlü qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğunu fərz edək. $\tau = \frac{\eta}{\xi}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu tapmaq tələb olunur.

Həlli. Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$P\{\tau > t\} \equiv P\left\{\frac{\eta}{\xi} > t\right\} = P\{\eta > t\xi\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{+\infty} P\{\eta > tx\} p_\xi(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} e^{-tx} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(t+\frac{1}{2})x} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+\frac{1}{2}} e^{-(t+\frac{1}{2})x} \Bigg|_{x=0}^{+\infty} = \frac{1}{2t+1}.
 \end{aligned}$$

Beləliklə, $\tau = \frac{\eta}{\xi}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası

$$F(t) = 1 - P\{\tau > t\} = 1 - \frac{1}{2t+1} = \frac{2t}{2t+1}.$$

IV FƏSİL

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTİN ƏDƏDİ XARAKTERİSTİKALARI

Əgər təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu məlumdursa, bu halda biz təsadüfi kəmiyyəti demək olar ki, tam xarakterizə edə bilirik. Lakin praktikada elə hallar olur ki, təsadüfi kəmiyyətlərin müəyyən xassələrini bilmək kifayət edir:

1) onların digər qiymətlərinin ətrafında qruplaşdığı “orta” qiymətləri,

2) bu qiymətlərin orta qiymət ətrafında “səpələnməsinin” dərəcəsi.

Bu xassələri kəmiyyətə müəyyən ədədi xarakteristikalarla ifadə etmək mümkün olur. Bu ədədi xarakteristikalardan ən mühümləri riyazi gözləmə, dispersiya və kvadratik orta meyl, başlanğıc və mərkəzi momentlərdir.

§4.1. Təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi

Bir çox praktik məsələlərin həlli zamanı təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları mühüm rol oynayır.

Fərz edək ki, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ təsadüfi kəmiyyəti verilmişdir. $F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\}$ ilə ξ -nin paylanma funksiyasını işarə edək.

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_\xi(x) \quad (1)$$

kimi təyin olunan ədədə təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi deyilir, belə ki, riyazi gözləmənin sonlu olması və birqiymətli təyin olunması üçün

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| dF_{\xi}(x) < \infty$$

şerti ödənilməlidir.

Əgər ξ təsadüfi kəmiyyəti $x_1, x_2, \dots$ qiymətlərini $p_k = P\{\xi = x_k\}$ ehtimalları ilə alırsa, onda riyazi gözləmə

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad (2)$$

kimi təyin olunur, belə ki, riyazi gözləmənin sonlu olması və birqiymətli təyin olunması üçün aşağıdakı şərt ödənilməlidir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < \infty,$$

başqa sözlə, (2)-dəki sıra mütləq yığılan olmalıdır.

Mütləq kəsilməz paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{\xi}(x) dx$$

təyin olunur, belə ki,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| p_{\xi}(x) dx < \infty$$

şerti ödənilməlidir.

Qeyd edək ki, riyazi gözləmə orta qiymət anlayışının ümumiləşməsidir. Doğrudan da, fərz edək ki, ξ təsadüfi kəmiyyətinin mümkün qiymətləri $x_1, \dots, x_n$ və bu qiymətlərin

hər birinin ehtimalı $\frac{1}{n}$ - dir.

Bu halda (2)-yə əsasən ξ -nin riyazi gözləməsi

$$E\xi = \sum_{k=1}^n x_k p_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

olar. Göründüyü kimi, xüsusi halda riyazi gözləmə təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin ədədi ortasına bərabərdir.

Riyazi gözləmənin bəzi xassələri ilə tanış olaq:

Xassə 1. $Ec = c$, burada c ixtiyari sabitdir.

Xassə 2. $E(c\xi) = cE\xi$.

Xassə 3. Əgər aşağıdakı riyazi gözləmələrdən ən azı ikisi mövcuddursa, onda

$$E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta.$$

Xassə 4. Əgər ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda

$$E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta.$$

Lakin bu xassənin tərsi ümumiyyətlə, doğru deyil.

Xassə 5. Əgər $a \leq \xi \leq b$ olarsa, onda

$$a \leq E\xi \leq b.$$

Xüsusi halda, əgər $\xi \geq 0$ olarsa, onda $E\xi \geq 0$ olar. Ümumiyyətlə isə, $E\xi \leq E|\xi|$.

Xassə 6. Əgər $\xi \leq \eta$ olarsa,

$$E\xi \leq E\eta.$$

Xassə 7. Hər hansı A hadisəsinin indikatorunun riyazi

gözləməsi həmin hadisənin ehtimalına bərabərdir:

$$E(I_A(\omega)) = P(A).$$

Qeyd edək ki, bu xassələrin doğruluğu riyazi gözləmənin tərifindən alınır. Bəzi xassələrin isbatını verək:

Xassə 3-ün isbatı. Fərz edək ki,

$$p_{ij} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}, \quad \sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$$

ξ və η diskret təsadüfi kəmiyyətlərinin uyğun olaraq x_i və y_j qiymətlərini alma ehtimallarını p_i və p_j ilə işarə edək. Aydındır ki,

$$P\{\xi = x_i\} = p_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1;$$

$$P\{\eta = y_j\} = p_j = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1.$$

İkiölçülü paylanma qanunundan bu düsturlar vasitəsilə alınmış ξ və η -nın birölçülü paylanma qanunları – ikiölçülü ilkin paylanmanın marjinal qanunlarıdır. Onda

$$\begin{aligned} E(\xi + \eta) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (x_i + y_j) p_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i + \sum_{j=1}^{\infty} y_j p_j = E\xi + E\eta.$$

Bu bərabərliyi isbat edərkən, biz sıraların yığılması faktına əsaslandıq. Doğrudan da, $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$ və $E\eta = \sum_{j=1}^{\infty} y_j p_j = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$ sıraları mütləq yığılan olduğundan ($E\xi$ və $E\eta$ -nin varlığını fərz etmişdik) $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (x_i + y_j) p_{ij}$ sırası da mütləq yığılandır.

İndi isə fərz edək ki, ξ və η paylanmalarının sıxlıq funksiyaları uyğun olaraq $p_{\xi}(x)$ və $p_{\eta}(y)$ olan təsadüfi kəmiyyətlərdir. $p_{\gamma}(x, y) = p_{\xi, \eta}(x, y)$ isə ikiölçülü $\gamma = (\xi, \eta)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmasının sıxlıq funksiyası olsun. Onda

$$p_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\gamma}(x, y) dy, \quad p_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\gamma}(x, y) dx.$$

Riyazi gözləmənin (6) düsturu ilə verilmiş ifadəsinə əsasən

$$\begin{aligned} E(\xi + \eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi, \eta}(z, x - z) dz dx = \\ &= \iint x p_{\xi, \eta}(z, x - z) dz dx = \iint (z + y) p_{\xi, \eta}(z, y) dz dy = \\ &= \iint z p_{\xi, \eta}(z, y) dz dy + \iint y p_{\xi, \eta}(z, y) dz dy = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} zp_{\xi}(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} yp_{\eta}(y)dy = E\xi + E\eta.$$

Beləliklə, Xassə 3 isbat olundu.

İndi isə Xassə 4-ün isbatını verək.

Şərtə əsasən ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, yəni

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = p_{\xi}(x) \cdot p_{\eta}(y), \quad x,y \in (-\infty, +\infty).$$

$p_{\xi}(x)$, $p_{\eta}(y)$ uyğun olaraq ξ və η -nin birölçülü paylanmalarının sıxlıq funksiyaları, $p_{\xi,\eta}(x,y)$ isə (ξ,η) təsadüfi vektorunun paylanması ikiölçülü sıxlıq funksiyasıdır. $n = 2$, $g(x,y) = x \cdot y$ qəbul etsək,

$$\begin{aligned} E(\xi \cdot \eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy p_{\xi,\eta}(x,y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy p_{\xi}(x)p_{\eta}(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp_{\xi}(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} yp_{\eta}(y) dy = E\xi \cdot E\eta \end{aligned}$$

olduğu alınır.

İndi isə fərz edək ki, ξ və η asılı olmayan diskret təsadüfi kəmiyyətlərdir və $p_i = P\{\xi = x_i\}$, $p_j = P\{\eta = y_j\}$, $\sum_i p_i = 1$, $\sum_j p_j = 1$. Bundan başqa

$$p_{ij} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}, \quad i,j = 1,2, \dots, \quad \sum_{i=1} \sum_{j=1} p_{ij} = 1.$$

ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğundan

$$p_{ij} = p_i p_j, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$\begin{aligned} E(\xi \cdot \eta) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j p_i p_j = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \sum_{j=1}^{\infty} y_j p_j = E\xi \cdot E\eta. \end{aligned}$$

Bununla Xassə 4 isbat olundu.

Qeyd edək ki, Xassə 4-ün tərsi doğru olmaya da bilər.

Yəni

$$E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta$$

münasibəti asılı kəmiyyətlər üçün də doğru ola bilər. Bununla bağlı aşağıdakı misalı verək:

Misal 1. ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və $E\xi = E\eta = 0$.

$\gamma = \xi \cdot \eta$ götürək. Aydındır ki, ξ və γ asılı təsadüfi kəmiyyətlərdir. (bəzi trivial hallar istisna olunmaq şərtilə, məsələn, $\xi = \text{const}$ olduğu hal). Lakin

$$E(\xi \cdot \gamma) = E(\xi^2 \cdot \eta) = E\xi^2 \cdot E\eta = 0 = E\xi \cdot E\gamma.$$

Beləliklə, ξ və γ -nın bir-birindən asılı təsadüfi kəmiyyətlər olduğuna baxmayaraq $E(\xi \cdot \gamma) = E\xi \cdot E\gamma$ münasibəti

ödənilir.

İndi isə mövzuya aid məsələ həlli nümunələri verək.

Məsələ 1. Düzgün oyun zəri atılır. Düşən rəqəmləri ifadə edən ξ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini hesablayın.

Həlli. Aydındır ki, ξ təsadüfi kəmiyyətinin mümkün qiymətləri 1, 2, 3, 4, 5, 6. Bu rəqəmlərin hər birinin düşməsi ehtimalı $1/6$ olduğu üçün ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu aşağıdakı cədvəldəki kimidir:

x_k	1	2	3	4	5	6
p_k	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Riyazi gözləmənin tərifindən istifadə etsək,

$$E\xi = \sum_{k=1}^n x_k p_k = \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3,5.$$

Qeyd edək ki, alınmış nəticə düzgün oyun zərinin atılması zamanı 3,5 düşəcəyi anlamına gəlmir. Bu nəticə o anlama da gəlmir ki, məsələn, düzgün oyun zərini 1000 dəfə atsaq və alınan nəticələri toplayıb sınaqların sayına bölsək dəqiq olaraq 3,5 alınacaqdır. Biz sadəcə bu halda həmin ədədin 3,5-ə yaxın bir ədəd olacağını əminliklə söyləyə bilərik. Beləliklə, riyazi gözləmə nəzəri orta olub təsadüfi kəmiyyətin hər hansı qiymətinə bərabər olmaya da bilər. Riyazi gözləmənin həmçinin ən böyük ehtimallı qiymətlə də eyni olması vacib deyildir.

Məsələ 2. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu aşağıdakı cədvəllə verilmişdir:

x_k	-0,1	0	3
p_k	0,2	0,5	0,3

Bu təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsini hesablayın.

Həlli. Riyazi gözləmənin tərifindən istifadə etsək,

$$E\xi = \sum_{k=1}^n x_k p_k = -0,1 \cdot 0,2 + 0 + 3 \cdot 0,3 = 0,88.$$

Məsələ 3. Fərz edək ki, ξ təsadüfi kəmiyyəti müsbət tam qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətdir:

$$p_k = P\{\xi = k\}, k = 1, 2, \dots$$

İsbat edin ki, bu təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} P\{\xi > k\}.$$

Həlli. Aydındır ki,

$$P\{\xi > 0\} = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \dots,$$

$$P\{\xi > 1\} = p_2 + p_3 + p_4 + \dots,$$

$$P\{\xi > 2\} = p_3 + p_4 + \dots.$$

Bunları nəzərə alsaq,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{\xi > k\} = P\{\xi > 0\} + P\{\xi > 1\} + P\{\xi > 2\} + \dots =$$

$$= p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} kP\{\xi = k\} = E\xi$$

olduğunu əldə edərək.

İndi isə riyazi gözləmənin mövcud olmadığı hala aid misallar verək.

Məsələ 4. Fərz edək ki, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots\}$ diskret elementar hadisələr fəzasıdır və $p_k = \frac{1}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, \dots$.

Aşağıdakı təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsini tapın:

$$\xi = \xi(\omega_k) = (-1)^k.$$

Həlli. Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1.$$

Qeyd edək ki, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$ sırası mütləq yığılan olduğundan $E\xi$ mövcuddur. Riyazi gözləmənin tərifinə görə

$$\begin{aligned} E\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} \xi(\omega_k) p_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

Digər tərəfdən, $-\ln(1+x) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k}{k}$ ayrılışında $x = 1$ yazsaq,

$$E\xi = 1 - 2 \ln 2$$

olduğunu alarıq.

Məsələ 5. Fərz edək ki, $\Omega = [0,1]$ və $\mathcal{F}$ olaraq $[0,1]$ parçasının borel çoxluqları cəbri olsun. P isə Lebeq ölçüsü olsun. Aşağıdakı təsadüfi kəmiyyətləri daxil edək.

$$\xi_n = \begin{cases} n; & 0 < \omega < \frac{1}{n} \\ 0; & \omega \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$\eta = \xi_{n+1} - \xi_n$, $n \geq 1$ olsun.

Göstərək ki, $E\xi_n = 1$ və $E\eta_n = 0$.

Həlli. Məsələnin şərtinə əsasən $P\{\xi_n = n\} = \frac{1}{n}$ olduğunu nəzərə alsaq, ξ_n , $n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$E\xi_n = n \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

olduğunu əldə edərik.

İndi isə η_n , $n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləməsini hesablayaq:

$$E\eta_n = E(\xi_{n+1} - \xi_n) = E\xi_{n+1} - E\xi_n = 1 - 1 = 0.$$

Qeyd. Bu misaldan görmək olar ki, ümumi halda

$$E \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} E\eta_n$$

Doğrudan da,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_{n+1} - \xi_n) = -\xi_1$$

Deməli,

$$E\left(\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n\right) = -E\xi_1 = -1.$$

Lakin $\sum_{n=1}^{\infty} E\eta_n = 0$.

İndi isə riyazi gözləmənin mövcud olmadığı hala aid misallar verək.

Məsələ 6. Fərz edək ki, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots\}$ diskret elementar hadisələr fəzasıdır və $p_k = \frac{1}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, \dots$.

Aşağıdakı təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsini hesablayın:

$$\eta = \eta(\omega_k) = (-1)^k k.$$

Həlli. Asanlıqla görmək mümkündür ki, η təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi mövcud deyil, çünki

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k k| \frac{1}{k(k+1)}$$

sırası dağılan sıradır. Doğrudan da,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k k| \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty.$$

Beləliklə, $E\eta$ mövcud deyildir.

Məsələ 7. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı funksiyası aşağıdakı kimi verilmişdir:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}; & x \geq 1 \\ 0; & x < 1. \end{cases}$$

Göstərmək olar ki, $E\xi$ mövcud deyil.

Həlli. Doğrudan da,

$$E|\xi| = \int_{-\infty}^{\infty} |x|p(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{|x|}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty$$

Başqa sözlə, $E|\xi| < \infty$ şərti ödənilmir. Yəni ξ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi mövcud deyil.

Misal 8. Koşi paylanmasının riyazi gözləməsini hesablayın.

Həlli. Koşi paylanmasının riyazi gözləməsi mövcud deyil. Çünki

$$\begin{aligned} E|\xi| &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx^2 = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \ln(1+A^2) = +\infty. \end{aligned}$$

Beləliklə, Koşi paylanmasının riyazi gözləməsi mövcud deyildir.

Qeyd. Göstərmək olar ki, $\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$ inteqralı Koşinin baş mənada inteqralı kimi mövcuddur.

Doğrudan da,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx &= 2 \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \ln(1+x^2) \Big|_{-A}^A = 0. \end{aligned}$$

Qeyd edək ki, riyazi gözləmənin mövcud olmadığı halda bəzi maraqlı hallar meydana çıxır.

Məsələ 9 (Sankt-Peterburq lotereyası). Bir oyunçu banka müəyyən x məbləği ödəyərək simmetrik metal pulun ilk dəfə gerb üzü düşənədək atılması oyununda iştirak edir, belə ki, əgər gerb üzü ilk dəfə k -cı addımda düşərsə, bank oyunçuya 2^k pul vahidi ödəyir. Oyunçunun banka ödənişi nə qədər olmalıdır ki, bu oyun ədalətli sayılsın, başqa sözlə, təmiz uduşun orta qiyməti sıfır olsun.

Həlli. Qəribədir ki, oyunçu nə qədər sonlu x məbləği qoysa da, bu oyunun ədalətli olması təmin olunmur. Çünki, hər bir halda bankın itkilərinin riyazi gözləməsi sonsuzluq olur.

Bunu göstərmək üçün bankın itkilərinin miqdarını ξ ilə işarə edək. Aydınır ki, ξ təsadüfi kəmiyyəti aşağıdakı paylanmaya malik olacaqdır:

$$P\{\xi = 2^k\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = 2^{-k}; \quad k = 1, 2, \dots$$

Baxmayaraq ki, k artdıqca bu təsadüfi kəmiyyətin böyük qiymətlər alması ehtimalı kifayət qədər kiçilir, onun riyazi gözləməsi sonsuzluq olur:

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k P\{\xi = 2^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot 2^{-k} = \infty$$

Bu isə o deməkdir ki, bankın itkilərinin orta qiyməti sonsuzluqdur və belə oyun ədalətli deyildir.

Qeyd edək ki, Sankt-Peterburq lotereyası məsələsi ehtimal nəzəriyyəsində Sankt-Peterburq paradoksu kimi də

məşhurdur (bax, məsələn, [23], s.35). Bu məsələ ilə bağlı D.Bernulli Sankt-Peterburq Elmlər Akademiyasında məqalə də çap etdirmişdir. Ondan əvvəl isə N.Bernulli 1713-cü ildə Monmora bu məsələ haqqında bir məktub yazmışdır. Bir müddət Sankt-Peterburqda işlədiyi üçün bu paradoksu bəzən Leonard Eylerin adı ilə də bağlayırlar. Sonralar bu paradoksun aradan qaldırılması ilə bağlı Byuffon və Kramer kimi alimlərin təklifləri olmuşdur. Onlar təklif etmişlər ki, bu məsələnin qoyuluşu zamanı reallıq nəzərə alınmalıdır. Başqa sözlə, bankın vəsaitinin sonlu olması, kimi şərtlər qoyulmalıdır. Məsələn, bankın 1 milyon pul vahidi varsa, bu halda oyunçunun qoyduğu vəsait təqribən 21 pul vahidi olduqda oyun müəyyən mənada ədalətli hesab oluna bilər. Feller isbat etmişdir ki, oyunçunun ödədiyi məbləğ oyunların sayından asılı olaraq müəyyən olunsay, bu paradoks həll olunur.

§4.2. Təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası

Təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin onun riyazi gözləməsi ətrafında səpələnməsini xarakterizə etmək üçün yeni ədədi xarakteristikalara ehtiyac vardır.

Fərz edək ki, eyni bir fiziki kəmiyyət iki müxtəlif cihazda ölçülür. Ölçmənin nəticələri praktiki olaraq ölçülən kəmiyyətlə dəqiq üst-üstə düşmür və hər bir ölçmə təsadüfi xəталarla müşayiət olunur. Birinci cihaz vasitəsilə ölçmənin xətasını ξ ilə, ikinci cihazla ölçməsinin xətasını isə η ilə işarə edək. Aydındır ki, ξ və η təsadüfi kəmiyyət olacaqdır. Hər iki cihazın saz vəziyyətdə olduğunu qəbul etsək, bu halda

$E\xi = 0$ və $E\eta = 0$ olar. Bu o deməkdir ki, ölçmələr zamanı sisteməlik xətlər yoxdur. Lakin, bu o demək deyildir ki hər iki cihaz eyni dərəcədə dəqiqdir. Ola bilər ki, cihazlardan biri üçün xətlərin mütləq qiyməti orta hesabla digər cihazın xətlərinə nəzərən böyük qiymətlər ala bilər. Bu xətlərin (riyazi gözləmə ətrafında) səpələnmə dərəcəsini xarakterizə etmək üçün yeni bir ədədi xarakteristikaya ehtiyac vardır. İlk baxışda təbii görünür ki, səpələnmə dərəcəsini xarakterizə etmək üçün $\xi - E\xi$ fərqlinin riyazi gözləməsini götürmək təbii olardı. $\xi - E\xi$ təsadüfi kəmiyyətinə ξ -nin öz riyazi gözləməsindən **sapması və ya meyli** deyilir. Asanlıqla görmək mümkündür ki, $E(\xi - E\xi) = 0$ olur. Buna görə də, $\xi - E\xi$ fərqi təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləmə ətrafında səpələnməsini xarakterizə edə bilməz. Təbii olardı ki, səpələnmə xarakteristikası olaraq $E|\xi - E\xi|$ ifadəsi götürülsün. Lakin mütləq qiymət işarəsi altında olan ifadələrlə işləmək o qədər də asan olmadığı üçün səpələnmə xarakteristikası olaraq dispersiya adlanan ədədi xarakteristika daxil edilir.

Tərif 1.

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

kimi təyin olunan ədədə ξ **təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası** deyilir.

Buradan asanlıqla dispersiya üçün aşağıdakı düstur alınır:

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2,$$

burada $E\xi^2$ təsadüfi kəmiyyətin ikinci momentidir.

Dispersiyanın bəzi xassələrini verək:

Xassə 1. $D\xi \geq 0$.

Xəssə 2. $Dc = 0$.

Xəssə 3. $D(c\xi) = c^2 D\xi$.

Xəssə 4. $D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta \pm 2E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$.

Xəssə 5. Əgər ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda

$$D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta.$$

Xəssə 6. Əgər $D\xi = 0$ olarsa, onda $\xi = E\xi$ münasibəti sanki yəqin olaraq ödənilir.

Riyazi gözləməyə malik olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün dispersiya anlayışı şərtləşməyə görə $D\xi = \infty$ kimi götürülür.

Dispersiyanın sapmanı daha yaxşı ifadə etdiyini aşağıdakı mülahizələr də doğruldur. ξ təsadüfi kəmiyyətinin müəyyən a kəmiyyətindən sapmasının kvadratının riyazi gözləməsi məhz $a = E\xi$ olduqda minimum olur. Yəni

$$\min_a (E\xi - a)^2 = E(\xi - E\xi)^2 = D\xi.$$

Doğrudan da,

$$E(\xi - a)^2 = E\xi^2 + a^2 - 2a \cdot E\xi.$$

Bu ifadədən a -ya görə törəmə alıb sıfıra bərabər etsək $a = E\xi$ olduğunu əldə edərik. Bu isə o deməkdir ki, $a = E\xi$ ədədi ξ təsadüfi kəmiyyəti üçün orta mənada ən yaxşı qiymətləndirmədir.

Dispersiya anlayışı təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin riyazi gözləmə ətrafında necə səpələnməsini xarakterizə edir. Əgər dispersiya kiçik olarsa, təsadüfi kəmiyyətin qiymətləri riyazi gözləmə ətrafında sıx səpələnib, əgər dispersiya böyük olarsa, onda təsadüfi kəmiyyət riyazi gözləmə ətrafında seyrək səpələnib deyirlər. Bunu aşağıdakı misalın köməyi ilə

izah edək:

Misal 1. ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma cədvəlləri verilmişdir:

ξ -nin paylanma cədvəli:

x_k	-1	1
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Asanlıqla görmək mümkündür ki, ξ -nin riyazi gözləməsi

$$E\xi = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Dispersiyası isə

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

η təsadüfi kəmiyyətinin paylanma cədvəli:

x_k	-100	100
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$E\eta = -100 \cdot \frac{1}{2} + 100 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

$$D\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = (-100)^2 \cdot \frac{1}{2} + (100)^2 \cdot \frac{1}{2} = 10000.$$

Bu misaldan görünür ki, təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözləmələri eynidir, lakin $D\eta$ dispersiyası $D\xi$ dispersiyasından 10000 dəfə böyükdür. Bu onunla bağlıdır ki, η təsadüfi

kəmiyyətinin qiymətləri riyazi gözləmədən xeyli uzaqda yerləşir (cədvəlləri müqayisə edin).

Tərif 2. $\xi^* = \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}$ təsadüfi kəmiyyətinə ξ təsadüfi kəmiyyətinə uyğun **normallaşdırılmış təsadüfi kəmiyyət** deyilir.

Asanlıqla göstərmək olar ki, normallaşdırılmış təsadüfi kəmiyyət üçün $E\xi^* = 0$ və $D\xi^* = 1$ olur.

Doğrudan da, riyazi gözləmənin xassələrinə görə

$$E\xi^* = \frac{E(\xi - E\xi)}{\sqrt{D\xi}} = \frac{E\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}} = 0.$$

Dispersiyanın xassələrindən istifadə etsək

$$D\xi^* = D\left(\frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}\right) = \frac{D(\xi - E\xi)}{D\xi} = \frac{D\xi}{D\xi} = 1$$

olduğunu əldə edərik.

Misal 2. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ asılı olmayan və eyni paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $E\xi_i = a$ və $D\xi_i = \sigma^2$, $i = \overline{1, n}$. Bu təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi ortasının riyazi gözləməsi və dispersiyasını hesablayaq.

Həlli. Riyazi gözləmənin xassələrinə əsasən

$$E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\xi_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a = a;$$

Eyni qayda ilə dispersiyanı hesablayaq:

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D\xi_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Bu münasibətlərdən göründüyü kimi n sayda asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi ortasının riyazi gözləməsi $n \rightarrow \infty$ artıq təsadüfilik xarakterini itirərək təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi olan a sabitinə, dispersiyası isə sıfıra yaxınlaşır.

Tərif 3. $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$ ədədinə ξ təsadüfi kəmiyyətinin **kvadratik orta meyl** deyilir.

Kvadratik orta meyl də dispersiya kimi təsadüfi kəmiyyətin səpələnmə xarakteristikasıdır. Dispersiyanın tərifindən görünür ki, onun ölçüsü təsadüfi kəmiyyətin kvadratının ölçüsü ilə eynidir. Kvadratik orta meylin ölçüsü isə təsadüfi kəmiyyətin ölçüsü ilə eynidir.

Kvadratik orta meylin aşağıdakı xassələrini verək.

Xassə 1. $\sigma_\xi = 0$ münasibəti yalnız və yalnız ξ təsadüfi kəmiyyəti sabit olduqda doğrudur.

Xassə 2. $\sigma_{c\xi} = |c| \cdot \sigma_\xi$.

Doğrudan da,

$$\sigma_{c\xi} = \sqrt{D(c\xi)} = \sqrt{c^2 D\xi} = |c| \sqrt{D\xi} = |c| \cdot \sigma_\xi.$$

Xassə 3. ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlədirsə

$$\sigma_{\xi+\eta} = \sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2}.$$

Tərif 4. $V_\xi = \frac{\sigma_\xi}{E\xi} \cdot 100\%$ kəmiyyətinə isə ξ təsadüfi kəmiyyətinin **variyaasiya əmsalı** deyilir.

Tərifdən görünür ki, variyasiya əmsalı kvadratik orta meylin riyazi gözləməyə olan faiz nisbətidir. Başqa sözlə, σ_ξ variyasiya əmsalının $E\xi$ -nin neçə faizini təşkil etdiyini göstərir. Variyasiya əmsalı müxtəlif ölçü vahidləri ilə ifadə olunan bir neçə kəmiyyətin dəyişməsi dərəcələrini müqayisə etməyə imkan verir.

İndi isə diskret təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi xarakteristikalarının hesablanmasına aid bir neçə misala baxaq:

Misal 3. Bernulli paylanmasının riyazi gözləməsi və dispersiyasını hesablayaq. $P\{\xi = k\} = p^k q^{1-k}$, $k = 0, 1$ olduğu üçün asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$\begin{aligned} E\xi &= 0 \cdot q + 1 \cdot p = p, \\ E\xi^2 &= 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p, \\ D\xi &= p - p^2 = pq. \end{aligned}$$

Misal 4. Fərz edək ki, ξ_n , $n = 1, 2, \dots$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və hər biri Bernulli paylanmasına malikdir:

$$P\{\xi_i = 1\} = p, \quad P\{\xi_i = 0\} = 1 - p, \quad i = \overline{1, n}.$$

$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləmə və dispersiyasını hesablayın.

Həlli. ξ_n təsadüfi kəmiyyətləri eyni paylanmaya malik olduğu üçün

$$E\xi_1 = \dots = E\xi_n = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p.$$

Riyazi gözləmənin additivlik xassəsinə əsasən

$$ES_n = E(\xi_1 + \dots + \xi_n) = n \cdot E\xi_n = np.$$

İndi isə dispersiyanı hesablayaq. Dispersiyanın xas-səsinə əsasən ξ_n təsadüfi kəmiyyətləri asılı olmayan kəmiyyətlər olduğu üçün

$$DS_n = D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n D\xi_i.$$

Digər tərəfdən

$$D\xi_i = E\xi_i^2 - (E\xi_i)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

olduğundan

$$DS_n = npq.$$

Misal 5. $\lambda > 0$ parametrlı Puasson paylanması riyazi gözləməsi və dispersiyasını hesablayın.

Həlli. Puasson paylanması

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Riyazi gözləmənin tərifinə görə

$$\begin{aligned} E\xi &= \sum_{k=0}^{\infty} k P\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$E\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} ((k-1) + 1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \\
&= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda^2 + \lambda.
\end{aligned}$$

Beləliklə,

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \lambda.$$

Misal 6. Mənfi binomial paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləmə və dispersiyasını hesablayın.

Həlli. Qeyd edək ki, mənfi binomial qanunla paylanmış ξ təsadüfi kəmiyyəti asılı olmayan və hər biri eyni həndəsi paylanmaya malik r sayda $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəminə bərabərdir. Asanlıqla görmək mümkündür ki, həndəsi paylanmanın riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq

$$E\xi_1 = \frac{1}{p} \text{ və } D\xi_1 = \frac{q}{p^2}.$$

Riyazi gözləmənin additivlik xassəsinə əsasən

$$E\xi = E(\xi_1 + \dots + \xi_r) = r \cdot E\xi_1 = \frac{r}{p}.$$

İndi isə dispersiyanı hesablayaq. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ təsadüfi kəmiyyətləri asılı olmayan və eyni paylanmaya malik kəmiyyətlər olduğu üçün dispersiyanın xassəsinə əsasən

$$D\xi = D(\xi_1 + \dots + \xi_r) = r \cdot D\xi_1 = \frac{rq}{p^2}.$$

İndi isə bir neçə mütləq kəsilməz paylanmanın riyazi gözləməsini və dispersiyasını hesablayaq.

Misal 7. Normal paylanmanın riyazi gözləməsini və dispersiyasını hesablayın.

Həlli. Normal paylanmanın sıxlıq funksiyasının

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

kimi olduğunu bilirik. Bunu riyazi gözləmənin tərifində nəzərə alsaq və $\frac{x-a}{\sigma} = t$ əvəzləməsi aparsaq alarıq:

$$\begin{aligned} E\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = a. \end{aligned}$$

İndi isə dispersiyanı hesablayaq:

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 t^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \sigma^2.$$

Misal 8. Pareto qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi və dispersiyasını hesablayın.

Həlli. Əvvəlcə riyazi gözləməni hesablayaq.

$$\begin{aligned} E\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{x_0}^{\infty} x \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\alpha+1} dx = \\ &= \alpha\lambda^{\alpha} \int_{x_0}^{\infty} x^{-\alpha} dx = \frac{\alpha}{\alpha-1} \lambda. \end{aligned}$$

Qeyd edək ki, riyazi gözləmə yalnız $\alpha > 1$ olduqda mövcuddur. Çünki bu halda $E|\xi| < \infty$ şərti təmin olunur.

Bənzər qaydada görmək olar ki,

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} \lambda^2.$$

Qeyd edək ki, dispersiya $\alpha > 2$ olduqda mövcuddur.

Misal 9. ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və $D(2\xi - \eta) = 6$ və $D(\xi + 2\eta) = 9$. Bu təsadüfi kəmiyyətlərinin dispersiyasını tapın.

Həlli. ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu üçün 2ξ və η , həmçinin ξ və 2η təsadüfi kəmiyyətləri də asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olacaqdır. Buna görə də dispersiyanın xassələrinə əsasən

$$D(2\xi - \eta) = 4D\xi + D\eta = 6 \text{ və}$$

$$D(\xi + 2\eta) = D\xi + 4D\eta = 9$$

münasibətlərini əldə edərik.

Beləliklə, $D\xi = 1$ və $D\eta = 2$ olduğunu əldə edərik.

Məsələlər.

1. Həndəsi paylanmanın riyazi gözləməsi və dispersiyasını hesablayın:

$$p_k = P\{\xi = k\} = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{Cavab: } E\xi = \frac{1}{p}, \quad D\xi = \frac{q}{p^2}.$$

2. $P\{\xi = k\} = \frac{1}{k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$ paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsini hesablayın.

Cavab: Mövcud deyil.

3. $P\{\xi = (-1)^k \cdot k\} = \frac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots$ paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsini hesablayın.

Cavab: Mövcud deyil, çünki

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k \cdot k| \cdot \frac{1}{k(k+1)} \text{ sırası dağılındır.}$$

§4.3. Təsadüfi kəmiyyətdən asılı funksiyanın riyazi gözləməsi

Təsadüfi kəmiyyətdən asılı funksiya üçün də riyazi gözləmə anlayışı daxil edilir. $\xi = \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega$ verilmişdir. $g(x), x \in R$ müəyyən kəsilməz monoton funksiya olsun. $\eta = g(\xi)$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

1. Əgər ξ diskret paylanmaya malikdirsə,

$$Eg(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)P\{\xi = x_k\} \quad (1)$$

belə ki, $\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_k)|P\{\xi = x_k\} < \infty$.

2. Əgər ξ mütləq kəsilməz paylanmaya malikdirsə,

$$Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p_{\xi}(x)dx \quad (2)$$

təyin olunur, belə ki, $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|p_{\xi}(x)dx < \infty$.

Məsələ 1. ξ təsadüfi kəmiyyəti aşağıdakı paylanmaya malikdir:

$$P\{\xi = k\} = \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{1-k}, \quad k = 0, 1.$$

$g(x)$ kəsilməz funksiya olsun. $E(g(\xi)) = 0$ olması üçün $g(x)$ funksiyanın hansı şərtləri ödəməli olduğunu müəyyən edin.

Həlli. Təsadüfi kəmiyyətdən asılı funksiyanın riyazi gözləməsinin tərifinə əsasən

$$\begin{aligned} E(g(\xi)) &= \sum_{k=0}^1 g(k) \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{1-k} = \\ &= g(0) \left(1 - \frac{1}{5}\right) + g(1) \frac{1}{5} = \frac{1}{5} (g(1) - g(0)) + g(0). \end{aligned}$$

Sonuncu bərabərlikdən görünür ki, $E(g(\xi)) = 0$ olması üçün $g(x)$ funksiyası $g(0) = g(1) = 0$ şərtlərini ödə-

məlidir.

Məsələ 2. Fərz edək ki, şirkət avadanlığının sıradan çıxması halında müştəriyə, dayanmaya görə cərimə kimi ξ_1 təsadüfi ödəməsi, təmirə sərf olunan materialın dəyəri olan ξ_2 -nin yarısını, təmir pulu olan ξ_3 -ün 25%-ni ödəyir. Bir sıradan çıxmaya görə ödənilən cərimənin riyazi gözləməsini tapın.

Həlli. Riyazi gözləmənin xassələrindən istifadə edərək
 $E\xi = E(\xi_1 + 0,5\xi_2 + 0,25\xi_3) = E\xi_1 + 0,5E\xi_2 + 0,25E\xi_3$

olduğunu əldə edərək.

Əgər cəmdəki riyazi gözləmələrin qiymətləri uyğun olaraq 50, 100 və 200 olarsa, onda $E\xi = 150$ manat olar.

Məsələ 3. ξ təsadüfi kəmiyyəti həndəsi paylanmaya malikdir. $E\left(\frac{1}{2^\xi}\right)$ riyazi gözləməsini hesablayın.

Həlli. Şərtə görə ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması

$$p_k = P\{\xi = k\} = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Təsadüfi kəmiyyətin funksiyasının riyazi gözləməsinin düsturundan istifadə etsək,

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{2^\xi}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right) p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right) p \cdot q^{k-1} = \\ &= \frac{p}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q}{2}\right)^{k-1} = \frac{p}{2} \frac{1}{1 - \frac{q}{2}} = \frac{p}{1 + p}. \end{aligned}$$

Məsələ 4. ξ təsadüfi kəmiyyəti həndəsi paylanmaya malikdir. $\eta = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \xi\right)$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözlə-

məsi və dispersiyasını hesablayın.

Həlli. Riyazi gözləmənin ifadəsində həndəsi paylanmanın nəzərə alsaq

$$E\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{2} \cdot k \right) p \cdot q^{k-1}.$$

Digər tərəfdən, $k = 2m$ olduqda $\sin \frac{\pi}{2} \cdot k = 0$ və $k = 2m - 1$ olduqda $\sin \frac{\pi}{2} \cdot k = (-1)^{m-1}$.

Bunları nəzərə alsaq:

$$E\eta = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} p \cdot q^{2(m-1)} = \frac{p}{1 + q^2}.$$

İndi isə $E\xi^2$ -ni hesablayaq:

$$\begin{aligned} E\eta^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi k}{2} \cdot p q^{k-1} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{2m} p q^{2(m-1)} = \frac{p}{1 - q^2} = \frac{1}{1 + q}. \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$D\eta = \frac{1}{1 + q} - \frac{p^2}{(1 + q^2)^2}.$$

Məsələ 5. ξ təsadüfi kəmiyyəti $[1,2]$ parçasıda müntəzəm paylanmaya malikdir. $\eta = \ln \xi$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini hesablayın.

Həlli. Məsələnin şərtinə görə $g(x) = \ln x$ və

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1, 2] \\ 0, & x \notin [1, 2] \end{cases}$$

(2) düsturuna əsasən

$$\begin{aligned} E\eta = Eg(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p_{\xi}(x)dx = \\ &= \int_1^2 \ln x \, dx = - \int_1^2 x d(\ln x) = \ln 4 - 1. \end{aligned}$$

Məsələ 6. Hər dəfə cihaz (avadanlıq) sıradan çıxdıqda şirkət cərimə ödəməlidir. Fərz edək ki, təmirə sərf olunan müddəti ifadə edən ξ təsadüfi kəmiyyəti eksponensial paylanmaya malikdir, λ isə təmirin intensivliyidir. Cərimənin miqdarının təmirə sərf olunan müddətin kvadratı ilə mü-tənasib olduğunu fərz edərək bir sıradan çıxmaya görə ödənilən cərimənin riyazi gözləməsini tapın.

Həlli. $g(x)$ ilə təmirin müddəti ilə cərimənin miqdarını ifadə edən funksiyanı işarə edək. Bu halda $g(\xi) = \xi^2$ olar. Burada $p_{\xi}(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$.

Deməli,

$$Eg(\xi) = \int_0^{\infty} g(x)\lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Məsələn, əgər $\lambda = 0,1$ olarsa, onda cərimənin riyazi gözləməsi 200 manat olar.

Məsələ 7. Fərz edək ki, ξ mənfi olmayan təsadüfi kəmiyyətdir və $T > 0$. $\min\{\xi; T\}$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini tapın.

Həlli. Aydındır ki, $g(x) = \min\{x; T\}$ şəklindədir. Buna görə də təsadüfi kəmiyyətin funksiyasının riyazi gözləməsinin tərifindən istifadə edərək yaza bilərik:

$$\begin{aligned}
 E\min\{\xi; T\} &= \int_0^{\infty} \min\{x; T\} dF_{\xi}(x) = \\
 &= \int_0^T x dF_{\xi}(x) + T \int_T^{\infty} dF_{\xi}(x) = \\
 &= x \cdot F_{\xi}(x) \Big|_0^T - \int_0^T F_{\xi}(x) dx + T(1 - F_{\xi}(T)) = \\
 &= T - \int_0^T F_{\xi}(x) dx = \int_0^T (1 - F_{\xi}(x)) dx = \int_0^T P\{\xi \geq x\} dx.
 \end{aligned}$$

§4.4. Təsadüfi kəmiyyətin yüksək tərtib momentləri

Riyazi gözləmə və dispersiya ilə yanaşı təsadüfi kəmiyyətin yüksək tərtib momentləri də mühüm əhəmiyyətə malikdir.

Tərif 1. $m_k = E\xi^k, k = 1, 2, \dots$, ξ -nin k tərtibli başlanğıc momenti adlanır.

Tərif 2. $E|\xi|^k, k = 1, 2, \dots$, ξ -nin k tərtibli mütləq momenti adlanır.

Tərif 3. $\mu_k = E(\xi - E\xi)^k, k = 1, 2, \dots$, ξ -nin k tərtibli mərkəzi momenti adlanır.

Tərif 4. $E|\xi - E\xi|^k, k = 1, 2, \dots$, ξ -nin k tərtibli müt-

ləq mərkəzi momenti adlanır.

Qeyd edək ki, mərkəzi momentlər başlanğıc momentlərlə ifadə oluna bilər. Asanlıqla görmək olar ki, birinci tərtib moment riyazi gözləmədir. Riyazi gözləmənin xassəsindən istifadə edərək asanlıqla görmək olar ki, birinci tərtib mərkəzi moment sıfıra bərabərdir. İkinci tərtibli mərkəzi moment dispersiya ilə üst-üstə düşür:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 0; \\ \mu_2 &= m_2 - m_1^2.\end{aligned}$$

Eyni qayda ilə göstərmək mümkündür ki,

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3;$$

Doğrudan da,

$$\begin{aligned}\mu_3 &= E(\xi - E\xi)^3 = \\ &= E(\xi^3 - 3\xi^2 \cdot E\xi + 3\xi \cdot (E\xi)^2 - (E\xi)^3) = \\ &= E\xi^3 - 3E\xi^2 \cdot E\xi + 3E\xi \cdot (E\xi)^2 - (E\xi)^3 = \\ &= m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3.\end{aligned}$$

Eyni qayda ilə göstərmək mümkündür ki,

$$\mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4.$$

Göstərmək olar ki, riyazi gözləməyə nəzərən simmetrik paylanmaya malik ξ təsadüfi kəmiyyətinin tək tərtibli mərkəzi momentləri sıfıra bərabərdir:

$$\mu_{2k+1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Doğrudan da, fərz edək ki, ξ təsadüfi kəmiyyəti mütəlak kəsilməz paylanmaya malikdir və onun sıxlıq funksiyası riyazi gözləməyə nəzərən simmetrikdir. Tərifə görə

$$\mu_{2k+1} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^{2k+1} p(x) dx.$$

Buradan

$$\mu_{2k+1} = \int_{-\infty}^{m_1} (x - m_1)^{2k+1} p(x) dx + \int_{m_1}^{\infty} (t - m_1)^{2k+1} p(t) dt.$$

Sonuncu integrallarda dəyişəni əvəz etsək və $p(x)$ funksiyasının riyazi gözləməyə nəzərən simmetrik olduğunu nəzərə alsaq

$$\begin{aligned} \mu_{2k+1} &= \int_{-\infty}^0 y^{2k+1} p(m_1 + y) dy + \\ &+ \int_0^{-\infty} (-u)^{2k+1} p(m_1 - u) d(-u) = \\ &= \int_{-\infty}^0 y^{2k+1} p(m_1 + y) dy - \int_{-\infty}^0 u^{2k+1} p(m_1 + u) du = 0. \end{aligned}$$

İndi isə mənfi olmayan təsadüfi kəmiyyətin k -cı tərtib momenti üçün ümumi düstur verək.

Teorem 1. $F(x)$ paylanma funksiyasına malik mənfi olmayan ξ təsadüfi kəmiyyətinin k -cı tərtib momenti üçün

aşağıdakı düstur doğrudur:

$$E\xi^k = k \int_0^{\infty} x^{k-1} \bar{F}(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

burada $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$.

İsbatı. Doğrudan da, istənilən $k = 1, 2, \dots$ üçün yazı bilərik ki,

$$\begin{aligned} E\xi^k &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x) = - \int_0^{\infty} x^k d\bar{F}(x) = \\ &= -x^k \bar{F}(x)|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx^k = k \int_0^{\infty} x^{k-1} \bar{F}(x) dx, \end{aligned}$$

belə ki, $x \rightarrow \infty$ olduqda

$$0 \leq x^k \bar{F}(x) = x^k \int_x^{\infty} dF(y) \leq \int_x^{\infty} y^k dF(y) \rightarrow 0.$$

Beləliklə, teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki, sığorta məsələlərində əsasən mənfi olmayan təsadüfi kəmiyyətlər iştirak etdiyinə görə bu kəmiyyətlərin momentləri üçün (1) düsturundan istifadə olunur. (1)-də $k = 1$ götürsək, $F(x)$ paylanma funksiyasına malik mənfi olmayan ξ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi üçün aşağıdakı düsturu alırıq:

$$E\xi = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx. \quad (2)$$

İndi isə yüksək tərtib momentlərin hesablanmasına aid

misallar verək.

Məsələ 1. Diskret ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

x_k	0	100
p_k	0,99	0,01

ξ təsadüfi kəmiyyətinin ilk üç momentini hesablayın.

Həlli. Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$m_1 = E\xi = 0 \cdot 0,99 + 100 \cdot 0,01 = 1,$$

$$m_2 = E\xi^2 = 0^2 \cdot 0,99 + 100^2 \cdot 0,01 = 100,$$

$$m_3 = E\xi^3 = 0^3 \cdot 0,99 + 100^3 \cdot 0,01 = 10000.$$

Göründüyü kimi, momentlər artır.

Məsələ 2. Bernulli paylanmasının k tərtibli başlanğıc və mərkəzi momentlərini hesablayın.

Həlli. Aydındır ki, hər bir $k = 1, 2, \dots$ üçün

$$E\xi^k = 1^k \cdot p + 0^k \cdot q = p.$$

İndi isə k -cı mərkəzi momentini hesablayaq:

$$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k = (-p)^k \cdot q + p \cdot q^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Məsələ 3. $[a, b]$ parçasında müntəzəm paylanmanın k -cı momentini hesablayın.

Həlli. $[a, b]$ parçasında müntəzəm paylanmanın sıxlıq funksiyası:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a; b] \\ 0, & x \notin [a; b] \end{cases}.$$

Bunu k -cı momentin düsturunda nəzərə alsaq:

$$\begin{aligned} E\xi^k &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x) dx = \int_a^b x^k \frac{1}{b-a} dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}. \end{aligned}$$

Buradan $[a, b]$ parçasında müntəzəm paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsini əldə edə bilərik:

$$E\xi = \frac{a+b}{2}.$$

Göründüyü kimi, $[a, b]$ parçasında müntəzəm paylanmanın riyazi gözləməsi həmin parçanın orta nöqtəsidir.

Eyni qayda ilə ξ -nin ikinci momentini də tapa bilərik:

$$E\xi^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Dispersiyanın düsturundan istifadə etsək,

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Qeyd edək ki, $[a, b]$ parçasında müntəzəm paylanmanın k -cı momentinin ifadəsindən istifadə edərək, $[0, 1]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin k -cı momenti üçün aşağıdakı münasibəti əldə edə bilərik:

$$E\xi^k = \frac{1}{k+1}.$$

Məsələ 4. Üstlü qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin k -cı momentini hesablayın.

Həlli. (2) düsturunda $g(x) = x^k$ götürsək,

$$\begin{aligned}
 E\xi^k &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p_\xi(x) dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^k e^{-\lambda x} dx = \\
 &= \frac{1}{\lambda^k} \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda^k} = \frac{k!}{\lambda^k}.
 \end{aligned}$$

Xüsusi halda, $k = 1$ olduqda,

$$E\xi = \frac{1}{\lambda};$$

$k = 2$ olarsa,

$$E\xi^2 = \frac{2}{\lambda^2}$$

Beləliklə,

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Buradan təsadüfi kəmiyyətin kvadratik orta meylini də əldə edə bilərik:

$$\sigma = \sqrt{D\xi} = \frac{1}{\lambda}.$$

Misal 5. Normal paylanmanın mərkəzi momentini hesablayın.

Həlli. Mərkəzi momentin tərifindən istifadə etsək və $\frac{x-a}{\sigma} = z$ əvəzləməsini aparsaq

$$\begin{aligned}
 \mu_n = E(\xi - a)^n &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^n e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \\
 &= \frac{\sigma^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^n e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.
 \end{aligned}$$

Əgər $n = 2k + 1$ tək ədəd olarsa, bu halda inteqralaltı funksiya da tək funksiya olar və

$$\mu_{2k+1} = E(\xi - a)^{2k+1} = 0$$

olar.

$n = 2k$ cüt ədəd olarsa,

$$\mu_{2k} = E(\xi - a)^{2k} = \frac{2\sigma^{2k}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} z^{2k} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

Bu inteqralda $\frac{1}{2}z^2 = t$ əvəzləməsini apararaq. Bu halda

$$\begin{aligned} \mu_{2k} &= \frac{2^k \sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{k-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{2^k \sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \\ &= 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k - 1) \sigma^{2k} = (2k - 1)!! \sigma^{2k}. \end{aligned}$$

Beləliklə, normal paylanmanın n tərtibli mərkəzi momenti üçün

$$\mu_n = E(\xi - a)^n = \begin{cases} (n - 1)!! \sigma^n, & n = 2k \\ 0, & n = 2k + 1 \end{cases}.$$

Xüsusi halda, ikinci tərtib mərkəzi moment dispersiya olduğundan

$$D\xi = E(\xi - a)^2 = \sigma^2.$$

Beləliklə, (a, σ) parametrlı normal paylanma qanunun-dakı σ parametri bu qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin kvadratik orta yayınmasıdır. Qeyd edək ki, (a, σ) parametrlı normal paylanma qanunu $a = E\xi$ və $\sigma^2 = D\xi$ parametrləri ilə tamamilə təyin olunur.

§4.5. Moda, median, kvantil, asimmetriya əmsalı, eksess

Ehtimal nəzəriyyəsində riyazi gözləmə və dispersiyadan başqa paylanmanın digər xüsusiyyətlərini əks etdirən bir sıra ədədi xarakteristikalardan da istifadə olunur.

Tərif 1. Diskret ξ təsadüfi kəmiyyətinin ən çox ehtimallı qiymətinə onun **modası** deyilir.

Mütləq kəsilməz paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətin $p_{\xi}(x)$ paylanma sıxlığı funksiyasına maksimum qiymət verən x nöqtəsinə ξ təsadüfi kəmiyyətinin **modası** deyilir. ξ təsadüfi kəmiyyətinin modası $M_o(\xi)$ kimi işarə olunur.

Məsələ 1. Bernulli paylanmasının modasını tapın.

Həlli. Aydındır ki, $p < \frac{1}{2}$ olduqda $q > p$ olur və bu halda moda 0, $p > \frac{1}{2}$ olduqda isə $p > q$ olur və moda 1-ə bərabər olur. Beləliklə, Bernulli paylanmasının modası aşağıdakı kimidir:

$$M_o(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } p < \frac{1}{2} \\ 0 \text{ və } 1, & \text{əgər } p = \frac{1}{2} \\ 1, & \text{əgər } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Məsələ 2. Aşağıdakı paylanmanın modasını tapın:

k	0	2	3
p_k	0,4	0,4	0,2

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$M_o(\xi) = 0 \text{ və } M_o(\xi) = 2.$$

Beləliklə, verilmiş paylanmanın iki modası vardır, yəni bimodal paylanmadır.

Məsələ 3. Həndəsi paylanmanın modasını tapın.

Həlli. Həndəsi paylanma $p_k = q^{k-1} \cdot p$; $k = 1, 2, \dots$;

$0 < p < 1$; $0 < q < 1$ kimi təyin olunur.

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$\max_k p_k = p_1 = p.$$

Buna görə də həndəsi qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin modası 1-ə bərabərdir, yəni

$$M_o(\xi) = 1.$$

Məsələ 4. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı funksiyası verilmişdir:

$$p(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in [0,1] \\ 0, & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Bu təsadüfi kəmiyyətin modasını tapın.

Həlli. Asanlıqla görmək olar ki, $M_o(\xi) = 1$.

Məsələ 5. $[a, b]$ parçasında müntəzəm paylanmanın modasını tapın.

Həlli. Müntəzəm paylanmanın ehtimal sıxlığı funksiyası ixtiyari $x \in [a, b]$ üçün $\frac{1}{b-a} > 0$ olduğu üçün $[a, b]$ parçasının bütün nöqtələri müntəzəm qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin modasıdır.

Məsələ 6. $\lambda > 0$ parametrli eksponensial paylanmanın modasını tapın.

Həlli. $\lambda > 0$ parametrli eksponensial paylanmanın modası $M_o(\xi) = 0$ olur, çünki sıxlıq funksiyası $x = 0$ nöq-

təsində maksimum qiymət alır.

Məsələ 7. Normal paylanmanın modasını hesablayın.

Həlli. Normal paylanmanın modasını hesablamaq üçün onun sıxlıq funksiyasının törəməsini hesablayaq:

$$p'(x) = -\frac{(x-a)}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^3} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Aydındır ki, $p'(x) = 0$ münasibətindən $x = a$ olduğunu əldə edərik.

Digər tərəfdən $x < a$ olduqda $p'(x) > 0$ və $x > a$ olduqda $p'(x) < 0$ ödənilir.

Deməli, normal paylanmanın modası a -ya bərabərdir, yəni

$$M_o(\xi) = a.$$

Beləliklə, normal paylanmanın modası onun riyazi gözləməsinə bərabərdir.

İndi isə təsadüfi kəmiyyətin medianı anlayışını verək.

Tərif 2. ξ təsadüfi kəmiyyətinin medianı onun elə qiymətinə deyilir ki, aşağıdakı şərt ödənilsin:

$$P\{\xi < M_e(\xi)\} = P\{\xi > M_e(\xi)\} = \frac{1}{2}.$$

Həndəsi olaraq $x_m = M_e(\xi)$ şaquli xətti paylanma əyrisinin əhatə etdiyi sahəni iki bərabər hissəyə bölür:

$$F(x_m) = \frac{1}{2}.$$

İndi isə medianın hesablanmasına aid aşağıdakı misallarla tanış olaq.

Məsələ 8. Bernulli paylanmasının medianını tapın.

Həlli. Medianın tərifinə əsasən asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$M_e(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } p < \frac{1}{2} \\ [0,1], & \text{əgər } p = \frac{1}{2} \\ 1, & \text{əgər } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Məsələ 9. $p(x) = 3x^2$ paylanma sıxlığı funksiyasına malik ξ təsadüfi kəmiyyətinin medianını tapın.

Həlli. Medianın tərifinə əsasən

$$\int_0^b 3x^2 dx = \frac{1}{2}.$$

Buradan

$$b^3 = \frac{1}{2} \text{ və } b = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

Beləliklə,

$$M_e(\xi) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

Məsələ 10. $[a, b]$ parçasında müntəzəm paylanmanın medianı hesablayın.

Həlli. Medianın tərifinə əsasən

$$F(x_m) = \frac{1}{2}$$

tənliyini həll etməliyik.

$$F(x_m) = \frac{x_m - a}{b - a} = \frac{1}{2}.$$

Buradan

$$x_m = \frac{a + b}{2}.$$

Göründüyü kimi, müntəzəm paylanmanın medianı onun riyazi gözləməsinə bərabərdir.

Məsələ 11. Eksponensial paylanmanın medianını hesablayın.

Həlli. Medianın tərifinə görə

$$1 - e^{-\lambda x_m} = \frac{1}{2}.$$

Buradan $x_m = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Beləliklə, təsadüfi kəmiyyətinin medianı

$$M_e(\xi) = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Qeyd edək ki, $\ln 2 < 1$ olduğu üçün $M_e(\xi) < E\xi$, yəni üstlü paylanmanın medianı onun riyazi gözləməsindən kiçikdir.

Məsələ 12. (a, σ) parametrlı normal paylanmanın medianını tapın.

Həlli. Aydındır ki,

$$F(x_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x_m} e^{-\frac{(x_m-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x_m-a} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Medianın tərifinə görə

$$\int_{-\infty}^{x_m-a} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}$$

olmalıdır. Buradan $x_m = a$ olduğunu əldə edərək.

Beləliklə, normal paylanmanın medianı onun modasına və həm də riyazi gözləməsinə bərabərdir.

Məsələ 13. Pareto paylanmasının medianını hesablayın.

Həlli. Tərifə görə

$$F(x_m) = \frac{1}{2}.$$

Pareto paylanmasının paylanma funksiyasının ifadəsini nəzərə alsaq,

$$1 - \left(\frac{\lambda}{x_m}\right)^\alpha = \frac{1}{2}.$$

Buradan

$$x_m = 2^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \lambda.$$

İndi isə kvantil anlayışını verək.

Tərif 3. $F(x_q) = q$ tənliyinin həllinə ξ təsadüfi kəmiyyətinin **q -tərtib kvantil** deyilir.

Göründüyü kimi, median $q = \frac{1}{2}$ tərtib kvantildir. Qeyd edək ki, $x_{0,25}$ və $x_{0,75}$ kvantilləri uyğun olaraq yuxarı və aşağı kvantillər adlanır.

Kvantil anlayışı ilə sıx bağlı olan faiz nöqtəsi anlayışı da vardır.

x_{1-q} kvantilinə $100q\%$ -li nöqtə deyilir, yəni ξ təsadüfi kəmiyyətinin elə qiymətinə deyilir ki, $P\{\xi \geq x_{1-q}\} = q$ olsun.

Məsələ 14. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funk-

siyası $F(x) = x^3; x \in [0,1]$ verilmişdir. $x_{0,3}$ kvantili və 30%-li nöqtəni tapın.

Həlli. $F(x_{0,3}) = 0,3$ tənliyini həll edək: $x_{0,3}^3 = 0,3$ buradan $x_{0,3} \approx 0,67$.

İndi isə 30%-li nöqtəni tapaq $x_{0,7}^3 = 0,7$ buradan alınır ki, $x_{0,7} \approx 0,89$.

Məsələ 15. Müəyyən ölkənin təsadüfi seçilmiş vətəndaşının orta illik gəlirinin müəyyən x ədədindən böyük olması ehtimalının a^x olduğu məlumdur, belə ki, $0 < a < 1$. Başqa sözlə, orta illik gəlirinin müəyyən x ədədindən böyük olduğu vətəndaşların ölkə əhalisinin ümumi sayındakı payı $a^x 100\%$ -dir. Ölkə əhalisinin illik orta gəlirinin miqdarını tapın.

Həlli. Fərz edək ki, ξ təsadüfi kəmiyyəti təsadüfi seçilmiş vətəndaşın orta illik gəlirini göstərir. Bu halda bu təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası

$$F(x) = P\{\xi \leq x\} = 1 - a^x$$

olar. Uyğun paylanma sıxlığı funksiyası

$$p(x) = a^x \ln \frac{1}{a}$$

olar.

Sıxlıq funksiyasından istifadə edərək ξ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini hesablayaq:

$$E\xi = \int_0^\infty x a^x \ln \frac{1}{a} dx = \frac{1}{\ln \frac{1}{a}}.$$

İndi isə ξ təsadüfi kəmiyyətinin medianını hesablayaq.

$$1 - a^x = \frac{1}{2}$$

tənliyi həll edək. Buradan

$$M_e(\xi) = \log_a \frac{1}{2}.$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki, bu təsadüfi kəmiyyətin modası sıfıra bərabərdir:

$$M_o(\xi) = 0.$$

Əgər $a = \frac{1}{2}$ götürsək, bu halda

$$E\xi \approx 1,44, M_e(\xi) = 1, M_o(\xi) = 0.$$

Göründüyü kimi, riyazi gözləmə mediandan 1,5 dəfə böyükdür.

Vətəndaşların orta illik gəlirini ifadə edərkən riyazi gözləmə, moda və median arasında seçim edirlər. Hökumətin mövqeyindən yanaşdıqda riyazi gözləməyə üstünlük verilməlidir. Hökuməti tənqid edənlər isə moda və mediana üstünlük verməlidir.

Onu da qeyd edək ki, riyazi gözləmənin tərifində təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin ehtimalları ilə yanaşı qiymətlərin özləri də iştirak edirlər. Bu isə o deməkdir ki, ölkədə bir neçə milyarderin olması əhalinin riyazi gözləmə ilə ifadə olunan orta illik gəlirində kəskin artıma səbəb olur. Riyazi gözləmədən fərqli olaraq, mediandan istifadə etdikdə isə bir neçə milyarderin olması əhalinin orta illik gəlirinə çox da böyük təsir göstərmir.

Təsadüfi kəmiyyətin paylanması simmetrik olub olmadığını yoxlamaq üçün assimetriya əmsalı anlayışı daxil edilir.

Tərif 4.

$$A_s = \frac{E(\xi - E\xi)^3}{(\sqrt{D\xi})^3} = \frac{\mu_3}{\sigma_\xi^3}$$

düsturu ilə təyin olunan ədədə **assimetriya əmsalı** deyilir.

ξ təsadüfi kəmiyyətinin assimetriya əmsalı tədqiq olunan təsadüfi kəmiyyətin paylanması (0,1) parametrlili normal paylanma sıxlığına nəzərən sol və ya sağ tərəfdən uzun və ya qısa olduğunu xarakterizə edir. $A_s < 0$ olduqda sol tərəf qısa, sağ tərəf uzun olur. $A_s = 0$ olduqda paylanma simmetrik olur. $A_s > 0$ olduqda paylanma soldan uzun, sağdan qısa olur.

Tərif 5.

$$E_x = \frac{E(\xi - E\xi)^4}{\sigma_\xi^4} - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma_\xi^4} - 3$$

düsturu ilə təyin olunan ədədə təsadüfi kəmiyyətin **eksessi** deyilir.

Eksessi təsadüfi kəmiyyətin paylanmasının (0,1) parametrlili normal paylanmaya nəzərən dik yaxud yastı olmasını xarakterizə edir. $E_x < 0$ olarsa, tədqiq olunan təsadüfi kəmiyyətin paylanması normal paylanmaya nəzərən dik olacaqdır. $E_x = 0$ olarsa, tədqiq olunan təsadüfi kəmiyyət normal paylanma olacaq, $E_x > 0$ olarsa isə normal paylanmanın qrafikinə nəzərən yastı olacaq.

Məsələ 16. Bernulli paylanmasına malik ξ təsadüfi kəmiyyətinin asimetriya əmsalı və eksessesini hesablayın.

Həlli. Şərtə görə

$$P\{\xi = 0\} = q; \quad P\{\xi = 1\} = p.$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$\eta = \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}$$

normallaşmış təsadüfi kəmiyyətinin mümkün qiymətləri

$$y_1 = \frac{0 - p}{\sqrt{pq}} = \frac{-p}{\sqrt{pq}} \text{ və } y_2 = \frac{1 - p}{\sqrt{pq}} = \frac{q}{\sqrt{pq}}$$

olar. Beləliklə, η təsadüfi kəmiyyətinin paylanması aşağıdakı kimi olar:

$$P\{\eta = y_1\} = P\left\{\eta = \frac{-p}{\sqrt{pq}}\right\} = P\{\xi = 0\} = q,$$

$$P\{\eta = y_2\} = P\left\{\eta = \frac{q}{\sqrt{pq}}\right\} = P\{\xi = 1\} = p.$$

Bernulli paylanmasının ekssesini hesablayaq:

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{\mu_3}{\sigma_\xi^3} = \frac{E(\xi - E\xi)^3}{(\sqrt{D\xi})^3} = \\ &= E\left(\frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}\right)^3 = \left(\frac{-p}{\sqrt{pq}}\right)^3 \cdot q + \left(\frac{q}{\sqrt{pq}}\right)^3 \cdot p = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{pq})^3} (pq^3 - qp^3) = \frac{pq(q^2 - p^2)}{(\sqrt{pq})^3} = \frac{q^2 - p^2}{\sqrt{pq}}. \end{aligned}$$

İndi isə ekssesini hesablayaq:

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{\mu_4}{\sigma_\xi^4} - 3 = \frac{E(\xi - E\xi)^4}{(\sqrt{D\xi})^4} - 3 = \\
&= E\left(\frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}\right)^4 - 3 = \left(\frac{-p}{\sqrt{pq}}\right)^4 \cdot q + \left(\frac{q}{\sqrt{pq}}\right)^4 \cdot p - 3 = \\
&= \frac{p^4 q}{p^2 q^2} + \frac{q^4 p}{p^2 q^2} - 3 = \frac{p^2}{q} + \frac{q^2}{p} - 3 = \frac{p^3 + q^3}{pq} - 3.
\end{aligned}$$

Məsələ 17. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı funksiyası verilmişdir:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} \cdot (x-2)(4-x); & x \in [2,4] \\ 0; & x \notin [2,4] \end{cases}$$

ξ təsadüfi kəmiyyətinin a) assimetriya əmsalını, b) ekssesini hesablayın.

Həlli. a) Asanlıqla görmək mümkündür ki, $E\xi = 3$ və $\sigma_\xi^2 = D\xi = 0,2$. İndi isə üçüncü mərkəzi momenti hesablayaq.

$$\begin{aligned}
\mu_3 &= E(\xi - E\xi)^3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^3 p(x) dx = \\
&= \frac{3}{4} \int_2^4 (x-3)^3 (x-2)(4-x) dx.
\end{aligned}$$

$x - 3 = t$ əvəzləməsi aparsaq və simmetrik interval üzrə tək funksiyanın integralının sıfra bərabər olduğunu nəzərə alsaq

$$\frac{3}{4} \int_{-1}^1 t^3 (1 - t^2) dt = 0.$$

Beləliklə,

$$A_s = 0.$$

b) İndi isə ξ təsadüfi kəmiyyətinin ekssesini hesablayaq:

$$\begin{aligned} \mu_4 = E(\xi - E\xi)^4 &= \frac{3}{4} \int_2^4 (x - 3)^4 (x - 2)(4 - x) dx = \\ &= \frac{3}{4} \int_{-1}^1 t^4 (1 - t^2) dt = \frac{3}{4} \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{3}{35}. \end{aligned}$$

Bunları ekssesin düsturunda nəzərə alsaq $E_x \approx -0,86$ olduğunu əldə edərik. Beləliklə, ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı funksiyasının təpə hissəsi standart normal paylanmaya nəzərən daha dikiir.

Məsələ 18. $\lambda = 1$ parametrli Laplas paylanmasına (iki-tərəfli üstlü) malik ξ təsadüfi kəmiyyətinin asimmetriya əmsalını və ekssesini hesablayın.

Həlli. Laplas paylanmasına malik ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı funksiyası

$$p(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}; \quad x \in R$$

şəklindədir.

Göründüyü kimi, bu funksiya ordinat oxuna nəzərən simmetrik funksiyaıdır, buna görə də bu təsadüfi kəmiyyətin bütün tək tərtibli başlanğıc və mərkəzi momentləri sıfıra bərabərdir:

$$m_1 = 0; \quad m_3 = 0; \quad \mu_3 = 0.$$

Buna görə də asimmetriya əmsalı sıfıra bərabərdir:

$$A_3 = 0.$$

İndi isə ekssesi hesablayaq. Bu məqsədlə σ_ξ və μ_4 -ü hesablayaq. Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2.$$

Buradan

$$D\xi = 2 \text{ və } \sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{2}.$$

Beləliklə,

$$\begin{aligned} \mu_4 &= E(\xi - E\xi)^4 = E\xi^4 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 p(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = 2 \cdot \int_0^{\infty} x^4 e^{-x} dx = 24. \end{aligned}$$

Bunları ekssesin tərifində nəzərə alsaq

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{24}{(\sqrt{2})^4} - 3 = 3.$$

Beləliklə, $E_x > 0$ olduğu üçün Laplas paylanmasının sıxlıq funksiyasının qrafiki normal paylanmanın qrafikinə nəzərən yastıdır.

§4.6. Kovariasiya və korrelyasiya əmsalı

Fərz edək ki, eyni ehtimal fəzasında ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri verilib. Bu təsadüfi kəmiyyətlər bir-birindən asılı ola və ya olmaya bilər. Təsadüfi kəmiyyətlərin asılılığını xarakterizə etmək üçün kovariasiya və korrelyasiya anlayışlarından istifadə olunur.

Tərif 1. ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləmələri $E\xi$ və $E\eta$ vardır, yəni $E|\xi| < \infty$ və $E|\eta| < \infty$.

ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin kovariasiyası aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta). \quad (1)$$

Riyazi gözləmənin tərifindən istifadə etsək,

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta.$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$\text{cov}(\xi, \xi) = D\xi,$$

başqa sözlə, təsadüfi kəmiyyətin özü ilə kovariasiyası dispersiyaya bərabərdir.

Kovariasiyanın aşağıdakı xassələri vardır:

Xassə 1. $\text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi)$.

Xassə 2. $\text{cov}(a\xi, \eta) = a\text{cov}(\xi, \eta)$, burada a ixtiyari sabitdir.

Xassə 3. Əgər ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri asılı deyilsə, onda onların kovariasiyası sıfıra bərabərdir:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = 0.$$

Lakin bu faktın tərsi doğru deyil.

Qeyd edək ki, ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta \pm 2E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta).$$

Kovariasiya anlayışından istifadə etsək,

$$D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta \pm 2cov(\xi, \eta).$$

Əgər ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri asılı deyilsə, bu halda $(\xi - E\xi)$ və $(\eta - E\eta)$ təsadüfi kəmiyyətləri də asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olacaq. Deməli,

$$E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = 0 = cov(\xi, \eta).$$

Bu fakt göstərir ki, iki təsadüfi kəmiyyət arasında asılılığı xarakterizə etmək üçün

$$E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

münasibətindən istifadə etmək olar. Göründüyü kimi, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin kovariasiyası sıfra bərabərdir. Lakin qeyd etdiyimiz kimi, bu faktın tərsi doğru deyil. Aşağıdakı misal da bu faktı təsdiq edir.

Misal 1. α təsadüfi kəmiyyəti $[-\pi, \pi]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmışdır. Göstərək ki, $\xi = \sin \alpha$ və $\eta = \cos \alpha$ təsadüfi kəmiyyətlərinin kovariasiyası sıfırdır, lakin bu təsadüfi kəmiyyətlər asılı təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Doğrudan da, kovariasiyanı tapmaq üçün əvvəlcə aşağıdakı riyazi gözləmələri hesablayaq:

$$E\xi = E(\sin \alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot p_{\alpha}(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot \frac{1}{2\pi} dx = 0,$$

$$E\eta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot \frac{1}{2\pi} dx = 0.$$

Digər tərəfdən,

$$E\xi\eta = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x \cos x) \frac{1}{2\pi} dx = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx = 0.$$

Beləliklə, $cov(\xi, \eta) = 0$ olduğunu göstərdik. İndi isə bu təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olduğunu göstərək. Başqa sözlə, göstərək ki, məsələn,

$$P\left\{\xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \eta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\} \neq P\left\{\xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\} P\left\{\eta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\}. \quad (*)$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$P\left\{\xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\} = P\left\{\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]\right\} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{6}.$$

Eyni qayda ilə

$$P\left\{\eta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\} = P\left\{\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{6}.$$

Lakin

$$P\left\{\xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \eta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\} = P\{\emptyset\} = 0.$$

Bu isə o deməkdir ki, (*) münasibəti ödənilir. Başqa sözlə, verilmiş $\xi = \cos \alpha$ və $\eta = \sin \alpha$ təsadüfi kəmiyyətləri asılı təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Qeyd. Göründüyü kimi, $cov(\xi, \eta) = 0$. Lakin $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ olduğu üçün $\xi^2 + \eta^2 = 1$ -dir. Beləliklə, ξ və η asılı təsadüfi kəmiyyətlərdir, hətta bu kəmiyyətlər arasında funksional asılılıq mövcuddur.

Tərif 2. Əgər $cov(\xi, \eta) = 0$ olarsa, bu halda ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinə **korrelə olunmayan və ya qeyri-**

korrelyar təsadüfi kəmiyyətlər deyilir.

Qeyd edək ki, təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olub olmadığını yoxlamaq üçün onların birgə paylanmasından istifadə olunur. Lakin bir çox hallarda birgə paylanma məlum olmaya bilər. Bu suala kovariasiyanın köməyi ilə də cavab vermək olur.

Misal 2. Fərz edək ki, ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. $D\xi > 0$ və $D\eta > 0$. ξ və $\xi + \eta$ təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olub olmadığını müəyyən edin.

Həlli. Bunun üçün $cov(\xi, \xi + \eta)$ -ni hesablayaq.

$$\begin{aligned} cov(\xi, \xi + \eta) &= E\xi(\xi + \eta) - E\xi \cdot E(\xi + \eta) = \\ &= E\xi^2 + E\xi\eta - (E\xi)^2 - E\xi\eta = D\xi. \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$cov(\xi, \xi + \eta) = D\xi > 0$$

olduğu üçün ξ və $\xi + \eta$ təsadüfi kəmiyyətləri asılı təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 1. Fərz edək ki, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ixtiyari təsadüfi kəmiyyətlərdir və $cov(\xi_i, \xi_j) = \sigma_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$ olsun. Onda ixtiyari $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitləri üçün

$$D(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_n\xi_n) = \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij}c_ic_j.$$

İsbatı. Fərz edək ki,

$$\eta_n = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_n\xi_n.$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$\eta_n - E\eta_n = \sum_{i=1}^n c_i(\xi_i - E\xi_i)$$

və

$$(\eta_n - E\eta_n)^2 = \sum_{i,j=1}^n c_i c_j (\xi_i - E\xi_i)(\xi_j - E\xi_j).$$

Sonuncu bərabərliyin hər iki tərəfindəki riyazi gözləmələrini hesablamaqla teoremin hökmünü alırıq.

Beləliklə, teorem isbat olundu.

Misal 3. Normallaşmış $\xi^* = \frac{\xi - E\xi}{\sigma_\xi}$ və $\eta^* = \frac{\eta - E\eta}{\sigma_\eta}$ təsadüfi kəmiyyətlərin kovariasiyasını tapın.

Həlli. Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$\begin{aligned} cov(\xi^*, \eta^*) &= cov\left(\frac{\xi - E\xi}{\sigma_\xi}, \frac{\eta - E\eta}{\sigma_\eta}\right) = \\ &= \frac{cov(\xi - E\xi, \eta - E\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}. \end{aligned}$$

ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri arasında olan asılılığı kəmiyyətə xarakterizə etmək üçün yeni anlayış daxil edilir.

Tərif 3. Fərz edək ki, $0 < D\xi < \infty$ və $0 < D\eta < \infty$. ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin **korrelyasiya əmsalı** aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\rho = \rho(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}.$$

Korrelyasiya əmsalının aşağıdakı xassələri vardır:

Xassə 1. $-1 \leq \rho \leq 1$.

İsbatı. Riyazi gözləmənin xassəsinə əsasən

$$E \left(\frac{\xi - E\xi}{\sigma_\xi} \pm \frac{\eta - E\eta}{\sigma_\eta} \right)^2 \geq 0.$$

Buradan

$$\begin{aligned} E \left(\left(\frac{\xi - E\xi}{\sigma_\xi} \right)^2 \pm 2 \left(\frac{\xi - E\xi}{\sigma_\xi} \cdot \frac{\eta - E\eta}{\sigma_\eta} \right) + \left(\frac{\eta - E\eta}{\sigma_\eta} \right)^2 \right) = \\ = \frac{1}{\sigma_\xi^2} E(\xi - E\xi)^2 \pm \frac{2}{\sigma_\xi \sigma_\eta} E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) + \\ + \frac{1}{\sigma_\eta^2} E(\eta - E\eta)^2 = \frac{D\xi}{\sigma_\xi^2} \pm \frac{2cov(\xi, \eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta} + \frac{D\eta}{\sigma_\eta^2} = \\ = 2 \pm \frac{2cov(\xi, \eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta} \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

(2)-dan alınır ki, $2 \pm 2\rho \geq 0$. Buradan alınır ki,

$$-1 \leq \rho \leq 1.$$

Nəticə. $|cov(\xi, \eta)| \leq \sigma_\xi \sigma_\eta$.

Xassə 2. $|\rho| = 1$ münasibəti yalnız və yalnız ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri arasında xətti asılılıq olduqda doğrudur, yəni $\eta = a\xi + b$, belə ki, $\rho = 1$ olduqda $a > 0$, $\rho = -1$ olduqda isə $a < 0$.

İsbatı. Əgər $\rho = 1$ olarsa, bu halda

$$E \left(\frac{\xi - E\xi}{\sigma_\xi} - \frac{\eta - E\eta}{\sigma_\eta} \right)^2 = 2 - 2\rho = 0$$

olar. Buradan

$$\frac{\xi - E\xi}{\sigma_\xi} - \frac{\eta - E\eta}{\sigma_\eta} = 0.$$

Beləliklə,

$$\eta = \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} \xi + \left(E\eta - \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} E\xi \right).$$

Başqa sözlə,

$$\eta = a\xi + b,$$

$$\text{burada } a = \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} \text{ və } b = E\eta - \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} E\xi.$$

Analoji qaydada, əgər $\rho = -1$ olarsa, bu halda

$$\eta = -\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} \xi + \left(E\eta + \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} E\xi \right).$$

İndi isə əksini isbat edək. Göstərək ki, $a > 0$ olduqda $\rho \equiv \rho(\xi, a\xi + b) = 1$ və $a < 0$ olduqda isə $\rho \equiv \rho(\xi, a\xi + b) = -1$ -dir.

Əgər $\eta = a\xi + b$ olarsa, bu halda

$$\eta^* = \frac{\eta - E\eta}{\sigma_\eta} = \frac{a\xi + b - E(a\xi + b)}{\sigma_{a\xi+b}} = \frac{a(\xi - E\xi)}{|a|\sigma_\xi} = \frac{a}{|a|} \xi^*$$

münasibəti doğrudur, burada ξ^* və η^* ilə normallaşmış təsadüfi kəmiyyətlər işarə olunmuşdur.

Kovariasiyanın 4-cü xassəsinə əsasən

$$\rho(\xi, \eta) = \text{cov}(\xi^*, \eta^*) = \text{cov} \left(\xi^*, \frac{a}{|a|} \xi^* \right) =$$

$$= \frac{a}{|a|} \operatorname{cov}(\xi^*, \xi^*) = \frac{a}{|a|}$$

olduğunu əldə edərik. Sonuncu münasibətdən görünür ki, $a > 0$ olduqda $\rho(\xi, \eta) = 1$ və $a < 0$ olduqda isə $\rho(\xi, \eta) = -1$.

Beləliklə, xassə 2 isbat olundu.

Xassə 3. Əgər ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda

$$\rho(\xi, \eta) = 0.$$

Lakin tərsi doğru deyildir.

Bu xassənin doğruluğu korrelyasiya əmsalının tərifindən və kovariasiyanın 3-cü xassəsindən alınır.

Korrelyasiya əmsalına təsadüfi kəmiyyətlərin arasındakı xətti asılılığın dərəcəsini ifadə edən xarakteristika kimi baxmaq olar. Əgər $\rho > 0$ olarsa, bu o deməkdir ki, ξ təsadüfi kəmiyyəti artdıqca, η təsadüfi kəmiyyəti də artma tendensiyasına malikdir. Belə asılığa müsbət korrelyasiya asılılığı deyilir. Məsələn, insanın boyu və çəkisi müsbət korrelyasiya asılılığına malikdir. Əgər $\rho < 0$ olarsa, bu o deməkdir ki, ξ təsadüfi kəmiyyəti artdıqca, η təsadüfi kəmiyyəti də azalma tendensiyasına malikdir. Belə asılılığa mənfi korrelyasiya asılılığı deyilir. Əgər $\rho = 0$ olarsa, bu halda ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinə **korrelə olunmayan və ya qeyri-korrelyar təsadüfi kəmiyyətlər** deyilir. Qeyd edək ki, $\rho = 0$ olduqda təsadüfi kəmiyyətlər asılı ola da bilərlər. $\rho = 0$ olması sadəcə təsadüfi kəmiyyətlərin xətti asılı olmaması deməkdir.

Misal 4. θ təsadüfi kəmiyyəti $[0,1]$ -də müntəzəm paylanmaya malikdir. $\xi = a\theta, \eta = b\theta$, $a, b \in R$ təsadüfi kəmiyyətlərinin kovariasiyasını və korrelyasiya əmsalını tapın.

Həlli. Bu məqsədlə

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta$$

düsturundan istifadə edəcəyik.

Müntəzəm paylanmanın sıxlıq funksiyası

$$p_{\theta}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

olduğu üçün

$$E\xi = E(a\theta) = a \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{\theta}(x) dx = a \int_0^1 x dx = \frac{a}{2}.$$

Eyni qayda ilə

$$E\eta = \frac{b}{2}.$$

Digər tərəfdən,

$$E(\xi \cdot \eta) = E(ab\theta^2) = abE\theta^2 = \frac{ab}{3}.$$

Beləliklə,

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \frac{ab}{3} - \frac{ab}{4} = \frac{ab}{12}$$

olduğunu əldə edərik.

İndi isə korrelyasiya əmsalını tapaq. Bu məqsədlə dispersiyaları hesablayaq.

$$\begin{aligned} D\xi &= D(a\theta) = a^2 D\theta = a^2 (E\theta^2 - (E\theta)^2) = \\ &= a^2 \left(\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) = \frac{a^2}{12}. \end{aligned}$$

Eyni qayda ilə,

$$D\eta = \frac{b^2}{12}.$$

Beləliklə,

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\frac{a^2}{12}} = \frac{|a|}{2\sqrt{3}}, \quad \sigma_{\eta} = \sqrt{D\eta} = \sqrt{\frac{b^2}{12}} = \frac{|b|}{2\sqrt{3}}$$

Bunları korrelyasiya əmsalının tərifində nəzərə alsaq:

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}} = \frac{ab}{|a||b|}.$$

Beləliklə, əgər $ab > 0$ olarsa, $\rho(\xi, \eta) = 1$ və əgər $ab < 0$ olarsa, $\rho(\xi, \eta) = -1$ olar.

§4.7. Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas bərabərsizlikləri

1.Markov bərabərsizliyi. Fərz edək ki, ξ mənfi olmayan təsadüfi kəmiyyətdir. Onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$P\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}. \quad (1)$$

İsbatı. ξ təsadüfi kəmiyyəti üçün aşağıdakı münasibəti yazmaq mümkündür:

$$\xi = \xi \cdot I_{\{\xi > \varepsilon\}} + \xi \cdot I_{\{\xi \leq \varepsilon\}},$$

burada $I_A \equiv I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{əgər } \omega \in A \\ 0 & \text{əgər } \omega \notin A \end{cases}$ hadisəsinin indikatorudur. $\xi \cdot I_{\{\xi \leq \varepsilon\}}$ mənfi olmadığı üçün ikinci həddi atsaq,

$$\xi \geq \xi \cdot I_{\{\xi > \varepsilon\}}.$$

Buradan riyazi gözləmənin monotonluq xassəsindən və A hadisəsinin indikatorunun riyazi gözləməsinin bu hadisənin ehtimalına bərabər olmasından istifadə etsək:

$$E\xi \geq E(\xi \cdot I_{\{\xi > \varepsilon\}}) \geq E(\varepsilon \cdot I_{\{\xi > \varepsilon\}}) = \varepsilon P\{\xi > \varepsilon\}.$$

Bununla da Markov bərabərsizliyi isbat olundu.

Markov bərabərsizliyindən aşağıdakı bərabərsizliklər alınır.

Nəticə. Fərz edək ki, ξ ixtiyari təsadüfi kəmiyyətdir. Onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq \frac{E|\xi|}{\varepsilon}, \quad (2)$$

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} = P\{\xi^2 > \varepsilon^2\} \leq \frac{E\xi^2}{\varepsilon^2}, \quad (3)$$

$$P\{|\xi - E\xi| > \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \quad (4)$$

(4) **Çebişev bərabərsizliyi** adlanır, burada $E|\xi| < \infty$ olmalıdır.

Qeyd edək ki, əgər $D\xi = 0$ olarsa, onda $\xi = E\xi$ münaşibəti sanki yəqin olaraq ödənilir (bax, dispersiya xassə 6). Bu faktın doğruluğu Çebişev bərabərsizliyindən alınır. Doğrudan da,

$$P\{|\xi - E\xi| > \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2} = 0.$$

Ehtimal mənfi olmadığı üçün

$$P\{|\xi - E\xi| > \varepsilon\} = 0.$$

Buradan

$$P\{|\xi - E\xi| \leq \varepsilon\} = 1.$$

ε ixtiyari olduğu üçün, başqa sözlə, sanki yəqin olaraq

$\xi = E\xi$ olur.

İndi isə Çebışev bərabərsizliyindən istifadə etməklə üç siqma qaydasını verək.

Fərz edək ki, $P(|\xi - E\xi| \leq 3\sigma)$ ehtimalını qiymətləndirmək tələb olunur, burada $\sigma = \sqrt{D\xi}$.

(4) bərabərsizliyindən asanlıqla görmək olar ki,

$$P\{|\xi - E\xi| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Əgər $\varepsilon = 3\sigma$ götürsək, bu halda

$$P\{|\xi - E\xi| \leq 3\sigma\} \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0,88 \approx 0,9$$

olar. Beləliklə,

$$P\{|\xi - E\xi| \leq 3\sigma\} \geq 0,9.$$

Çebışevin ikinci bərabərsizliyi göstərir ki, əgər $D\xi$ dispersiyası kifayət qədər kiçikdirsə (məsələn, fərz edək ki, $D\xi \leq \delta\varepsilon^2$), bu halda $(1 - \delta)$ -dan kiçik olmayan ehtimalla $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin qiyməti özünün orta $E\xi$ qiymətindən ən çoxu ε qədər fərqlənir:

$$P\{E\xi - \varepsilon \leq \xi \leq E\xi + \varepsilon\} \geq 1 - \delta.$$

Məsələ 2. Simmetrik metal pul n dəfə atılır. Gerb üzünün düşməsi tezliyinin $\frac{1}{2}$ -dən fərqlənməsinin 0,01 -dən böyük olması ehtimalını qiymətləndirin.

Həlli. S_n ilə gerb üzünün düşməsi sayını işarə edək. Aydındır ki, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ kimi göstərilə bilər, belə ki, ξ_i təsadüfi kəmiyyətləri Bernulli paylanmasına tabedir, yəni

rəqəm üzü düşdükdə 0 və gerb üzü düşdükdə isə 1 qiymətini alan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir:

$$P\{\xi_i = 0\} = P\{\xi_i = 1\} = \frac{1}{2}.$$

Məqsədimiz $P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > 0,01\right\}$ ehtimalını qiymətləndirməkdən ibarətdir.

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$E\xi_n = \frac{1}{2}, \quad D\xi_n = \frac{1}{4}, \quad E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{və} \quad DS_n = \frac{1}{4}n.$$

Çebişev bərabərsizliyindən istifadə etsək,

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > 0,01\right\} &= P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| > 0,01\right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{(0,01)^2} D\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{D\xi_1}{(0,01)^2 n}. \end{aligned}$$

Xüsusi halda $n = 10000$ olduqda

$$P\left\{\left|\frac{S_{10000}}{10000} - \frac{1}{2}\right| > 0,01\right\} \leq \frac{1}{4 \cdot 10^4 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{4}.$$

Deməli, bu halda axtarılan ehtimal yuxarıdan $\frac{1}{4}$ ədədi ilə məhduddur. Bu isə o deməkdir ki, simmetrik metal pul 10000 dəfə atıldıqda orta hesabla $\frac{1}{4}$ -dən çox olmayan hallarda gerb üzünün düşməsi tezliyinin $\frac{1}{2}$ -dən fərqlənməsinin 0,01-dən böyük olması müşahidə olunacaqdır. Çebişev bərabərsizliyinin verdiyi bu nəticənin nə dərəcədə kobud olduğunu mərkəzi limit teoremi mövzusunda görmək müm-

kündür.

Məsələ 3. Asılı olmayan 1000 sayda sınağın hər birində A hadisəsinin baş verməsi ehtimalı 0,75-dir. Bu hadisənin baş verməsi sayı olan S_n təsadüfi kəmiyyətinin 720 ilə 780 arasında qiymət alması ehtimalını aşağıdan qiymətləndirin.

Həlli. Asanlıqla görmək mümkündür ki, S_n təsadüfi kəmiyyəti Binomial paylanmaya malikdir və $ES_n = np = 750$ və $DS_n = npq = 750 \cdot 0,25 = 187,5$.

Çebişev bərabərsizliyinə əsasən

$$P\{720 \leq S_n \leq 780\} = P\{|S_n - ES_n| \leq 30\} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{DS_n}{30^2} = 0,79.$$

Qeyd edək ki, mərkəzi limit teoremindən istifadə etməklə yuxarıdakı ehtimal üçün daha dəqiq qiymətləndirmə almaq mümkündür (bax, §7.4, misal 2).

2. İensen bərabərsizliyi.

Fərz edək ki, $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi mövcuddur, yəni $E|\xi| < \infty$. Onda ixtiyari $g(x)$ qabarıq funksiyası üçün

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi).$$

İsbatı. Qabarıq funksiyanın tərifinə əsasən ixtiyari $x_0 \in R$ üçün elə $\lambda = \lambda(x_0)$ ədədi vardır ki,

$$g(x) - g(x_0) \geq \lambda(x - x_0).$$

Sonuncu bərabərlikdə $x = \xi$, $x_0 = E\xi$ götürüb riyazi gözləmənin monotonluq xassəsini tətbiq etsək,

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi) + \lambda E(\xi - E\xi).$$

Buradan $Eg(\xi) \geq gE(\xi)$.

Bununla da İensen bərabərsizliyi isbat olundu.

İndi isə İensen bərabərsizliyinin xüsusi halına baxaq.

Əgər $g(x) = x^k$, $k > 1$ olarsa, bu halda İensen bərabərsizliyindən aşağıdakı bərabərsizliyi əldə edərik:

$$(E\xi)^k \leq E\xi^k.$$

Qeyd. $k = 2$ olduqda sonuncu bərabərsizlikdən çıxır ki,

$$(E\xi)^2 \leq E\xi^2.$$

Beləliklə, təsadüfi kəmiyyətin ikinci momenti mövcuddursa, birinci momenti də mövcuddur.

Qeyd edək ki, sonuncu bərabərsizlik həmçinin dispersiyanın xassəsindən də çıxır:

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 \geq 0 \text{ olduğu üçün } E\xi^2 \geq (E\xi)^2.$$

3. Lyapunov bərabərsizliyi. $0 < \alpha \leq \beta$ olsun. Onda

$$(E|\xi|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leq (E|\xi|^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

İsbatı. İensen bərabərsizliyində

$$\eta = |\xi|^\alpha \text{ və } g(x) = |x|^{\beta/\alpha}$$

götürsək,

$$E|\eta|^{\beta/\alpha} \geq |E\eta|^{\beta/\alpha}$$

olduğunu əldə edərik. Buradan

$$E|\eta|^\beta \geq (E|\xi|^\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Beləliklə,

$$(E|\xi|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leq (E|\xi|^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Lyapunov bərabərsizliyi göstərir ki, əgər $E|\xi|^\beta < \infty$ olarsa, bu halda bütün $0 < \alpha \leq \beta$, üçün $E|\xi|^\alpha < \infty$.

Lyapunov bərabərsizliyindən həmçinin alırıq ki,

$$E|\xi| \leq (E|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \dots \leq (E|\xi|^n)^{\frac{1}{n}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

4. Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyi. Fərz edək ki, $\xi = \xi(\omega)$ və $\eta = \eta(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətləri $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında təyin olunmuşdur və $E\xi^2 < \infty, E\eta^2 < \infty$. Onda $E|\xi\eta| < \infty$ və

$$E|\xi\eta| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}.$$

İsbatı. Əvvəlcə $E\xi^2 > 0$ və $E\eta^2 > 0$ olduğunu fərz edək.

$$2|ab| \leq a^2 + b^2$$

bərabərsizliyində

$$a = \frac{\xi}{\sqrt{E\xi^2}}, b = \frac{\eta}{\sqrt{E\eta^2}}$$

qəbul edərək,

$$2 \left| \frac{\xi\eta}{\sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}} \right| \leq \frac{\xi^2}{E\xi^2} + \frac{\eta^2}{E\eta^2}.$$

Riyazi gözləmənin monotonluq xassəsinə əsasən

$$\frac{E|\xi\eta|}{\sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}} \leq \frac{E\xi^2}{E\xi^2} + \frac{E\eta^2}{E\eta^2} = 2.$$

Buradan $E|\xi\eta| \leq 2\sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$ olduğunu əldə edərik.

İndi isə fərz edək ki, $E\xi^2 = 0$ ($E\eta^2 = 0$). Bu halda məlumdur ki, $P\{\xi = 0\} = 1$.

Deməli, $E(\xi\eta) = 0$. Beləliklə, $E|\xi\eta| = 0$.

§4.8. Təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikalarının maliyyə riyaziyyatında tətbiqi

Fərz edək ki, maliyyə bazarında qərar qəbul edən şəxs müəyyən maliyyə əməliyyatı aparır. Məsələn, müəyyən qiymətli kağız alıb satır. Bu əməliyyatın gözlənilən gəlirini ξ ilə işarə edək. Aydındır ki, ξ təsadüfi kəmiyyət olacaqdır. Çünki maliyyə əməliyyatları əsasən qeyri-müəyyənlik şəraitində aparılır və bir maliyyə əməliyyatının müxtəlif mümkün nəticələri ola bilər.

Göründüyü kimi, hər bir maliyyə əməliyyatına qarşı biz bir təsadüfi kəmiyyət qoyuruq və bu təsadüfi kəmiyyəti əməliyyatın təsadüfi gəliri adlandırmaq olar.

Maliyyə əməliyyatının aşağıdakı xarakteristikalarını verək:

1. Maliyyə əməliyyatının effektivliyi. Maliyyə əməliyyatının gözlənilən orta gəlirinə, başqa sözlə ξ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə maliyyə əməliyyatının **gözlənilən orta gəliri** və ya **maliyyə əməliyyatının effektivliyi** deyilir.

2. Maliyyə əməliyyatının riski. ξ təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyasına maliyyə əməliyyatının riski deyilir. Qeyd edək ki, çox zaman maliyyə əməliyyatının riski olaraq $r_\xi = \sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$ götürülür.

Adətən riski azaltmağa çalışırlar. Bunun üçün bir çox metodlar mövcuddur.

Fərz edək ki, n sayda korrele olunmayan müxtəlif $Q_1, \dots, Q_n$ maliyyə əməliyyatları aparılır. Bu əməliyyatların effektivliyi $e_1, \dots, e_n$, riskləri isə $r_1, \dots, r_n$ olsun. Onda bu əməliyyatlardan ibarət olan portfelin effektivliyi

$$e = \frac{e_1 + \dots + e_n}{n},$$

riski isə

$$r = \frac{\sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2}}{n}$$

olar.

Nəticə. Fərz edək ki, əməliyyatlar korreleə olunmayandır, $e_i \geq a$ və $b \leq r_i \leq c$, $i = \overline{1, n}$. Onda bu əməliyyatlardan ibarət portfelin effektivliyi a -dan kiçik deyil, riski isə $\frac{b}{\sqrt{n}} \leq r \leq \frac{c}{\sqrt{n}}$ bərabərsizliyini ödəyir, yəni n artdıqca azalır.

Bu nəticə **diversifikasiya effekti** adlanır.

Diversifikasiya prinsipinin əsas mənası budur ki, bir-birindən asılı olmayan müxtəlif əməliyyatlar apardıqda effektivlik orta olacaq, risk isə birmənalı olaraq azalacaqdır.

Misal 1. Fərz edək ki, investor effektivliyi və riski cədvəldə verilmiş dörd tip asılı olmayan qiymətli kağızlardan ibarət portfel düzəltmək istəyir:

i	1	2	3	4
e_i	2	4	8	12
r_i	1	2	4	6

Bu qiymətli kağızlardan bərabər payda portfel qurmağın bir neçə variantına baxaq. Qeyd edək ki, verilmiş halda portfelin effektivliyi qiymətli kağızların effektivliklərinin

ədədi ortasına, riski isə $r = \frac{\sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2}}{n}$ -ə bərabərdir.

A) Portfel ancaq 1-ci və 2-ci tiplərdən ibarətdirsə, bu halda

$$e_{12} = (2 + 4)/2 = 3;$$

$$r_{12} = \frac{\sqrt{1 + 2^2}}{2} \approx 1,12.$$

B) Portfel ancaq 1-ci, 2-ci və 3-cü tiplərdən ibarətdirsə, bu halda

$$e_{1-3} = (2 + 4 + 8)/3 = 4,67;$$

$$r_{123} = \frac{\sqrt{1 + 2^2 + 4^2}}{3} \approx 1,12.$$

C) Portfel bütün tiplərdən ibarətdirsə, bu halda

$$e_{1-4} = (2 + 4 + 8 + 12)/4 = 6,5;$$

$$r_{123} = \frac{\sqrt{1 + 2^2 + 4^2 + 8^2}}{4} \approx 1,89.$$

Göründüyü kimi, portfelin daha çox qiymətli kağızdan təşkili onun effektivliyinin sürətlə, riskinin isə zəif artmasına gətirib çıxarır.

Misal 2. İki müxtəlif şirkətin səhmlərinin qiymətinin dəyişməsinin dispersiyaları uyğun olaraq $D\xi = 2$ və $D\eta = 8$ korrelyasiya əmsalı isə $\rho = 0,8$ -dir. Birinci şirkətin 5 səhmindən və ikinci şirkətin 3 səhmindən ibarət portfelin qiymət dəyişməsinin dispersiyasını (riskini) tapın.

Həlli. Təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin dispersiyası

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2 \operatorname{cov}(\xi, \eta).$$

Korrelyasiya əmsalının tərifindən və məsələnin şərtindən istifadə edərək alırıq ki,

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \rho \cdot \sqrt{D\xi} \cdot \sqrt{D\eta} = 0,8 \cdot 4 = 3,2.$$

Beləliklə,

$$\begin{aligned} D(5\xi + 3\eta) &= D(5\xi) + D(3\eta) + 2 \text{cov}(5\xi, 3\eta) = \\ &= 25D\xi + 9D\eta + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \text{cov}(\xi, \eta) = \\ &= 25 \cdot 2 + 9 \cdot 8 + 30 \cdot 3,2 = 218. \end{aligned}$$

Misal 3. İki şirkətin səhmlərinin qiymətlərinin gün ərzində dəyişməsinə ifadə edən ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma cədvəli aşağıdakı kimi verilmişdir:

$\xi \backslash \eta$	-1	1
-1	0,3	0,2
1	0,1	0,4

Bu təsadüfi kəmiyyətlərin korrelyasiya əmsalını tapın.

Həlli. Əvvəlcə kovariasiyanı tapaq. Bu məqsədlə

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta$$

düsturundan istifadə edəcəyik.

Asanlıqla görmək olar ki,

$$E(\xi\eta) = 0,3 - 0,2 - 0,1 + 0,4 = 0,4.$$

$E\xi$ və $E\eta$ riyazi gözləmələrini tapmaq üçün bu təsadüfi kəmiyyətin hər birinin paylanmasını müəyyən edək.

Asanlıqla görmək olar ki, ξ təsadüfi kəmiyyətinin pay-

lanma qanunu aşağıdakı kimidir:

-1	1
0,5	0,5

Cədvələ əsasən

$$E\xi = 0,5 - 0,5 = 0;$$

Eyni qayda ilə η təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu da tapa bilərik:

-1	1
0,4	0,6

Buradan

$$E\eta = 0,6 - 0,4 = 0,2; \quad D\eta = 1 - (0,2)^2 = 0,96.$$

Beləliklə,

$$\text{cov}(\xi, \eta) = 0,4.$$

Digər tərəfdən $D\xi = 1$ və $D\eta = 1 - (0,2)^2 = 0,96$ olduğunu da korrelyasiya əmsalının tərifində nəzərə alsaq

$$\rho = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}} = \frac{0,4}{\sqrt{0,96}} = 0,408.$$

Qeyd edək ki, maliyyə riyaziyyatında ən vacib anlayışlardan biri dəyişkənlik (volatillik) anlayışıdır. Bəzi hallarda dəyişkənlik ölçüsü olaraq σ götürülür. Lakin Çebışev bərabərsizliyi göstərir ki, bu halda ehtiyatlı olmaq lazımdır.

Qeyd edək ki, ξ təsadüfi kəmiyyəti normal qanunla paylanmışdırsa,

$$P\{|\xi - a| \leq \sigma\} \approx 0,68$$

və

$$P\{|\xi - a| \leq 1,65\sigma\} \approx 0,90.$$

Deməli, təsadüfi kəmiyyətlərin qiymətləri üzərində müşahidə apardıqda təqribən 90% halda gözləmək olar ki, qiymətlərin a -dan fərqlərinin mütləq qiyməti $1,65\sigma$ -dan kiçik olacaq. Əgər qiymətli kağızlar bazarında S_n ilə bugünkü qiyməti işarə etsək,

$$S_n = S_{n-1}(1 + h_n)$$

olar.

Deməli, əgər $h_n = \sigma \cdot \varepsilon_n$ -dirsə, onda hökm etmək olar ki, bugünkü məlum qiymət S_{n-1} -dirsə, sabahkı S_n qiyməti 90% halda $[S_{n-1}(1 - 1,65\sigma); S_{n-1}(1 + 1,65\sigma)]$ parçasında yerləşəcəkdir və yalnız 5% halda $S_{n-1}(1 - 1,65\sigma)$ -dən kiçik və $S_{n-1}(1 + 1,65\sigma)$ -dən böyük olacaqdır. Buna görə də maliyyə işinə aid bəzi kitablarda dəyişkənlik ölçüsü olaraq σ əvəzinə $\nu = 1,65\sigma$ götürülür.

V FƏSİL

ASILI TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR

Ehtimal nəzəriyyəsində və onun tətbiqlərində təsadüfi kəmiyyətlər arasında olan asılılığın öyrənilməsi çox mühüm yer tutur. Təsadüfi kəmiyyətləri öyrənərkən həmişə onların bir-birindən asılılığının dərəcəsinə və təbiətinə diqqət yetirmək lazımdır. Bu asılılıq güclü və ya zəif ola bilər.

Praktik məsələlərdə bəzən təsadüfi kəmiyyətlər arasında əlaqə o qədər yaxın ola bilər ki, bir təsadüfi kəmiyyətin qiymətini bilməklə digərinin qiymətini dəqiq göstərmək mümkün ola bilər. Başqa sözlə, bu kəmiyyətlər arasında funksional asılılıq ola bilər. Bəzən isə əksinə, təsadüfi kəmiyyətlər arasında asılılıq o qədər zəif ola bilər ki, onları praktiki olaraq asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər hesab etmək olar. Bu iki halın arasında olan digər asılılıq növü isə stoxastik (statistik və ya ehtimal) asılılıqdır. Stoxastik asılılıq güclü və ya zəif ola bilər: bu asılılıq artdıqca funksional asılılığa yaxınlaşır. Beləliklə, funksional asılılığa stoxastik asılılığın ən güclü halı kimi baxmaq olar. Başqa bir hal təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmazlığıdır.

Beləliklə, stoxastik asılılıq təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmazlığı ilə funksional asılılığı arasında yer tutur. Təsadüfi kəmiyyətlərin stoxastik asılılığı dedikdə bir təsadüfi kəmiyyətin hər bir qiymətinə qarşı digər təsadüfi kəmiyyətin müəyyən paylanması uyğun gəlməsi başa düşülür. Bu fəsil stoxastik asılı təsadüfi kəmiyyətlərin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

§5.1. Şerti paylanmalar

Bu paraqraf iki təsadüfi kəmiyyətdən birinin digərinə nəzərən şerti paylanmasına həsr olunmuşdur.

Fərz edək ki, ξ və η hər hansı $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyətlərdir. Bu təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma funksiyalarını, uyğun olaraq, $F_\xi(x)$ və $F_\eta(y)$ ilə, ikiölçülü birgə paylanma funksiyasını isə $F_{\xi\eta}(x, y)$ ilə işarə edək:

$$\begin{aligned} F_\xi(x) &= P\{\xi \leq x\}, F_\eta(y) = P\{\eta \leq y\}, \\ F_{\xi\eta}(x, y) &= P\{\xi \leq x, \eta \leq y\}. \end{aligned}$$

Əvvəlcə fərz edək ki, bu təsadüfi kəmiyyətlər diskretdir, yəni ξ təsadüfi kəmiyyəti $x_1, x_2, \dots$ qiymətlərini, $p_i, i \geq 1$ ehtimalları ilə, η təsadüfi kəmiyyəti isə $y_1, y_2, \dots$ qiymətlərini p_j ehtimalları ilə alır, yəni

$$p_i = P\{\xi = x_i\} \text{ və } p_j = P\{\eta = y_j\}.$$

Bildiyimiz kimi, ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin ikiölçülü birgə paylanma qanunu aşağıdakı ehtimallar ailəsi ilə verilir:

$$p_{i,j} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}, \quad i, j \geq 1.$$

Tərif 1. $P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}, i \geq 1$ ehtimallar ailəsinə ξ diskret təsadüfi kəmiyyəti üçün η təsadüfi kəmiyyətinin y_j qiyməti almasına nəzərən **şerti paylanma qanunu** deyilir.

Şerti ehtimal düsturuna əsasən yaza bilərik ki,

$$P\{\xi = x_i | \eta = y_j\} = \frac{P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}}{P\{\eta = y_j\}} = \frac{p_{i,j}}{p_j}, \quad i \geq 1.$$

$P\{\xi = x_i | \eta = y_j\}$ ehtimalı $\eta = y_j$ olması şərti daxilində ξ diskret təsadüfi kəmiyyətinin x_k qiymətini almasının şərti ehtimalıdır.

Məsələ 1. Bir ay ərzində olan sığorta hallarının sayı ν təsadüfi kəmiyyətidir və

$$P\{\nu = n\} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, n \geq 0.$$

Bu ay ərzində sığorta hallarının 4-dən çox olmadığı məlumdursa, heç olmazsa, 1 sığorta halının olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

Həlli. Axtarılan ehtimal $P\{\nu \geq 1 | \nu \leq 4\}$ şərti ehtimalıdır:

$$P\{\nu \geq 1 | \nu \leq 4\} = \frac{P\{1 \leq \nu \leq 4\}}{P\{\nu \leq 4\}}.$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$\begin{aligned} P\{1 \leq \nu \leq 4\} &= P\{\nu = 1\} + P\{\nu = 2\} + P\{\nu = 3\} + \\ &+ P\{\nu = 4\} = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Eyni qayda ilə

$$\begin{aligned} P(\nu \leq 4) &= P\{\nu = 0\} + P\{\nu = 1\} + P\{\nu = 2\} + \\ &+ P\{\nu = 3\} + P\{\nu = 4\} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$P\{v \geq 1 | v \leq 4\} = \frac{2}{5}.$$

Tərif 2. Aşağıdakı funksiya ξ diskret təsadüfi kəmiyyət üçün η təsadüfi kəmiyyətinin y_j qiyməti almasına nəzərən **şərti paylanma funksiyası** deyilir:

$$F_{\xi}(x|y_j) = P\{\xi \leq x | \eta = y_j\}. \quad (1)$$

Şərti ehtimal düsturuna əsasən yazıla bilər ki,

$$F_{\xi}(x|y_j) = \frac{P\{\xi \leq x, \eta = y_j\}}{P\{\eta = y_j\}} = \frac{1}{p_j} \sum_{i: x_i \leq x} p_{i,j}.$$

Aydın ki, əgər ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda istənilən $j \geq 1$ üçün

$$P\{\xi = x_i | \eta = y_j\} = P\{\xi = x_i\} = p_i,$$

$$F_{\xi}(x|y_j) = F_{\xi}(x)$$

olar.

İndi isə fərz edək ki, ξ və η mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərdir. Onların sıxlıq funksiyalarını, uyğun olaraq, $p_{\xi}(x)$ və $p_{\eta}(y)$ ilə, birgə sıxlıq funksiyasını isə $p(x, y)$ ilə işarə edək.

Tərif 3. Aşağıdakı funksiya ξ mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin $\eta = y$ olması şərti daxilində **şərti paylanma funksiyası** deyilir:

$$F_{\xi}(x|y) = \int_{-\infty}^x \frac{p(z, y)}{p_{\eta}(y)} dz. \quad (2)$$

(2) bərabərliyindən görünür ki,

$$p_{\xi}(z|y) = \frac{p(z, y)}{p_{\eta}(y)} \quad (3)$$

funksiyası sıxlıq funksiyasıdır. Bu funksiya ξ mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin $\eta = y$ olması şərti daxilində **şərti sıxlıq funksiyası** deyilir.

Bu halda da aydındır ki, əgər ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda istənilən $y \in R$ üçün

$$p_{\xi}(z|y) = p_{\xi}(z) \text{ və } F_{\xi}(x|y) = F_{\xi}(x)$$

olar.

Məsələ 2. ξ_1, ξ_2, ξ_3 təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanma sıxlığı funksiyası aşağıdakı kimi verilmişdir:

$$P_{\xi_1, \xi_2, \xi_3}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x_1 + x_2)e^{-x_3}; & x_1, x_2 \in (0, 1), x_3 > 0 \\ 0; & \text{qalan hallarda} \end{cases}$$

$p_{\xi_1 \xi_3}(x_1, x_3 | x_2)$ şərti sıxlıq funksiyasını tapın.

Həlli. Bu məqsədlə

$$p_{\xi_1 \xi_3}(x_1, x_3 | x_2) = \frac{p_{\xi_1, \xi_2, \xi_3}(x_1, x_2, x_3)}{p_{\xi_2}(x_2)}$$

düsturundan istifadə edək. Əvvəlcə $p_{\xi_2}(x_2)$ sıxlıq funksiyasını tapaq:

$$p_{\xi_2}(x_2) = \int_0^1 \int_0^{\infty} (x_1 + x_2)e^{-x_3} dx_3 dx_1 = \int_0^1 (x_1 + x_2) dx_1 =$$

$$= \frac{1}{2} + x_2; \quad 0 < x_2 < 1.$$

Beləliklə, $\xi_2 = x_2$ olduqda şərti paylanma sıxlığı funksiyası

$$p_{\xi_1 \xi_3}(x_1, x_3 | x_2) = \frac{p_{\xi_1, \xi_2, \xi_3}(x_1, x_2, x_3)}{p_{\xi_2}(x_2)} = \frac{(x_1 + x_2)e^{-x_3}}{x_2 + \frac{1}{2}}.$$

Məsələ 3. ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri iki ölçülü normal paylanmaya malikdir, yəni onların birgə sıxlıq funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$p_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-\rho}} e^{-L(x,y)},$$

burada ρ ($|\rho| < 1$) bu təsadüfi kəmiyyətlərin korrelyasiya əmsalı,

$$L(x, y) = \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\left(\frac{x-a_\xi}{\sigma_\xi} \right)^2 - 2\rho \frac{x-a_\xi}{\sigma_\xi} \cdot \frac{y-a_\eta}{\sigma_\eta} + \left(\frac{y-a_\eta}{\sigma_\eta} \right)^2 \right).$$

$p_\xi(x|y)$ şərti paylanma sıxlığı funksiyasını tapın.

Həlli. Şərti paylanma sıxlığı funksiyası

$$p_\xi(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_\eta(y)}$$

kimi təyin olunur. Buna görə də əvvəlcə $p_\eta(y)$ funksiyasını tapaq. Asanlıqla görmək olar ki,

$$p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x, y) dx = \frac{1}{\sigma_\eta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-a_\eta}{\sigma_\eta}\right)^2}.$$

Beləliklə,

$$p_{\xi}(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_{\eta}(y)} = \frac{1}{\sigma_{\xi}\sqrt{1-\rho}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x-a_{\xi}}{\sigma_{\xi}} - \rho\frac{y-a_{\eta}}{\sigma_{\eta}}\right)^2}.$$

Qeyd edək ki, əgər normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər qeyri-korrelyar təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, yəni $\rho = 0$ olarsa, bu təsadüfi kəmiyyətlər həm də asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olar (göstərin).

§5.2. Şərti riyazi gözləmə

İndi isə şərti riyazi gözləmə anlayışı ilə tanış olaq. Əvvəlcə fərz edək ki, ξ və η diskret təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Tərif 4. ξ diskret təsadüfi kəmiyyəti üçün η diskret təsadüfi kəmiyyətinin y_j qiyməti almasına nəzərən **şərti riyazi gözləmə** aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$E(\xi|\eta = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P\{\xi = x_i | \eta = y_j\}. \quad (1)$$

Şərti ehtimal düsturuna əsasən yazsa bilərik ki,

$$\begin{aligned} E(\xi|\eta = y_j) &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \frac{P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}}{P\{\eta = y_j\}} = \\ &= \frac{1}{P\{\eta = y_j\}} \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_{i,j}. \end{aligned}$$

$E(\xi|\eta = y_j)$, $j \geq 1$ kəmiyyətləri $E(\xi|\eta)$ təsadüfi kəmiyyətinin qiymətləridir. Bu təsadüfi kəmiyyətə ξ diskret təsadüfi kəmiyyətinin η diskret təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən

şərti riyazi gözləməsi deyilir. Yəni ξ diskret təsadüfi kəmiyyətinin η diskret təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən şərti riyazi gözləməsi də diskret təsadüfi kəmiyyətdir. Göstərək ki, $E(\xi|\eta)$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi ξ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə bərabərdir. Doğrudan da, diskret təsadüfi kəmiyyət üçün riyazi gözləmə düsturuna əsasən

$$\begin{aligned}
 E(E(\xi|\eta)) &= \sum_{j=1}^{\infty} E(\xi|\eta = y_j)P\{\eta = y_j\} = \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_i P\{\xi = x_i|\eta = y_j\} P\{\eta = y_j\} = \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{j=1}^{\infty} P\{\xi = x_i|\eta = y_j\} P\{\eta = y_j\} = \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i P\{\xi = x_i\} = E\xi.
 \end{aligned}$$

Məsələ 1. ξ və η təsadüfi kəmiyyətinin birgə paylanması aşağıdakı kimidir:

$\begin{matrix} \backslash \\ x_i \end{matrix}$	1	3	4	8
y_k				
3	0,15	0,06	0,25	0,04
6	0,30	0,1	0,03	0,07

ξ və η -nın paylanmasını tapın və $E(\eta | \xi = x_1)$ şərti ri-

yazı gözləməsini hesablayın.

Həlli. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu tapmaq:

$$\begin{aligned} P\{\xi = x_1\} &= P\{\xi = x_1, \eta = y_1\} + P\{\xi = x_1, \eta = y_2\} = \\ &= 0,15 + 0,3 = 0,45. \end{aligned}$$

ξ təsadüfi kəmiyyətinin digər qiymətlərinin ehtimallarını da eyni qayda ilə taparaq aşağıdakı paylanma cədvəlini əldə edirik:

1	3	4	8
0,45	0,16	0,28	0,11

Eyni qayda ilə η təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu

3	6
0,5	0,5

Asanlıqla görmək olar ki,

Şerti paylanmanın düsturuna əsasən

$$P\{\eta = y_1 | \xi = x_1\} = \frac{P\{\xi = x_1, \eta = y_1\}}{P\{\xi = x_1\}} = \frac{0,15}{0,45} = \frac{1}{3}.$$

Eyni qayda ilə

$$P\{\eta = y_2 | \xi = x_1\} = \frac{P\{\xi = x_1, \eta = y_2\}}{P\{\xi = x_1\}} = \frac{0,3}{0,45} = \frac{2}{3}.$$

Beləliklə,

$$E(\eta | \xi = x_1) = P\{\eta = y_1\}P\{\eta = y_1 | \xi = x_1\} +$$

$$+ P\{\eta = y_2\}P\{\eta = y_2 | \xi = x_1\}$$

düsturundan və təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma cədvəlin-

dən istifadə edərək axtarılan şərti riyazi gözləməni tapa bilərik:

$$E(\eta \mid \xi = 1) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} = 5.$$

İndi isə fərz edək ki, ξ və η mütləq kəsilməz paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Tərif 5. ξ mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin $\eta = y$ olması şərti daxilində **şərti riyazi gözləməsi** aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$E(\xi \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x \mid y) dx. \quad (2)$$

Diskret halda olduğu kimi burada da $E(\xi \mid \eta = y)$, $y \in R$ kəmiyyətləri $E(\xi \mid \eta)$ təsadüfi kəmiyyətinin qiymətləridir. Bu təsadüfi kəmiyyətə ξ mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin η mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən **şərti riyazi gözləməsi** deyilir. Yəni ξ mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin η mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən şərti riyazi gözləməsi də mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətdir. Göstərək ki, $E(\xi \mid \eta)$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi ξ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə bərabərdir. Doğrudan da, mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyət üçün riyazi gözləmə düsturuna əsasən

$$E(E(\xi \mid \eta)) = \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{z=-\infty}^{\infty} z p_{\xi}(z \mid y) dz p_{\eta}(y) dy =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{z=-\infty}^{\infty} z \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{p(z, y)}{p_{\eta}(y)} p_{\eta}(y) dy dz = \\
 &= \int_{z=-\infty}^{\infty} z \int_{y=-\infty}^{\infty} p(z, y) dy dz = \int_{-\infty}^{\infty} z p_{\xi}(z) dz = E\xi.
 \end{aligned}$$

Aydındır ki, həm diskret hal, həm də mütləq kəsilməz hal üçün, əgər ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri asılı deyillərsə, onda

$$E(\xi|\eta = y_j) = E\xi, \quad j \geq 1,$$

$$E(\xi|\eta = y) = E\xi, \quad y \in R$$

olar.

Məsələ 2. ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri ikiölçülü normal paylanmaya malikdir (bax, §5.1, məsələ 3).

$E(\xi|\eta = y)$ şərti riyazi gözləməsini tapın.

Həlli. Bu məqsədlə $E(\xi|\eta = y)$ üçün (2) düsturundan istifadə edəcəyik. $p_{\xi}(x|y)$ şərti paylanma sıxlığı funksiyası

$$p_{\xi}(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_{\eta}(y)} = \frac{1}{\sigma_{\xi}\sqrt{1-\rho}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x-a_{\xi}}{\sigma_{\xi}} - \rho\frac{y-a_{\eta}}{\sigma_{\eta}}\right)^2}.$$

Beləliklə, sonuncu münasibəti (2)-də nəzərə alıb uyğun hesablamaları apardıqdan sonra

$$E(\xi|\eta = y) = a_{\xi} + \rho \frac{\sigma_{\xi}}{\sigma_{\eta}} (y - a_{\eta}) \quad (3)$$

olduğunu əldə edərik. (3) ifadəsinə ξ təsadüfi kəmiyyətinin η

təsadüfi kəmiyyəti üzərinə reqressiyası deyilir. Qeyd edək ki, eyni qayda ilə η təsadüfi kəmiyyətinin ξ təsadüfi kəmiyyəti üzərinə xətti reqressiyası da təyin edilə bilər:

$$E(\eta|\xi = x) = a_\eta + \rho \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} (x - a_\xi). \quad (4)$$

Göründüyü kimi, normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərin reqressiya tənlikləri düz xəttidir.

§5.3. Bircins Markov zəncirləri

Bernulli sxemində asılı olmayan sınaqlar öyrənilirdi (bax, §2.1). Lakin bəzən asılı olan sınaqların öyrənilməsi zərurəti yaranır. Başqa sözlə, elə tətbiq məsələləri var ki, sınağın nəticəsi özündən əvvəlki sınağın nəticəsindən asılı olur.

Fərz edək ki, hər hansı bir sınağın biri digərini inkar edən m sayda $A_1, \dots, A_m$ nəticələri var. Bu sınağı n dəfə təkrar edək. Əgər təkrar sınaqlar ardıcılığında hər bir növbəti nəticə yalnız özündən əvvəlki sınağın nəticəsindən asılı olarsa, bu halda belə sınaqlar ardıcılığı Markov zənciri əmələ gətirir. Qeyd edək ki, Markov zənciri çox zaman müəyyən ehtimallarla $A_1, \dots, A_m$ vəziyyətlərində ola bilən sistemin (fiziki, iqtisadi və s.) davranışını da ifadə edə bilər.

Markov zəncirinin verilməsi üçün aşağıdakı ehtimallar məlum olmalıdır:

$1.p_i^{(0)}$ - başlanğıc ehtimallar, yəni birinci sınaqda i -ci nəticənin baş vermə ehtimalı, belə ki, hər bir $i = \overline{1, m}$ üçün $0 \leq p_i^{(0)} \leq 1$ və $\sum_{i=1}^m p_i^{(0)} = 1$ olmalıdır;

2. $p_{ij}^{(n)}$ aparılan $(n - 1)$ -ci sınaqda i -ci nəticənin baş verməsi şərtində j -ci nəticənin n -ci sınaqda baş vermə ehtimalı, burada $\sum_{k=1}^m p_{ik}^{(n)} = 1$, $n = 2, 3, \dots; i, j = \overline{1, m}$.

Markov zəncirinin tərifini təsadüfi kəmiyyət dilində də vermək olar.

Fərz edək ki, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında hesabi sayda $x_0, x_1, \dots$, qiymətlərini alan $\xi_0, \xi_1, \dots$, təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı verilmişdir. Əgər ixtiyari n və $i_0, i_1, \dots, i_n$ üçün $P\{\xi_0 = x_0, \dots, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}\} > 0$ və

$$\begin{aligned} P\{\xi_n = x_{i_n} | \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \dots, \xi_0 = x_0\} = \\ = P\{\xi_n = x_{i_n} | \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}\} \end{aligned} \quad (1)$$

olarsa, bu halda deyirlər ki, $\xi_0, \xi_1, \dots$, təsadüfi kəmiyyətləri **Markov zənciri** əmələ gətirir. ξ_n isə bu zəncirin n -ci addım-dakı vəziyyəti adlanır. (1) münasibəti qeyd olunmuş indiki anda gələcəyin keçmişdən asılı olmadığını ifadə edir və **Markov xassəsi** adlanır.

Markov zəncirinin tərifini əyani olaraq belə də vermək olar.

Sistemin gələcək vəziyyətini $G = \{\xi_{n+1} = j\}$, indiki vəziyyətini $\dot{I} = \{\xi_n = i\}$ və keçmiş vəziyyətini isə $K = \{\xi_0 = x_0, \dots, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}\}$ ilə işarə edək.

Onda (1) bərabərliyini belə yazı bilərik:

$$P(G|K\dot{I}) = P(G|\dot{I}). \quad (2)$$

Şerti ehtimalın tərifinə əsasən

$$P(GK|\dot{I}) = P(G|K\dot{I})P(K|\dot{I}).$$

olduğunu nəzərə alsaq (2)-dən alırıq ki,

$$P(GK|\dot{I}) = P(G|\dot{I})P(K|\dot{I}). \quad (3)$$

(3) bərabərliyi göstərir ki, Markov zəncirinin indiki halı qeyd olunduqda, onun gələcək və keçmiş vəziyyətləri bir-birindən asılı olmur.

Sadəlik üçün $x_i \equiv i$ götürəcəyik. Əgər ixtiyari i və j üçün $P\{\xi_n = j | \xi_{n-1} = i\} = p_{ij}^{(n)}$ bir addıma keçid ehtimalı n -dən asılı olmazsa, belə zəncirlərə **bircins Markov zənciri** deyilir.

$p_{ij} = P\{\xi_n = j | \xi_{n-1} = i\}$ ədədləri bircins Markov zəncirinin **bir addıma keçid ehtimalları** adlanır.

$P = \|p_{ij}\|, i, j = \overline{1, m}$ matrisinə bircins Markov zəncirinin **bir addıma keçid ehtimalları matrisi** deyilir:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

Aydındır ki, $p_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}$ və $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$. Belə matrisə **stoxastik matris** deyilir.

$$p_{ij}(n) = P\{\xi_n = j | \xi_0 = i\} = P\{\xi_{n+l} = j | \xi_l = i\}$$

ehtimalı bircins Markov zəncirinin **n addıma i vəziyyə-tindən j vəziyyətinə keçid ehtimalları** adlanır.

$P(n)$ ilə n addıma keçid matrisini işarə edək. Bu halda $P(n) = P^n$ olduğunu göstərək.

p_{ij} ilə 1 addıma A_i -dən A_j -yə keçid ehtimalını işarə edək.

Bir çox məsələlərin həllindən Markov zəncirinin bir neçə addıma keçid ehtimallarının tapılması tələb olunur. Əvvəlcə 2 addıma keçid ehtimallarını tapaq. Aydındır ki, sistem A_i vəziyyətindən A_j -yə 2 addıma m sayda müxtəlif üsulla keçə bilər:

$$\begin{aligned} A_i &\rightarrow A_1 \rightarrow A_j \\ A_i &\rightarrow A_2 \rightarrow A_j \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_i &\rightarrow A_m \rightarrow A_j \end{aligned}$$

Tam ehtimal düsturuna görə

$$p_{ij}(2) = p_{i1}p_{1j} + p_{i2}p_{2j} + \dots + p_{im}p_{mj}.$$

Sonuncu münasibətdən görünür ki, $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im}$ keçid ehtimalları matrisinin i -ci sətir elementləri, $p_{1j}, p_{2j}, \dots, p_{mj}$ isə j -ci sütun elementləridir. Matrislərin vurulması qaydasından istifadə etsək, görürük ki, 2 addıma keçid ehtimalları matrisi olan $P(2)$ bir addıma keçid ehtimalları matrisinin kvadratıdır:

$$P(2) = P^2.$$

Bu prosesi davam etdirərək asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$P(n) = P^n$$

münasibəti doğrudur.

5.3.1. Keçid ehtimalları üçün Kolmoqorov-Çepmen tənliyi

Bircins Markov zəncirinin $k + l$ addıma i vəziyyətindən j vəziyyətinə keçid ehtimalı

$$p_{ij}(n + k) = \sum_{\alpha=1}^m p_{i\alpha}(n) p_{\alpha j}(k)$$

Kolmoqorov-Çepmen tənliyini ödəyir.

İsbatı. Tam ehtimal düsturu və Markov xassəsindən istifadə edərək

$$\begin{aligned} p_{ij}(n + k) &= P\{\xi_{n+k} = j | \xi_0 = i\} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^m P\{\xi_{n+k} = j, \xi_k = \alpha | \xi_0 = i\} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^m P\{\xi_{n+k} = j, \xi_k = \alpha | \xi_0 = i\} P\{\xi_k = \alpha | \xi_0 = i\} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^m p_{i\alpha}(n) p_{\alpha j}(k). \end{aligned}$$

Qeyd edək ki, Markov zənciri üçün n addıma sistemin i vəziyyətindən j vəziyyətinə keçid ehtimallarının $n \rightarrow \infty$ olduqda limitinin tapılması maraq kəsb edir.

Tərif. Əgər ixtiyari j vəziyyəti üçün i vəziyyətindən asılı olmayan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \pi_j > 0$$

limiti varsa və $\sum_{i=0}^m \pi_i = 1$ olarsa, bu halda deyirlər ki, Markov zənciri erqodiklik xassəsinə malikdir və π_i -lər **erqodik paylanma** adlanır.

Teorem (erqodiklik). Fərz edək ki, $n_0 \geq 1$ natural ədədi var ki, $P(n_0) = P^{n_0}$ keçid ehtimalları matrisinin bütün elementləri ciddi müsbətdir, yəni

$$\min_j p_{ij}(n_0) > 0.$$

Onda

- 1) hər bir $j = \overline{0, m}$ üçün $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \pi_j$ limit ehtimalı var və i -dən asılı deyil və $\pi_j > 0$;
- 2) $\pi_0, \dots, \pi_m$ ədədləri

$$\sum_{i=0}^m \pi_i p_{ij} = \pi_j, j = \overline{0, m}$$

tənliklər sisteminin həllidir və $\sum_{j=0}^m \pi_j = 1$.

Bu teoremin mənası ondan ibarətdir ki, n -nin böyük i -dən j -yə keçməsi ehtimalı i -dən asılı deyil.

5.3.2. Markov zəncirlərinin vəziyyətlərinin təsnifatı

Markov zəncirlərinin öyrənilməsində onun vəziyyətlərinin təsnifatı da mühüm yer tutur.

1.Mühüm olmayan vəziyyət. Əgər sistem i vəziyyətindən sonlu m addıma müsbət ehtimalla çıxıb oraya qayıtmırsa, i -yə **mühüm olmayan vəziyyət** deyilir. Başqa sözlə, elə m və j varsa ki, $p_{ij}(m) > 0$ və bütün n addımları üçün $p_{ji}(n) = 0$ olsun.

2.Mühüm vəziyyət.

Mühüm vəziyyətlər iki hissəyə ayrılır:

- a) Keçid mümkün olan vəziyyət.

Əgər elə m addımı varsa ki, $p_{ij}(m) > 0$, onda deyirlər ki, j keçid mümkün olan vəziyyətdir.

- b) Qarşılıqlı əlaqəli vəziyyətlər.

Əgər elə m addımı varsa ki, $p_{ij}(m) > 0$ və elə k addımı varsa ki, $p_{ji}(k) = 0$ onda deyirlər ki, i və j **qarşılıqlı əlaqəli** vəziyyətlərdir.

Vəziyyətlər çoxluğu yalnız bir qarşılıqlı əlaqəli mühüm vəziyyətlər çoxluğundan ibarət olan zəncirə **ayrılmayan Markov zənciri** deyilir.

3. Qayıdışlı və qayıdıssız vəziyyətlər.

Müəyyən sistemin i vəziyyətindən çıxdıqdan sonra n addıma yenidən i -yə qayıtma ehtimalını $p_{ii}(n)$ ilə, nə vaxtsa yenidən i -yə qayıtma ehtimalını isə F_{ii} ilə işarə edək. Aydındır ki, $F_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)$. Əgər $F_{ii} = 1$ olarsa, i vəziyyəti qayıdışlı, $F_{ii} < 1$ olarsa **qayıdıssız vəziyyət** adlanır.

$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} np_{ii}(n)$ -ə **orta qayıtma müddəti** deyilir.

Əgər $\frac{1}{\mu_i} = 0$ ($\mu_i = \infty$) olarsa, i vəziyyətinə **sıfır qayıdışlı vəziyyət**, $\frac{1}{\mu_i} > 0$ ($\mu_i < \infty$) olduqda isə **müsbət qayıdışlı vəziyyət** deyilir.

İndi isə Markov zəncirinə aid misallara baxaq.

Misal 1 (Sadə təsadüfi dolaşma). Fərz edək ki, $n = 0, 1, \dots$ zaman anlarında metal pul atılır və hər bir addımda $\frac{1}{2}$ ehtimalı ilə oyunçu ya 1 manat qazanır, ya da 1 manat itirir. Beləliklə, n anında oyunçunun toplam qazancı ξ_n mümkün qiymətləri $i = 0, \pm 1, \dots$ qiymətlərini alır. $\xi_n = k$ olması şərti daxilində növbəti addımda toplam uduşun miqdarı $\xi_{n+1} = k \pm 1$ qiymətlərini $\frac{1}{2}$ ehtimalı ilə alır. Şərti olaraq demək olar ki, burada uyğun ehtimalla sistem $\xi_n = k$ vəziyyətindən $\xi_{n+1} = k \pm 1$ vəziyyətinə keçir. Bu misalı ümumiləşdirərək hesabi sayda faza vəziyyətlərində ola bilən fiziki sistemin

davranışını ifadə edə bilərik.

Fərz edək ki, $\xi_0 \rightarrow \xi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \xi_n \rightarrow \dots$ zəncirvari təsadüfi keçidlərdən sonra bu sistemin n anındakı vəziyyəti ξ_n -dir. Şerti olaraq $i = 0, \pm 1, \dots$ tam qiymətli nöqtələrdə təsadüfi dolaşma edən hissəciyə baxaq. Belə ki, hər bir i nöqtəsindən növbəti addımda keçmişdən asılı olmayaraq uyğun olaraq p və $q = 1 - p$ ehtimalları ilə $j = i + 1$ və $j = i - 1$ nöqtəsinə keçir. Aydınır ki, hissəcik i vəziyyətindən çıxdıqdan sonra yalnız cüt sayda addımdan sonra həmin vəziyyətə qayıda bilər. Bu ehtimalı $p_{ii}(2n)$ ilə işarə edək. Bu ehtimal Bernulli sxeminə əsasən aşağıdakı kimidir:

$$p_{ii}(2n) = \frac{(2n)!}{n! n!} p^n q^n.$$

$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$ Stirling düsturunu tətbiq edərək alırıq ki,

$$p_{ii}(2n) \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Buradan görünür ki, $p = q = \frac{1}{2}$ olduqda

$$p_{ii}(2n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Beləliklə,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$$

sırası dağılıdır və deməli, bütün vəziyyətlər qayıdışlıdır. Bu halda 0 vəziyyətinə qayıdışın orta müddəti sonsuzdur. O da maraqlıdır ki, bu halda qayıdışların orta sayı addımlar sayı ilə mütənasib artmır. Çünki bu halda

$$\sum_{k=1}^n p_{00}(2k) \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \sim \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi n}}$$

olur.

$p \neq q$ olduqda $4pq < 1$ olur və deməli

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) < \infty$$

olur. Beləliklə, bütün vəziyyətlər qayıdırsızdır.

Misal 2. Asılı olmayan $\xi_0, \dots, \xi_n$ Bernulli təsadüfi kəmiyyətlərinə baxaq. Belə ki, $P\{\xi_i = -1\} = q$, $P\{\xi_i = 1\} = p$. Bu halda

$$S_n = \sum_{i=0}^n \xi_i, n \geq 1, S_0 = 0$$

cəmlər ardıcılığı (Bernulli təsadüfi dolaşması) Markov zənciri əmələ gətirir.

Doğrudan da, Markov zəncirinin tərifinə əsasən

$$P\{S_{n+1} = j \mid S_1 = i_1, \dots, S_{n-1} = i_{n-1}, S_n = i\} =$$

$$= P\{S_{n+1} = j \mid S_n = i\} \quad (*)$$

olmalıdır.

(*)-un doğruluğunu yoxlamaq üçün sağ və sol tərəfləri ayrıca hesablamaq lazımdır.

$$\begin{aligned} P\{S_{n+1} = j \mid S_n = i\} &= \frac{P\{S_{n+1} = j, S_n = i\}}{P\{S_n = i\}} = \\ &= \frac{P(S_n + \xi_{n+1} = j, S_n = i)}{P\{S_n = i\}} = \frac{P\{\xi_{n+1} = j - i\}P\{S_n = i\}}{P\{S_n = i\}} = \end{aligned}$$

$$= P\{\xi_{n+1} = j - i\} = \begin{cases} p, & j - i = 1, \\ q, & j - i = -1. \end{cases}$$

Eyni qayda ilə, (*) -un sol tərəfini də hesablayaq:
 $P\{S_{n+1} = j \mid S_1 = i_1, \dots, S_{n-1} = i_{n-1}, S_n = i\} =$

$$= \frac{P\{S_{n+1} = j, S_n = i, \dots, S_1 = i_1\}}{P\{S_n = i, S_{n-1} = i_{n-1}, \dots, S_1 = i_1\}} = P\{\xi_{n+1} = j - i\}.$$

Beləliklə, verilmiş cəmlər ardıcılığı Markov zənciridir.

Bu misalda $S_0, S_1, \dots, S_n$ Markov zənciri sadə

$$S_{k+1} = S_k + \xi_{k+1}$$

kimi struktura malikdir.

Beləliklə, bu fəsildə təsadüfi kəmiyyətlərin bəzi asılılıq növləri ilə tanış olduq. Qeyd edək ki, təsadüfi kəmiyyətlərin asılılığının martinqal asılılığı adlanan bir növü də vardır ki, onun öyrənilməsi bu dərs vəsaitinin məqsədləri xaricinə çıxır.

VI FƏSİL

DOĞURAN VƏ XARAKTERİSTİK FUNKSİYALAR

§6.1. Doğuran funksiyalar

Fərz edək ki, ξ təsadüfi kəmiyyəti mənfi olmayan tam qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətdir, yəni $0, 1, 2, \dots$ qiymətləri $p_0, p_1, p_2, \dots$, belə ki,

1. $p_k = P\{\xi = k\} \geq 0, k = 0, 1, 2, \dots$,
2. $\sum_{k=0}^{\infty} P\{\xi = k\} = 1$.

Tam qiymətli təsadüfi kəmiyyətlər ailəsinin ehtimal xassələrini öyrənmək üçün doğuran funksiya anlayışından istifadə edilir.

Tərif 1.

$$\psi_{\xi}(z) = Ez^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k, \quad |z| \leq 1 \quad (1)$$

kimi təyin olunan funksiya ξ **təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının doğuran funksiyası** deyilir.

Aydındır ki, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ olduğuna görə (1) sırası $|z| \leq 1$ -də mütləq yığılır və deməli, $\psi_{\xi}(z)$ funksiyası kompleks müstəvidə vahid dairədə $|z| \leq 1$ korrekt təyin olunub və $|\psi_{\xi}(z)| \leq 1$ olur.

Doğuran funksiyanın bəzi xassələrini verək.

Xassə 1. $\psi_{\xi}(1) = 1$.

Xassə 2. $\xi^{[k]} = \xi(\xi - 1) \dots (\xi - k + 1)$ işarə edək.

$E\xi^{[k]} = E(\xi(\xi - 1) \dots (\xi - k + 1))$ - təsadüfi kəmiyyətin **k -cı faktorial momenti** adlanır.

Əgər $E\xi^{[k]} < \infty$ onda $\psi^{(k)}(z)$ törəməsi vardır və

$$E\xi^{[k]} = \psi_{\xi}^{(k)}(1). \quad (1)$$

İsbatı. $|z| < 1$ olduqda $\psi(z)$ funksiyası sonsuz differensiallandıdır və

$$\psi^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{[k]} \cdot z^{n-k} \cdot P\{\xi = n\},$$

burada $n^{[k]} = n(n-1) \dots (n-k+1)$.

Buradan Abel teoreminə əsasən $\psi^{(k)}(z)$ funksiyası $z = 1$ nöqtəsində kəsilməzdir və

$$\lim_{z \rightarrow 1-0} \psi^{(k)}(z) = \psi^{(k)}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{[k]} \cdot P\{\xi = n\} = E\xi^{[k]}.$$

Bununla da bu xassə isbat olundu.

Xüsusi halda $k = 1$ olarsa bu xassədən istifadə etməklə riyazi gözləməni hesablamaq olar:

$$E\xi = \psi'_{\xi}(1).$$

Bu xassədən istifadə etməklə, həm də dispersiya və digər yüksək tərtibli momentləri də hesablamaq olar.

$k = 2$ olduqda 2-ci faktorial moment əldə edilir:

$$E\xi^{[2]} = \psi''_{\xi}(1).$$

Digər tərəfdən,

$$E\xi^{[2]} = E\xi(\xi - 1) = E\xi^2 - E\xi.$$

Buradan

$$E\xi^2 = \psi''_{\xi}(1) + \psi'_{\xi}(1).$$

Beləliklə, dispersiya üçün aşağıdakı düsturu yazı bilərik:

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \psi''_{\xi}(1) + \psi'_{\xi}(1) - (\psi'_{\xi}(1))^2.$$

Xəssə 3. Əgər $\xi_1, \dots, \xi_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda

$$\psi_{\xi_1 + \dots + \xi_n}(z) = \psi_{\xi_1}(z) \cdot \dots \cdot \psi_{\xi_n}(z),$$

yəni asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin doğuran funksiyası doğuran funksiyaların hasilinə bərabərdir.

Xəssə 4. Doğuran funksiyalar ilə paylanmalar arasında qarşılıqlı birqıymətli uyğunluq vardır:

Əgər doğuran funksiyanın k -tərtib törəməsi varsa, onda

$$p_k = \frac{1}{k!} \psi_{\xi}^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

burada $\psi_{\xi}^{(0)}(z) = \psi_{\xi}(z)$.

Xəssə 5. Eyni qanunla paylanmış tam qiymətli $\xi_1, \dots, \xi_n$ və ν asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun.

Onda $S_{\nu} = \xi_1 + \dots + \xi_{\nu}$; $S_0 = 0$ təsadüfi kəmiyyətinin doğuran funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$\psi_{S_{\nu}}(z) = \psi_{\nu}(\psi_{\xi_1}(z)).$$

İsbatı. Aydındır ki, $\{\nu = n\}$ və $\{S_n = k\}$ hadisələri asılı olmayan hadisələrdir. Buna görə də tam ehtimal düsturuna əsasən

$$P\{S_{\nu} = k\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_{\nu} = k \mid \nu = n\} \cdot P\{\nu = n\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_n = k\} \cdot P\{\nu = n\}$$

olduğunu alırıq.

Sonuncu bərabərliyin hər iki tərəfini z^k -ya vurub cəmləsək,

$$\psi_{S_\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\nu = n\} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot P\{S_n = k\} = \psi_\nu(\psi_{\xi_1}(z))$$

olduğunu əldə edərək.

İndi isə bəzi diskret paylanmaların doğuran funksiyalarını hesablayaq.

Misal 1. Asanlıqla görmək olar ki, Bernulli paylanmasının doğuran funksiyasını

$$\psi_\xi(z) = pz + q.$$

Misal 2. Binomial paylanmanın doğuran funksiyasını hesablayaq:

$$\psi_\xi(z) = \sum_{k=0}^n z^k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k (pz)^k q^{n-k} = (pz + q)^n.$$

Misal 3. Puasson paylanmasının doğuran funksiyasını hesablayaq:

$$\psi_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k \lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{\lambda(z-1)}.$$

§6.2. Xarakteristik funksiyalar

Ehtimal nəzəriyyəsində asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin paylanmasını tədqiq etmək üçün əsas üsul xarakteristik funksiyalar üsuludur. Fərz edək ki, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ fəzasında $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ təsadüfi kəmiyyəti verilmişdir. $\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti həqiqi təsadüfi kəmiyyət və kompleks təsadüfi kəmiyyət ola bilər. Kompleks təsadüfi kəmiyyətin xarakteristik funksiyasını həqiqi təsadüfi kəmiyyətin xarakteristik funksiyasına gətirmək olar. Ona görə də biz həqiqi təsadüfi kəmiyyətin xarakteristik funksiyasını öyrənəcəyik.

Tərif 1. Fərz edək ki, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ həqiqi təsadüfi kəmiyyəti verilmişdir. $t \in \mathbb{R}$ və $i^2 = -1$ olsun. $e^{it\xi}$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə ξ təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyası deyilir:

$$\varphi_{\xi}(t) = Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_{\xi}(x).$$

Əgər ξ təsadüfi kəmiyyəti diskret paylanmaya malikdirsə, onun xarakteristik funksiyası

$$\varphi_{\xi}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} P\{\xi = x_k\}.$$

Əgər ξ təsadüfi kəmiyyəti mütləq kəsilməz paylanmaya malikdirsə, onun xarakteristik funksiyası

$$\varphi_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_{\xi}(x) dx.$$

Eyler düsturundan istifadə etsək

$$\begin{aligned}\varphi_{\xi}(t) &= E e^{it\xi} = E(\cos t\xi + i \sin t\xi) = \\ &= E \cos t\xi + i E \sin t\xi.\end{aligned}$$

Deməli, xarakteristik funksiya həqiqi dəyişənli kompleks qiymətli funksiyadır.

Tam qiymətli ξ təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyası onun doğuran funksiyası vasitəsilə belə ifadə olunur:

$$\varphi_{\xi}(t) = \psi_{\xi}(e^{it}).$$

Xarakteristik funksiyanın bəzi xassələrini verək.

Xassə 1. $|\varphi_{\xi}(t)| \leq 1$.

Doğrudan da,

$$\begin{aligned}|\varphi_{\xi}(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_{\xi}(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| dF_{\xi}(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot dF_{\xi}(x) = F_{\xi}(+\infty) - F_{\xi}(-\infty) = 1.\end{aligned}$$

Xassə 2. $\varphi_{\xi}(0) = 1$.

Xassə 3. $\varphi_{a+b\xi}(t) = e^{ita} \varphi_{b\xi}(t) = e^{ita} \varphi_{\xi}(bt)$.

Xassə 4. Əgər $\xi_1, \dots, \xi_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda

$$\varphi_{\xi_1 + \dots + \xi_n}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \dots \cdot \varphi_{\xi_n}(t).$$

Xüsusi halda təsadüfi kəmiyyətlər həm də eyni qanunla paylanmışdırsa, onda

$$\varphi_{\xi_1 + \dots + \xi_n}(t) = (\varphi_{\xi_1}(t))^n.$$

Xəssə 5. Əgər ξ təsadüfi kəmiyyətinin k -cı tərtibdən mütləq momenti sonludursa, yəni $E|\xi|^k < \infty$ olarsa, onda

$$E\xi^k = \frac{1}{i^k} \varphi_\xi^{(k)}(0).$$

Bu xəssə riyazi gözləmə, dispersiyanın və digər momentlərin hesablanmasında mühüm rol oynayır.

Xəssə 6. $\varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)}$, burada xətt kompleks qoşmanı göstərir.

$\varphi_\xi(t)$ xarakteristik funksiyası yalnız və yalnız o vaxt həqiqi olur ki, o, cüt funksiya olsun.

$\varphi_\xi(t)$ xarakteristik funksiyasının həqiqi olması üçün zəruri və kafi şərt uyğun paylanma funksiyasının simmetrik olmasıdır, yəni $F_\xi(x) = F_{-\xi}(x)$ və ya uyğun sıxlıq funksiyasının (əgər, varsa) cüt funksiya olmasıdır $p_\xi(-x) = p_\xi(x)$.

Xəssə 7. Xarakteristik funksiya müntəzəm kəsilməz funksiyaadır.

Doğrudan da, ixtiyari t həqiqi ədədi üçün $|e^{it}| = 1$ olduğunu nəzərə alsaq, həmçinin riyazi gözləmənin məlum xəssəsindən istifadə etsək

$$|\varphi_\xi(t+h) - \varphi_\xi(t)| = |Ee^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1)| \leq E|e^{ih\xi} - 1| =$$

$$= E|e^{ih\xi} - 1|I_{\{|\xi| \leq N\}} + E|e^{ih\xi} - 1|I_{\{|\xi| > N\}}$$

olduğunu alırıq.

Buradan birinci riyazi gözləmədə $|e^{ih\xi} - 1| \leq |h\xi|$ bərabərsizliyini, ikinci riyazi gözləmədə $|e^{it\xi} - 1| \leq 2$ olduğunu nəzərə alsaq alırıq:

$$|\varphi_\xi(t+h) - \varphi_\xi(t)| = |h|E|\xi|I_{\{|\xi| \leq N\}} + 2EI_{\{|\xi| > N\}} \leq$$

$$\leq N|h| + 2P(|\xi| > N).$$

$\varepsilon > 0$ qeyd edək. N ədədini elə götürək ki,

$$P\{|\xi| > N\} < \frac{\varepsilon}{4}$$

olsun. Onda $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$ götürməklə $|h| < \delta$ olduqda

$$|\varphi_\xi(t+h) - \varphi_\xi(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olduğunu alırıq. Bu isə o deməkdir ki, xarakteristik funksiya müntəzəm kəsilməzdir.

Xassə 8. Əgər $\varphi_1(t)$ və $\varphi_2(t)$ xarakteristik funksiyalar olarsa, onda $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_1 + a_2 = 1$ şərtlərini ödəyən ixtiyari a_1 və a_2 ədədləri üçün

$$\varphi(t) = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t)$$

funksiyası da xarakteristik funksiyaadır.

Xassə 9. Əgər $\varphi_\xi(t)$ xarakteristik funksiya olarsa, onda $|\varphi_\xi(t)|^2$ funksiya da xarakteristik funksiyaadır.

Doğrudan da,

$$|\varphi_\xi(t)|^2 = \varphi_\xi(t) \cdot \overline{\varphi_\xi(t)} = \varphi_\xi(t)\varphi_{-\xi}(t)$$

münasibətindən və 4-cü xassədən alırıq ki, $|\varphi_\xi(t)|^2$ xarakteristik funksiyaadır.

Xassə 10. Əgər $\varphi_\xi(t)$ xarakteristik funksiya olarsa, onda həqiqi hissəsi, yəni $Re \varphi_\xi(t)$ də xarakteristik funksiyaadır.

Doğrudan da,

$$Re \varphi_\xi(t) = \frac{\varphi_\xi(t) + \overline{\varphi_\xi(t)}}{2} \text{ bərabərliyində } \varphi_\xi(t) = \overline{\varphi_\xi(t)}$$

olduğunu nəzərə alsaq və xassə 8-də $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ götürsək, onda bu xassənin doğruluğunu alarıq.

Xassə 11. Əgər $\varphi_\xi^{(2n)}(0) < \infty$ olarsa, onda $E\xi^{2n} < \infty$.

Qeyd edək ki, bu xassə tək tərtibli törəmələr üçün ödənilmir.

Xassə 12. Əgər $E|\xi|^k < \infty$, $k \geq 1$ onda $t \rightarrow 0$ olduqda

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + o(t^n).$$

Xassə 13. Mütləq kəsilməz paylanmaya uyğun xarakteristik funksiya üçün

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_\xi(t) = 0.$$

Verilmiş hər hansı funksiya xarakteristik funksiyanın xassələrindən birini ödəməzsə, o, xarakteristik funksiya deyildir. Başqa sözlə, bu xassələr zəruri şərtlərdir. Məsələn, $\varphi_\xi(t) = \sin t$ funksiyası xarakteristik funksiya deyil. Çünki bu funksiya üçün $\varphi_\xi(0) = 1$ şərti ödənilmir.

Qeyd edək ki, verilmiş funksiyanın xarakteristik funksiya olduğu yoxlamaq daha çətinidir. Bununla bağlı aşağıdakı teoremləri verək:

Boxner-Xinçin teoremi. Fərz edək ki, $\varphi(t)$ kəsilməz funksiya və $\varphi(0) = 1$. Bu funksiyanın xarakteristik funksiya olması üçün zəruri və kafi şərt onun müsbət müəyyən olmasıdır. Başqa sözlə, ixtiyari $t_1, \dots, t_n$ həqiqi ədədləri və $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ kompleks ədədləri üçün

$$\sum_{i,k=1}^n \varphi(t_i - t_k) \lambda_i \overline{\lambda_k} \geq 0$$

Poya teoremi. Fərz edək ki, $\varphi(t)$ kəsilməz, cüt və

$(-\infty, 0)$ aralığında aşağıya qabarıq, $(0, \infty)$ aralığında isə $\varphi(t) \geq 0$, $\varphi(0) = 1$ və $t \rightarrow \infty$ olduqda $\varphi(t) \rightarrow 0$ şərtlərini ödəyən funksiyadır. Onda $\varphi(t)$ xarakteristik funksiyadır.

Marsinkeviç teoremi. Əgər $\varphi(t)$ xarakteristik funksiyası $e^{P(t)}$ şəklindədirsə, bu halda $P(t)$ çoxhədlisinin dərəcəsi 2-dən böyük ola bilməz.

İndi isə bəzi paylanmaların xarakteristik funksiyalarını hesablayaq.

Misal 1. Bernulli paylanmasının xarakteristik funksiyasını hesablayın.

Həlli. Asanlıqla görmək olar ki,

$$\varphi_{\xi}(t) = e^{it1}p + e^{it0}q = pe^{it} + q.$$

Misal 2. Binomial paylanmanın xarakteristik funksiyasını hesablayın.

Həlli. Asanlıqla görmək olar ki,

$$\begin{aligned}\varphi_{\xi}(t) &= \sum_{k=0}^n e^{itk} P\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^n e^{itk} C_n^k p^k q^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (pe^{it})^k q^{n-k} = (pe^{it} + q)^n.\end{aligned}$$

Qeyd edək ki, bu məsələni xarakteristik funksiyanın xassələrindən də istifadə etməklə də həll etmək olar. Bilirik ki, binomial paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyəti asılı olmayan hər biri Bernulli paylanmasına malik n sayda $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi şəklində göstərə bilirik. $\varphi_{\xi_1}(t) = pe^{it} + q$ olduğu üçün xarakteristik funksiyanın 4-cü xassəsinə əsasən

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}(t) = (\varphi_{\xi_1}(t))^n = (pe^{it} + q)^n.$$

Beləliklə, binomial paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətin xarakteristik funksiyası Bernulli paylanmasının xarakteristik funksiyasının n -ci qüvvətinə bərabərdir.

Misal 3. Puasson qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətin xarakteristik funksiyalarını hesablayın və onun köməyi ilə bu təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsini və dispersiyasını tapın.

Həlli. Əvvəlcə xarakteristik funksiyanı hesablayaq. Puasson paylanmasını xarakteristik funksiyanın ifadəsində nəzərə alaq:

$$\begin{aligned}\varphi_{\xi}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{e^{it}\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.\end{aligned}$$

İndi isə xarakteristik funksiyanın xassəsindən istifadə etməklə, riyazi gözləmə və dispersiyanı tapaq.

Bu məqsədlə əvvəlcə xarakteristik funksiyanın törəməsini alaq:

$$\varphi'_{\xi}(t) = \left(\lambda(e^{it} - 1)\right)' \cdot e^{\lambda(e^{it}-1)} = \lambda \cdot i \cdot e^{it} \cdot e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Xarakteristik funksiyanın 5-ci xassəsinə əsasən

$$E\xi = \frac{1}{i}(\varphi'_{\xi}(0)) = \frac{1}{i} \cdot \lambda \cdot i \cdot e^0 = \lambda.$$

Dispersiyanı tapmaq üçün xarakteristik funksiyanın

ikinci tərtib törəməsini hesablayaq:

$$\varphi_{\xi}''(t) = \lambda i \left(i e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)} + e^{it} \lambda i e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)} \right).$$

Xarakteristik funksiyanın 5-ci xassəsinə əsasən

$$E\xi^2 = \frac{1}{i^2} (\varphi_{\xi}''(0)) = -\lambda i(i + \lambda i) = \lambda + \lambda^2.$$

Beləliklə,

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

İndi isə bəzi mütləq kəsilməz paylanmaların xarakteristik funksiyalarını hesablayaq.

Misal 4. $[a, b]$ parçasında müntəzəm paylanmanın xarakteristik funksiyasını hesablayın.

Həlli. Müntəzəm paylanma mütləq kəsilməz paylanmalar sinfinə aid olduğu üçün

$$\varphi_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_{\xi}(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{itx} dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

Xüsusi halda, $[-1, 1]$ parçasında müntəzəm paylanmanın xarakteristik funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$\varphi_{\xi}(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} = \frac{\sin t}{t}.$$

Misal 5. $\lambda > 0$ parametrlı üstlü paylanmanın xarakteristik funksiyasını hesablayın.

Həlli. Asanlıqla görmək olar ki,

$$\varphi_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_{\xi}(x) dx = \int_0^{\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} e^{-x(\lambda - it)} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

olduğunu əldə edərək.

Misal 6. Normal paylanmanın xarakteristik funksiyasını tapaq.

Həlli. Öncə $(0,1)$ parametrli normal qanunla paylanmış ξ təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyasını tapaq.

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot p_{\xi}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2itx)} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2itx + (it)^2) + \frac{1}{2}(it)^2} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x - it)^2} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dx = \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x - it)^2} dx = e^{-\frac{t^2}{2}}. \end{aligned}$$

Qeyd edək ki, $\varphi_{\xi}(t)$ funksiyasından və xarakteristik funksiyanın xassəsindən istifadə edərək (a, σ) parametrli normal qanunla paylanmış $\eta = \sigma\xi + a$ təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyasını da tapa bilərik:

$$\varphi_{\eta}(t) = e^{ita} \varphi_{\xi}(\sigma t) = e^{ita} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Misal 7. ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətləri uyğun olaraq parametrləri (a_1, σ_1) və (a_2, σ_2) olan normal qanunla paylanmışdır. $\xi = \xi_1 + \xi_2$ təsadüfi kəmiyyətinin də

normal qanunla paylanmış olduğunu göstərin.

Həlli. ξ_1 və ξ_2 normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olduğu üçün onların xarakteristik funksiyaları uyğun olaraq

$$\varphi_{\xi_1}(t) = e^{ita_1 - \frac{(\sigma_1 t)^2}{2}} \text{ və } \varphi_{\xi_2}(t) = e^{ita_2 - \frac{(\sigma_2 t)^2}{2}}.$$

Digər tərəfdən şərtə görə ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu üçün

$$\varphi_{\xi_1 + \xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \varphi_{\xi_2}(t) = e^{it(a_1 + a_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}$$

olur. $\varphi_{\xi_1 + \xi_2}(t)$ xarakteristik funksiyası üçün aldığımız bu düstura və yeganəlik teoreminə əsasən $\xi = \xi_1 + \xi_2$ təsadüfi kəmiyyətinin $(a_1 + a_2, \sigma_1 + \sigma_2)$ parametrlı normal qanunla paylanmış olduğu nəticəsinə gəlirik.

Qeyd edək ki, əgər $\varphi_{\xi_1}(t)$ və $\varphi_{\xi_2}(t)$ xarakteristik funksiyalar olarsa və bu funksiyalar üçün

$$\varphi_{\xi_1}(t) \cdot \varphi_{\xi_2}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

münasibəti ödənilərsə,

$$\varphi_{\xi_1}(t) = e^{iat - \sigma^2 \frac{t^2}{2}}, \quad \varphi_{\xi_2}(t) = e^{-iat - (1 - \sigma^2) \frac{t^2}{2}}, \quad 0 \leq \sigma \leq 1$$

funksiyaları normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərin məsələn, ξ_1 və ξ_2 -nin xarakteristik funksiyalarıdır. Aldığımız bu nəticə Kramer teoreminin xarakteristik funksiyalar terminləri ilə ifadəsidir.

Kramer teoremi (1936). İki asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətin cəmi normal qanunla paylanmışdırsa, onda toplananların hər biri normal qanunla paylanmış təsadüfi kə-

miyyətdir.

Misal 8. ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətləri uyğun olaraq parametrləri λ_1 və λ_2 ($\lambda_i > 0$) olan Puasson qanunu ilə paylanmışdır. İsbat edək ki, $\xi = \xi_1 + \xi_2$ təsadüfi kəmiyyəti $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ parametrlili Puasson qanunu ilə paylanmışdır. Aydındır ki,

$$\varphi_{\xi_1}(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)} \text{ və } \varphi_{\xi_2}(t) = e^{\lambda_2(e^{it}-1)}.$$

ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğundan

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \varphi_{\xi_2}(t) = \exp\left((\lambda_1 + \lambda_2)(e^{it} - 1)\right)$$

bərabərliyi doğrudur. Deməli, $\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t)$ funksiyası $\lambda_1 + \lambda_2$ parametrlili Puasson qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətin xarakteristik funksiyasıdır. Yeganəlik teoreminə əsasən, xarakteristik funksiyası

$$\varphi(t) = \exp\left(\lambda(e^{it} - 1)\right)$$

olan təsadüfi kəmiyyət Puasson qanunu ilə paylanmışdır.

Deməli,

$$P\{\xi_1 + \xi_2 = k\} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Beləliklə, asılı olmayan və Puasson qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi də Puasson qanunu ilə paylanmışdır.

Raykov teoremi (1937). İki asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətin cəmi Puasson qanunu ilə paylanmışdırsa, onda toplanan təsadüfi kəmiyyətlərin hər biri Puasson qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir.

İndi isə xarakteristik funksiyalar haqqında bəzi teoremləri verək.

Xarakteristik funksiyanın tərifindən görürük ki, hər bir $F_{\xi}(x)$ paylanma funksiyasına bir $\varphi_{\xi}(t)$ xarakteristik funksiya uyğun gəlir. Aşağıdakı çevirmə düsturu göstərir ki, hər bir xarakteristik funksiyanın uyğun paylanma funksiyası var. Başqa sözlə desək, paylanma funksiyalar çoxluğu ilə xarakteristik funksiyalar çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq var. Bu faktı göstərmək üçün əvvəlcə fərz edək ki, $F_{\xi}(x)$ paylanma funksiyası mütləq kəsilməzdir, yəni onun $p_{\xi}(x)$ sıxlıq funksiyası var. Xarakteristik funksiyanın tərifinə görə

$$\varphi_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_{\xi}(x) dx \quad (1)$$

Furye çevirmələri nəzəriyyəsinə görə, (1) göstərir ki, $\varphi_{\xi}(t)$ xarakteristik funksiyası $p_{\xi}(x)$ sıxlıq funksiyasının Furye çevirməsidir. Əgər $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{\xi}(t)| dt < \infty$ olarsa, onda Furye çevirmələri nəzəriyyəsiindən məlumdur ki, (1) çevirməsinin tərsi var və

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_{\xi}(t) dt. \quad (2)$$

(2) göstərir ki, mütləq kəsilməz paylanmalar sinfində xarakteristik funksiya paylanma funksiyasını birqiymətli təyin edir. Bu faktın istənilən paylanma funksiyası üçün doğru olması aşağıdakı teoremdən alınır (bax, [28], s.303).

Teorem (çevirmə düsturu). Fərz edək ki, $F_{\xi}(x)$ paylanma funksiyası, $\varphi_{\xi}(t)$ isə uyğun xarakteristik

funksiyadır. Onda $F_{\xi}(x)$ paylanma funksiyasının ixtiyari a və b kəsilməzlik nöqtələri ($a < b$) üçün

$$F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a) = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_{\xi}(t) dt. \quad (3)$$

Nəticə (yeganəlik teoremi). Hər bir xarakteristik funksiyanın yalnız bir paylanma funksiyası vardır, yəni xarakteristik funksiyaları eyni olan paylanma funksiyaları üst-üstə düşür: $F_1(x) \equiv F_2(x)$.

İndi isə göstərək ki, paylanma funksiyası ilə xarakteristik funksiya arasında olan qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq kəsilməzdir. Bu məsələ xarakteristik və paylanma funksiyalar ardıcılığının yığılması məsələsi ilə bağlıdır.

Əvvəlcə aşağıdakı tərifini verək.

Tərif. Fərz edək ki, həqiqi oxda $F_n(x), n \geq 1$ paylanma funksiyalar ardıcılığı və $F(x), x \in R$ paylanma funksiyası verilib. C_F ilə $F(x)$ paylanma funksiyasının kəsilməzlik nöqtələri çoxluğunu işarə edək: $C_F = \{x: F(x) \text{ kəsilməzdir}\}$.

Əgər $\forall x \in C_F$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda $F_n(x) \rightarrow F(x)$ olarsa, bu halda deyirlər ki, $F_n(x)$ paylanma funksiyalar ardıcılığı $F(x)$ paylanma funksiyasına zəif yığılır və bu belə işarə olunur: $F_n \Rightarrow F$.

Teorem 1 (kəsilməzlik). Fərz edək ki, $F_n(x), n \geq 1$ paylanma funksiyalar ardıcılığı və $F(x), x \in R$ paylanma funksiyası və uyğun olaraq $\varphi_n(t), n \geq 1$ xarakteristik funksiyalar ardıcılığı və $\varphi(t)$ xarakteristik funksiyası verilmişdir. Onda $F_n \Rightarrow F$ olması üçün zəruri və kafi şərt $\forall t \in R$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$ yığılmasıdır.

Qeyd edək ki, teorem 1-də əvvəlcədən tələb olunur ki,

$\varphi(t)$ xarakteristik funksiya olsun. Bununla əlaqədar olaraq hansı şərt daxilində xarakteristik funksiyalar ardıcılığının limitinin xarakteristik funksiya olması məsələsini araşdırmaq lazım gəlir.

Bu məsələnin həlli aşağıdakı teoremdə verilir.

Teorem 2. Fərz edək ki, $\varphi_n(t), n \geq 1$ xarakteristik funksiyalar ardıcılığının hər bir $t \in R$ üçün $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ limiti var. Onda aşağıdakı iki şərt ekvivalentdir:

- 1) $\varphi(t)$ xarakteristik funksiya,dir,
- 2) $\varphi(t)$ funksiyası $t = 0$ nöqtəsində kəsilməzdir.

Misal 9. $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının elementləri $[-n, n]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmışdır. Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$\varphi_n(t) = \int_{-n}^n e^{itn} \frac{1}{2n} dt = \frac{1}{n} \int_0^n \cos nt dt = \begin{cases} \frac{\sin nt}{nt}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

Bu xarakteristik funksiyalar ardıcılığının limitini aşağıdakı kimidir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

Alınmış limit funksiyası $t = 0$ nöqtəsində kəsilən olduğu üçün teorem 2-yə görə xarakteristik funksiya deyildir.

Xarakteristik funksiyalar üçün yeganəlik teoreminə görə xarakteristik funksiya paylanmanı birqiymətli olaraq təyin edir. İndi isə belə bir sual qoyaq: $m_n, n \geq 1$ momentləri də paylanmanı birqiymətli təyin edirmi? Bu sual momentlər probleminin yeganəliyi məsələsini meydana çıxarır.

Fərz edək ki, $F(x)$ və $G(x)$ iki müxtəlif paylanma funksiyasıdır və onların bütün momentləri üst-üstə düşür:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dG(x), n \geq 0.$$

Təbii olaraq belə bir sual çıxır: bu halda $F(x)$ və $G(x)$ paylanma funksiyaları da üst-üstə düşürmü? Ümumi halda bu sualın cavabı mənfidir (bax, [28], s.314). Aşağıdakı teoremdə momentlər probleminin yeganəliyi üçün kafi şərt verilmişdir.

Teorem 3. Fərz edək ki, $F(x)$ paylanma funksiyasıdır və $\beta_n = \int_{-\infty}^{\infty} |x^n| dF(x)$. Əgər

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n^{1/n}}{n} < \infty$$

olarsa, onda $m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x)$, $n \geq 1$ momentləri $F(x)$ paylanma funksiyasını birqiymətli təyin edir.

Nəticə 1. Sonlu intervalda cəmlənmiş ehtimal paylanmaları momentləri ilə birqiymətli təyin olunur.

Nəticə 2. Momentlər probleminin yeganəliyi üçün kafi şərt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_{2n}^{1/2n}}{2n} < \infty$$

münasibətinin ödənilməsidir.

İndi isə momentlər probleminin yeganəliyi haqqında Karleman kriteriyasını isbatsız olaraq verək.

Teorem 4. a) Fərz edək ki, $m_n, n \geq 1$ müəyyən paylanmanın momentləridir və

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_{2n}^{1/2n}} = \infty.$$

Onda $m_n, n \geq 1$ momentləri ehtimal paylanmasını

birqiymətli təyin edir.

b) Əgər $m_n, n \geq 1$ momentləri $[0, \infty)$ -da cəmlənmiş paylanmadırsa, bu halda ehtimal paylanmasını birqiymətli təyin olunması üçün

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^{1/2n}} = \infty$$

şərtinin ödənilməsi kafidir.

Məsələlər.

1. Fərz edək ki, ξ təsadüfi kəmiyyətinin doğuran funksiyası $\psi(z)$ -dir. $\xi + n$ və $n\xi$ kəmiyyətlərinin doğuran funksiyası tapın.

2. Əgər doğuran funksiya üçün $\psi(2^{-n}) = 2^{-n}, n = 1, 2, \dots$ olarsa, uyğun paylanmanı tapın.

3. Laplas paylanmasının xarakteristik funksiyasını tapın.

$$\text{Cavab: } \varphi_{\xi}(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}$$

4. Koşi paylanmasının xarakteristik funksiyasını hesablayın.

$$\text{Cavab: } \varphi_{\xi}(t) = e^{-|t|}$$

5. α parametrinin hansı qiymətlərində

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|^{\alpha}, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$$

funksiyası xarakteristik funksiyadır?

$$\text{Cavab: } 0 < \alpha \leq 1$$

6. İsbat edin ki, a) $\cos t^2$ və b) $\varphi(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$ funksiyaları xarakteristik funksiya deyil.

7. Göstərin ki, $P\{\xi = \pm 2k\} = \frac{c}{k^2 \ln k}, k = 2, 3, \dots$ paylanmasına malik ξ təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyası 0-da differensiallandı, lakin $E\xi$ mövcud deyil.

VII FƏSİL

EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNİN LİMİT TEOREMLƏRİ

*Məntiq, sizi A nöqtəsindən B nöqtəsinə
apara bilər. Xəyal gücü isə hər yerdə...*

Albert Eynşteyn

Ehtimal nəzəriyyəsinin mühüm nəticələri limit teoremləri şəklində verilir. Bu teoremlər əsasən böyük ədədlər qanunu və mərkəzi limit teoremləri olmaqla iki sinifə ayrılır. Bu fəsil ehtimal nəzəriyyəsinin limit teoremlərinin şərhinə həsr olunmuşdur. Əvvəlcə ehtimal nəzəriyyəsində istifadə olunan yığılma növləri ilə tanış olaq.

§7.1. Təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının yığılma növləri

Fərz edək ki, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında $\xi_n = \xi_n(\omega)$, $n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı və $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ təsadüfi kəmiyyəti verilmişdir. Aydındır ki, $\omega = \omega_0$ qeyd etsək, $a_n = \xi_n(\omega_0)$ ədədi ardıcılığı və $a = \xi(\omega_0)$ ədədini alarıq. Əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda $a_n \rightarrow a$ olarsa, yəni $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists N_\varepsilon$ varsa, $\forall n > N_\varepsilon$ üçün $|a_n - a| \leq \varepsilon$ olsun, onda deyirlər ki, ξ_n ardıcılığı $\omega = \omega_0$ “nöqtəsində” ξ təsadüfi kəmiyyətinə yığılır. Belə yığılma nöqtəvi yığılma adlanır.

Aydındır ki, $\forall \omega \in \Omega$ nöqtəsində ξ_n təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının yığılmasını tələb etmək ağır şərtidir. Elə bu səbəbdən də nöqtəvi yığılma növü ehtimal nəzəriyyəsində əhəmiyyət kəsb etmir. Ehtimal nəzəriyyəsində təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının yığılması üçün aşağıdakı yığılma növləri öyrənilir.

Tərif 1 (sanki yəqin və ya vahid ehtimalla yığılma).

Əgər elə $N \in \mathcal{F}$ çoxluğu varsa ki, $P(N) = 0$ və $\forall \omega \in \Omega \setminus N$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda $\xi_n \rightarrow \xi$ olarsa, bu halda deyirlər ki, ξ_n təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı ξ təsadüfi kəmiyyətinə **sanki yəqin və ya vahid ehtimalla** yığılır və belə işarə olunur:

$$\xi_n \xrightarrow{s.y.} \xi \text{ və ya } P(\xi_n \rightarrow \xi) = 1.$$

ξ_n təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının ξ təsadüfi kəmiyyətinə yığıldığı ω nöqtələri çoxluğu təsadüfi hadisədir və onu aşağıdakı ekvivalent formada yazmaq olar:

$$\left\{ \omega: \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi \right\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \left\{ \omega: |\xi_k - \xi| \leq \frac{1}{m} \right\}.$$

Qeyd edək ki, sanki yəqin yığılmada ω elementar hadisəsi ilə ξ_n ardıcılığının elementləri arasında uyğunluq dəqiq bilinməlidir. Lakin yığılma anlayışını bir qədər zəiflədib $\xi_n(\omega)$ ardıcılığı n artdıqca ξ -nin ε ətrafında davranışını araşdırmaq olar. Bu məqsədlə ehtimalla görə yığılma anlayışı daxil edilir.

Tərif 2 (ehtimalla görə yığılma). Əgər $\forall \varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \rightarrow 0$$

olarsa, onda deyirlər ki, ξ_n təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı **ehtimalla görə** ξ təsadüfi kəmiyyətinə yığılır və belə işarə olunur: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.

Qeyd edək ki, ehtimalla görə yığılma anlayışı riyazi analizdə olan ölçüyə görə yığılma anlayışının analoqudur.

Misal 1. Fərz edək ki, $\xi_1, \xi_2, \dots$, müxtəlif paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlərdir:

$$P\{\xi_n = n^3\} = \frac{1}{n}, \quad P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Göstərin ki, bu ardıcılıq ehtimala görə sıfıra yığılır.

Həlli. ε -nu qeyd edək. Müəyyən n_0 -dan başlayaraq bütün $n \geq n_0$ üçün

$$P\{|\xi_n - 0| > \varepsilon\} = P\{\xi_n > \varepsilon\} = P\{\xi_n = n^3\} = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Beləliklə, n artdıqca ξ_n təsadüfi kəmiyyətləri 0-ın ətrafında daha böyük qiymətlər ala bilər, lakin bu qiymətlərin ehtimalları getdikcə kiçilir.

Qeyd edək ki, ehtimala görə yığılma təsadüfi kəmiyyətlərin Ω çoxluğunda necə təyin olunmasından asılı olmayaraq da ödənilə bilər. Çünki onların sadəcə paylanmasını bilmək kifayət edir.

Qeyd edək ki, misal 1-də ardıcılığın sanki yəqin yığılıb yığılmadığını araşdırmaq üçün yığılmada $\omega \in \Omega$ elementar hadisəsi ilə ξ_n ardıcılığının elementləri arasında uyğunluq dəqiq bilinməlidir. Aşağıdakı misala baxaq.

Misal 2. Fərz edək ki, $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \beta([0,1])$ və P isə Lebeq ölçüsüdür. $\xi_n(\omega), n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığını aşağıdakı kimi təyin edək:

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in [0, 1 - \frac{1}{n}] \\ n^3, & \omega \in (1 - \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Göstərin ki, $\xi_n(\omega)$ ardıcılığı sanki yəqin olaraq 0-a yı-

ğılır.

Həlli. İxtiyari $\omega \in [0,1]$ üçün elə n_0 nömrəsi tapmaq olar ki, ixtiyari $\omega \in [0,1 - \frac{1}{n_0}]$ və $n \geq n_0$ şərtini ödəyən bütün n -lər üçün $\xi_n(\omega) = 0$ olar.

Tərif 3 ($r > 0$ tərtibdən orta mənada yığılma). Əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$E|\xi_n - \xi|^r \rightarrow 0$$

olarsa, onda deyirlər ki, ξ_n təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı ξ təsadüfi kəmiyyətinə **r -tərtibdən orta mənada yığılma**.

Analizdə bu yığılma növü L_r mənada yığılma adlanır və $\xi_n \xrightarrow{L_r} \xi$ işarə olunur. Xüsusi halda $r = 2$ olduqda bu yığılma orta kvadratik mənada yığılma adlanır və $\xi = l.i.m. \xi_n$ (ingiliscə, limit in mean) işarə olunur.

Yuxarıda verilən yığılma növlərində həm təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının elementləri, həm də limit təsadüfi kəmiyyət eyni bir ehtimal fəzasında təyin olunurlar. Lakin təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının elementləri müxtəlif ehtimal fəzalarında da təyin oluna bilərlər. Bu halda fəqli yığılma növü olan zəif yığılma və ya paylanmaya görə növündən istifadə olunur.

Tərif 4. $F_n(x) = P\{\xi_n \leq x\}$ və $F(x) = P\{\xi \leq x\}, n \geq 1$ işarə edək. Əgər $F_n \Rightarrow F$ zəif yığılarsa, yəni $F(x)$ paylanma funksiyasının kəsilməzlik nöqtələrində $n \rightarrow \infty$ olduqda $F_n(x) \rightarrow F(x)$ olarsa, bu halda deyirlər ki, ξ_n ardıcılığı ξ təsadüfi kəmiyyətinə **paylanmaya görə yığılma** və $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ kimi işarə edilir (bax, §6.2).

Bu tərif ekvivalent şəkildə aşağıdakı kimi vermək olar:

Tərif 5. Əgər ixtiyari məhdud və kəsilməz $f(x), x \in R$

funksiyası üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$Ef(\xi_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_n(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x) = Ef(\xi) \quad (1)$$

olarsa, bu halda deyirlər ki, ξ_n təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı ξ təsadüfi kəmiyyətinə və ya F_n paylanmalar ardıcılığı F paylanmasına **zəif** yığılır.

Riyazi analiz kursundan məlumdur ki, ardıcılıqların yığılmasını tədqiq etmək üçün fundamental ardıcılıq və ya Koşi ardıcılığı anlayışından istifadə edirlər. Bu anlayışı yuxarıda verilən yığılma növləri üçün də vermək olar.

Tərif 6. 1) Əgər $\forall \varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ və $m \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{|\xi_n - \xi_m| > \varepsilon\} \rightarrow 0$$

olarsa, bu halda deyirlər ki, $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı **ehtimala görə fundamentaldır**.

2) Əgər $\xi_n = \xi_n(\omega), n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı sanki bütün (P - ehtimal ölçüsünə görə) $\omega \in \Omega$ -lar üçün fundamental ədədi ardıcılıq olarsa, **yəqin və ya vahid ehtimalla fundamentaldır**.

3) Əgər $n \rightarrow \infty$ və $m \rightarrow \infty$ olduqda

$$E|\xi_n - \xi_m|^r \rightarrow 0$$

olarsa, bu halda deyirlər ki, $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı r ($0 < r < \infty$) tərtibdən orta və ya L_r **mənada fundamentaldır**.

İndi isə yığılma növləri ilə bağlı aşağıdakı mühüm faktları verək.

Teorem 1. $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlərin ehtimala

görə, sanki yəqin və L_r mənada yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt onun uyğun yığılma mənada fundamental olmasıdır.

Teorem 2. 1) $\xi_n \xrightarrow{s.y.} \xi$ yığılması üçün zəruri və kafi şərt istənilən $\varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\left\{\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0 \quad (2)$$

münasibətinin ödənilməsidir.

2) $\xi_n, n \geq 1$ ardıcılığının vahid ehtimalla fundamental olması üçün zəruri və kafi şərt istənilən $\varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\left\{\sup_{k \geq 0} |\xi_{n+k} - \xi_k| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0 \quad (3)$$

münasibətinin ödənilməsidir.

Nəticə 1. Əgər istənilən $\varepsilon > 0$ üçün

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} < \infty$$

olarsa, onda $\xi_n \xrightarrow{s.y.} \xi$ yığılması ödənilir.

Doğrudan da, göstərək ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\left\{\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0.$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$\begin{aligned} P\left\{\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right\} &= P\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right\} \leq \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} P\{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Sonuncu sıra isə $n \rightarrow \infty$ olduqda sıfıra yaxınlaşır.

Nəticə 2. Əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ olarsa, onda elə $\{n_k\}$ ardıcılığı var ki, $k \rightarrow \infty$ olduqda $\xi_{n_k} \xrightarrow{s.y.} \xi$.

Nəticə 3. Əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda $\xi_n \xrightarrow{s.y.} \xi$ olarsa, onda $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ yığılması ödənilir.

Doğrudan da, $\forall \varepsilon > 0$ üçün

$$P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \leq P\left\{\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right\}.$$

Teorem 2-yə əsasən $\xi_n \xrightarrow{s.y.} \xi$ olduqda

$$P\left\{\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0$$

olur. Buna görə də bu halda istənilən $\varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \rightarrow 0.$$

Başqa sözlə, $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.

Teorem 3. Yığılma növləri arasında aşağıdakı implikasiyalar doğrudur:

$$\begin{aligned} \xi_n \xrightarrow{s.y.} \xi &\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi, \\ \xi_n \xrightarrow{L_r} \xi &\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi, \\ \xi_n \xrightarrow{P} \xi &\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi. \end{aligned}$$

Aşağıdakı misallar göstərir ki, teorem 3-də verilən implikasiyanın tərsi doğru deyil.

Teorem 3-də verilən implikasiyaların tərsinin ödənil-

diyi xüsusi hallara baxaq.

Teorem 4. Əgər $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı monoton artan və ya azalan olarsa, onda $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ yığılmasından $\xi_n \xrightarrow{s.y.} \xi$ yığılması çıxır.

Aşağıdakı teoremin isbatı [3], s.217-də verilmişdir:

Teorem 5. Əgər $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi şəklində göstərilə bilərsə, bu halda $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ yığılmasından $\xi_n \xrightarrow{s.y.} \xi$ yığılması çıxır.

Teorem 6. Əgər $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ və $P\{\xi = c\} = 1$ olarsa, onda $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ olur.

İsbatı. Aydındır ki,

$$P\{|\xi_n - \xi| \leq \varepsilon\} = P\{c - \varepsilon \leq \xi_n \leq c + \varepsilon\} =$$

$$= F_{\xi_n}(c + \varepsilon) - F_{\xi_n}(c - \varepsilon). \quad (4)$$

$c + \varepsilon$ və $c - \varepsilon$ nöqtələri

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq c, \\ 0, & x < c \end{cases}$$

cırlaşmış təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasının kəsilməzlik nöqtələri olduğu üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$F_{\xi_n}(c + \varepsilon) \rightarrow 1 \text{ və } F_{\xi_n}(c - \varepsilon) \rightarrow 0$$

olur. Onda teorem 5-in hökmü (4) bərabərliyindən çıxır.

İndi isə ehtimal nəzəriyyəsində vahid ehtimalla ödənilən xassələrin isbatında mühüm rol oynayan bir Borel-Kantelli lemması ilə tanış olaq.

Fərz edək ki, $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ehtimal fəzasında $A_n \in \mathfrak{F}, n \geq 1$

hadisələr ardıcılığı verilmişdir. A^* ilə bu ardıcılıqların yalnız və yalnız sonsuz sayda hadisənin baş verməsi hadisəsini işarə edək. Aydındır ki,

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Bəzən A^* əvəzinə $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}$ və ya $\{A_k \text{ sonsuz sayda}\}$ işarələməsindən də istifadə olunur. Ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox məsələlərində hadisələr ardıcılığından sonsuz sayda hadisənin baş verib verməməsinin ehtimalının təyin edilməsi zərurəti yaranır. Bunun üçün aşağıdakı lemmanın böyük əhəmiyyəti var.

Borel-Kantelli lemması. $A_1, A_2, \dots$ müəyyən hadisələr ardıcılığı verilmişdir.

1) Əgər $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < +\infty$ olarsa, onda $P(A^*) = 0$.

2) Əgər $A_1, A_2, \dots$ asılı olmayan hadisələdirsə və $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = +\infty$ olarsa, onda $P(A^*) = 1$.

İsbatı. 1) İxtiyari n üçün $A^* \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ olduğundan ehtimal ölçüsünün xassələrinə görə

$$P(A^*) \leq P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k).$$

Yığılan sıranın qalıq sırası sıfıra yaxınlaşdığı üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda $\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \rightarrow 0$. Deməli, $P(A^*) = 0$.

2) $A_1, A_2, \dots$ asılı olmayan hadisələr olduğundan, $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots$ hadisələri də asılı olmayan hadisələrdir. Onda ehtimalın kəsilməzlik xassəsinə görə

$$\begin{aligned}
 P(A^*) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\Omega - \bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = \\
 &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^{\infty} P(\overline{A_k}) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^{\infty} (1 - P(A_k)).
 \end{aligned}$$

Digər tərəfdən $0 \leq x < 1$ üçün $\ln(1 - x) \leq -x$ və $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = +\infty$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\prod_{k=n}^{\infty} (1 - P(A_k)) \leq e^{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)} = 0$$

olar. Beləliklə, $P(A^*) = 1$.

Beləliklə, lemma isbat olundu.

Qeyd 1. Borel-Kantelli lemmasının şərtləri kafi şərtlərdir. Təbii olaraq belə sual meydana çıxır: bu şərtlər zəruridirmi? Aşağıdakı misal göstərir ki, bu şərtlər zəruri deyil.

Misal 3. Fərz edək ki, $\Omega = [0,1]$, $\mathfrak{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, P isə Lebeq ölçüsüdür. $A_k = \left[0, \frac{1}{k}\right]$, $k = 1, 2, \dots$ Aydındır ki, k artdıqda A_k azalandır və $A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_k = \emptyset$. Deməli, $P(A^*) = 0$. Eyni zamanda $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$, bu isə o deməkdir ki, Borel-Kantelli lemmasının birinci hissəsində şərt zəruri deyil. Başqa sözlə, hökmün tərsi doğru deyil. Bu misal həm də göstərir ki, lemmanın ikinci hissəsindəki asılı olmaqlıq şərti

mühüm şərtidir. $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = +\infty$ olmasına baxmayaraq, $P(A^*) \neq 1$. Buna səbəb $A_k = \left[0, \frac{1}{k}\right]$ hadisələrinin asılı olmasıdır. Doğrudan da, məsələn, $A_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ və $A_3 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$ hadisələri üçün $A_2 \cap A_3 = A_2$ və deməli,

$$P(A_2 \cap A_3) \neq P(A_2)P(A_3).$$

İndi isə yığılma növlərindən istifadə edərək riyazi gözləmə ilə bağlı bəzi mühüm nəticələri isbatsız olaraq verək.

Qeyd edək ki, $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ yığılmasından ümumi halda $E\xi_n \rightarrow E\xi$ yığılması çıxır.

Bununla bağlı aşağıdakı misala baxaq.

Misal 4. Fərz edək ki, $\xi_1, \xi_2, \dots$ müxtəlif paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlərdir:

$$P\{\xi_n = n^3\} = \frac{1}{n}, \quad P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Yuxarıda misal 1-də göstərdik ki, bu ardıcılıq ehtimala görə sıfıra yığılır: $\xi_n \xrightarrow{P} 0$.

Lakin $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$E\xi_n = n^2 \nrightarrow E\xi = 0.$$

Hətta n artdıqca $E\xi_n$ -lər artır.

Misal 5. Fərz edək ki, $\xi_1, \xi_2, \dots$ müxtəlif paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlərdir:

$$P\{\xi_n = \sqrt{n}\} = \frac{1}{n}, \quad P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Yuxarıda misal 1-də göstərdik ki, bu ardıcılıq ehtimala görə sıfıra yığılır: $\xi_n \xrightarrow{P} 0$.

$n \rightarrow \infty$ olduqda

$$E\xi_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow E\xi = 0.$$

Başqa sözlə, bu halda həm də $E\xi_n \rightarrow E\xi$ ödənilir.

Məhdud yığılma teoremi (Lebeq, 1904). Fərz edək

ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$. Onda $n \rightarrow \infty$ olduqda $E\xi_n \rightarrow E\xi < \infty$ olması üçün kafi şərt aşağıdakılardan hər hansı birinin ödənilməsidir:

1. ξ_n ardıcılığının müntəzəm məhdud olması,
2. ixtiyari $\omega \in \Omega$ üçün $|\xi_n| \leq \eta$, $n \geq 1$ və $E\eta < \infty$ olması,
3. elə $\alpha > 1$ ədədi və $C > 0$ sabiti var ki, $E|\xi_n|^\alpha \leq C$.

Monoton yığılma teoremi. ξ təsadüfi kəmiyyəti və $\xi_1, \xi_2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı verilmişdir. Əgər $0 \leq \xi_n \uparrow \xi$ olarsa, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda $E\xi_n \rightarrow E\xi \leq \infty$.

Nəticə 1. Əgər $\xi_n \geq 0, n \geq 1$ olarsa,

$$E\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} E\xi_k \leq \infty.$$

Nəticə 2. Əgər $\xi_n \geq 0, n \geq 1$ və $\sum_{k=1}^{\infty} E\xi_k < \infty$ olarsa, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda $\xi_n \xrightarrow{s.y.} 0$.

İndi isə mövzuya aid məsələ həlli nümunələrinə baxaq.

Məsələ 1. Fərz edək ki, $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \beta([0,1])$ və P isə Lebeq ölçüsüdür. $[0,1]$ parçasını n bərabər hissəyə bölək və $A_n^k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $k = \overline{1, n}$ işarə edək.

$$\xi_n^k = I(A_n^k) = \begin{cases} 1, & \omega \in A_n^k, \\ 0, & \omega \notin A_n^k \end{cases}$$

təsadüfi kəmiyyətlərdən ibarət olan

$$\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_2^2, \xi_3^1, \xi_3^2, \xi_3^3, \dots \quad (*)$$

ardıcılığının ehtimala görə və L_r mənadə yığılan olduğunu, lakin sanki yəqin yığılmadığını göstərin.

Həlli. Asanlıqla görmək olar ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{|\xi_n^k| > \varepsilon\} = P(A_n^k) = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Beləliklə, (*) ardıcılığı ehtimala görə sıfıra yaxınlaşır.

Asanlıqla görmək olar ki, (*) ardıcılığı L_r mənadə yığılan ardıcılıqdır. Çünki $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$E|\xi_n^k|^r = P(A_n^k) = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Lakin (*) ardıcılığı sanki yəqin yığılmır. Hətta (*) ardıcılığı $[0,1]$ parçasının heç bir nöqtəsində yığılmır. Çünki hər bir $\omega \in [0,1]$ üçün (*)-da sonsuz sayda 1 və sonsuz sayda 0 vardır. Buna görə də (*) ardıcılığı nöqtəvi mənadə da yığılan deyil.

Məsələ 2. Fərz edək ki, $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \beta([0,1])$ və P isə Lebeq ölçüsüdür.

$$\xi_n = \begin{cases} e^n, & 0 \leq \omega \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \omega > \frac{1}{n}, \end{cases}$$

təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının sanki yəqin yığıldığını, lakin L_r mənadə yığılmadığını göstərin.

Həlli. Aydındır ki, bu ardıcılıq sanki yəqin sıfıra yaxınlaşır, çünki

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|\xi_k| > \varepsilon\}\right) = P\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right) = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Lakin ξ_n ardıcılığı L_r mənadə yığılmır, istənilən $r > 0$ üçün

$n \rightarrow \infty$ olduqda

$$E|\xi_n|^r = \frac{e^{nr}}{n} \rightarrow \infty.$$

Yuxarıda misal 1-də göstərdik ki, bu ardıcılıq ehtimala görə sıfıra yığılır: $\xi_n \xrightarrow{P} 0$.

Məsələ 3. Fərz edək ki, $\xi_1, \xi_2, \dots$ müxtəlif paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlərdir:

$$P\{\xi_k = k\} = \frac{1}{k^2}, \quad P\{\xi_k = 0\} = 1 - \frac{1}{k^2}, \quad k \geq 1.$$

Göstərin ki, bu ardıcılıq sanki yəqin yığılır.

Həlli. Bunun üçün teorem 2-ni tətbiq edək:

$$\begin{aligned} P\left\{\sup_{k \geq n} |\xi_k| > \varepsilon\right\} &= P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|\xi_k| > \varepsilon\}\right) = \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} P\{|\xi_k| > \varepsilon\} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Digər tərəfdən $n \rightarrow \infty$ olduqda $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0$ olduğu üçün verilmiş ardıcılıq sanki yəqin sıfıra yığılır: $\xi_n \xrightarrow{s.y.} 0$.

Məsələ 4. Fərz edək ki, $\xi_1, \xi_2, \dots$ ardıcılığının paylanması aşağıdakı kimi verilmişdir:

$$F_n(x) = \begin{cases} 1, & x \geq c + \frac{1}{n} \\ 0, & x < c + \frac{1}{n} \end{cases}$$

burada $c \in \mathbb{R}$. Göstərin ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\xi_n \xrightarrow{d} c$.

Həlli. Asanlıqla görmək olar ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq c \\ 0, & x < c \end{cases}$$

Göründüyü kimi, $F(x)$ limit funksiyası $P\{\xi = c\} = 1$ cırlaşmış paylanmaya malik ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdır. Beləliklə, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\xi_n \xrightarrow{d} c$.

Məsələ 5. Fərz edək ki, $\xi_1, \xi_2, \dots$ müxtəlif paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlərdir:

$$P\{\xi_k = k\} = \frac{1}{k}, \quad P\{\xi_k = 0\} = 1 - \frac{1}{k}, \quad k \geq 1.$$

Göstərin ki, bu ardıcılıq paylanmaya görə yığılır.

Həlli. Bu məqsədlə məsələdə verilmiş ardıcılıq üçün $F_n(x) = P\{\xi_n \leq x\}$ paylanma funksiyaları ardıcılığını yazaq:

$$F_n(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ 1 - \frac{1}{n}, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Asanlıqla görmək olar ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Deməli, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\xi_n \xrightarrow{d} 0$.

Məsələ 6. $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının paylanma funksiyası verilmişdir:

$$F_n(x) = \begin{cases} 1, & x \geq n \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n, & 0 \leq x < n \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

ξ_n ardıcılığının paylanmaya görə yığılıb yığılmadığını araşdırın.

Həlli. Verilmiş $F_n(x)$ paylanma funksiyaları ardıcıl-

lığının $n \rightarrow \infty$ olduqda limitini tapmaq. Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Beləliklə, limitdə alınmış funksiya $\lambda = 1$ parametrlı üstlü paylanmaya malik ξ təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasıdır. Beləliklə, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$.

Məsələ 7. $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının elementləri $[-n, n]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmışdır. Bu ardıcılığın paylanmaya görə yığılan olub olmadığını müəyyən edin.

Həlli. Şərtə görə

$$F_n(x) = \begin{cases} 1, & x \geq n \\ \frac{x+n}{2n}, & -n \leq x < n \\ 0, & x < -n \end{cases}$$

Asanlıqla görmək olar ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x) = \frac{1}{2}.$$

Limitdə alınmış funksiya paylanma funksiyası olmadığı üçün verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının limit paylanması mövcud deyildir (bax, §6.2, misal 9).

Məsələlər.

- İsbat edin ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ və $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$ olarsa, onda $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{P} \xi + \eta$, $\xi_n \eta_n \xrightarrow{P} \xi \eta$ və $|\xi_n| \xrightarrow{P} |\xi|$.
- İsbat edin ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\xi_n \xrightarrow{s.y.} \xi$ və $\eta_n \xrightarrow{s.y.} \eta$ olarsa, onda $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{s.y.} \xi + \eta$, $\xi_n \eta_n \xrightarrow{s.y.} \xi \eta$ və $|\xi_n| \xrightarrow{s.y.} |\xi|$.
- İsbat edin ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda a) $\xi_n \xrightarrow{P} a \neq 0$ olarsa, $\frac{1}{\xi_n} \xrightarrow{P} \frac{1}{a}$.

b) $\xi_n \xrightarrow{s.y.} a \neq 0$ olarsa, $\frac{1}{\xi_n} \xrightarrow{s.y.} \frac{1}{a}$.

4. İsbat edin ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ və $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$ olarsa, onda $P\{\xi = \eta\} = 1$.

5. İsbat edin ki, $(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow{P} 0$ olarsa, $\xi_n^2 \xrightarrow{P} \xi^2$.

6. İsbat edin ki, əgər $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ və $g(x)$ kəsilməz funksiya olarsa, onda $g(\xi_n) \xrightarrow{P} g(\xi)$. Xüsusi halda, əgər $P\{\xi = c\} = 1$ olarsa və c nöqtəsi $g(x)$ funksiyaının kəsilməzlik nöqtəsidirsə, onda $g(\xi_n) \xrightarrow{P} g(c)$. Ehtimala görə yığılmanı sanki yəqin yığılma ilə əvəz etdikdə də məsələ doğrudurmu?

7. İsbat edin ki, əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda $E|\xi_n - \xi|^r \rightarrow 0$ olarsa, $E|\xi_n|^r \rightarrow E|\xi|^r$.

8. İsbat edin ki, əgər $\xi_n \xrightarrow{P} c$ və $\eta_n \xrightarrow{d} \eta$ olarsa, onda

$$\xi_n + \eta_n \xrightarrow{d} c + \eta \text{ və } \xi_n \eta_n \xrightarrow{d} c \eta.$$

9. İsbat edin ki, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ olarsa, ξ -nin $F(x)$ paylanma funksiyası hər yerdə kəsilməzdirsə və $x_n \rightarrow x_0$ olarsa, onda $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$.

10. Fərz edək ki, $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının xarakteristik funksiyası $\varphi_n(t)$ -dir. Göstərin ki, $\xi_n \xrightarrow{d} 0$ yığılması yalnız və yalnız o vaxt olur ki, $t = 0$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında $n \rightarrow \infty$ olduqda $\varphi_n(t) \rightarrow 0$ olsun.

§7.2. Böyük ədədlər qanunu

Ehtimal nəzəriyyəsində, çox sayda təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin tədqiqi mühüm yer tutur. Müəyyən şərtlər daxilində kifayət qədər çox sayda təsadüfi kəmiyyətin ümumi davranışı təsadüfi xarakterini itirir. Təsadüfi kəmiyyətlərin bu davranışı "böyük ədədlər qanunu" adlanan teoremlər ilə ifadə olunur. Bunlara Bernulli, Çebişev, Markov, Xinqin teoremləri daxildir.

Fərz edək ki, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında $\xi_n, n \geq 1$ tə-

sadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı verilmişdir, belə ki, $E|\xi_n| < \infty$.
 $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ işarə edək.

Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\left\{\omega: \left|\frac{S_n}{n} - \frac{ES_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0 \quad (1)$$

olarsa, onda deyirlər ki, $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün böyük ədədlər qanunu ödənilir və ya bu ardıcılıq böyük ədədlər qanununa tabe olur. (1)-dəki yığılmaya ehtimala görə yığılma deyilir. Başqa sözlə, $n \rightarrow \infty$ olduqda (1)-i ekvivalent şəkildə belə də yazmaq olar:

$$\frac{S_n}{n} - \frac{ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

İndi isə böyük ədədlər qanununun ödənməsi üçün kafi şərtləri özündə əks etdirən teoremləri verək.

Çebışev teoremi (1867). Fərz edək ki, $\xi_n, n \geq 1$ asılı olmayan və müntəzəm məhdud dispersiyaya malik təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır, yəni elə $C > 0$ sabiti var ki, $D\xi_n \leq C, n = 1, 2, \dots$ Onda ξ_n təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı böyük ədədlər qanununa tabedir, yəni ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\left\{\omega: \left|\frac{S_n}{n} - \frac{ES_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0.$$

İsbatı. Çebışev bərabərsizliyinə görə

$$P\left\{\omega: \left|\frac{S_n}{n} - \frac{ES_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}.$$

Teoremin şərtlərindən istifadə etsək,

$$\begin{aligned}
 D\left(\frac{S_n}{n}\right) &= \frac{1}{n^2} D(S_n) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right) = \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D(\xi_k) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n C = \frac{C}{n}.
 \end{aligned}$$

Beləliklə, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$0 \leq P\left\{\omega: \left|\frac{S_n}{n} - \frac{ES_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} \leq \frac{C}{\varepsilon^2 n} \rightarrow 0.$$

Beləliklə, teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki, təsadüfi kəmiyyətlər öz riyazi gözləmələrindən uzaq qiymətlər də ala bilər, lakin böyük ehtimalla çox sayda təsadüfi kəmiyyətin arifmetik ortası $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\xi_k$ ədədi ortasına yaxın qiymət alır. Beləliklə, əminliklə söyləyə bilərik ki, hər bir təsadüfi kəmiyyət hansı qiyməti alır, lakin onların arifmetik ortasının hansı qiymət alacağını müəyyən ehtimalla söyləmək mümkündür. Başqa sözlə, $n \rightarrow \infty$ olduqda təsadüfi kəmiyyətlərin arifmetik ortası təsadüfilik xarakterini itirir.

Çebişev teoremi böyük praktik əhəmiyyətə malikdir. Məsələn, məlumdur ki, hər bir sığorta şirkəti müştəriləri üçün sığorta haqqlarının miqdarını təyin etməlidir. Sığorta hadisəsi (yəni, qəza, yanğın və s.) baş verdikdə toplanmış sığorta haqqlarına əsasən sığorta şirkəti müəyyən sığorta məbləğini müştəriyə ödəməyi öhdəsinə götürür. Sığorta hadisəsinin baş vermə tezliyinə (sığortalının itkilərini) təsadüfi

kəmiyyət kimi baxaraq və belə halların məlum statistikasını toplamaqla, sığorta hadisələrinin baş verməsinin orta sayını (orta itkilərin miqdarını) müəyyən etmək olar. Çebişev teoreminə əsasən, böyük əminliklə itkilərin orta miqdarı təsadüfi olmayan kəmiyyət kimi qəbul edilə bilər. Beləliklə, bu məlumatlara və təxmin edilən sığorta məbləğinə əsasən sığorta haqqının məbləği müəyyən edilə bilər. Böyük ədədlər qanununun nəzərə alınmaması, sığorta şirkətinin əhəmiyyətli itkiləri (sığorta haqqı aşağı qiymətləndirildikdə) və ya sığorta xidmətlərinin cəlbədiciliyinin itirilməsi (sığorta ödənişi həddindən artıq göstərildikdə) baş verə bilər.

Çebişev teoremindən xüsusi hal kimi aşağıdakı teoremləri almaq mümkündür.

Əvvəlcə böyük ədədlər qanunu haqqında ilk teorem olan Bernulli teoremini verək. Qeyd edək ki, bu teoremlə biz Bernulli sxemi üçün limit teoremlərini verərkən tanış olmuşuq.

Bernulli teoremi (1713). Fərz edək ki, μ_n Bernulli sxemində müsbət nəticənin baş verməsi sayı, $0 < p < 1$ isə hər bir sınaqda müsbət nəticənin ehtimalıdır. Onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0.$$

İsbatı. Asılı olmayan Bernulli təsadüfi kəmiyyətlərinə baxaq. Belə ki, müsbət nəticə baş verdikdə bu təsadüfi kəmiyyətlər 1 qiymətini, baş vermədikdə isə 0 qiymətini alır:

$$P\{\xi_k = 1\} = p \text{ və } P\{\xi_k = 0\} = q = 1 - p, k = 1, 2, \dots, n$$

Bu halda $\mu_n = S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ olur. $E\xi_k = p$ və $D\xi_k = np$ olduğu üçün Çebişev teoreminin şərtləri ödənilir.

Beləliklə, Bernulli teoreminin hökmü doğrudur.

İndi isə böyük ədədlər qanunu haqqında Puasson teoremini verək.

Puasson teoremi (1837). Fərz edək ki, n sayda asılı olmayan sınaqlar ardıcılığında, hər sınaqda müsbət nəticənin baş vermə ehtimalı sınağın nömrəsindən asılıdır, yəni k -cı sınaqda “müsbət” nəticənin ehtimalı p_k , “mənfi” nəticənin ehtimalı isə $q_k = 1 - p_k$ -dir. Onda $\forall \varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P \left\{ \left| \frac{\mu_n}{n} - \frac{p_1 + \dots + p_n}{n} \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0.$$

İsbatı. $E\xi_k = p_k$, $ES_n = p_1 + \dots + p_n$, $D\xi_k = p_k q_k \leq \frac{1}{4}$ olduğu üçün Çebişev teoreminin şərtləri ödənilir. Beləliklə, Puasson teoreminin hökmü doğrudur.

İndi isə böyük ədədlər qanununa aid bir misala baxaq.

Misal 1. $\{\xi_k\}$, $k \geq 1$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır və aşağıdakı paylanmaya malikdir:

$$P\{\xi_k = \pm k\} = \frac{1}{2k^2}, \quad P\{\xi_k = 0\} = 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Bu ardıcılıq böyük ədədlər qanununa tabedirmi?

Həlli. Böyük ədədlər qanunu haqqında Çebişev teoremini tətbiq edəcəyik. Əvvəlcə $E\xi_k$ -ni hesablayaq:

$$E\xi_k = -k \cdot \frac{1}{2k^2} + k \cdot \frac{1}{2k^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

İndi isə dispersiyanı hesablayaq:

$$\begin{aligned} D(\xi_k) &= E\xi_k^2 - (E\xi_k)^2 = E\xi_k^2 = \\ &= (-k)^2 \cdot \frac{1}{2k^2} + k^2 \cdot \frac{1}{2k^2} + 0 = 1. \end{aligned}$$

Göründüyü kimi, dispersiyalar müntəzəm məhduddur. Deməli, Çebişev teoreminə görə bu ardıcılıq böyük ədədlər qanununa tabedir.

Qeyd edək ki, yuxarıdakı teoremlərdə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün böyük ədədlər qanunu verilmişdi. Aşağıdakı teorem göstərir ki, bir-birindən asılı olan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı da böyük ədədlər qanununa tabe ola bilər.

Markov teoremi (1924). Fərz edək ki, $\xi_n, n \geq 1$ ixtiyari təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır. Əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda $DS_n = o(n^2)$ şərti ödənilərsə, onda ξ_n ardıcılığı böyük ədədlər qanununa tabedir.

İsbati. Çebişev bərabərsizliyinə əsasən ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$0 \leq P \left\{ \omega: \left| \frac{S_n}{n} - \frac{ES_n}{n} \right| > \varepsilon \right\} \leq \frac{D \left(\frac{S_n}{n} \right)}{\varepsilon^2}.$$

Digər tərəfdən teoremin şərtinə əsasən $n \rightarrow \infty$ olduqda $DS_n = o(n^2)$. Bu isə o deməkdir ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\frac{DS_n}{n^2} \rightarrow 0$ və ya $D \left(\frac{S_n}{n} \right) \rightarrow 0$. Bunu yuxarıdakı münasibətdə nəzərə alsaq teoremin hökmünü əldə edərək.

Beləliklə, teorem isbat olundu.

Misal 2. Fərz edək ki, $\xi_n, n \geq 1$ müntəzəm məhdud dispersiyaya malik təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır, yəni elə $C > 0$ sabiti var ki, $D\xi_n \leq C, n \geq 1$. Bundan başqa $i \neq j$ olduqda ξ_i və ξ_j qonşu olmayan ixtiyari təsadüfi kəmiyyətlərin kovariasiyası sıfırdır. Verilmiş ardıcılıq böyük ədədlər qanununa tabedirmi?

Həlli. Markov teoreminin şərtinin ödənildiyini yoxlayaq. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəminin dispersiyası üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$\begin{aligned} D(S_n) &= D\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right) = \sum_{k=1}^n D(\xi_k) + \sum_{i \neq j} cov(\xi_i, \xi_j) = \\ &= \sum_{k=1}^n D(\xi_k) + 2 \sum_{i < j} cov(\xi_i, \xi_j). \end{aligned}$$

Şərtə görə $i \neq j - 1$ üçün $cov(\xi_i, \xi_j) = 0$. Buna görə də $n - 1$ sayda

$$cov(\xi_1, \xi_2), cov(\xi_2, \xi_3), \dots, cov(\xi_{n-1}, \xi_n)$$

kovariasiyalarından başqa digər kovariasiyalar sıfırdır.

Kovariasiyanın xassələrinə əsasən

$$cov(\xi_i, \xi_k) \leq \sqrt{D \xi_i} \sqrt{D \xi_k} \leq \sqrt{C} \sqrt{C} = C.$$

Bunu nəzərə alsaq,

$$\begin{aligned} DS_n &= D\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right) = \sum_{k=1}^n D\xi_k + 2 \sum_{i=1}^{n-1} cov(\xi_i, \xi_j) \leq \\ &\leq nC + 2(n-1)C. \end{aligned}$$

Sonuncu münasibətin hər iki tərəfini n^2 -na bölüb, $n \rightarrow \infty$ olduqda limitə keçsək

$$D\left(\frac{S_n}{n}\right) \leq \frac{C(3n-2)}{n^2} \rightarrow 0.$$

Başqa sözlə, $n \rightarrow \infty$ olduqda $DS_n = o(n^2)$ olur. Beləliklə, verilmiş ardıcılıq Markov teoreminin şərtlərini ödəyir. Deməli, bu ardıcılıq böyük ədədlər qanununa tabedir.

Qeyd 1. Markov teoremi göstərir ki, təsadüfi kəmiyyətlər asılı olduqda belə əgər n artdıqca onların cəminin dispersiyası çox da sürətlə artmırsa, bu halda böyük ədədlər qanunu doğrudur. Qeyd edək ki, təsadüfi kəmiyyətlər güclü asılı olduqda bu halda böyük ədədlər qanunu ödənilməyə bilər. Bununla bağlı aşağıdakı misala baxaq.

Misal 3. Fərz edək ki, $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı aşağıdakı kimi təyin olunmuşdur:

$\xi_n \equiv \xi_1$ və $D\xi_1 \neq 0$. Göstərin ki, bu ardıcılıq böyük ədədlər qanununa tabe deyildir.

Həlli. Bu halda $S_n = S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k = n \cdot \xi_1$ olur.

Beləliklə, bu halda

$$\frac{S_n}{n} - \frac{ES_n}{n} = \xi_1 - E\xi_1$$

olur və böyük ədədlər qanununun tərfi pozulur.

Qeyd edək ki, burada $DS_n = o(n^2)$ şərti də ödənilmir. Doğrudan da, bu halda

$$DS_n = D(n\xi_1) = n^2 D\xi_1.$$

Buradan görünür ki, $\frac{DS_n}{n^2}$ nisbəti sıfıra yaxınlaşmır. Deməli, Markov teoreminin şərti pozulur.

Çebişev teoremindəki təsadüfi kəmiyyətlərin dispersiyalarının müntəzəm məhdud olması şərti ağır şərtidir. Aşağıdakı teorem göstərir ki, asılı olmayan və eyni paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlərin böyük ədədlər qanununa tabe olması üçün onların sonlu riyazi gözləməyə malik olmaları kafi şərtidir.

Xinçin teoremi (1927). Fərz edək ki, $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətləri asılı deyil və eyni paylanmaya malikdir,

Əgər $E|\xi_n| < \infty$ olarsa, onda ξ_n təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı böyük ədədlər qanununa tabedir, yəni $n \rightarrow \infty$ olduqda ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$P\left\{\omega: \left|\frac{S_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0,$$

burada $a = E\xi_1$.

Teoremin hökmünü belə də yazmaq olar: $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a$.

İsbatı. Teoremi isbat etmək üçün xarakteristik funksiyalardan istifadə edəcəyik:

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = Ee^{it\frac{S_n}{n}}, \quad \varphi_{\xi_1}(t) = Ee^{it\xi_1}.$$

Xarakteristik funksiyanın xassələrinə görə

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \left(\varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n.$$

Digər tərəfdən $a = E\xi_1 < \infty$ olduğundan xarakteristik funksiya üçün aşağıdakı ayrılışdan istifadə edək:

$$\varphi_{\xi}(u) = 1 + iau + o(u), \quad u \rightarrow 0.$$

Buradan $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{n}\right) = 1 + \frac{iat}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right).$$

Bunu nəzərə alsaq, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \left(\varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{iat}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \rightarrow e^{iat}.$$

Beləliklə, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) \rightarrow e^{iat}.$$

Qeyd edək ki, limitdə alınmış e^{iat} funksiyası $t = 0$ nöq-

təsində kəsilməz funksiyadır və cırlaşmış paylanmanın xarakteristik funksiyasıdır. Buna görə də xarakteristik funksiyalar üçün kəsilməzlik teoreminə görə $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{d} a.$$

Məlumdur ki, (bax, §7.1, teorem 5) əgər təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı müəyyən sabitə paylanmaya görə yığılırsa, onda həmin sabitə ehtimalla görə də yığılır:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a.$$

Beləliklə, teorem isbat olundu.

Qeyd 2. Bəzi hallarda böyük ədədlər qanunundan doğru olmayan nəticə çıxarılır ki, təsadüfi kəmiyyətlərin ədədi ortası olan $\frac{S_n}{n}$ onların riyazi gözləməsi ilə üst-üstə düşür. Əslində isə belə deyil. Bu fikri aşağıdakı kimi izah etməyə çalışaq. Fərz edək ki, $\xi_1, \dots, \xi_n$ eyni paylanmaya malik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Aydınır ki, bu halda verilmiş təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözləmə və dispersiyaları da eynidir: $a = E\xi_k, \sigma^2 = D\xi_k, k = 1, \dots, n$. Çebişevin ikinci bərabərsizliyinə əsasən görmək olar ki, istənilən $\varepsilon > 0$ və $\delta > 0$ üçün n -in kifayət qədər böyük qiymətlərində

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$$

ədədi ortası $(1 - \delta)$ -dan kiçik olmayan ehtimalla a riyazi gözləməsindən ε -dan çox fərqlənməyəcəkdir.

Doğrudan da, Çebişev bərabərsizliyinə əsasən

$$P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - a \right| \leq \varepsilon \right\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}.$$

Başqa sözlə, əgər $n \geq \frac{\sigma^2}{\delta \varepsilon^2}$ olarsa, $(1 - \delta)$ -dan kiçik olmayan ehtimalla aşağıdakı bərabərsizlik doğru olacaq:

$$a - \varepsilon \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \leq a + \varepsilon.$$

Əgər baş vermə ehtimalı δ -dan kiçik olan hadisələri və bir-birindən ε -dan çox olmamaqla fərqlənən kəmiyyətləri nəzərə almasaq, onda n -in kifayət qədər böyük qiymətlərində (məsələn, $n \geq \frac{\sigma^2}{\delta \varepsilon^2}$) baxılan $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$ ədədi ortasının praktiki olaraq onların riyazi gözləməsi ilə üst-üstə düşdüyünü hesab etmək olar:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \approx a.$$

İndi isə böyük ədədlər qanununun ödənilməsi üçün zəruri və kafi şərti özündə əks etdirən Kolmoqorov teoremini isbatsız olaraq verək.

Kolmoqorov teoremi (1930). İxtiyari ξ_n , $n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının böyük ədədlər qanununun ödənilməsi üçün zəruri və kafi şərt $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$E \left(\frac{\eta_n^2}{1 + \eta_n^2} \right) \rightarrow 0 \quad (2)$$

münasibətinin ödənilməsidir, burada $\eta_n = \frac{S_n}{n} - \frac{ES_n}{n}$.

Qeyd edək ki, asılı olmayan və eyni paylanmaya malik ξ_n təsadüfi kəmiyyətlərin böyük ədədlər qanununa tabe olması ξ_1 təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyasının differensiallanan olması ilə sıx bağlıdır.

Məlumdur ki, əgər $E|\xi_1| < \infty$ olarsa, onda $\varphi'(t)$ törə-

məsi məhdud və kəsilməzdir, belə ki, $\varphi'(0) = iE\xi_1$ olur. Bu faktın tərsi doğru deyil.

Teorem. $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a$ olması üçün zəruri və kafi şərt $\varphi'(t) = ia$ olmasıdır.

Məsələlər.

1. $\xi_k; k \geq 1$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyət ardıcılığıdır və hər biri (α, λ) parametrlı Pareto paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyətlərdir:

$$p(x) = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{x} \right)^{\alpha+1}, \quad \alpha > 0, \quad x > \lambda > 0.$$

Göstərin ki, $\alpha > 1$ olduqda bu ardıcılıq böyük ədədlər qanununa tabedir.

2. $\{\xi_k\}, k \geq 1$ asılı olmayan və aşağıdakı paylanmaya malik diskret təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır:

$$P\{\xi_k = \pm 2^k\} = 2^{-(2k+1)}, \quad P\{\xi_k = 0\} = 1 - 2^{-2k}, k=1,2,\dots$$

Göstərin ki, verilmiş ardıcılıq böyük ədədlər qanununa tabedir.

3. $\xi_k, k \geq 1$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyət ardıcılığıdır:

$$P\{\xi_k = \pm k^\alpha\} = \frac{1}{2}.$$

α parametrinin hansı qiymətlərində verilmiş ardıcılıq böyük ədədlər qanununa tabedir?

Cavab: $\alpha < \frac{1}{2}$

4. $\xi_1, \xi_2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı böyük ədədlər qanununa tabedir. Bu halda $|\xi_1|, |\xi_2|, \dots$ ardıcılığı da böyük ədədlər qanununa tabe olmalıdırmı?

Cavab: xeyir.

5. $\xi_1, \xi_2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. İsbat edin ki, əgər $|S_n| < cn$ və $DS_n > \alpha n^2$ olarsa, $\xi_1, \xi_2, \dots$ ardıcılığı böyük ədədlər qanununa tabe deyildir.

§7.3. Gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu

Böyük ədədlər qanunu mövzusunı şərh edərkən, qeyd etmişdik ki, bəzən Bernulli teoremindən doğru olmayan nəticələr çıxarırlar ki, sınaqlar sayı n -nin artması ilə A hadisəsinin nisbi tezliyi $\frac{\mu_n}{n}$ onun bir sınaqdakı ehtimalı olan p -yə yığılır. Lakin bu belə deyildir. Əslində isə Bernulli teoreminə görə sınaqların sayı olan n kafi qədər böyük olduqda

$$\left| \frac{\mu_n}{n} - p \right| \leq \varepsilon$$

bərabərsizliyinin ehtimalı $(1 - \delta)$ ədədindən böyük olur.

1909-cu ildə fransız riyaziyyatçısı Emil Borel daha dərin bir faktın doğruluğunu aşkar edərək gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu haqqında ilk teoremi isbat etdi. Bu teoremin mənası belədir ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ və $\delta > 0$ ədədləri üçün elə n_0 nömrəsi tapmaq olar ki, ixtiyari $s > 0$ üçün $n_0 \leq n \leq n_0 + s$ şərtini ödəyən bütün n -lər üçün

$$\left| \frac{\mu_n}{n} - p \right| \leq \varepsilon$$

bərabərsizliklərinin hamısının ödənilməsi ehtimalı $(1 - \delta)$ ədədindən böyük olur (bax, məsələn, [4], s. 153).

İndi isə gücləndirilmiş böyük ədədlər qanununu daha ümumi hal üçün verək.

Fərz edək ki, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ehtimal fəzasında $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı verilmişdir, belə ki, $E|\xi_n| < \infty$. $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ işarə edək. Məlumdur ki, əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\frac{S_n}{n} - \frac{ES_n}{n} \xrightarrow{s.y.} 0 \quad (1)$$

olarsa, bu halda deyirlər ki, $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu ödənilir.

Ayındır ki, əgər təsadüfi kəmiyyətlər gücləndirilmiş böyük ədədlər qanununa tabe olarsa, onda onlar böyük ədədlər qanununa da tabedirlər. Lakin bunun tərsi doğru deyil.

§7.1-də teorem 2-də verilmiş sanki yəqin yığılma kriteriyasına əsasən (1) münasibəti aşağıdakı ekvivalent formada yazıla bilər:

$\varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\left\{\sup_{k \geq n} \left| \frac{S_k}{k} - \frac{ES_k}{k} \right| \leq \varepsilon\right\} \rightarrow 1.$$

Başqa sözlə, müəyyən n nömrəsindən sonra bütün $\frac{S_n}{n}, \frac{S_{n+1}}{n+1}, \dots$ trayektoriyaları 1-dən az fərqlənən ehtimalla uyğun olaraq $\frac{ES_n}{n}, \frac{ES_{n+1}}{n+1}, \dots$ riyazi gözləməsinə yaxın olacaq.

Gücləndirilmiş böyük ədədlər qanununun ödənilməsi üçün verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər üzərinə müəyyən şərtlər qoymaq lazım gəlir. Öncə gücləndirilmiş böyük ədədlər qanununun italyan alimi Kantelli tərəfindən isbat edilmiş daha ümumi formasını verək.

Kantelli teoremi (1922). Fərz edək ki, asılı olmayan $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı verilmişdir və onların 4-cü tərtib momentləri müntəzəm məhduddur, yəni elə $C > 0$ sabiti var ki,

$$E|\xi_n - E\xi_n|^4 \leq C, n \geq 1.$$

Onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\frac{S_n}{n} - \frac{ES_n}{n} \xrightarrow{s.y.} 0.$$

İsbatı. Ümumiliyi pozmadan $E\xi_n = 0, n \geq 1$ götürək.

$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{s.y.} 0$ olmasını göstərmək üçün istənilən $\varepsilon > 0$ üçün

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} < \infty$$

olduğunu göstərmək kifayətdir. Çebişev bərabərsizliyini tətbiq etsək

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E|S_n|^4}{n^4 \varepsilon^4}$$

bərabərsizliyini alarıq. Göstərək ki, teoremin şərtləri daxilində

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left|\frac{S_n}{n}\right|^4 < \infty$$

olur.

Doğrudan da,

$$\begin{aligned} S_n^4 &= (\xi_1 + \dots + \xi_n)^4 = \\ &= \sum_{i=1}^n \xi_i^4 + \sum_{i,j} \frac{4!}{2!2!} \xi_i^2 \xi_j^2 + \sum_{\substack{i \neq j \\ i \neq k \\ j < k}} \frac{4!}{2!1!1!} \xi_i^2 \xi_j \xi_k + \\ &+ \sum_{i < j < k < l} 4! \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l + \sum_{i \neq j} \sum_{i,j} \frac{4!}{3!1!} \xi_i^3 \xi_j \end{aligned}$$

ξ_k -ların asılı olmazlığını və $E\xi_k = 0$ şərtini nəzərə alsaq

$$ES_n^4 = \sum_{i=1}^n E\xi_i^4 + 6 \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} E\xi_i^2 E\xi_j^2.$$

$E|\xi_i|^4 < C$ olduğu üçün Lyapunov bərabərsizliyinə görə $E\xi^2 \leq \sqrt{E\xi^4}$ olur. 2-ci cəmdə C_n^2 sayda toplanan olduğunu da nəzərə alsaq ES_n^4 üçün aşağıdakı qiymətləndirməni əldə edərik:

$$ES_n^4 \leq nC + 6 \frac{n(n-1)}{2} C = (3n^2 - n)C \leq 3n^2 C.$$

Beləliklə, alırıq ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} E \left| \frac{S_n}{n} \right|^4 \leq 3C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Beləliklə, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{s.y.} 0$ ödənilir.

Xüsusi halda Kantelli teoremindən Bernulli sxemi üçün gücləndirilmiş böyük ədədlər qanununu ala bilərik.

Nəticə (Borel teoremi (1909)). Bernulli sxemində müsbət nəticənin baş vermə sayı μ_n –dirsə, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{s.y.} p.$$

Borel teoreminin hökmü asılı olmayan hər biri Bernulli paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyətlər üçün Kantelli teoremindən alınır. Bu halda $S_n = \mu_n$, $ES_n = np$ və $E(\xi_n - p)^4 \leq \frac{1}{4}$. $E\xi_n = p$ olduğundan Borel teoremi Kantelli teoremindən birbaşa alınır.

Asılı olmayan və eyni paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlər üçün gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu haq-

qında kriteriyanı (zəruri və kafi şərti) ifadə edən aşağıdakı Kolmoqorov teoremini isbatsız olaraq verək.

Kolmoqorovun birinci teoremi (1930). Asılı olmayan və eyni qanunla paylanmaya malik $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlərinin gücləndirilmiş böyük ədədlər qanununa tabe olması üçün zəruri və kafi şərt $E|\xi_1| < \infty$ olmasıdır.

Bu teoremin zəruri şərtini belə başa düşmək lazımdır. Fərz edək ki, asılı olmayan və eyni paylanmaya malik $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{s.y.} c$$

burada c müəyyən sonlu sabitdir. Onda $E|\xi_1| < \infty$ və $c = E\xi_1$ olur.

İndi isə müxtəlif paylanmaya malik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu haqqında Kolmoqorov teoremini isbatsız olaraq verək.

Kolmoqorovun ikinci teoremi (1933). Fərz edək ki, asılı olmayan $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı verilmişdir, belə ki, $D\xi_n < \infty$. Əgər müsbət b_n ədədləri varsa ki, $b_n \uparrow \infty$ və

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{b_n^2} < \infty$$

olarsa, onda

$$\frac{S_n - ES_n}{b_n} \xrightarrow{s.y.} 0.$$

Xüsusi halda, əgər

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{n^2} < \infty$$

olarsa, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{s.y.} 0.$$

Misal 1. $\{\xi_k\}$, $k \geq 1$ asılı olmayan və aşağıdakı paylanmaya malik diskret təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır:

$$P\{\xi_k = \pm 2^k\} = 2^{-(2k+1)}, \quad P\{\xi_k = 0\} = 1 - 2^{-2k}, \quad k=1,2,\dots$$

Göstərin ki, verilmiş ardıcılıq gücləndirilmiş böyük ədədlər qanununa tabedir.

Həlli. Şərtə görə $\{\xi_k\}$, $k \geq 1$ asılı olmayan müxtəlif paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır. Digər tərəfdən asanlıqla görmək olar ki, $E\xi_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Göstərək ki, verilmiş ardıcılıq üçün gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu haqqında Kolmoqorovun ikinci teoreminin şərtləri ödənilir. Bu məqsədlə $D\xi_k$ dispersiyalarını hesablayaq:

$$D\xi_k = E\xi_k^2 = (-2^k)^2 2^{-(2k+1)} + (2^k)^2 2^{-(2k+1)} = 1.$$

Beləliklə,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D\xi_k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Beləliklə, gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu haqqında Kolmoqorovun ikinci teoreminin bütün şərtləri ödənilir. Buna görə də verilmiş ardıcılıq gücləndirilmiş böyük ədədlər qanununa tabedir.

Misal 2. $\{\xi_k\}$, $k \geq 1$ asılı olmayan və hər biri üstlü paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır. $n \rightarrow \infty$ olduqda $\frac{n}{S_n}$ ardıcılığının sanki yəqin limitini tapın, burada $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$.

Həlli. Gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu haqqında Kolmoqorovun birinci teoreminə görə $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{s.y.} E\xi_1.$$

Axtarılan limiti tapmaq üçün $x \neq 0$ nöqtələrində kəsilməz olan $g(x) = \frac{1}{x}$ funksiyasını götürək. Sanki yəqin yığılmanın kəsilməzlik xassəsindən istifadə edək. Məlumdur ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda $\xi_n \xrightarrow{s.y.} a$ olarsa və $g(x)$ funksiyası a nöqtəsində kəsilməzdirsə, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda $g(\xi_n) \xrightarrow{s.y.} g(a)$. Buna görə də

$$\frac{n}{S_n} = g\left(\frac{S_n}{n}\right) \xrightarrow{s.y.} g(E\xi_1).$$

Şərtə görə $E\xi_1 = \frac{1}{\lambda}$ olduğu üçün $g(E\xi_1) = g\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lambda$ olar.

Beləliklə, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\frac{n}{S_n} \xrightarrow{s.y.} \lambda.$$

Qeyd. Verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı gücləndirilmiş böyük ədədlər qanununa tabedirsə, onda bu ardıcılıq böyük ədədlər qanununa da tabedir. Lakin bu faktın tərsi ümumiyyətlə, doğru deyil. Bununla bağlı aşağıdakı misalı verək (bax, [28], s.164).

Misal 3. $\{\xi_n\}, n \geq 2$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır:

$$P\{\xi_n = -n\} = P\{\xi_n = n\} = \frac{1}{2n \cdot \ln n},$$

$$P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n \cdot \ln n}, n = 2, 3, \dots$$

Göstərin ki, bu ardıcılıq gücləndirilmiş böyük ədədlər qanununa tabe deyil.

Bu paraqrafın sonunda S_n cəmlər ardıcılığının mühüm bir xassəsini ifadə edən təkrar loqarifm qanununu verək. Əvvəlcə aşağıdakı misala baxaq.

Misal 4. $\xi_1, \xi_2, \dots$ asılı olmayan Bernulli təsadüfi kəmiyyətləridir, belə ki, $P\{\xi_i = -1\} = P\{\xi_i = 1\} = \frac{1}{2}$. Bu halda

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, n \geq 1,$$

cəmlər ardıcılığı simmetrik Bernulli təsadüfi dolaşması əmələ gətirir.

İsbat etmək olar ki, vahid ehtimalla

$$\overline{\lim} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty \text{ və } \underline{\lim} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty \quad (1)$$

Bundan əlavə

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} < \infty$$

olduğu üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda vahid ehtimalla

$$\frac{S_n}{\sqrt{n} \ln n} \rightarrow 0. \quad (2)$$

Qeyd edək ki, (1)-dən çıxır ki, vahid ehtimalla $S_n, n \geq 0$ təsadüfi dolaşmasının trayektoriyaları $\pm \varepsilon \sqrt{n}$ ayrılərini sonsuz sayda kəsirlər, burada ε ixtiyari müsbət ədəddir. Lakin (2)-yə əsasən bu trayektoriyalar $\pm \varepsilon \sqrt{n} \ln n$ ayrıləri ilə əhatə olunmuş oblastin daxilindən yalnız sonlu sayda çıxırlar. (1) və (2) nəticələri $S_n, n \geq 0$ simmetrik Bernulli

dolaşmasının trayektoriyalarının xarakteri haqqında mühüm informasiya verir ([28], s.423).

Aşağıda verilən Xartman və Vintner tərəfindən 1941-ci ildə isbat olunmuş təkrar loqarifm qanunu isə təsadüfi dolaşmaların trayektoriyaları haqqında daha dəqiq təsəvvür yaradır.

Teorem (təkrar loqarifm qanunu). Fərz edək ki, $\xi_1, \xi_2, \dots$ asılı olmayan və eyni paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır. $E\xi_1 = 0$ və $E\xi_1^2 = \sigma^2 > 0$ olarsa, onda

$$P\left\{\overline{\lim} \frac{S_n}{\psi(n)} = 1\right\} = 1,$$

burada $\psi(n) = \sqrt{2\sigma^2 n \ln \ln n}$.

Qeyd edək ki, təkrar loqarifm qanunu müntəzəm məhdud təsadüfi kəmiyyətlər üçün 1924-cü ildə Xinqin tərəfindən müəyyən olunmuş, 1929-cu ildə isə Kolmoqorov tərəfdən asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin geniş sinfi üçün isbat olunmuşdur.

§7.4. Mərkəzi limit teoremləri

Bernulli sxemi üçün limit teoremlərini mövzusunda (bax, §3.2) biz Muavr-Laplasın inteqral teoremini vermişdik. Bu teoremdə əslində Bernulli paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyətlər iştirak edirdi. Təbii olaraq belə bir sual meydana çıxır ki, bu təsadüfi kəmiyyətlər istənilən paylanmaya malik olarsa, onların normallaşmış cəminin paylanması haqqında nə demək olar? Bu suala Muavr-

Laplasın integral teoreminin ümumiləşməsi olan mərkəzi limit teoremi cavab verir. Bu ad altında birləşən limit teoremlərinin əsas mənası ondan ibarətdir ki, müəyyən şərtlər daxilində çox sayda təsadüfi kəmiyyətin cəminin paylanması asimptotik olaraq normal paylanmaya yaxın olur.

Mərkəzi limit teoremləri bir çox sahələrdə tətbiq olunur. Belə sahələrdən biri də ölçmə nəzəriyyəsidir, belə ki, istənilən ölçmə xəталarla müşayiət olunur. Bu ölçmə xəталarı isə hər birinin təsiri cüzi olan çoxsaylı təsadüfi xəталarın cəmindən ibarət olur. Mərkəzi limit teoreminə görə belə toplam xətanın paylanması asimptotik olaraq normal paylanmaya malik olur. Bu fakt riyazi statistikada empirik məlumatların analizi üsullarının işlənməsində mühüm rol oynayır.

Tərif. Fərz edək ki, $\xi_k, k \geq 1$ kəmiyyətlər ardıcılığı verilmişdir və $0 < \sigma_k^2 \equiv D\xi_k < \infty$. $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ işarə edək. Əgər ixtiyari $x \in R$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda aşağıdakı münasibət ödənilərsə, bu halda deyirlər ki, bu ardıcılıq mərkəzi limit teoremini ödəyir:

$$P \left\{ \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \leq x \right\} \rightarrow \Phi(x), \quad (1)$$

burada $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ -standart normal paylanma funksiyasıdır.

Bu hökmü aşağıdakı ekvivalent şəkildə də yazmaq olar:

$$S_n^* \equiv \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \eta,$$

burada η standart normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir. Başqa sözlə, mərkəzi limit teoremi hökm edir ki, S_n^* təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı standart normal qanunla paylanmış η təsadüfi kəmiyyətinə paylanmaya görə yığılır.

Qeyd edək ki, praktik məsələlərin həlli zamanı çox sayda təsadüfi faktorların təsirinin öyrənilməsi zəruri olur. Buna görə də asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin tapılması çox mühümdür. Lakin təsadüfi kəmiyyətlərin sayı çox olduqda cəmin paylanması üçün aşkar ifadələrin əldə edilməsi çox çətin olur. Çünki bu zaman n -qat integralların hesablanması zərurəti meydana çıxır (bax, §3.8). Tərifdən göründüyü kimi, mərkəzi limit teoremləri müəyyən şərtlər daxilində məhz çox sayda təsadüfi kəmiyyətin cəminin paylanmasının asimptotik olaraq normal paylanmaya yaxınlaşdığını müəyyən edir.

Əvvəlcə asılı olmayan və eyni paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün mərkəzi limit teoremini verək:

Teorem 1 (Levi-Xinçin, 1925). Fərz edək ki, ξ_k , $k \geq 1$ asılı olmayan və eyni paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır. Əgər $0 < \sigma^2 \equiv D\xi_1 < \infty$ olarsa, bu ardıcılıq üçün mərkəzi limit teoremi doğrudur. Başqa sözlə, $n \rightarrow \infty$ olduqda x -ə nəzərən müntəzəm olaraq

$$P \left\{ \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \leq x \right\} = P \left\{ \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right\} \rightarrow \Phi(x).$$

ödənilir.

İsbatı. Bu teoremi isbat etmək üçün xarakteristik funksiyalar metodundan istifadə edəcəyik.

Fərz edək ki, $\varphi_{S_n^*}(t) = E e^{itS_n^*}$ və $\varphi(t) = E e^{it(\xi_1 - a)}$, burada $a = E \xi_1$.

Xarakteristik funksiyanın xassələrinə görə

$$\varphi_{S_n^*}(t) = \left(\varphi \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \right) \right)^n,$$

çünki teoremin şərtinə görə $\xi_k, k \geq 1$ asılı olmayan və eyni paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır.

Digər tərəfdən, $\sigma^2 < \infty$ olduğundan xarakteristik funksiyanın xassəsinə əsasən $t \rightarrow 0$ olduqda

$$\varphi(t) = 1 - \frac{t^2 \sigma^2}{2} + o(t^2).$$

Bunu nəzərə alsaq, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\varphi_{S_n^*}(t) = \left(\varphi \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \right) \right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o \left(\frac{t^2}{n} \right) \right)^n \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Məlumdur ki, $e^{-\frac{t^2}{2}}$ funksiyası (0,1) parametrli standart normal paylanmanın xarakteristik funksiyasıdır. Beləliklə, xarakteristik funksiyalar üçün kəsilməzlik teoreminə əsasən teoremin hökmünü əldə edirik.

Teorem isbat olundu.

Məsələ. $\xi_k, k \geq 1$ asılı olmayan və üstlü qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır. Bu ardıcılıq üçün mərkəzi limit teoreminin doğru olduğunu göstərin.

Həlli. Şərtə görə $\xi_k, k \geq 1$ asılı olmayan və eyni paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır. Buna görə də Levi-Xinçin teoremindən istifadə edə bilərik. Üstlü paylanmanın dispersiyası sonlu olduğu üçün verilmiş ardıcılıq üçün mərkəzi limit teoremi doğrudur.

Qeyd edək ki, xüsusi halda, əgər ξ_i -lər Bernulli paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyətlədirsə, yəni

$$P\{\xi_i = 1\} = p, P\{\xi_i = 0\} = q = 1 - p, i \geq 1$$

olarsa, bu halda, teorem 1-dən Muavr-Laplasın integral limit teoremi alınır (bax, §3.2).

Bernulli sxemində Puasson teoremini ümumiləşdirmək üçün təsadüfi kəmiyyətlərin seriyalar sxeminə baxmaq lazım gəlir:

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} & & & & \\ \xi_{21} & \xi_{22} & & & \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \dots & \xi_{nn} & \end{pmatrix}$$

Burada hər bir sətir elementləri asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, yəni istənilən $n \geq 1$ üçün $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn}$ təsadüfi kəmiyyətləri asılı deyillər. $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_{nk}$ işarə edək.

Teorem 2. Fərz edək ki, hər bir $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn}$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$P\{\xi_{nk} = 0\} = q_{nk} \text{ və } P\{\xi_{nk} = 1\} = p_{nk}$$

ehtimalları n və k -dan asılıdır, $p_{nk} + q_{nk} = 1$; $1 \leq k \leq n$.

Əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\max_k p_{nk} \rightarrow 0$$

və

$$\sum_{k=1}^n p_{nk} \rightarrow \lambda > 0,$$

olarsa, onda

$$P\{S_n = k\} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$$

İsbatı. Hər bir $1 \leq k \leq n$ üçün $E e^{it\xi_{nk}} = p_{nk} e^{it} + q_{nk}$

olduğundan

$$\begin{aligned}\varphi_{S_n}(t) &= Ee^{itS_n} = \prod_{k=1}^n (p_{nk}e^{it} + q_{nk}) = \\ &= \prod_{k=1}^n (1 + p_{nk}(e^{it} - 1)).\end{aligned}$$

Sonuncu münasibətdə $n \rightarrow \infty$ olduqda limitə keçsək alınmış funksiya Puasson paylanmasının xarakteristik funksiyası olan $e^{\lambda(e^{it}-1)}$ funksiyasını əldə edərik.

Beləliklə, teorem isbat olundu.

Nəticə. Fərz edək ki, ξ_{nk} , $1 \leq k \leq n$ təsadüfi kəmiyyətləri eyni paylanmaya malikdirlər, belə ki, $P\{\xi_{nk} = 1\} = p_n$, $P\{\xi_{nk} = 0\} = q_n$ və $p_n + q_n = 1$ ehtimalları k -dan asılı deyil. Əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda $p_n \rightarrow 0$ və $np_n \rightarrow \lambda > 0$ olarsa, onda

$$P\{S_n = k\} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, \dots$$

doğrudur.

İndi isə asılı olmayan və müxtəlif paylanmalara malik təsadüfi kəmiyyətlər mərkəzi limit teoremini üçün isbatsız verək.

Teorem 3 (Lindeberq, 1922). Fərz edək ki, ξ_n , $n \geq 1$ asılı olmayan, müxtəlif paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı verilmişdir, belə ki, $\sigma_n^2 = D\xi_n < \infty$, $n \geq 1$. Bundan əlavə ixtiyari $\tau > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$L_n(\tau) = \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{\{x: |x-a_k| > \tau D_n\}} (x - a_k)^2 dF_k(x) \rightarrow 0 \quad (L)$$

Lindeberq şərti ödənilir, burada

$$D_n^2 \equiv DS_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2, \quad a_k = E\xi_k \text{ və } F_n(x) = P\{\xi_n \leq x\}.$$

Onda istənilən $x \in R$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\left\{\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \leq x\right\} \rightarrow \Phi(x). \quad (2)$$

(L) şərtini aşağıdakı kimi izah etmək olar. Aydındır ki,

$$S_n^* = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = \sum_{k=1}^n \xi_{nk}, \quad \xi_{nk} = \frac{\xi_k - E\xi_k}{D_n}$$

yaza bilərik. $E\xi_{nk} = 0$, $D\xi_{nk} = \frac{\sigma_k^2}{D_n^2}$. Göstərək ki, (L) şərti ödəndikdə

$$\max_{k \leq n} \frac{\sigma_k^2}{D_n^2} \rightarrow 0. \quad (M)$$

Doğrudan da,

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_n^2}{D_n^2} &= \frac{1}{D_n^2} \int_{\{x: |x-a_k| > \tau D_n\}} (x - a_k)^2 dF_k(x) = \\ &= \frac{1}{D_n^2} \int_{\{x: |x-a_k| \geq \tau D_n\}} (x - a_k)^2 dF_k(x) + \\ &+ \frac{1}{D_n^2} \int_{\{x: |x-a_k| < \tau D_n\}} (x - a_k)^2 dF_k(x) \leq L_n(\tau) + \tau^2. \end{aligned}$$

Burada nəzərə alsaq ki, $\tau > 0$ ixtiyaridir, onda alırıq ki, $(L) \Rightarrow (M)$.

(M) göstərir ki, S_n normallaşmış cəmində ξ_{nk} toplananlarının dispersiyası sonsuz kiçik olurlar, yəni ξ_{nk} toplananlarının S_n^* normal cəminə verdikləri təsir çox kiçik olur. Lakin Lindeberq şərti göstərir ki, bu sonsuz kiçik təsərə malik olan ξ_{nk} -lərin cəmi asimptotik normal paylanmaya malik olur.

(M) şərtindən və Çebışev bərabərsizliyindən çıxır ki, $\forall \varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$\max_{k \leq n} P(|\xi_{nk}| > \varepsilon) \rightarrow 0. \quad (S)$$

Beləliklə, $(L) \Rightarrow (M) \Rightarrow (S)$.

(S) şərti ξ_{nk} -lərin ehtimala görə müntəzəm kiçiklik şərti adlanır ($\xi_{nk} \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty, k$ -ya görə müntəzəm). Sonsuz kiçik ξ_{nk} kəmiyyətlərin birgə təsiri (cəmi) özünü asimptotik olaraq normal paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyət kimi aparır.

Lindeberq şərtinin ödənildiyi və deməli, mərkəzi limit teoreminin doğru olduğu bir neçə xüsusi hallara baxaq.

Əvvəlcə Lindeberq teoremindən alınan aşağıdakı Lyaapunov teoremini isbat edək.

Teorem 4 (Lyapunov, 1901). Fərz edək ki, asılı olmayan və müxtəlif paylanmaya malik $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı verilmişdir, belə ki, müəyyən $\delta > 0$ üçün

$$c_k^{2+\delta} = E|\xi_k - a_k|^{2+\delta} < \infty$$

şərti ödənilir. $C_n = \sum_{k=1}^n c_k^{2+\delta}$ işarə edək.

Əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\frac{C_n}{D_n} \rightarrow 0 \quad (L')$$

ödənildirsə, onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x).$$

İsbatı. Göstərək ki, $(L') \Rightarrow (L)$. Doğrudan da,

$$\begin{aligned} C_n^{2+\delta} &= \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} |x - a_k|^{2+\delta} dF_k(x) \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^n \int_{\{x: |x-a_k| > \tau D_n\}} |x - a_k|^{2+\delta} dF_k(x) \geq \\ &\geq \tau^\delta D_n^{2+\delta} L_n^{(\tau)}. \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$L_n(\tau) \leq \tau^\delta \left(\frac{C_n}{D_n}\right)^{2+\delta}.$$

Deməli, $(L') \Rightarrow (L)$ implikasiyası doğrudur.

İndi isə müntəzəm məhdud təsadüfi kəmiyyətlər üçün mərkəzi limit teoremini verək.

Teorem 5. Fərz edək ki, $\xi_n, n \geq 1$ asılı olmayan və müntəzəm məhdud təsadüfi kəmiyyətlərdir, yəni $|\xi_n| \leq M < \infty$ və $n \rightarrow \infty$ olduqda $D_n^2 \equiv DS_n \rightarrow \infty$. Onda bu təsadüfi kəmiyyətlər üçün mərkəzi limit teoremi ödənilir.

İsbatı. Göstərək ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda $L_n(\tau) \rightarrow 0$.

Doğrudan da,

$$L_n(\tau) = \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{\{x: |x-a_k| > \tau D_n\}} (x - a_k)^2 dF_k(x) =$$

$$= \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^n E(|\xi_k - a_k|^2 I_{|\xi_k - a_k|} > \tau D_n),$$

burada I_B simvolu B hadisəsinin indikatorudur.

$|\xi_k - a_k| \leq 2M$ olduğunu nəzərə alaraq Çebişev bərabərsizliyini tətbiq etsək

$$\begin{aligned} L_n(\tau) &\leq \frac{4M^2}{D_n^2} \sum_{k=1}^n P(|\xi_k - a_k| > \tau D_n) \leq \frac{4M^2}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k^2}{\tau^2 D_n^2} = \\ &= \frac{4M^2}{D_n^4 \tau^2} \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 = \frac{4M^2}{D_n^4 \tau^2} D_n^2 = \frac{4M^2}{D_n^2 \tau^2}. \end{aligned}$$

Beləliklə, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$L_n(\tau) \leq \frac{4M^2}{D_n^2 \tau^2} \rightarrow 0.$$

Aşağıdakı teorem göstərir ki, asılı olmayan və eyni paylanmaya və sonlu dispersiyaya malik təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün Lindeberq şərti ödənilir.

Teorem 6. Fərz edək ki, asılı olmayan və eyni paylanmaya malik $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı verilmişdir, belə ki, $0 < \sigma^2 = D\xi_1 < \infty$. Onda Lindeberq şərti ödənilir.

İsbatı. Asanlıqla görmək olar ki,

$$\begin{aligned} L_n(\tau) &= \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^n E(|\xi_k - a_k|^2 I_{|\xi_k - a_k|} > \tau D_n) = \\ &= \frac{n}{\sigma^2 n} E(|\xi_k - a_k|^2 I_{|\xi_k - a_k|} > \tau \sigma \sqrt{n}). \end{aligned}$$

Burada $D\xi_1 < \infty$ və $\{\omega: |\xi_1 - a_1| > \tau\sigma\sqrt{n}\}$ çoxluqlar ardıcılığını nəzərə alsaq, $L_n(\tau) \rightarrow 0$ yığılmasını alarıq.

Qeyd edək ki, Lindeberq şərti mərkəzi limit teoreminin ödənməsi üçün kafi şərtidir. Aşağıdakı teorem göstərir ki, bu şərt mərkəzi limit teoreminin ödənməsi üçün zəruri şərtə çox yaxındır.

Teorem 7. Fərz edək ki, asılı olmayan $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün (S) şərti ödənilir. Onda (L) şərti mərkəzi limit teoremin ödənilməsi üçün zəruri və kafi şərtidir.

Qeyd 1. $\Phi(x)$ funksiyası kəsilməz olduğu üçün (2) münasibəti müntəzəm yığılma olur, yəni $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\sup_{x \in R} |F_{S_n^*}(x) - \Phi(x)| \rightarrow 0. \quad (3)$$

Buradan alırıq ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{S_n \leq x\} - \Phi\left(\frac{x - ES_n}{\sqrt{DS_n}}\right) \rightarrow 0.$$

Bu münasibət sözlə belə ifadə olunur: n -in kafi qədər böyük qiymətlərində S_n cəmi təqribi olaraq riyazi gözləməsi ES_n , dispersiyası isə DS_n olan normal paylanmaya malik olur.

Qeyd 2. (2) münasibəti x -a görə müntəzəm yığılma olduğu üçün (3) münasibətində yığılmanın sürətini qiymətləndirmək lazım gəlir. Əgər $\xi_n, n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətləri asılı olmayan və eyni paylanmaya malikdirlərsə, belə ki, $E|\xi_1|^3 < \infty$ olarsa, onda aşağıdakı Berri-Essen bərabərsizliyi doğrudur:

$$\sup_{x \in R} |F_n(x) - \Phi(x)| \leq C \frac{E|\xi_1 - E\xi_1|^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}, \quad (4)$$

burada $C > 0$ sabiti üçün $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leq C < 0,8$ olur.

Məsələ 2. Simmetrik metal pul 10000 dəfə atılır. Mərkəzi limit teoremindən istifadə edərək gerb üzünün düşməsi tezliyinin $\frac{1}{2}$ -dən fərqlənməsinin 0,01 -dən böyük olması ehtimalını tapın (bax, §4.7, məsələ 2).

Həlli. $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ ilə gerb üzünün düşməsi sayını göstərir, belə ki, ξ_i -lər Bernulli paylanmasına tabedir, yəni rəqəm üzü düşdükdə 0, gerb üzü düşdükdə isə 1 qiymətini alan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Mərkəzi limit teoreminə əsasən

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \leq 0,01\right\} &= P\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{D\xi_1}} \left|\frac{S_n}{n} - E\xi_1\right| \leq \frac{0,01\sqrt{n}}{\sqrt{D\xi_1}}\right\} = \\ &= P\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{D\xi_1}} \left|\frac{S_n}{n} - E\xi_1\right| \leq 2\right\} = P\left\{-2 \leq \frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \leq 2\right\} \approx \\ &\approx \Phi(2) - \Phi(-2) = 1 - 2 \cdot \Phi(-2) \approx 1 - 0,0456. \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > 0,01\right\} \approx 0,0456.$$

Məsələ 3. Asılı olmayan 1000 sayda sınağın hər birində A hadisəsinin baş verməsi ehtimalı 0,75-dir. Bu hadisənin baş verməsi sayı olan S_n təsadüfi kəmiyyətinin 720 ilə 780 arasında qiymət alması ehtimalını tapın.

Həlli. Asanlıqla görmək mümkündür ki, S_n təsadüfi kəmiyyəti binomial paylanmaya malikdir. Buna görə də

$$ES_n = np = 750 \text{ və } DS_n = npq = 750 \cdot 0,25 = 187,5.$$

Mərkəzi limit teoreminə əsasən asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$P\{720 < S_n < 780\} \approx 0,9708.$$

Qeyd edək ki, Çebişev bərabərsizliyi mövzusunda bu ehtimal üçün aşağı sərhəd 0,79 olaraq tapılmışdır. Bu isə Çebişev bərabərsizliyinin kobud qiymətləndirmə verdiyini göstərir.

Məsələlər.

1. $\xi_k, k \geq 1$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyət ardıcılığıdır və hər biri Pareto paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyətlərdir:

$$p(x) = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{x} \right)^{\alpha+1}, \quad \alpha > 0, \quad x > \lambda > 0.$$

Göstərin ki, $\alpha > 2$ olduqda bu ardıcılıq mərkəzi limit teoremini ödəyir.

2. $\xi_k, k \geq 1$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyət ardıcılığıdır:

$$P\{\xi_k = \pm k^\alpha\} = \frac{1}{2}.$$

α parametrinin hansı qiymətlərində bu ardıcılıq üçün mərkəzi limit teoremi ödənilir?

$$\text{Cavab: } \alpha \geq \frac{1}{2}$$

3. $\xi_k; k \geq 1$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyət ardıcılığıdır və

$$P\{\xi_1 = \pm 1\} = \frac{1}{2}, \quad P\{\xi_k = \pm 1\} = \frac{1}{2c}, \quad k \geq 2, c > 1,$$

$$P\{\xi_k = \pm k\} = \frac{1}{2k^2} \left(1 - \frac{1}{c} \right), \quad k \geq 2$$

Göstərin ki, bu ardıcılıq üçün mərkəzi limit teoremi ödənilmir.

§7.5. Mərkəzi limit teoreminin aktuar riyaziyyatında bəzi tətbiqləri

Mərkəzi limit teoreminin bir çox sahələrdə, o cümlədən aktuar riyaziyyatında mühüm tətbiqləri vardır. Bir illik həyat sığortası modelinə baxaq (bax, [26]). Bu modelə əsasən müştəri sığorta şirkətinə müəyyən məbləğ ödəyir və sığortalanan müştərinin bir il ərzində ölümü halında şirkət onun varislərinə müəyyən b məbləği ödəməlidir, əks halda heç bir ödəniş edilmir. Beləliklə, individual isk modelində iskin miqdarını ifadə edən ξ təsadüfi kəmiyyəti p ehtimalı ilə 0 qiymətini, $q = 1 - p$ ehtimalı ilə isə b qiymətini alan diskret təsadüfi kəmiyyətdir. Beləliklə, q sığortalanan şəxsin bir il ərzində ölməsi ehtimalıdır. Qeyd edək ki, bu ehtimal sığortalanan şəxsin yaşı olan x -dən də asılı olur. Aktuar riyaziyyatında bu ehtimal q_x -lə işarə olunur.

Asanlıqla görmək mümkündür ki, iskin miqdarını ifadə edən ξ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi və dispersiyası aşağıdakı kimidir:

$$E\xi = 0 \cdot p + b \cdot q = bq, \quad D\xi = b^2pq.$$

İndi isə mərkəzi limit teoreminin individual isk modelinə tətbiqinə aid aşağıdakı məsələyə baxaq.

Məsələ 1 ([26]). Fərz edək ki, sığorta şirkətinin hər birinin il ərzində ölüm ehtimalı $q = 0,003$ olan 3000 nəfər müştərisi var. Müqaviləyə əsasən həmin il ərzində ölüm halında şirkət $b = 1000$ manat ödəməlidir. Sığorta şirkətinin nə qədər kapitalı olmalıdır ki, müflisolma ehtimalı 5 % -dən çox olmasın.

Həlli. Əvvəlcə biz şirkətin ümumi ziyanı olan S_n -nin

riyazi gözləmə və dispersiyasını tapaq. Aydındır ki, $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, belə ki, ξ_k ilə k -cı iskin şirkətə vurduğu ziyanın miqdarı işarə olunmuşdur. Aydındır ki, ξ_k asılı olmayan eyni paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlərdir. Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$ES_n = n \cdot E\xi_k = n \cdot b \cdot q = 3000 \cdot 1000 \cdot 0,003 = 9000,$$

$$DS_n = n \cdot D\xi_k = n \cdot b^2 \cdot p \cdot q \approx 8973000.$$

Beləliklə, mərkəzi limit teoreminə əsasən

$$\begin{aligned} P\{S_n \leq u\} &= P\left\{\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \frac{u - ES_n}{\sqrt{DS_n}}\right\} = \\ &= P\left\{\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \frac{u - 9000}{2995}\right\} \approx \Phi\left(\frac{u - 9000}{2995}\right). \end{aligned}$$

Şirkətin iflas ehtimalının 5% olmasını istəyiriksə, $\frac{u-9000}{2995} = x_{0,95} = 1,645$ olmalıdır. Deməli, $u \approx 13927$. Beləliklə, toplam iskin miqdarı olan S_n cəmi 0,95 ehtimalı ilə 13927-dən kiçik olacaqdır.

Bu paraqrafda həmçinin mərkəzi limit teoreminin sığorta haqlarının təyin olunmasında rolu da araşdırılır (bax, [26]). Sığorta şirkətinin öz üzərinə götürdüyü riskin müqabilində hansı miqdarda sığorta haqlarının təyin etməsi çox mürəkkəb məsələdir. Bu zaman bir çox (təsadüfi) faktorları nəzərə almaq lazımdır: sığorta halının baş verməsi ehtimalı, müştəriyə sığortanın ödənməsinin miqdarı, şirkətin təşkilati işlərə sərf etdiyi xərclər, sığorta bazarında həmin sığorta növü ilə bağlı olan tələb və təklifin miqdarı və s. Lakin

çox zaman əsas olan şirkət ilə müştərinin maliyyə öhdəliklərinin ekvivalent olması prinsipidir. Sadə sığorta modellərində hesab olunur ki, sığorta olunmaq üçün ödənilən məbləğ (sığorta haqqı) müqavilə bağlanan anda ödənilir. Yəni müştəri müqavilə imzalayarkən müəyyən b məbləğini şirkətə ödəyir. Lakin biz öhdəliklərin ekvivalentliyi prinsipindən çıxış edərək sığorta şirkətinin ödəyəcəyi məbləğ olan ξ -ni (sığorta halı yarandıqda müştəriyə dəymiş ziyanı) b -yə bərabər götürə bilərik. Çünki b determinik, ξ isə təsadüfi kəmiyyətdir. Bu problemi həll etmək üçün b -ni ξ -nin riyazi gözləməsinə bərabər götürmək olar. Yəni şirkətin sığorta ödəməsi olaraq müştəriyə dəyən ziyanın orta qiymətini götürmək olar. Bu qərarın nəticələrini müzakirə edək.

Fərz edək ki, şirkətin portfelindəki müqavilələrin sayı n , bu müqavilələrdən gələ biləcək ziyanın miqdarı isə $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətləri ilə ifadə olunur. Bu halda şirkətin ümumi ziyanının miqdarı $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ olar. Şirkətin i -ci müqaviləyə görə ödəməli olacağı sığorta ödəməsinin miqdarı olan b_i -ni $E\xi_i$ -yə bərabər götürsək, şirkətin ehtiyat fondu (kapitalın ümumi miqdarı) $u = \sum_{i=1}^n E\xi_i = ES_n$ olar. Buna görə şirkətin iflas olma ehtimalı $R_n(u) = P\{S_n > ES_n\}$ olar. Mərkəzi limit teoremini tətbiq etsək,

$$\begin{aligned} R_n(u) &= P\{S_n - ES_n > 0\} = \\ &= P\left\{\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} > 0\right\} \approx 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olduğunu alırıq. Bu isə şirkət üçün qəbul olunmazdır. Belə nəticənin alınmasına səbəb $b_i = E\xi_i$ götürməyimizdir.

Baxmayaraq ki, həm müştəri, həm də şirkət əslində orta hesabla eyni qədər məbləğ ödəyirlər, lakin müştəridən fərqli olaraq şirkətin üzərində risk olduğunu da nəzərə almaq lazımdır. Çünki təsadüfi faktorların təsiri ilə şirkət $E\xi_i$ -dən daha böyük olan məbləğ ödəməyə məcbur ola bilər. Buna görə də ədalətli olardı ki, müqavilə bağlanarkən şirkətə üzərinə götürdüyü riskin müqabilində əlavə ödəmə adlanan l_i miqdarı verilsin. Başqa sözlə, şirkətin iflas ehtimalını azaltmaq üçün $b_i = E\xi_i$ bərabərliyindən imtina etmək lazımdır. Bunun əvəzinə şirkətə sığorta haqqı olaraq $b_i = E\xi_i + l_i$ ödəməsinin təyin olunması məqsədə uyğun olardı. Bu halda şirkətin ehtiyat fondu (kapitalın ümumi miqdarı)

$$u = \sum_{i=1}^n (E\xi_i + l_i) = b_i = ES_n + l_n$$

olar, burada $l_n = \sum_{i=1}^n l_i$. Uyğun olaraq şirkətin iflas olma ehtimalı

$$R_n(u) = P\{S_n > ES_n + l_n\}$$

olar. Mərkəzi limit teoremini tətbiq etsək,

$$R_n(u) = P\left\{\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} > \frac{l_n}{\sqrt{DS_n}}\right\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{l_n}{\sqrt{DS_n}}\right).$$

Əgər biz şirkətin iflas etməməsi ehtimalının vahidə yaxın α ədədinə bərabər olmasını istəyiriksə, $l_n = x_\alpha \cdot \sqrt{DS_n}$ olmasını təmin etməliyik, burada x_α ilə α tərtib kvantil işarə olunmuşdur, α vahidə yaxın ədəddir.

Qeyd edək ki, l_n ümumi əlavənin miqdarıdır. Bunun ayrı-ayrı müqavilələr arasında ədalətli bölünməsinə təmin

etmək lazımdır. Adətən l_n cəmini gözlənilən $E\xi_i$ zərərinə bölürlər. Bu zaman $b_i = \left(1 + x_\alpha \cdot \frac{\sqrt{DS_n}}{ES_n}\right)$ alınır. $\theta_i = \frac{l_i}{E\xi_i}$ -yə nisbi sığorta əlavəsi (security loading) deyilir. Qeyd edək ki, belə bölgü $D\xi_i$ -ləri kiçik olan müqavilələrə nəzərən ədalətli deyil. Bu halda l_n cəmini $D\xi_i$ dispersiyaları və ya $\sqrt{D\xi_i}$ kvadratik orta meyillərlə mütənasib hissələrə bölürlər (bax, [26], səh.125-127).

Məsələ 2. (bax, [26], səh.132). Sığorta şirkəti bir illik həyat müqavilələri təklif edir. Nisbi sığorta əlavəsi 20%-dir. Müqavilələrin strukturu aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

Ölüm səbəbi	Adi	bədbəxt hadisə
Ölüm ehtimalı	0,1	0,01
Sığorta ödəməsi	500000	1000000

Daxilolmalar bir-birindən asılı deyil və sığortaçı toplam sığorta ödəmələri üçün normal yaxınlaşmadan istifadə edir. Sığortaçı nə qədər müqavilə satmalıdır ki, əldə etdiyi məbləğlə 0,95 ehtimalı ilə sığorta ödəmələrini ödəyə bilsin.

Həlli. Fərz edək ki, sığortaçının satdığı müqavilələrin sayı n , ξ_k isə k -cı müqaviləyə görə ödəniləcək məbləğin miqdarıdır, $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ bütün portfelə nəzərən ödəniləcək toplam məbləğin miqdarıdır. θ ilə “müdafiə” əlavəsini işarə edək. Deməli, müştərinin bir sığorta müqaviləsi üçün ödədiyi məbləğ $b = (1 + \theta)E\xi_k$ olur. Şərtə görə şirkətin kapitalın ümumi miqdarı üçün

$$P\{S_n \leq n \cdot b\} = 0,95$$

olmalıdır. Digər tərəfdən

$$P\{S_n \leq n \cdot b\} = P\left\{\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \leq \frac{n \cdot b - ES_n}{\sqrt{DS_n}}\right\} \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{n \cdot b - ES_n}{\sqrt{DS_n}}\right) = \Phi\left(\sqrt{n} \frac{\theta \cdot E\xi_k}{\sqrt{D\xi_k}}\right).$$

Buna görə də $\sqrt{n} \frac{\theta \cdot M\xi_k}{\sqrt{D\xi_k}} = x_{0,95}$ olmalıdır. Buradan

$$n = \frac{D\xi_k}{\theta^2 (M\xi_k)^2} x_{0,95}^2$$

olduğunu alırıq. Digər tərəfdən normal paylanmanın 0,95 tərtibli kvantili $x_{0,95} = 1,645$ -dir. Şərtə görə $E\xi_k = 60000$ və $D\xi_k = 314 \cdot 10^8$ olduğundan $n = \frac{D\xi_k}{\theta^2 (M\xi_k)^2} x_{0,95}^2 = 590$ olar. Başqa sözlə, satılan müqavilələrin sayı 590 olduqda əldə edilən məbləğlə 0,95 ehtimalı ilə toplam sığorta ödəmələrini ödəmək mümkündür.

VIII FƏSİL

RİYAZİ STATİSTİKA

Bu gün ehtimal nəzəriyyəsi bütün təbiət elmlərinin təməl daşı, statistika isə insan fəaliyyətinin bütün sahələrinin ayrılmaz hissəsidir.

M.Kats

Amerika riyaziyyatçısı

§8.1. Riyazi statistikanın əsas məsələləri və ilkin anlayışları

Riyazi statistika empirik verilənlər əsasında nəticə çıxarma üsullarını tədqiq edir. Riyazi statistika ehtimal nəzəriyyəsinin tərs məsələlərini öyrənir.

Məsələn, ehtimal nəzəriyyəsində məsələ belə qoyulur:

Simmetrik metal pul 10 dəfə atılır. Gerb üzünün 3 dəfə düşməsi ehtimalını tapın.

Riyazi statistikada isə məsələ belə qoyulur:

Metal pul 10 dəfə atılır və gerb üzü 3 dəfə düşmüşdür. Metal pulun simmetrik olması hipotezi qəbul oluna bilərmi?

Başqa bir misala baxaq. Ehtimal nəzəriyyəsində təsadüfi kəmiyyətin $\lambda > 0$ parametrlı üstlü paylanmaya malik olduğu fərz olunur. Riyazi statistikada isə $\lambda > 0$ parametri müşahidələr əsasında qiymətləndirilir. Riyazi statistikada təsadüfi kəmiyyətin özünün paylanmasının hansı qanuna tabe olduğu əsaslandırılır.

Beləliklə, riyazi statistikada hipotezlərin ehtimallarının qiymətləndirilməsi, paylanmaların naməlum parametrlərinin qiymətləndirilməsi, həmçinin paylanma qanununun

özünün müəyyən olunması kimi məsələlər qoyulur və həll olunur.

İndi isə riyazi statistikanın ilkin anlayışları ilə tanış olaq.

Tərif 1. $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi vektoruna n həcmli təsadüfi **seçim vektoru** deyilir, adətən fərz olunur ki, X_i -lər asılı olmayan eyni $F(x) = P\{X_i \leq x\}$ paylanma funksiyasına malik təsadüfi kəmiyyətlərdir. Seçim vektorunun hər bir $x_1, x_2, \dots, x_n$ realizasiyasına **seçim** deyilir.

Tərif 2. Seçimin elementlərinin artma sırası ilə düzülüşünə **variasiya sırası** deyilir, yəni $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, burada $x_{(1)} = x_{\min} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ və $x_{(n)} = x_{\max} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Misal 1. 1, 3, 1, 2, 9, 5, 6, 2, 6, 9, 7, 2, 9, 7, 8, 9 seçiminə uyğun variasiya sırası aşağıdakı kimidir:

1, 1, 2, 2, 2, 3, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 9, 9.

Göründüyü kimi, variasiya sırası seçimin elementlərini daha yaxşı təsvir etməyə imkan verir.

Tərif 3. Əgər $x_1, \dots, x_n$ seçimində təkrar elementlər varsa, belə ki, x_i -yə n_i dəfə rast gəlinirsə ($i = 1, 2, \dots, k$), bu halda n_i ədədi seçimin x_i elementinin **tezliyi** adlanır. Aydınır ki, $\sum_{i=1}^k n_i = n$.

(x_i, n_i) cütlər ardıcılığı **statistik sıra** adlanır. Adətən statistik sıra birinci sətirində x_i elementləri, ikinci sətirdə isə onların tezliyi olan cədvəl şəklində yazılır.

Misal 2. 1, 3, 1, 2, 9, 5, 6, 2, 6, 9, 7, 2, 9, 7, 8, 9 seçiminə uyğun statistik sıra aşağıdakı kimi göstərilə bilər:

x_i	1	2	3	5	6	7	8	9
n_i	2	3	1	1	2	2	1	4

Tərif 4. Seçimin x_i elementinin təkrarlanma sayının, yəni tezliyinin seçimin həcminə olan nisbətində x_i elementinin **nisbi tezliyi** deyilir: $w_i = \frac{n_i}{n}$.

Misal 3. 1, 3, 1, 2, 9, 5, 6, 2, 6, 9, 7, 2, 9, 7, 8, 9 seçiminin elementlərinin nisbi tezliklərini tapın və nisbi tezliklər cədvəlini qurun.

Həlli. Asanlıqla görmək mümkündür ki, seçimin həcmi $n = 16$. Əvvəlcə seçimin variasiya sırasını quraq:

1, 1, 2, 2, 2, 3, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 9, 9

Variasiya sırasının və nisbi tezliyin tərifindən istifadə edərək hər bir elementin nisbi tezliyini tapa bilərik:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{n_1}{n} = \frac{2}{16}, & w_2 &= \frac{n_2}{n} = \frac{3}{16}, & w_3 &= \frac{n_3}{n} = \frac{1}{16}, \\ w_4 &= \frac{n_4}{n} = \frac{1}{16}, & w_5 &= \frac{n_5}{n} = \frac{2}{16}, & w_6 &= \frac{n_6}{n} = \frac{2}{16}, \\ w_7 &= \frac{n_7}{n} = \frac{1}{16}, & w_8 &= \frac{n_8}{n} = \frac{4}{16}. \end{aligned}$$

Bunları nəzərə alaraq nisbi tezliklərin paylanması cədvəlini aşağıdakı şəkildə qurmaq mümkündür:

x_i	1	2	3	5	6	7	8	9
w_i	0,1250	0,1875	0,0625	0,0625	0,1250	0,1250	0,0625	0,2500

8.1.1. Poliqon və histogram anlayışları

Tərif 5. Bir çox hallarda seçimin elementlərinin, onların tezliklərinin və nisbi tezliklərinin qrafik üsulla verilməsi lazım gəlir. Fərz edək ki, seçimdə x_i elementi n_i dəfə təkrar olunmuşdur. $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$ nöqtələrini birləşdirən parçalardan ibarət sınıq xəttə **tezliklər poliqonu**

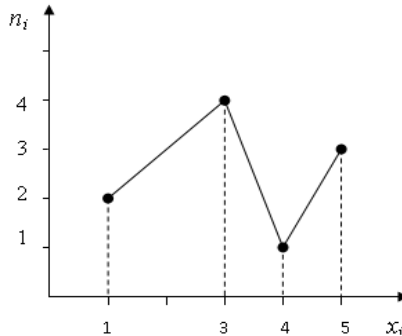
deyilir.

Tərif 6. $(x_1, w_1), (x_2, w_2), \dots, (x_k, w_k)$ nöqtələrini birləşdirən parçalardan ibarət sınıq xəttə isə **nisbi tezliklər poliqonu** deyilir, burada x_i seçimin elementlərini, w_i isə uyğun elementin nisbi tezliyini göstərir.

Misal 4. Aşağıdakı seçimin tezliklər poliqonunu qurun:

x_i	1	3	4	5
n_i	2	4	1	3

Həlli. Absis oxu üzərində seçimin elementlərini, ordinat oxu üzərində isə onlara uyğun tezlikləri qeyd edək. (x_i, n_i) nöqtələrini parçalarla birləşdirsək tezliklər poliqonunu əldə edərik (bax, şəkil 1).



Şəkil 1.

Seçimin elementlərinin sayı çox olduqda, yəni seçimin həcmi n böyük ədəd olduqda seçimi kəşisməyən və hər birinin uzunluğu təxminən eyni bir h ədədi olan intervallara bölürlər. Bundan sonra seçimin hər bir belə intervala düşən elementlərin sayını müəyyən edirlər. i -ci intervala düşən elementlərin sayını n_i ilə işarə edək.

Tərif 7. $\frac{n_i}{h}$ nisbətində i -ci intervala uyğun **tezliyin sıxlığı** deyilir.

$\frac{w_i}{h}$ nisbətində i -ci intervala uyğun **nisbi tezliyin sıxlığı** deyilir.

Tərif 8. Oturacaqları eyni h uzunluqlu intervallar, hündürlükləri isə $\frac{n_i}{h}$ olan düzbucaqlılardan ibarət pilləvari fiqura **tezliklər histoqramı** deyilir. Qeyd edək ki, i -ci düzbucaqlının sahəsi i -ci intervala düşən elementlərin sayına, yəni n_i -yə bərabərdir. Doğrudan da, düzbucaqlının sahəsi onun eni ilə uzunluğunun hasilinə bərabər olduğundan

$$\frac{n_i}{h} \cdot h = n_i$$

olur. Deməli, tezliklər histoqramının sahəsi seçimin həcminə bərabərdir.

Tərif 9. Oturacaqları eyni h uzunluqlu intervallar, hündürlükləri isə $\frac{w_i}{h}$ olan düzbucaqlılardan ibarət pilləvari fiqura **nisbi tezliklər histoqramı** deyilir. Qeyd edək ki, i -ci düzbucaqlının sahəsi i -ci intervala düşən elementlərin nisbi tezliyinə, yəni w_i -yə bərabərdir. Doğrudan da, düzbucaqlının sahəsi onun eni ilə uzunluğunun hasilinə bərabər olduğundan

$$\frac{w_i}{h} \cdot h = w_i$$

olur. Deməli, nisbi tezliklər histoqramının sahəsi nisbi tezliklərin cəminə, yəni vahidə bərabərdir.

Misal 5. Fərz edək ki, həcmi 100 olan seçim intervallara bölünərək aşağıdakı cədvəl şəklində verilmişdir:

İntervalın nömrəsi	İntervallar	i -ci intervala düşən elementlərin sayı
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	1 – 5	10
2	5 – 9	20
3	9 – 13	50
4	13 – 17	12
5	17 – 21	8

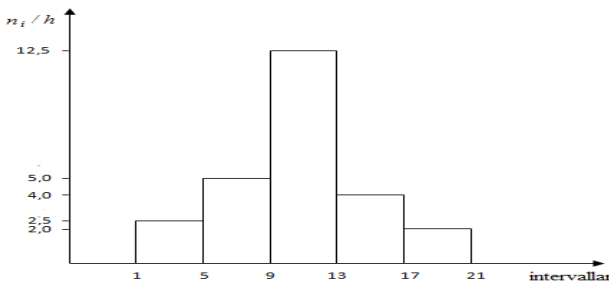
Tezliklər histqramını qurun.

Həlli. Göründüyü kimi, verilmiş seçim hər birinin uzunluğu $h = 4$ olan 5 intervala bölünmüşdür. Cədvələ əsasən tezliklər sıxlığını tapaq:

$$\frac{n_1}{h} = \frac{10}{4} = 2,5, \quad \frac{n_2}{h} = \frac{20}{4} = 5,$$

$$\frac{n_3}{h} = 12,5, \quad \frac{n_4}{h} = 3, \quad \frac{n_5}{h} = 2.$$

Bu intervalları absis oxu üzərində qeyd edək. Bu intervallar üzərində absis oxundan $\frac{n_i}{h}$ məsafədə və ona paralel olan parçalar qeyd edək. Mələsən, $[1,5)$ yarımintervalına uyğun parça absis oxundan 2,5 vahid yuxarıda olacaqdır. Digər düzbucaqlılar da bənzər şəkildə qurulur (şəkil 2):



Şəkil 2.

Çox zaman $X_1, X_2, \dots, X_n$ seçim vektoru üçün yalnız onun paylanmasının tipi məlum olur, lakin paylanmanın parametrləri naməlum olur. Bu halda seçimə əsasən naməlum parametrlər üçün müəyyən qayda ilə təqribi qiymətlər tapılır.

Riyazi statistika məsələlərində təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası (nəzəri) naməlum olur. Lakin seçimdən istifadə etməklə naməlum $F(x)$ paylanma funksiyası üçün təqribi yaxınlaşma qurmaq mümkün olur.

Tərif 10. Fərz edək ki, təkrarsız $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçimi $F_X(x)$ paylanma funksiyasına malik ümumi çoxluqdan götürülmüşdür. Bu halda

$$F_n^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{x_i \leq x} n_i = \frac{n_x}{n}$$

empirik paylanma funksiyası adlanır, burada n_x ilə X seçimində x ədədindən böyük olmayan hədlərin sayı işarə olunmuşdur.

Aydındır ki, $x < x_{(1)}$ olduqda $F_n^*(x) = 0$ və $x \geq x_{(n)}$ olduqda isə $F_n^*(x) = 1$.

$[x_{(1)}, x_{(n)})$ aralığında $F_n^*(x)$ azalmayan, hissə-hissə sabit funksiyadır.

Empirik paylanma funksiyasının tərifini aşağıdakı kimi də yazmaq olar.

$X = (X_1, \dots, X_n)$ seçiminin empirik paylanma funksiyası belə təyin olunur:

$$F_n^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(X_k \leq x), x \in R,$$

burada $I(A)$ ilə A hadisəsinin indikatoru işarə olunmuşdur.

Empirik paylanmanın tərifindən görünür ki, hər bir $x \in R$ üçün $F_n^*(x)$ təsadüfi kəmiyyətdir və bu təsadüfi kəmiyyətin aldığı qiymətlər

$$0 = \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1$$

olur.

X seçimində X_i -lər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu üçün $\mu_n(x) = \sum_{k=1}^n I(X_k \leq x)$ cəmi $p = P\{X \leq x\} = F(x)$ parametrlı binomial paylanmaya malik olur, yəni

$$\begin{aligned} P\left\{F_n^*(x) = \frac{k}{n}\right\} &= P\left\{\sum_{i=1}^n I(X_i \leq x) = k\right\} = \\ &= C_n^k (F(x))^k (1 - F(x))^{n-k}, k = \overline{0, n} \end{aligned}$$

yaza bilərik, burada $F(x) = P\{X \leq x\}$ funksiyası X təsadüfi kəmiyyətinin nəzəri paylanma funksiyasıdır.

Empirik paylanmanın tərifindən görünür ki, o paylanma funksiyasının məlum xassələrini ödəyir (azalmayan- dır və sağdan kəsilməzdir). $\hat{F}_n(x)$ hissə-hissə sabit funksiyadır və $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ ardıcılığını təşkil edən nöqtələrdə artır.

Əgər $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ realizasiyasının elementləri müxtəlif olarsa, onda empirik paylanma funksiyasını aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)} \\ \frac{k}{n}, & x_{(k)} \leq x < x_{(k+1)}, \quad k = 1, \dots, n-1 \\ 1, & x \geq x_{(n)} \end{cases}$$

göründüyü kimi, hər bir $x_{(k)}$, $k = \overline{1, n}$ nöqtəsində $F_n^*(x)$ funksiyasının sıçrayışı

$$F_n^*(x_{(k)}) - F_n^*(x_{(k)} - 0) = \frac{1}{n}$$

olur.

Aşağıdakı teorem empirik paylanma funksiyası ilə nəzəri paylanma funksiyası arasında əlaqəni ifadə edir.

Teorem (Qlivenko). Fərz edək ki, $F_n^*(x)$ empirik paylanma funksiyası $F_X(x)$ paylanma funksiyasına malik ümumi çoxluqdan götürülmüş seçimə əsasən qurulmuşdur. Onda ixtiyari $x \in R$ və $\varepsilon > 0$ üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|F_n^*(x) - F_X(x)| < \varepsilon\} = 1.$$

Beləliklə, hər bir $x \in R$ nöqtəsində $F_n^*(x)$ empirik paylanma funksiyası $F_X(x)$ paylanma funksiyasına ehtimala görə yığılır. Bu isə o deməkdir ki, seçimin həcmi n kafi qədər böyük olduqda empirik paylanma funksiyasının x nöqtəsindəki qiyməti təqribi olaraq $F_X(x)$ nəzəri paylanma funksiyasının bu nöqtədəki qiyməti kimi götürülə bilər.

§8.2. Seçimin xarakteristikaları

8.2.1. Seçimin orta qiyməti

Tərif 1. Seçimin elementləri cəminin onun həcminə olan nisbətində **seçimin orta qiyməti** deyilir:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1)$$

Göründüyü kimi, seçimin orta qiyməti əslində seçimin elementlərinin ədədi ortasıdır.

Qeyd edək ki, bir neçə ədədin ədədi ortası onların ədəd oxunda necə qruplaşdığını, başqa sözlə ədəd oxunda yerləşməsinə xarakterizə edir. Ədədi orta anlayışı fizikada olan ağırlıq mərkəzi anlayışına uyğun gəlir.

Seçimin elementləri arasında təkrar elementlər olduqda onun orta qiyməti üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$\bar{x}_\zeta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i, \quad (2)$$

burada n_i ilə x_i elementinin tezliyi, n ilə isə seçimin həcmi işarə olunmuşdur və $n = \sum_{i=1}^k n_i$.

Misal 6. 2, 8, 7, 2, 3, 2, 4, 5, 4, 7, 8, 8 seçiminin orta qiymətini hesablayın.

Həlli. Seçim elementləri arasında təkrarlar olduğu üçün ədədi ortanı (2) düsturu ilə də hesablamaq olar:

$$\bar{x}_\zeta = \frac{1}{12} (2 \cdot 3 + 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 3 + 4 \cdot 2 + 5) = 5.$$

8.2.2. Seçimin modası və medianı.

Tərif 2. Seçimin ən böyük tezlikli elementi seçimin modası adlanır və M_o ilə işarə olunur.

Seçimin elementlərinin ədəd oxunda yerləşməsini xarakterizə edən xarakteristikalardan biri də mediandır.

Tərif 3. Variasiya sırasını bərabər sayda elementi olan iki hissəyə bölən M_e ədədi **seçimin medianı** adlanır. Əgər seçimin həcmi n tək ədəddirsə, bu halda

$$M_e = x_{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)}$$

düsturu ilə hesablanır, burada $[n / 2]$ ədədi $n / 2$ ədədinin tam hissəsini bildirir.

Əgər seçimin həcmi n cüt ədəddirsə, bu halda seçimin medianı

$$M_e = \frac{1}{2} \left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \right)$$

düsturu ilə hesablanır.

Onu da qeyd edək ki, bəzən median seçimi ədədi ortadan daha yaxşı xarakterizə edə bilər.

Misal 7. 5, 7, 5, 8, 9, 5, 7, 9, 3, 8, 6, 5, 8 seçiminin modasını tapın.

Həlli. Öncə verilmiş seçimə uyğun variasiya sırasını yazaraq, yəni seçimin elementlərini artma sırası ilə düzək:

$$3, 5, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9.$$

Göründüyü kimi, seçimin ən çox təkrarlanan elementi 5-dir. Buna görə də verilmiş seçimin modası 5-ə bərabərdir, yəni

$$M_o = 5.$$

Misal 8. 3, 8, 9, 5, 9, 3, 8, 5, 8 seçiminin medianını tapın.

Həlli. Öncə verilmiş seçimə uyğun variasiya sırasını yazaq:

$$3, 3, 5, 5, 8, 8, 8, 9, 9.$$

Göründüyü kimi, seçimin həcmi $n = 9$ tək ədəddir. Bu halda median aşağıdakı düsturla hesablanmalıdır:

$$M_e = x_{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)}.$$

Bizim misalda $\left[n/2\right] + 1 = \left[9/2\right] + 1 = [4,5] + 1 = 5$ olduğu üçün median variasiya sırasındaki 5-ci element, yəni 8 olacaqdır:

$$M_e = x_{(5)} = 8.$$

Misal 9. 2, 9, 3, 8, 9, 5, 8, 9, 3, 8, 5, 8 seçiminin medianını tapın.

Həlli. Öncə verilmiş seçimə uyğun variasiya sırasını yazaq:

$$2, 3, 3, 5, 5, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9.$$

Göründüyü kimi, seçimin həcmi $n = 12$ cüt ədəddir. Bu halda median aşağıdakı düsturla hesablanmalıdır:

$$M_e = \frac{1}{2} \left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \right).$$

Deməli, variasiya sırasındaki $x_{(6)}$ və $x_{(7)}$ elementlərini tapmalıyıq. Asanlıqla görmək mümkündür ki, $x_{(6)} = 5$ və $x_{(7)} = 8$. Beləliklə, verilmiş seçimin medianı

$$M_e = \frac{1}{2} (5 + 8) = 6,5.$$

Misal 10. Seçimə uyğun variasiya sırasında 15 element vardır. Bu seçimə uyğun medianın nömrəsini tapın.

Həlli. Şərtdən göründüyü kimi, seçimin həcmi $n = 15$ tək ədəddir. Bu halda median aşağıdakı düsturla hesablanmalıdır:

$$M_e = x_{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)}.$$

Buna görə də medianın nömrəsi $[15/2] + 1 = 8$ -dir.

8.2.3. Seçimin boyu və dispersiyası

Çox zaman bizi hər hansı kəmiyyətin ən kiçik və ən böyük qiyməti maraqlandırır. Məsələn, bizi hər zaman hər hansı alacağımız əşyanın qiymətinin ən az olması, yaxud yeni avtomobil aldıqda onun maksimal sürəti maraqlandırır və s. İdman yarışlarında adətən bizi ən yüksək göstəricilər maraqlandırır. Məsələn, uzununa tullanma yarışında ən uzağa tullanan idmançı qalib hesab olunur.

Tərif 4. Seçimin ən böyük elementi ilə ən kiçik elementinin fərqi **seçimin boyu** deyilir:

$$b = x_{max} - x_{min}.$$

Qeyd edək ki, seçimin boyu onun elementlərinin səpilməsini xarakterizə edən ən sadə xarakteristikalarından biridir.

Seçimin səpələnməsini xarakterizə edən digər mühüm ədədi xarakteristikası onun dispersiyasıdır.

Tərif 5. Seçimin dispersiyası aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2.$$

Qeyd edək ki, seçimin dispersiyası meylli olur. Ona görə də çox zaman seçimin dispersiyası aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1} D_x^*.$$

Seçimin səpələnməsini xarakterizə etmək üçün çox zaman kvadratik orta meyl adlanan ədədi xarakteristikadan da istifadə olunur: $\sigma^* = \sqrt{D_x^*}$.

8.2.4. Seçimin asimetriya əmsalı və ekssesi

Fərz edək ki, n həcmli $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçimi verilmişdir.

Tərif 6.

$$\tilde{v}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i^k n_i$$

seçimin k -**tərtibli başlanğıc momenti** adlanır.

Tərif 7.

$$\tilde{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^k n_i$$

seçimin k -**tərtibli mərkəzi momenti** adlanır.

Tərif 8.

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{\mu}_3}{s^3} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^3 n_i}{ns^3}$$

seçimin **asimmetriya əmsalı** adlanır. Əgər $\tilde{A} = 0$, onda seçim simmetrik formaya malikdir, yəni seçimin elementləri onun ədədi ortasından eyni uzaqlıqda yerləşir və eyni tezliyə malikdir. $\tilde{A} > 0$ olduqda müsbət (sağtərəfli) asimmetriyaya və $\tilde{A} < 0$ olduqda isə mənfi (sol tərəfli) asimmetriyaya malik olur.

Tərif 9.

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{\mu}_4}{s^4} - 3 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^4 n_i}{ns^4} - 3$$

seçimin eksessi adlanır.

§8.3. Naməlum parametrlərin nöqtəvi statistik qiymətləndirilməsi

8.3.1. Statistik qiymət və onun xassələri

Riyazi statistikanın ən mühüm məsələlərindən biri naməlum parametrlərin qiymətləndirilməsidir. Biz empirik paylanma funksiyası anlayışı verərkən qeyd etmişdik ki, onun hər bir nöqtədəki qiyməti təqribi olaraq nəzəri paylanma funksiyasının həmin nöqtədəki qiyməti kimi götürülə bilər. Bir çox hallarda təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu məlum hesab edilə bilər, lakin həmin paylanmanın parametrləri naməlum ola bilər. Bu halda həmin parametrlərin qiymətləndirilməsi zərurəti yaranır. Riyazi statistikada iki

növ qiymətləndirmə vardır, nöqtəvi və interval. Bu paraqrafda nöqtəvi statistik qiymət anlayışı veriləcək.

Fərz edək ki, üzərində müşahidə aparılan ξ təsadüfi kəmiyyətinin $F(x, \theta)$ paylanma funksiyasının analitik şəkli məlumdur, lakin o, müəyyən naməlum $\theta \in \Theta \subset (-\infty, \infty)$ parametridən asılıdır.

n sayda müşahidənin nəticəsini

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (1)$$

işarə edək. Fərz edəcəyik ki, (1) asılı olmayan seçimdir yəni, X_i elementləri asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Məqsədimiz (1) seçiminə görə θ parametridin həqiqi qiymətini qiymətləndirməkdən, yəni onun üçün müəyyən təqribi qiymət tapmaqdan ibarətdir.

Tərif 1. (1) seçimindən asılı olan ixtiyari

$$T = T(X) = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

təsadüfi kəmiyyətinə (funksiyasına) **statistika** deyilir. Burada nəzərdə tutulur ki, $T = T(X)$ funksiyası θ parametridən asılı deyil.

Tərif 2. Əgər $T = T(X)$ statistikasının qiymətləri bu və ya digər mənada naməlum θ parametridin həqiqi qiymətlərinə yaxın olarsa, bu halda T statistikasına naməlum parametridin **nöqtəvi statistik qiyməti** deyilir və $\hat{\theta} = \hat{\theta}_n(X) = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ kimi işarə olunur.

Beləliklə, tərif 2-dən görünür ki, statistik qiymət o statistikalara deyilir ki, onların qiymətləri naməlum parametridin həqiqi qiymətlərinə yaxın olur. Aydındır ki, naməlum parametridin üçün bir neçə statistik qiymət tapıla bilər və onların ən yaxşısını seçmək üçün müəyyən tələblər (kriteri-

yalar) ödənilməlidir. Statistik qiymətin keyfiyyətli olması onun meylsizlik, tutarlılıq və effektivlik kimi üç mühüm xassəni ödəməsi ilə bağlıdır.

Bu xassələrin hər biri ilə ayrıca tanış olaq.

1. Meylsizlik.

Tərif 3. Əgər ixtiyari $\theta \in \Theta$ üçün

$$E\hat{\theta} = \theta \quad (2)$$

olarsa, onda $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ statistik qiymətinə **meylsiz statistik qiymət** deyilir. Əks halda, yəni (2) ödənilməzsə, onda $\hat{\theta}$ meylli statistik qiymət adlanır və

$$m = \theta - E\hat{\theta}$$

fərqinə statistik qiymətin meylli deyilir. Aydındır ki, əgər (2) ödənərsə, onda $m = 0$ olar.

Tərif 4. $E(\hat{\theta} - \theta)^2 = D\hat{\theta} + m^2$ kəmiyyətinə $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin **orta kvadratik səhvi** deyilir. Meylsiz statistik qiymətlər üçün orta kvadratik səhv statistik qiymətin dispersiyası ilə üst-üstə düşür.

Misal 1. Əgər X seçimi k tərtibli sonlu momentə malik paylanmadan götürülürsə, onda

$$A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

seçim momenti α_k üçün meylsiz statistik qiymətdir, çünki

$$EA_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i^k = E\xi^k = \alpha_k.$$

Xüsusi halda seçimin orta qiyməti $\bar{X}$ nəzəri $\alpha_1 = E\xi$ riyazi gözləmə üçün meyilsiz statistik qiymətdir.

2. Tutarlılıq.

Tərif 5. Əgər $n \rightarrow \infty$ olduqda $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ yığılması ödənilərsə, yəni $\forall \varepsilon > 0$ üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P\{|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$$

olarsa, bu halda $\hat{\theta}_n$ statistik qiyməti **tutarlı statistik qiymət** adlanır.

k tərtibli $A_{kn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$, $k > 0$ empirik momentləri sonlu α_k momentləri üçün tutarlı statistik qiymətdir, çünki böyük ədədlər qanununa görə $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$A_{kn} \xrightarrow{P} \alpha_k.$$

$k = 1$ olduqda, bu faktdan görünür ki, X seçiminin orta qiyməti də $\alpha_1 = E\xi$ üçün tutarlı statistik qiymətdir.

Teorem 1. Əgər $E\hat{\theta}_n \rightarrow \theta$ və $D\hat{\theta}_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ olarsa, onda $\hat{\theta}_n$ statistik qiyməti θ naməlum parametri üçün tutarlı statistik qiymətdir.

İsbatı. Çebişev teoreminə əsasən istənilən $\varepsilon > 0$ üçün

$$P(|\hat{\theta}_n - E\hat{\theta}_n| > \varepsilon) \leq \frac{D\hat{\theta}_n}{\varepsilon^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

olur. Yəni $\hat{\theta}_n - E\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} 0$, $n \rightarrow \infty$ olur. Onda

$$|\hat{\theta}_n - \theta| \leq |\hat{\theta}_n - E\hat{\theta}_n| + |E\hat{\theta}_n - \theta|$$

bərabərsizliyindən görünür ki, $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$, $n \rightarrow \infty$ olur.

Göstərmək olar ki, $F_n^*(x)$ empirik paylanma funksi-

yası $F(x)$ paylanma funksiyası üçün meylsiz və tutarlı statistik qiymətdir.

3. Effektivlik. Fərz edək ki, $\hat{\theta}_{n1}$ və $\hat{\theta}_{n2}$ naməlum θ parametrin iki meylsiz statistik qiymətidir. Əgər $D\hat{\theta}_{n1} < D\hat{\theta}_{n2}$ olarsa, onda deyirlər ki, $\hat{\theta}_{n1}$ qiyməti $\hat{\theta}_{n2}$ -dən daha effektiv statistik qiymətdir.

Effektiv qiymətləndirmələrin tapılması üçün Rao-Kramer bərabərsizliyindən istifadə olunur.

Rao-Kramer bərabərsizliyi. Fərz edək ki, X seçiminin və $\hat{\theta}_n$ statistikasının paylanması müəyyən requlyarlıq şərtlərini ödəyir. Onda aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$D\hat{\theta}_n \geq \frac{1}{I_n(\theta)},$$

$I(\theta)$ - vahid müşahidədə θ parametri haqqında mövcud olan Fişer informasiya miqdarı adlanır. Paylanmasının sıxlıq funksiyası $p_X(x, \theta)$ olan X təsadüfi kəmiyyəti üçün

$$I_n(\theta) = nE \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_X(X, \theta) \right)^2$$

doğrudur, əgər X diskret təsadüfi kəmiyyət olarsa, onda

$$I_n(\theta) = nE \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(X, \theta) \right)^2,$$

burada $p(X, \theta) = P(X = x_i, \theta)$.

θ parametri $\hat{\theta}_n$ meylsiz statistik qiymətinin dispersiyasının ən kiçik qiyməti $I_n(\theta)$ - ya bərabər olarsa, yəni $D\hat{\theta}_n = \frac{1}{I_n(\theta)}$ ödənilərsə, bu halda ona **effektiv statistik qiymət** deyilir.

Əgər

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{I_n(\theta) D\hat{\theta}_n} = 1$$

şerti ödənilərsə, $\hat{\theta}_n$ statistik qiymətinə θ parametrinin **asimptotik effektiv statistik qiyməti** deyilir.

Misal 1. Fərz edək ki, $X_1, X_2, \dots, X_n$ normal paylanmaya malik seçim vektorudur. Göstərin ki, bu seçim vektoruna uyğun seçimin orta qiyməti $\bar{x}$ normal paylanmasının naməlum riyazi gözləməsi olan θ üçün effektiv statistik qiymətdir.

Həlli. Məlumdur ki, seçimin orta qiyməti $\bar{x}$ naməlum θ parametri üçün meylsiz qiymətləndirmədir.

$p_X(x, \theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}$ sıxlıq funksiyasının hər iki tərəfindən natural loqarifm alaq:

$$\ln p_X(x, \theta) = -\frac{(x - \theta)^2}{2\sigma^2} - \ln(\sigma\sqrt{2\pi}).$$

Buradan

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_X(x, \theta) = \frac{x - \theta}{\sigma^2}.$$

Aydındır ki, $\left(\frac{x-\theta}{\sigma^2}\right)^2$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi aşağıdakı kimi olar:

$$E\left(\frac{X - \theta}{\sigma^2}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^4} E(X - \theta)^2 = \frac{1}{\sigma^4} \sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2}.$$

Beləliklə,

$$I_n(\theta) = nE\left(\frac{X - \theta}{\sigma^2}\right)^2 = \frac{n}{\sigma^2}.$$

Digər tərəfdən $D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}$.

Beləliklə,

$$D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{I_n(\theta)}$$

münasibəti ödənildiyi üçün normal qanunla paylanmış ümumi çoxluq üçün $\bar{x}$ seçimi ortası naməlum θ riyazi gözləməsi üçün effektiv statistik qiymətdir.

§8.4. Nöqtəvi statistik qiymətlərin tapılma metodları

8.4.1. Əvəzetmə (analogiya) üsulu

Riyazi statistikada ən sadə statistik qiymətləndirmə üsulu **əvəzetmə və ya analogiya metodu** adlanır. Bu metodda əsasən ümumi çoxluğu (seçim vektorunun) bu və ya digər ədədi xarakteristikanın (məsələn, riyazi gözləmə, dispersiya və s.) statistik qiymətləndirməsi olaraq həmin ümumi çoxluqdan götürülmüş seçimin uyğun ədədi xarakteristikası götürülür.

Misal 2. Fərz edək ki, n həcmli $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçimi riyazi gözləməsi m , dispersiyası isə σ^2 olan ümumi çoxluqdan götürülmüşdür. Analogiya metodundan istifadə etməklə m riyazi gözləməsi üçün statistik qiymət tapın və tapılmış bu statistik qiymətin meylsiz və tutarlı olduğunu göstərin.

Həlli. Əvəzetmə metodu ilə m naməlum riyazi gözləməsi üçün $\hat{m}$ statistik qiyməti olaraq seçimin ədədi ortasını götürməliyik. Beləliklə,

$$\hat{m} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

$\hat{m}$ statistik qiymətinin m naməlum riyazi gözləməsi üçün meylsiz və tutarlı olduğunu göstərmək üçün bu statistikaya $X_1, X_2, \dots, X_n$ seçim vektorunun funksiyası kimi baxaq.

Aydındır ki, $EX_i = m$ və $DX_i = \sigma^2$, $i = 1, 2, \dots, n$, belə ki, X_i –lər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Beləliklə,

$$E\bar{X} = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = \frac{1}{n} nm = m.$$

Bu isə o deməkdir ki, $\bar{X}$ statistikasını naməlum m riyazi gözləməsi üçün meylsiz statistik qiymətdir.

İndi isə göstərək ki, $\bar{X}$ statistikasını həm də tutarlıdır. Bunun üçün onun dispersiyasını hesablayaq:

$$D\bar{X} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Göründüyü kimi, $D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Beləliklə, teorem 1-ə əsasən $\bar{X}$ ümumi çoxluğun m riyazi gözləməsi üçün həm də tutarlı statistik qiymətdir.

8.4.2. Momentlər üsulu

Naməlum parametrlərin statistik qiymətlərini tapmaq üçün tez-tez istifadə olunan üsullardan biri momentlər üsuludur.

X təsadüfi kəmiyyətinin paylanması sıklıq funksiyası $p_X(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ olsun. Bu sıklıq funksiyası vasitəsilə X təsadüfi kəmiyyətinin ilk s başlanğıc momentini

$$\alpha_m(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) = E[X^m] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m p_X(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s),$$

düsturları ilə təyin edək. Seçimə görə isə uyğun seçim momentinin qiymətini tapaq:

$$\alpha_m^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^m, m = 1, 2, \dots, s.$$

X təsadüfi kəmiyyətinin yuxarıdakı nəzəri və seçimi momentlərini bərabərləşdirsək, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ -lərə nəzərən aşağıdakı s sayda tənliklər sistemini alırıq:

$$\alpha_m(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) = \alpha_m^*, \quad m = 1, 2, \dots, s.$$

Alınmış sistemi naməlum $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ -lərə nəzərən həll edərək naməlum parametrlərin $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_s$ statistik qiymətlərini tapırıq.

Misal 3. Fərz edək ki, $\alpha_1 = EX = \theta$ riyazi gözləməsi məlum deyil. Onda aydındır ki, momentlər üsulundan bir-başla alırıq ki, $\alpha_1 = A_1$ və ya

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = A_1.$$

8.4.3. Maksimal doğruya oxşarlıq metodu

Fərz edək ki, X təsadüfi kəmiyyəti n həcmli seçimə görə qiymətləndirilməsi tələb olunan naməlum θ paramet-rindən asılı $p_x(x, \theta)$ sıxlıq funksiyasına malik təsadüfi kə-miyyətdir.

$(X_1, \dots, X_n)$ seçim vektorunun komponentləri asılı ol-mayan və eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər ol-duğu üçün vektorun paylanmasının sıxlıq funksiyasını aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n p_{X_i}(x_i, \theta),$$

burada $x_1, \dots, x_n$ -lər seçim vektorunun realizasiyasıdır.

$L(\theta) = \prod_{i=1}^n p_{X_i}(x_i, \theta)$ funksiyasına **doğruyaoxşar-lıq funksiyası** deyilir.

Qeyd edək ki, müşahidə olunan X təsadüfi kəmiyyəti diskret paylanmaya malik olduqda naməlum θ parametrinin statistik qiyməti olan $\hat{\theta} \equiv \hat{\theta}_n$ doğruyaoxşarlıq qiymət-ləndirməsi olaraq θ parametrinin elə qiyməti götürülür ki, bu konkret seçimin müşahidə olunma ehtimalı maksimum olsun.

Diskret halda doğruyaoxşarlıq funksiyası aşağıdakı kimi olur:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

Maksimal doğruyaoxşarlıq metodunun əsas mahiyyəti ondan ibarətdir ki, naməlum θ parametrinin $\hat{\theta} \equiv \hat{\theta}_n$ statistik qiyməti kimi $L(\theta)$ funksiyasına maksimum qiymət verən

nöqtə götürülür. Yəni $\hat{\theta} \equiv \hat{\theta}_n$ statistik qiyməti $L'(\theta) = 0$ şərtindən tapılır.

Hesablamaları asanlaşdırmaq məqsədilə çox vaxt $L(\theta)$ əvəzinə $\ln L(\theta)$ funksiyasından istifadə olunur, çünki bu funksiyalar maksimum qiymətlərini eyni nöqtədə alırlar.

Misal 4. n sayda asılı olmayan sınaqlarda baş vermə sayı k olan A hadisəsinin hər bir sınaqda baş vermə ehtimalı olan p üçün maksimal doğruxaoxşarlıq qiymətləndirməsini tapın.

Həlli. Aydındır ki, bu halda maksimal doğruxaoxşarlıq funksiyası aşağıdakı kimi olacaqdır:

$$L(p) = p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

buradan

$$\ln L(p) = k \cdot \ln p + (n - k) \ln(1 - p).$$

Beləliklə,

$$\frac{d}{dp}(\ln L(p)) = \frac{k}{p} - \frac{n - k}{1 - p}$$

Ekstremum üçün zəruri şərt

$$\frac{d}{dp}(\ln L(p)) = 0$$

olduğundan, buradan $p = \frac{k}{n}$.

Beləliklə, p ehtimalı üçün maksimal doğruxaoxşarlıq qiymətləndirməsi bu hadisənin nisbi tezliyinə bərabərdir.

Misal 5. Fərz edək ki, seçim vektorunun komponentləri naməlum p parametrinə malik Bernulli qanunu ilə paylanmışdır:

$$P(X = k) = p^k q^{1-k}; k = 0, 1; q = 1 - p.$$

p parametri üçün maksimal doğruxaoxşarlıq qiymətləndirməsini tapın.

Həlli. Bunun üçün maksimal doğruxaoxşarlıq funksiyasını yazaq.

$$\begin{aligned} L(p) &= \prod_{i=1}^n p^{k_i} (1-p)^{1-k_i} = \\ &= p^{\sum_{i=1}^n k_i} \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^n (1-k_i)} = p^k \cdot (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Sonuncu ifadədən p -ə nəzərən törəmə alaq:

$$\begin{aligned} L'(p) &= (p^k \cdot (1-p)^{n-k})' = \\ &= k \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} - p^k \cdot (n-k) \cdot (1-p)^{n-k-1} \end{aligned}$$

$L'(p) = 0$ tənliyini həll edərək naməlum p parametri üçün tələb olunan qiymətləndirməni əldə edə bilərik.

$$p^k \cdot (1-p)^{n-k} \left(\frac{k}{p} - \frac{n-k}{1-p} \right) = 0.$$

Buradan

$$\frac{k}{p} - \frac{n-k}{1-p} = 0.$$

Beləliklə,

$$p = \frac{k}{n}.$$

Misal 6. Fərz edək ki, seçim vektorunun komponentləri naməlum θ riyazi gözləməsi və məlum σ^2 parametrli normal

qanunla paylanmışdır. θ parametri üçün maksimal doğruxaoxşarlıq qiymətləndirməsini tapın.

Həlli. Fərz edək ki, $x_1, \dots, x_n$ seçimi $(X_1, \dots, X_n)$ təsadüfi seçim vektorunun realizasiyasıdır.

Maksimal doğruxaoxşarlıq funksiyası

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^n p_{x_i}(x_i, \theta) = \\ &= \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{i=1}^n e^{-\frac{(x_i - \theta)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \theta)^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Asanlıqla görmək olar ki,

$$\ln L(\theta) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2.$$

Bu funksiyanın ekstremumunu araşdırmaq üçün törəməsini alaq:

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta) = 0.$$

Sonuncu münasibətdən

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

olduğunu alırıq. Göründüyü kimi, naməlum riyazi gözləmə üçün maksimal doğruxaoxşarlıq qiyməti seçimin ədədi ortasıdır.

Misal 7. Fərz edək ki, seçim vektorunun komponentləri məlum α və naməlum θ parametrlərinə malik Pareto qanunu ilə paylanmışdır. θ parametri üçün maksimal doğruxaoşarlıq qiymətləndirməsini tapın.

Həlli. Pareto paylanmasının sıxlıq funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$p_{X_i}(x, \theta) = \frac{\alpha}{\theta} \left(\frac{\theta}{x} \right)^{\alpha+1}, x \geq \theta.$$

Maksimal doğruxaoşarlıq funksiyası

$$L(\theta) = \frac{\alpha\theta^{\alpha+1}}{x_1^{\alpha+1}} \frac{\alpha\theta^{\alpha+1}}{x_2^{\alpha+1}} \dots \frac{\alpha\theta^{\alpha+1}}{x_n^{\alpha+1}}, x_i \geq \theta, \quad i = \overline{1, n}.$$

Bu münasibətdən görünür ki, yalnız $\theta < \min x_i$ olduqda $L(\theta) > 0$ olur. $\alpha > 0$ olduqda θ azaldıqda θ^α da azalır. Buna görə də $L(\theta)$ funksiyası maksimum qiymətini $\hat{\theta} = \min X_i$ nöqtəsində alır və bu statistik qiymət naməlum θ parametri üçün maksimal doğruxaoşarlıq qiymətləndirməsidir.

§8.5. Riyazi statistikada istifadə olunan bəzi paylanma qanunları

Normal paylanmaya malik ümumi çoxluqdan olan seçimlərlə bağlı əsas statistikaların paylanmaları riyazi statistikada mühüm rolu olan χ^2 , Studiyent və Fişer paylanmalarını verək.

- χ^2 paylanması.** Fərz edək ki, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ hər biri standart normal paylanmaya malik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. $\chi^2(k) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_k^2$ təsadüfi kəmiyyətinə k sərbəstlik dərəcəsinə malik χ^2 paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyət deyilir.

χ^2 paylanmasının sıxlıq funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$p_{\chi^2}(x) = \frac{2^{-\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \geq 0.$$

Bu paylanmanın riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq, $E\chi^2(k) = k$ və $D\chi^2(k) = 2k$ -dir.

Göstərmək olar ki, əgər $\chi^2(k_1)$ və $\chi^2(k_2)$ asılı olmayan və hər biri sərbəstlik dərəcələri uyğun olaraq k_1 və k_2 olan χ^2 paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, bu təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi sərbəstlik dərəcələri $k_1 + k_2$ olan χ^2 paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyət olur. Qeyd edək ki, $k > 30$ olduqda χ^2 paylanması normal paylanma ilə ap-proksimasiya olunur. χ^2 paylanmasının p tərtib kvantili olan $\chi_p^2(k)$ də standart normal paylanmanın u_p kvantilləri ilə ap-proksimasiya olunur:

$$\chi_p^2(k) \approx \frac{1}{2} (u_p + \sqrt{2k-1})^2.$$

Bu düstur $k > 30$ və $p \geq 0,5$ olduqda cəmi 1 faiz xə-taya malik olur.

χ^2 paylanması ilə bağlı aşağıdakı teoremi isbatsız ola-raq verək.

Teorem. Fərz edək ki, $x_1, \dots, x_n$ seçimi (a, σ) parametrlı normal paylanmaya malik ümumi çoxluqdan götürülmüş seçimdir, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ və $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ isə bu se-çimin uyğun olaraq riyazi gözləməsi və dispersiyasıdır. Onda

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ və } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

statistikaları asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və

$\frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2$ statistikası $\chi^2(n-1)$ paylanmasına malikdir.

2. Student paylanması. Fərz edək ki, ξ standart normal paylanmaya, $\chi^2(k)$ isə k sərbəstlik dərəcəsinə malik χ^2 paylanmasına malik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

$$T(k) = \frac{\xi}{\sqrt{\chi^2(k)/k}}$$

təsadüfi kəmiyyətinə k sərbəstlik dərəcəsinə malik Student paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyət deyilir.

Bu paylanmanın riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq, $ET(k) = 0$ və $DT(k) = \frac{k}{k-2}$, $k > 2$.

Student paylanması ordinat oxuna nəzərən simmetrik olduğu üçün onun kvantilləri $t_p(k)$ üçün $t_p(k) = -t_{1-p}(k)$ münasibəti doğrudur və $k > 30$ olduqda $t_p(k) \approx u_p$.

3. Fişer paylanması. $F(k_1, k_2) = \frac{\chi^2(k_1)/k_1}{\chi^2(k_2)/k_2}$ təsadüfi kəmiyyətinə sərbəstlik dərəcəsi k_1 və k_2 olan Fişer paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyət deyilir.

Fişer paylanmasının kvantilləri arasında aşağıdakı münasibət doğrudur:

$$F_{1-p}(k_1, k_2) = \frac{1}{F_p(k_1, k_2)}.$$

§8.6. Etibarlı interval və etibarlı ehtimal

θ parametrinin həqiqi qiymətinin $p = 1 - \alpha$ ehtimalı ilə yerləşdiyi (θ_1, θ_2) intervalına θ parametri üçün **etibarlılıq intervalı** deyilir, yəni

$$P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = 1 - \alpha.$$

$1 - \alpha$ ədədi etibarlı ehtimalı, α isə **mühümlülük həddi** adlanır. θ naməlum parametrinə malik ümumi çoxluqdan $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçiminə görə təyin olunmuş

$$\theta_1 = \theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ və } \theta_2 = \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

statistikaları etibarlılıq intervalının uyğun olaraq aşağı və yuxarı sərhədləri adlanır.

Interval qiymətləndirmənin dəqiqliyini xarakterizə edən etibarlılıq intervalının uzunluğu seçimin həcmi n -dən və $1 - \alpha$ etibarlı ehtimalından asılıdır. Seçimin həcmi genişləndirdikdə etibarlılıq intervalının uzunluğu kiçilir, etibarlı ehtimal vahidə yaxınlaşdıqda isə böyüyür. Etibarlı ehtimalın seçimi konkret şərtlərlə təyin olunur.

θ parametrinin etibarlılıq intervalını tapmaq üçün onun statistik qiyməti $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -nin paylanma qanununu bilmək lazımdır. Etibarlılıq intervalının qurulma üsullarından biri aşağıdakı kimidir:

Fərz olunur ki, statistikası $Y = Y(\tilde{\theta}, \theta)$

- a) $Y = Y(\tilde{\theta}, \theta)$ -in paylanma qanunu məlumdur və θ -dan asılı deyil;
- b) $Y = Y(\tilde{\theta}, \theta)$ funksiyası kəsilməzdir və θ -ya görə ciddi monotondur;

şərtlərini ödəyir, bundan əlavə $(1 - \alpha)$ etibarlılıq intervalı verilib, $y_{\alpha/2}$ və $y_{1-\alpha/2}$ isə uyğun olaraq Y statistikasının paylanmasının $\alpha / 2$ və $1 - \alpha / 2$ tərtibli kvantilləridir. Onda $1 - \alpha$ ehtimalı ilə aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir:

$$y_{\alpha/2} < Y(\tilde{\theta}, \theta) < y_{1-\alpha/2}.$$

Bu bərabərsizliyi θ -ya nəzərən həll etsək, onun üçün

etibarlılıq intervalının θ_1 və θ_2 sərhədlərini tapırıq. Əgər Y statistikasının paylanması Oy oxuna nəzərən simmetrikdirsə onda etibarlılıq intervalı ən kiçik uzunluğa malikdir, əgər bu paylanma simmetrik deyilsə, onda ən kiçik uzunluğa yaxındır.

İndi isə normal qanunla paylanmış ümumi çoxluğun riyazi gözləməsi və dispersiyası üçün etibarlı intervalın qurulması qaydası ilə tanış olaq.

1) Riyazi gözləmə üçün etibarlı interval

Fərz edək ki, ümumi çoxluq (a, σ) parametrlili normal paylanmaya malikdir, belə ki, a naməlum, σ isə məlumdur. Bu halda seçimin riyazi gözləməsindən istifadə edərək naməlum a parametri üçün aşağıdakı etibarlı intervalı qurmaq mümkündür:

$$\bar{x} - t_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (1)$$

burada t_{α} ilə $2\Phi_0(t_{\alpha}) = \alpha$ tənliyin köküdür, $\Phi_0(t)$ isə Laplas funksiyasıdır.

Qeyd edək ki, $\delta = t_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ kəmiyyəti qiymətləndirmənin dəqiqliyi adlanır. α ehtimalı verildikdə t_{α} kəmiyyəti cədvəl 5-dən tapılır.

Əgər σ kvadratik orta meyli də naməlum olarsa, bu halda a parametri üçün aşağıdakı etibarlı intervalı qurmaq mümkündür:

$$\bar{x} - t_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad (2)$$

burada s seçimin düzəldilmiş kvadratik orta meylidir və aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Qeyd edək ki, (2) qiymətləndirməsinin dəqiqliyi üçün $n > 30$ olmalıdır.

2) Kvadratik orta meyl üçün etibarlı interval

Fərz edək ki, ümumi çoxluq (a, σ) parametrlili normal paylanmaya malikdir, belə ki, a məlum, σ isə naməlumdur. Bu halda seçimin düzəldilmiş orta kvadratik meylindən istifadə edərək naməlum σ parametri üçün aşağıdakı etibarlı intervalı qurmaq mümkündür:

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q), \quad q < 1;$$

$$0 < \sigma < s(1 + q), \quad q > 1,$$

burada $q = q(\alpha, n)$ ədədi verilmiş α və n üçün cədvəl 6-dan tapılır.

İndi isə etibarlı intervalın tapılmasına aid misallar verək.

Misal 1. Kvadratik orta meyli $\sigma = 4$ olan normal qanunla paylanmış ümumi çoxluğun naməlum riyazi gözləməsi üçün 0,95 etibarlılığı ilə etibarlı interval tapın, belə ki, seçimin həcmi $n = 16$ və seçimin riyazi gözləməsi $\bar{x} = 21$.

Həlli. Bu məqsədlə (1) düsturundan istifadə edəcəyik. Belə ki, məsələnin şərtindən istifadə etməklə

t_α kəmiyyətini tapmalıyıq. Qurulacaq intervalın

etibarlılığı $\alpha = 0,95$ olmalıdır. Buna görə

$$2\Phi_0(t_{0,95}) = 0,95 \text{ və ya } \Phi_0(t_{0,95}) = 0,475$$

münasibətindən $t_{0,95}$ kəmiyyətini tapmaq lazımdır. Cədvəl 5-ə əsasən $t_{0,95} = 1,96$. Beləliklə, (1) düsturuna əsasən tələb olunan etibarlı interval

$$19,04 < a < 22,96$$

olacaqdır.

Qeyd edək ki, əgər $\alpha = 0,95$ əvəzinə $\alpha = 0,90$ götürsəydik, bu halda $t_{0,90} = 1,645$ olardı və etibarlı interval bir az kiçilərdi:

$$19,355 < a < 22,645.$$

§8.7. Statistik hipotezlər və onların yoxlanılma qaydası

Riyazi statistikanın mühüm məsələlərindən biri naməlum parametrlərin qiymətləndirilməsidir.

Naməlum parametrin həqiqi qiyməti haqqında irəli sürülən təkliflərə statistik **hipotezlər və ya fərziyyələr** deyilir. Naməlum parametr haqqında irəli sürülən ilkin hipotezə **başlanğıc** və ya **əsas hipotez** deyilir və H_0 ilə işarə olunur. Başlanğıc hipotezə zidd olan H_1 hipotezinə **alternativ hipotez** deyilir.

Əgər statistik hipotezdə naməlum parametrin həqiqi qiyməti haqqında yalnız bir $\theta = \theta_0$ qiymət göstərilərsə, onda belə statistik hipotezə **sadə statistik hipotez** deyilir. Əgər statistik hipotezdə naməlum parametr üçün iki və daha artıq qiymət göstərilərsə, onda ona **mürəkkəb statistik hipotez** deyilir. Statistik hipotezin yoxlanılması üçün istifadə olunan

K təsadüfi kəmiyyətinə statistik kriteriya və ya sadəcə olaraq kriteriya deyilir.

Hipotezlər yoxlanılarkən iki növ səhvə yol verilə bilər.

Doğru başlanğıc hipotez qəbul edilməzsə, bu zaman deyirlər ki, birinci növ səhvə yol verilmişdir. Birinci növ səhvə yol verilməsi ehtimalı α ilə işarə olunur və **kriteriyanın gücü** və ya **həssaslıq səviyyəsi** adlanır.

Yalnız olduğu halda başlanğıc hipotez qəbul edilərsə, bu halda deyirlər ki, ikinci növ səhvə yol verilmişdir. İkinci növ səhvə yol verilməsi ehtimalı β ilə işarə olunur.

I və II növ səhvlərin ehtimalları ilə bağlı aşağıdakı cədvəli verək.

H_0 hipotezi	qəbul edilir	rədd edilir
doğrudur	doğru qərar	I növ səhv
yalnıxdır	II növ səhv	doğru qərar

Statistik fərziyələrin yoxlanılması məsələsində hər iki tip səhvlərin ehtimallarını minimallaşdırmaq lazımdır. Lakin ümumi halda verilmiş n həcmli seçim üçün kritik oblastın seçilməsindən asılı olmayaraq bu səhvlərin ehtimallarını eyni zamanda kiçik etmək mümkün deyil.

K kriteriyasının başlanğıc H_0 hipotezinin qəbul edilməsini təmin edən qiymətləri çoxluğuna **hipotezin qəbul edilməsi oblastı**, rədd edilməsini təmin edən qiymətləri çoxluğuna **kritik oblast** deyilir. Kritik oblastı hipotezin qəbul edilməsi oblastından ayıran k_{kr} nöqtələrinə **kritik nöqtələr** deyilir. Qeyd edək ki, kritik nöqtələrin və oblastların tapılması üçün kriteriyanın gücü olan α əvvəlcədən verilməlidir.

$k_{kr} > 0$ olduqda $K > k_{kr}$ bərabərsizliyi ilə təyin olunan kritik oblasta **sağtərəfli kritik oblast** deyilir. Sağtərəfli

kritik oblastı tapmaq üçün aşağıdakı bərabərsizlikdən istifadə olunur:

$$P\{K > k_{kr}\} = \alpha.$$

$k_{kr} < 0$ olduqda $K < k_{kr}$ bərabərsizliyi ilə təyin olunan kritik oblasta **soltərəfli kritik oblast** deyilir. Soltərəfli kritik oblastı tapmaq üçün aşağıdakı bərabərsizlikdən istifadə olunur:

$$P\{K < k_{kr}\} = \alpha.$$

$|K| > k_{kr}, k_{kr} > 0$ bərabərsizlikləri ilə təyin olunan oblasta **ikitərəfli simmetrik kritik oblast** deyilir. Bu halda kritik oblast aşağıdakı bərabərsizliklərdən tapılır:

$$P\{K > k_{kr}\} = \frac{\alpha}{2}, \quad P\{K < -k_{kr}\} = \frac{\alpha}{2}.$$

Statistik hipotezlərin yoxlanılması qaydası aşağıdakı kimidir:

Əvvəlcə verilmiş seçim əsasında K kriteriyası üçün empirik (müşahidə olunmuş) $K_{mü\check{s}}$ qiyməti hesablanır. Əgər tapılmış $K_{mü\check{s}}$ qiyməti kritik oblasta daxil olarsa, bu halda H_0 hipotezi rədd edilir, əks halda isə qəbul edilir.

Qeyd edək ki, optimal kriteriyanın qurulması məsələsi riyazi statistikanın ən ciddi məsələlərindəndir. Bununla bağlı oxucuya Neyman-Pirson optimal kriteriyası ilə tanış olmaq tövsiyə olunur (bax, məsələn [20], s.257-264).

§8.8. Uzlaşma kriteriyaları

Riyazi statistikanın ən mühüm məsələlərindən biri təsadüfi kəmiyyətlərin nəzəri paylanma qanununun empirik paylanma funksiyasının köməyi ilə müəyyən edilməsindən

ibarətdir. Bu məsələnin həll edilməsi üçün paylanma qanunun şəkli və onun parametrlərini müəyyən etmək lazımdır. Bu zaman empirik və nəzəri paylanmalar arasında hər zaman müəyyən fərqlər olur. Təbii olaraq belə bir sual meydana çıxır ki, bu funksiyalar arasında olan fərqlər müşahidələrin sayının az olmasından doğan təsadüfi faktorlarla bağlıdır, yoxsa fərqlər nəzəri paylanma doğru seçilmədiyi üçün meydana çıxmışdır? Bu suala uzlaşma kriteriyaları cavab verir. Uzlaşma kriteriyalarına misal olaraq χ^2 , Kolmoqorov, Smirnov və s. kriteriyalarını göstərmək olar.

Tədqiq olunan X təsadüfi kəmiyyətinin müəyyən paylanma qanununa tabe olması hipotezini H_0 ilə işarə edək. H_0 hipotezinin doğru seçilib seçilməməsini yoxlamaq üçün bir-birindən asılı olmayan n sayda müşahidələr aparılır və alınmış nəticələr əsasında tədqiq olunan kəmiyyətin empirik paylanma funksiyası $F_n^*(x)$ qurulur. $F_n^*(x)$ empirik paylanma funksiyası ilə nəzəri paylanma funksiyası $F(x)$ -in arasındakı fərqi müəyyən etmək üçün X təsadüfi kəmiyyətindən asılı olmayan U təsadüfi kəmiyyəti götürülür. U təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu məlumdursa, bu halda onun sınaq zamanı müşahidə olunmuş faktiki u qiymətindən böyük olması ehtimalını tapmaq mümkündür. Əgər $P(U > u) = \alpha$ ehtimalı kiçik ədəddirsə, bu halda H_0 hipotezi qəbul edilmir. Əgər $P(U > u) = \alpha$ ehtimalı kiçik ədəd deyilsə, bu halda H_0 hipotezini doğru qəbul etmək olar.

I. Pirsonun χ^2 (xi-kvadrat) uzlaşma kriteriyası

Statistikada paylanma qanunlarına aid hipotezlərin yoxlanılmasında ən geniş tətbiq olunan Pirsonun təklif etdiyi

χ^2 kriteriyasıdır.

Pirsonun χ^2 kriteriyası ilə tanış olaq. X -in ala biləcəyi qiymətlər oblastını k sayda cüt-cüt kəsişməyən $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ intervallarına bölək və hər bir Δ_i intervalında X -in aldığı qiymətlərin sayını müəyyənləşdirək. $F(x)$ nəzəri paylanma funksiyasının məlum olduğunu fərz etsək, X təsadüfi kəmiyyətinin Δ_i intervalından qiymətlər alması ehtimalı $P(X \in \Delta_i) = p_i$ -ni həmişə hesablamaq mümkündür; bu halda X -in aldığı qiymətlərdən Δ_i intervalındakılarının nəzəri sayı $n p_i$, empirik sayı isə m_i olacaqdır. Dediklərimiz aşağıdakı cədvəldə verilir:

Δ_i -ci interval	Δ_1	Δ_2	...	Δ_i	...	Δ_k
m_i -empirik say	m_1	m_2	...	m_i	...	m_k
$n p_i$ -nəzəri say	$n p_1$	$n p_2$	...	$n p_i$	...	$n p_k$

Burada m_i kəmiyyəti n sayda aparılmış sınaqlarda X üçün müşahidə olunmuş qiymətlərdən Δ_i intervalından olanların sayıdır və $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$; $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$.

Əgər empirik tezliklər nəzəri tezliklərdən xeyli fərqlənirsə, H_0 hipotezi qəbul edilmir, əks halda hipotez qəbul edilir.

Əgər yoxlanılan H_0 hipotezi doğru seçilmişdirsə, m_i təsadüfi kəmiyyəti riyazi gözləməsi $n p_i$, dispersiyası isə $n p_i(1 - p_i)$ olan binomial qanunla paylanmışdır. Onda $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$y_i = \frac{(m_i - n p_i)}{\sqrt{n p_i q_i}}, \quad q_i = 1 - p_i$$

təsadüfi kəmiyyəti standart olan normal qanunla paylan-

mışdır.

Asanlıqla görmək mümkündür ki,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k y_i \sqrt{n p_i q_i} &= \sum_{i=1}^k \frac{m_i - n p_i}{\sqrt{n p_i q_i}} \sqrt{n p_i q_i} = \sum_{i=1}^k (m_i - n p_i) = \\ &= \sum_{i=1}^k m_i - n \sum_{i=1}^k p_i = n - n = 0.\end{aligned}$$

İsbat etmək mümkündür ki, $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$\sum_{i=1}^k y_i^2 q_i = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - n p_i)^2}{n p_i} \quad (1)$$

statistikası sərbəstlik dərəcəsi sayı $\nu = k - 1$ olan χ^2 paylanması ilə paylanmışdır. Beləliklə, $i = 1, 2, \dots, k$ qiymətlərində m_i ilə $n p_i$ arasındakı fərqin ölçüsü kimi

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - n p_i)^2}{n p_i} \quad (2)$$

statistikasından istifadə olunur.

χ^2 kriteriyasının tətbiqi aşağıdakı qaydada aparılır:

- 1) χ^2 statistikası (2) düsturu ilə hesablanır;
- 2) Mühümlük səviyyəsi α seçilir;
- 3) χ^2 paylanması üçün tutulmuş cədvəldən $\chi_{\nu; \alpha}^2$ təyin olunur;
- 4) $\chi^2 > \chi_{\nu; \alpha}^2$ olarsa, H_0 qəbul edilmir, $\chi^2 \leq \chi_{\nu; \alpha}^2$ olarsa, H_0 qəbul edilir.

χ^2 təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu məlum olarsa, verilmiş α mühümlük səviyyəsinə əsasən irəli sü-

rülmüş hipotezi yoxlamaq üçün mühümlük sərhəddini təyin etmək olur.

Qeyd edək ki, paylanma qanunu üçün irəli sürülmüş hipotezin yoxlanılmasında yalnız birinci növ səhvin olub olmadığına nəzarət edilir.

Bir daha qeyd edək ki, (2) düsturu ilə verilmiş

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - n p_i)^2}{n p_i}$$

statistikası yalnız $n \rightarrow \infty$ olduqda χ^2 paylanmasına malikdir və buna əsasən də bu kriteriyadan istifadə etmək istədikdə, hər bir intervalda X üçün müşahidə olunan seçimin qiymətlərinin sayı ən azı 5 – 10 olmalıdır. Əgər bəzi intervallarda bu say kiçik olarsa, məsələn, 1 – 2 olarsa, onda onları birləşdirmək məqsədə uyğundur.

1. İki binomial paylanmanın parametrlərinin bərabərliyi haqda hipotezin χ^2 kriteriyası ilə yoxlanılması

Fərz edək ki, iki asılı olmayan n_1 və n_2 sayda sınaqlar seriyası aparılır. Birinci sınaqlar seriyasında A hadisəsi n_{11} , ikincidə isə n_{21} dəfə baş verir.

$$H_0: p_1 = p_2$$

yəni A hadisəsinin hər iki sınaqlar seriyası ehtimalının eyni olması hipotezidir.

Seriylar		Hadisələr		Cəm
		A	$\bar{A}$	
1		n_{11}	n_{12}	$n_{1\cdot}$
2		n_{21}	n_{22}	$n_{2\cdot}$
Cəm		$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	$n_{\cdot \cdot} = n$

$H_0: p_1 = p_2$ hipotezi χ^2 ilə yoxlanılır. Bunun üçün aşağıdakı düsturdan istifadə olunur.

$$\chi^2 = \frac{n(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2}{n_{1.}n_{2.}n_{.1}n_{.2}}.$$

Əgər

$$\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2 \quad (1)$$

olarsa H_0 qəbul edilir. Əks halda qəbul edilmir.

H_0 hipotezini χ^2 ilə yoxlamaq üçün aşağıdakı statistikadan istifadə etmək lazımdır.

X \ Y	y_1	y_2	...	y_l	$\sum_{j=1}^l n_{ij} = n_{i.}$
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1l}	$n_{1.}$
x_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2l}	$n_{2.}$
...	...	...	...	...	...
x_R	n_{R1}	n_{R2}	...	n_{Rl}	$n_{R.}$
$\sum_{i=1}^R n_{ij} = n_{.j}$	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.l}$	$n_{..} = n$

Əgər H_0 hipotezi doğrudursa, bütün gözlənilən tezliklər $n_{ij} \geq 4$; $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$ bu halda (4) statistikasını $(k-1)(l-1)$ sərbəstlik dərəcəsinə malik χ^2 paylanmasına malikdir.

Əgər (4) statistikasını $\chi_{1-\alpha}^2((k-1)(l-1))$ kvantilindən kiçikdirsə, yəni $\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2((k-1)(l-1))$ olarsa, bu halda asılı olmazlığı haqqında H_0 hipotezi qəbul edilir. Əks halda qəbul edilmir.

2. İki təsadüfi kəmiyyətin asılı olmazlığı haqqında hipotezin χ^2 kriteriyası ilə yoxlanılması

Fərz edək ki, n sayda eksperiment aparılır və onun nəticələri diskret X və Y təsadüfi kəmiyyətinin qiymətləridir.

Yəni uyğun olaraq, $x_1, x_2, \dots, x_k$ və $y_1, \dots, y_l$.

n_{ij} ilə $X = x_i$ və $Y = y_j$; $i = 1, \dots, k$ və $j = 1, \dots, l$ olan eksperimentin sayını işarə edək.

X və Y təsadüfi kəmiyyətinin asılı olmaması haqqında H_0 hipotezi yoxlanılır.

Əgər H_0 hipotezi doğrudursa, onda

$$P\{X = x_i; Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\} = p_i q_j.$$

Əgər H_0 doğrudursa X təsadüfi kəmiyyətinin qiyməti i -ci intervala, Y kəmiyyətinin qiymətinin j -ci intervala düşdüyü eksperimentin sayı olan $\tilde{n}_{ij}$ aşağıdakı kimidir:

$$\tilde{n}_{ij} = \tilde{n} \tilde{p}_i \tilde{q}_j = \frac{n_i \cdot n_j}{n}.$$

3. Ümumi çoxluğun binomial qanunla paylanması haqqında hipotezin yoxlanılması

n sayda sınaq aparılmışdır və hər bir sınaq n sayda asılı olmayan eksperimentdən ibarətdir, belə ki, hər bir eksperimentdə A hadisəsinin baş vermə ehtimalı eynidir. Aydındır ki, bu zaman A hadisəsinin baş vermə sayını ifadə edən X təsadüfi kəmiyyəti aşağıdakı paylanmaya malikdir:

x_i	0	1	2	...	N
n_i	0	1	2	...	n_N

burada x_i ilə A hadisəsinin bir sınaqda baş verməsi sayı, n_i ilə isə A hadisəsinin x_i dəfə baş verdiyi sınaqların sayı işarə olunmuşdur. Məqsədimiz Pirson kriteriyasından istifadə etməklə X təsadüfi kəmiyyətinin binomial qanunla paylanması haqqında hipotezi yoxlamaqdan ibarətdir. Bunun üçün:

1. Bernulli düsturuna əsasən A hadisəsinin N sayda

sınaqda i dəfə baş vermə ehtimalı olan P_i ehtimalı tapılır, $i = 0, 1, 2, \dots, s$, burada s bir sınaqda A hadisəsinin maksimal sayda müşahidə olunmasıdır, $s \leq N$.

2. $n'_i = n_i \cdot P_i$ nəzəri tezlikləri tapılır.

3. Sərbəstlik dərəcəsini $k = s - 1$ qəbul edərək Pirson kriteriyasına əsasən empirik və nəzəri tezliklər müqayisə olunur. Bu zaman hesab olunur ki, A hadisəsinin baş vermə ehtimalı p verilmişdir. Əgər p ehtimalı seçim əsasında qiymətləndirilmişdirsə, $k = s - 2$ götürülür.

4. Ümumi çoxluğun Puasson qanunu ilə paylanması haqqında hipotezin yoxlanılması.

X diskret təsadüfi kəmiyyətinin empirik paylanması verilmişdir. Pirson kriteriyasından istifadə edərək ümumi çoxluğun Puasson qanunu ilə paylanması haqqında hipotezi α mühümlük səviyyəsində yoxlamaq tələb olunur.

1. Seçimin orta qiyməti $\bar{x}$ tapılır.

2. Puasson paylanmasının naməlum parametri λ üçün statistik qiymət olaraq $\bar{x}$ götürülür, $\lambda = \bar{x}$.

3. Puasson düsturuna (və ya cədvələ) əsasən n sayda sınaqda i sayda hadisənin baş vermə ehtimalı olan P_i ehtimalları tapılır, $i = 0, 1, 2, \dots, r$, burada r müşahidə olunan hadisələrin maksimal sayıdır.

4. $n'_i = n_i \cdot P_i$ nəzəri tezlikləri düsturu ilə tapılır.

5. Sərbəstlik dərəcəsini $k = s - 2$ qəbul edərək Pirson kriteriyasına əsasən empirik və nəzəri tezliklər müqayisə olunur, burada s müxtəlif qrupların sayıdır.

5. Ümumi çoxluğun müntəzəm qanunla paylanması haqqında hipotezin yoxlanması

Fərz edək ki, mütləq kəsilməz paylanmaya malik X təsadüfi kəmiyyətinin empirik paylanması $x_{i-1} - x_i$ intervallar ardıcılığı və onlara uyğun n_i tezlikləri şəklində verilmişdir, belə ki, $\sum n_i = n$. Məqsədımız Pirson kriteriyasından istifadə etməklə X təsadüfi kəmiyyətinin müntəzəm qanunla paylanması haqqında hipotezin, yəni təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyasının

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b), \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

olmasını yoxlamaqdan ibarətdir. Bunun üçün:

1. İntervalın ucları olan a və b parametrlərini aşağıdakı düsturların köməyiylə qiymətləndirmək lazımdır:

$$a^* = \bar{x} - \sqrt{3}\sigma, \quad b^* = \bar{x} + \sqrt{3}\sigma.$$

Burada $\bar{x}$ və σ uyğun olaraq seçimin orta qiyməti və kvadratik orta meylidir. a^* və b^* isə a və b parametrlərinin statistik qiymətləridir.

2. Təklif olunan paylanmanın sıxlıq funksiyası aşağıdakı kimi tapılır:

$$p(x) = \frac{1}{b^* - a^*}.$$

3. Nəzəri tezliklər tapılır:

$$n'_1 = nP_1 = n[f(x) \cdot (x_1 - a^*)] = n \cdot \frac{1}{b^* - a^*} (x_1 - a^*);$$

$$n'_2 = n'_3 = \dots = n_{s-1} = n \cdot \frac{1}{b^* - a^*} (x_i - x_{i-1});$$

$$i = 2, 3, \dots, s-1; \quad n'_s = n \cdot \frac{1}{b^* - a^*} (b^* - x_{s-1}).$$

3. Sərbəstlik dərəcəsini $k = s - 3$ qəbul edərək Pirson kriteriyasına əsasən empirik və nəzəri tezliklər müqayisə olunur, burada s seçimin bölündüyü intervalların sayıdır.

6. Ümumi yığımın üstlü paylanmaya malik olması hipotezinin yoxlanılması

Fərz edək ki, X təsadüfi kəmiyyətinin empirik paylanması $x_i - x_{i+1}$ intervallar ardıcılığı şəklində verilmişdir və uyğun tezliklər n_i -dir, belə ki, $\sum n_i = n$.

X təsadüfi kəmiyyətinin üstlü paylanmaya malik olması hipotezini yoxlamaq üçün Pirson kriteriyasından istifadə olunur. Bu məqsədlə

1. Empirik paylanma əsasında $\bar{x}$ orta qiyməti tapılır. Bu məqsədlə i -ci intervalın təmsilçisi olaraq $x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2$ götürülür;

2. λ parametrinin statistik qiyməti olaraq $\lambda^* = 1/\bar{x}$ götürülür;

3. X təsadüfi kəmiyyətinin (x_i, x_{i+1}) intervalından qiymət alması ehtimalı

$$P_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}$$

düsturu ilə hesablanır;

4. Nəzəri tezliyi hesablanır:

$$n'_i = n_i \cdot P_i,$$

$n = \sum n_i$ – seçimin həcmidir.

5. Sərbəstlik dərəcəsini $k = s - 2$ qəbul edərək Pirson kriteriyasına əsasən empirik və nəzəri tezliklər müqayisə

olunur, burada s seçimin bölündüyü intervalların sayıdır.

7. Ümumi yığının normal paylanması haqqında hipotezin Pirson kriteriyasına əsasən yoxlanılması

Fərz edək ki, aşağıdakı seçim verilmişdir:

x_i	x_1	x_2	...	x_N
n_i	n_1	n_2	...	n_N

Bu seçimə əsasən X ümumi çoxluğunun normal qanunla paylandığını yoxlamaq üçün aşağıdakılar tələb olunur:

Qayda. Verilmiş α mühümlük səviyyəsinə uyğun normal qanunla paylanması hipotezini yoxlamaq üçün

1. Seçimin $\bar{x}$ orta qiyməti və σ orta kvadratik meyli tapılır.

2. Nəzəri tezliklər hesablanır:

$$n_i = \frac{nh}{\sigma_y} \cdot \varphi(u_i),$$

burada n – seçimin həcmidir (bütün tezliklərin cəmidir), h – addım (iki qonşu seçimin arasındakı məsafəni göstərir),

$$u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}, \quad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

3. Pirson kriteriyası vasitəsilə empirik və nəzəri tezlikləri müqayisə etmək. Bunun üçün:

$$\chi_{müs}^2 = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i};$$

tapılır;

4. χ^2 paylanmasının cədvəlinə əsasən $\chi_{kr}^2(\alpha; k)$ tapılır, burada $k = s - 3$ və s – seçimin qruplarının sayıdır. Əgər

$\chi_{mü\check{s}}^2 < \chi_{kr}^2$ olarsa, ümumi çoxluğun normal qanunla paylanması hipotezini qəbul etməməyə əsas yoxdur. Başqa sözlə, empirik və nəzəri tezliklər bir-birindən çox az fərqlənir. Əgər $\chi_{mü\check{s}}^2 > \chi_{kr}^2$ olarsa, ümumi çoxluğun normal qanunla paylanması hipotezi qəbul edilir.

A) Seçimin düzəldilmiş dispersiyası ilə normal qanunla paylanmış ümumi çoxluğun hipotetik dispersiyasının müqayisəsi

Düzəldilmiş s^2 dispersiyanın tapıldığı seçimin həcmi n ilə işarə edək.

Qayda 1. Verilmiş α mühümlük səviyyəsi üçün sıfırıncı hipotezi yoxlamaq üçün naməlum σ^2 dispersiyası ilə hipotetik σ_0^2 dispersiyasının bərabərliyi haqqında $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ sıfırıncı hipotez ilə $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ alternativ hipotezi yoxlamaq üçün

$$\chi_{mü\check{s}}^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

χ^2 kriteriyasının müşahidə olunan qiyməti hesablanır və χ^2 paylanması cədvəlinə əsasən verilmiş α mühümlük səviyyəsi və $k = n - 1$ sərbəstlik dərəcəsinə uyğun olan $\chi_{kr}^2(\alpha, k)$ kritik nöqtəsi tapılır. Əgər $\chi_{mü\check{s}}^2 < \chi_{kr}^2(\alpha; k)$ olarsa, başlanğıc hipotezi qəbul etməməyə heç bir əsas yoxdur. Əgər $\chi_{mü\check{s}}^2 > \chi_{kr}^2(\alpha, k)$ olarsa, başlanğıc hipotez qəbul edilmir.

Qayda 2. $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ alternativ hipotezi üçün $\chi_{sol.kr}^2(1 - \frac{\alpha}{2}; k)$ sol və $\chi_{sağ.kr}^2(\frac{\alpha}{2}; k)$ sağ kritik qiymətləri hesablanır. Əgər $\chi_{sol.kr}^2 < \chi_{mü\check{s}}^2 < \chi_{sağ.kr}^2$ olarsa, başlanğıc hipotezi qəbul etməməyə heç bir əsas yoxdur. Əgər $\chi_{mü\check{s}}^2 <$

$\chi_{sol.kr}^2$ və ya $\chi_{müš}^2 > \chi_{sağ.kr}^2$ olarsa, başlanğıc hipotez qəbul edilmir.

Qayda 3. $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ alternativ hipotezi üçün $\chi_{kr}^2(1 - \alpha, k)$ kritik nöqtəsi tapılır. Əgər $\chi_{müš}^2 > \chi_{kr}^2(1 - \alpha, k)$ olarsa, başlanğıc hipotezi qəbul etməməyə heç bir əsas yoxdur. Əgər $\chi_{müš}^2 < \chi_{kr}^2(1 - \alpha, k)$ olarsa, başlanğıc hipotez qəbul edilmir.

B) Normal paylanmaya malik ümumi çoxluğun hipotetik orta qiyməti ilə seçimin orta qiymətinin müqayisəsi

1. Ümumi yığının dispersiyası məlum olan hal

Qayda 1. σ^2 məlum olduqda verilmiş α mühümlük səviyyəsi üçün normal paylanmaya malik ümumi çoxluğun hipotetik orta qiyməti ilə seçimin orta qiymətini müqayisə etmək üçün başlanğıc hipotezi $H_0: a = a_0$ ilə $H_1: a \neq a_0$ alternativ hipotezini müqayisə etmək üçün

$$U_{müš} = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$$

kriteriyasının qiyməti hesablanır və Laplas funksiyasının cədvəlindən istifadə edərək

$$\Phi_0(u_{kr}) = (1 - \alpha)/2$$

münasibətindən u_{kr} kritik nöqtəsi tapılır.

Əgər $|U_{müš}| < u_{kr}$ olarsa, başlanğıc hipotezi qəbul etməməyə heç bir əsas yoxdur. Əgər $|U_{müš}| > u_{kr}$ olarsa, başlanğıc hipotez qəbul edilmir.

Qayda 2. Alternativ $H_1: a > a_0$ hipotezi üçün sağ kritik oblast $\Phi_0(u_{kr}) = (1 - 2\alpha)/2$ bərabərliyindən tapılır. Əgər

$U_{mü\check{s}} < u_{kr}$ olarsa, bu halda başlanğıc hipotezi qəbul etməməyə heç bir əsas yoxdur. Əgər $U_{mü\check{s}} > u_{kr}$ olarsa, başlanğıc hipotez qəbul edilmir.

Qayda 3. $H_1: a < a_0$ hipotezini yoxlamaq üçün əvvəlcə qayda 2-yə əsasən köməkçi kritik nöqtə u_{kr} tapılır, sonra isə $u'_{kr} = -u_{kr}$ sol kritik oblastı müəyyən edilir. Əgər $U_{mü\check{s}} > -u_{kr}$ olarsa, başlanğıc hipotezi qəbul etməməyə heç bir əsas yoxdur. Əgər $U_{mü\check{s}} < -u_{kr}$ olarsa, başlanğıc hipotez qəbul edilmir.

B. Ümumi çoxluğun dispersiyası naməlum olan hal

Bu halda

$$T = \frac{(\bar{X} - a_0)\sqrt{n}}{S}$$

təsadüfi kəmiyyəti, yəni statistikası daxil edilir, burada $\bar{X}$ – seçim vektorunun orta qiyməti, S isə kvadratik orta meyli-dir. Məlumdur ki, T təsadüfi kəmiyyəti $k = n - 1$ olan Styudent paylanmasına malikdir.

Qayda 1. $H_0: a = a_0$ və $H_1: a \neq a_0$ hipotezlərini müqayisə etmək üçün T təsadüfi kəmiyyətinin (kriteriyasının) müşahidə olunmuş

$$T_{mü\check{s}} = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{s}$$

qiymətini hesablamaq lazımdır və Styudent paylanmasının kritik nöqtələr cədvəlindən istifadə edərək $t_{kr}(\alpha; k)$ kritik qiyməti tapılır.

Əgər $|T_{mü\check{s}}| < t_{kr}$ başlanğıc hipotezi qəbul etməməyə heç bir əsas yoxdur. Əgər $|T_{mü\check{s}}| > t_{kr}$ olarsa, başlanğıc hipotez qəbul edilmir.

Qayda 2. $H_1: a > a_0$ alternativ hipotezini yoxlamaq üçün $t_{sağ\ kr}$ nöqtəsi tapılır.

Əgər $T_{müš} < t_{sağ\ kr}$ başlanğıc hipotezi qəbul etməməyə heç bir əsas yoxdur. Əgər $T_{müš} > t_{sağ\ kr}$ olarsa, başlanğıc hipotez qəbul edilmir.

Qayda 3. $H_1: a < a_0$ alternativ hipotezini yoxlamaq üçün $t_{sağ\ kr}(\alpha; k)$ köməkçi kritik nöqtə tapılır (qayda 2-yə əsasən) və $t_{sağ\ kr} = -t_{sol\ kr}$ qəbul edilir. Əgər $T_{müš} > -t_{sağ\ kr}$ başlanğıc hipotezi qəbul etməməyə heç bir əsas yoxdur. Əgər $T_{müš} < t_{sağ\ kr}$ olarsa, başlanğıc hipotez qəbul edilmir.

§8.9. Korrelyasiya analizinin elementləri

Korrelyasiya analizi iki və ya daha çox təsadüfi kəmiyyətlər arasında əlaqəni öyrənən statistik metoddur. Empirik tədqiqatlarda təsadüfi kəmiyyətlər kimi dəyişənlərin qiymətləri, öyrənilən müşahidə obyektlərinin ölçülə bilən xassələri meydana çıxır. Korrelyasiya analizi tibb, iqtisadiyyat, sosiologiya və psixologiya, keyfiyyətin idarə edilməsi, biometrika və digər sahələrdə istifadə olunur. Korrelyasiya analizinin mahiyyəti korrelyasiya əmsallarının hesablanmasıdır. Korrelyasiya əmsalları, bir qayda olaraq, müsbət və mənfi qiymətlər ala bilər. Korrelyasiya əmsalının işarəsi əlaqənin istiqamətini, mütləq dəyəri isə əlaqənin gücünü şərh etməyə imkan verir. Korrelyasiya, iki dəyişənin öyrənilməsi zamanı bir dəyişəndəki vahid dəyişikliyin digər dəyişəndə yaratdığı ekvivalent dəyişikliyi ifadə etməyə imkan verir. Korrelyasiya analizi dəyişənlər arasında əlaqə

formasını müəyyən etməyə imkan vermir. Bunun üçün reqressiya analizindən istifadə olunur.

İndi isə seçimin kovariasiyası və korrelyasiya əmsalı anlayışlarını verək.

Fərz edək ki, X və Y təsadüfi kəmiyyətləri arasında asılılıq öyrənilir. Bu məqsədlə müşahidələr nəticəsində ikiölçülü (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ seçimi əldə edilmişdir. Verilmiş seçimə əsasən X və Y arasındakı əlaqəni təyin etmək üçün seçimin kovariasiya və korrelyasiya əmsalı anlayışları daxil edilir.

Tərif 1. Seçimin kovariasiyası aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y},$$

burada $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ və $\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Tərif 2. Seçimin korrelyasiya əmsalı aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{s_x s_y},$$

burada

$$s_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \text{ və } s_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}.$$

Korrelyasiya əmsalının aşağıdakı xassələri vardır:

1. Korrelyasiya əmsalı üçün $-1 \leq r \leq 1$ doğrudur.

$|r|$ kəmiyyəti 1-ə nə qədər yaxın olarsa, bu deməkdir ki, dəyişənlər arasında əlaqə bir o qədər sıxdır.

2. Əgər $r = \pm 1$ olarsa, X və Y dəyişənləri arasında xətti funksional asılılıq vardır və bu asılılıq reqressiya tənliyi

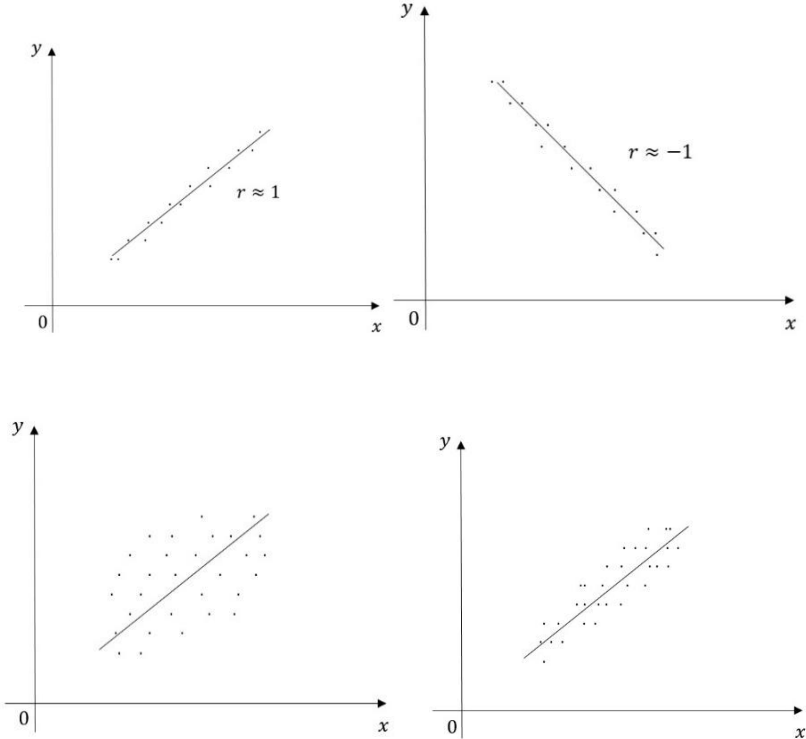
adlanan aşağıdakı tənlik ilə verilir:

$$y = ax + b,$$

belə ki, $r = 1$ olduqda $a > 0$ və $r = -1$ olduqda $a < 0$ olur.

3. $r > 0$ olduqda bu dəyişənlər arasında asılılıq düz mütənasib, $r < 0$ olduqda bu asılılıq tərs mütənasib adlanır. Korrelyasiya əmsali dəyişənlər arasındakı xətti asılılığın sıxlığını müəyyən edir.

$r = 0$ olduqda bu o deməkdir ki, X və Y dəyişənləri arasında xətti asılılıq yoxdur. Qeyd edək ki, xətti asılılığın olmaması ümumiyyətlə asılılığın olmaması demək deyildir.



Qeyd edək ki, seçimin korrelyasiya əmsalı olan r ümumi çoxluğun korrelyasiya əmsalı olan ρ üçün statistik qiymət kimi götürə bilər. Digər tərəfdən r korrelyasiya əmsalı seçimə əsasən hesablandığı üçün ona təsadüfi kəmiyyət kimi baxa bilərik. Fərz edək ki, r korrelyasiya əmsalı hesablanmış və $r \neq 0$ olduğu müəyyən edilmişdir. Təbii olaraq belə sual meydana çıxır ki, bu X və Y dəyişənləri arasında xətti korrelyasiya əlaqəsinin mövcudluğunu göstərir, yoxsa bu (x_i, y_i) dəyişənlərinin təsadüfi seçiminin nəticəsidir?

Bu suala cavab vermək üçün xətti korrelyasiya əlaqəsinin mövcud olmaması haqqında H_0 hipotezi yoxlanılır: $H_0 : \rho = 0$. Bu hipotezin doğru olması halında

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

statistikası sərbəstlik dərəcəsi $k = n - 2$ olan Styudent paylanması malik olur.

Əgər $|t| > t_{1-\alpha; k}$ olarsa, bu halda H_0 hipotezi α mühtəməllik dərəcəsi ilə rədd edilir, başqa sözlə seçimin korrelyasiya əmsalı r sıfırdan əhəmiyyətli fərqlidir, burada $t_{1-\alpha; k}$ Styudentin t -kriteriyasının cədvəlindən tapılır.

Qeyd edək ki, praktik məsələlərin həlli zamanı ümumi çoxluğun korrelyasiya əmsalı üçün interval qiymətləndirilməsinin tapılması da maraq doğurur (bax, məsələn, [11]).

§8.10. Xətti regressiya

Regressiya analizi bir və ya bir neçə asılı olmayan dəyişənin digər asılı dəyişənə təsirinin statistik analiz üsuludur. Məqsədi bir asılı olan və bir neçə asılı olmayan dəyişənlər arasındakı münasibəti araşdırmaqdır. Fərz edək ki, təsadüfi Y asılı dəyişəninin bir (və ya bir neçə) sərbəst dəyişəndən asılılığını öyrənmək tələb olunur. Belə asılılıq X dəyişəninin hər bir qeyd olunmuş qiymətində Y dəyişəninin müəyyən nəzarətdən kənar faktorların təsiri ilə təsadüfi səpələnməsi zamanı meydana çıxır. Bu isə o deməkdir ki, X dəyişəninin hər bir qeyd olunmuş qiymətinə Y təsadüfi kəmiyyətinin müəyyən ehtimal paylanması uyğundur. Fərz edək ki, Y təsadüfi kəmiyyəti X dəyişəninin qiymətlərindən “orta hesabla” xətti asılıdır. Bu isə o deməkdir ki, X dəyişəninin hər bir qiymətində Y təsadüfi kəmiyyətinin şərti riyazi gözləməsi aşağıdakı kimidir:

$$E(Y|X = x) = \beta_0 + \beta_1 x \quad (1)$$

(1) münasibətinin sağ tərəfi Y -in X üzərinə xətti regressiyası adlanır.

Məqsədimiz (1) xətti regressiya funksiyasının naməlum β_0 və β_1 əmsalları (parametrləri) üçün nöqtəvi statistik qiymət tapmaqdır. Bunun üçün müşahidələr əsasında $x_1, x_2, \dots, x_n$ və $y_1, y_2, \dots, y_n$ qiymətləri götürülür. Aydındır ki, bu qiymətlər xətlərlə ölçülmüşdür. Belə asılılığı aşağıdakı bərabərliklər vasitəsilə təyin etmək olar:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (2)$$

burada ε_i təsadüfi kəmiyyətləri ölçmə xətlərini ifadə edir.

Naməlum β_0 və β_1 parametrlərinin axtarılan nöqtəvi

statistik qiymətlərini b_0 və b_1 ilə işarə edək. Bu qiymətləri tapıb (2) reqressiya tənliyində yazdıqdan sonra sərbəst dəyişənin qiymətlərini də nəzərə aldıqdan sonra asılı dəyişənin qiymətlərini $\hat{y}(x_i)$ ilə işarə edək. Qeyd edək ki, reqressiya qiyməti adlanan $\hat{y}(x_i)$ qiymətləri verilmiş x_i üçün y asılı dəyişənin orta qiyməti olur. y_i , $i = \overline{1, n}$ empirik qiymətləri ilə $\hat{y}(x_i)$ reqressiya qiymətləri arasında olan xətalari ε_i ilə işarə edək:

$$y_i - \hat{y}(x_i) = \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Məqsədimiz ε_i xətalalarının kvadratları cəmini, başqa sözlə, yerini dəyişməyən dispersiyasını minimallaşdırmaqdan ibarətdir:

$$s_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}(x_i))^2 \rightarrow \min$$

$\hat{y}(x_i) = b_0 + b_1 x_i$ olduğunu nəzərə alsaq, b_0 və b_1 statistik qiymətlərinin tapılması məsələsi aşağıdakı ikidəyişənli funksiyanın minimallaşdırılması məsələsinə gətirilir:

$$S(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 \rightarrow \min \quad (3)$$

Riyazi analizdən məlumdur ki, $S(b_0, b_1)$ ikidəyişənli funksiyanın minimum qiymətini alması üçün zəruri şərt bu funksiyanın hər iki dəyişənə görə xüsusi törəmələrinin sıfıra bərabər olması və ikinci tərtib xüsusi törəmələrinin müsbət olmasıdır:

$$\frac{\partial S(b_0, b_1)}{\partial b_0} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial S(b_0, b_1)}{\partial b_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i) x_i = 0. \quad (5)$$

Asanlıqla görmək mümkündür ki, ikinci tərtib törəmələr müsbətdir. $S(b_0, b_1)$ ikidəyişənli funksiya olduğu üçün onun minimumunun olması üçün kafi şərt aşağıdakı münasibətin ödənilməsidir:

$$\frac{\partial^2 S(b_0, b_1)}{\partial^2 b_0} \cdot \frac{\partial^2 S(b_0, b_1)}{\partial^2 b_1} - \left(\frac{\partial^2 S(b_0, b_1)}{\partial^2 b_0} \right)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 > 0.$$

Beləliklə, (4) və (5)-dən b_0 və b_1 naməlum parametrlərinin tapılması aşağıdakı cəbri tənliklər sistemini əldə edərik:

$$\begin{cases} b_0 + b_1 \bar{x} = \bar{y} \\ b_0 \bar{x} + b_1 \overline{x^2} = \overline{xy} \end{cases}$$

burada

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; & \overline{x^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2; \\ \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; & \overline{xy} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i x_i. \end{aligned}$$

Birinci tənlikdən

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}.$$

Əgər ikinci tənliyin hər tərəfini n -ə bölüb yuxarıdakı ifadələri və b_0 -in ifadəsini nəzərə alsaq, bu halda b_1 üçün aşağıdakı düsturu əldə edə bilərik:

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}.$$

Beləliklə, naməlum b_0 və b_1 əmsalları tapıldı. Bu üsul ən kiçik kvadratlar üsulu adlanır və Qauss tərəfindən verilmişdir.

Qeyd edək ki, regressiya analizində çox zaman hesab olunur ki, xətlər Qauss-Markov şərtlərini ödəyir:

- 1) bütün müşahidələr üçün təsadüfi xətanın riyazi gözləməsi sıfıra bərabər olmalıdır, yəni sisteməlik xətlər yoxdur:

$$E(\varepsilon_i) = 0.$$

- 2) bütün müşahidələr üçün təsadüfi xətanın nəzəri dispersiyası sabit olmalıdır:

$$D(\varepsilon_i) = \text{const.}$$

- 3) təsadüfi xətanın ixtiyari iki qiyməti arasında kovariasiyası sıfıra bərabər olmalıdır:

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad i \neq j.$$

- 4) təsadüfi xətanın paylanması sərbəst dəyişəndən asılı olmamalıdır.

5) təsadüfi xətlər normal paylanmaya malikdir.

1) – 5) şərtləri ödəniləndə isbat etmək mümkündür ki, regressiya tənliyinin naməlum əmsalları üçün tapılmış statistik qiymətlər meylsiz, tutarlı və effektivdir.

Misal 1. Fərz edək ki, müşahidələr nəticəsində X dəyişəni üçün 2, 5, 6, 9 və Y dəyişəni üçün isə 4, 6, 7, 8 qiymətləri əldə edilmişdir. Bu müşahidələrə əsasən dəyişənlər arasında regressiya tənliyini qurun.

Həlli. Ən uyğun xətti funksiyanı tapmaq üçün reqressiya tənliyi qurulmalıdır:

$$\hat{y}(x) = b_0 + b_1 x.$$

Bu reqressiya tənliyində b_0 və b_1 əmsalları naməlumdur. Məqsədimiz ən kiçik kvadratlar üsulundan istifadə etməklə b_0 və b_1 əmsalları üçün statistik qiymətlər tapmaqdır. Bunun üçün aşağıdakı məlum düsturlardan istifadə edəcəyik:

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}; \quad b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}.$$

Müşahidə edilmiş qiymətlərə əsasən

$$\bar{x} = 5,5; \quad \bar{y} = 6,25; \quad \overline{xy} = 38; \quad \overline{x^2} = 36,5.$$

Beləliklə,

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{38 - 34,375}{36,5 - 30,25} = 0,58.$$

Digər tərəfdən

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 6,25 - 0,58 \cdot 5,5 = 3,06.$$

Beləliklə, axtarılan reqressiya tənliyi aşağıdakı kimidir:

$$\hat{y}(x) = 0,58x + 3,06.$$

8.10.1. Reqressiya əmsalı və onun korrelyasiya əmsalı ilə ifadəsi

Naməlum b_0 parametri üçün tapılmış ifadəni $\hat{y}(x) = b_0 + b_1x$ reqressiya tənliyində nəzərə alsaq, aşağıdakı ifadəni əldə edərik:

$$\hat{y}(x) - \bar{y} = b_1(x - \bar{x}).$$

Reqressiya analizində b_1 əmsalına reqressiya əmsalı deyilir və çox zaman b_{yx} ilə işarə olunur. Bu halda reqressiya tənliyi aşağıdakı kimi olur:

$$\hat{y}(x) - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x}).$$

Beləliklə, b_{yx} reqressiya əmsalı göstərir ki, X dəyişəni bir vahid dəyişdikdə Y dəyişəni orta hesabla neçə vahid

dəyişir.

Qeyd edək ki, eyni düşüncələrlə $\hat{y}(x) = b_0 + b_1x$ reqressiya tənliyinə qoşma reqressiya tənliyi adlanan $\hat{x}(y) = b_0^* + b_1^*y$ reqressiya tənliyindəki b_0^* və b_1^* naməlum əmsalları da tapıla bilər. Göstərmək olar ki, bu halda

$$b_1^* \equiv b_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_y^2}.$$

b_{xy} əmsalı isə X -in Y -ə görə reqressiya əmsalı adlanır.

Qeyd. Seçimin korrelyasiya əmsalı olan r ilə b_{xy} və b_{yx} reqressiya əmsalları bir-biri ilə ifadə edilə bilər:

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = b_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}.$$

Eyni qayda ilə

$$r = b_{yx} \cdot \frac{s_x}{s_y}.$$

Buradan

$$r^2 = b_{xy} \cdot b_{yx}.$$

Beləliklə,

$$r = \pm \sqrt{b_{xy} \cdot b_{yx}}$$

olduğunu əldə edərək.

Sonuncu münasibət onu göstərir ki, seçimin korrelyasiya əmsalı X və Y -in reqressiya əmsallarının işarələri malik olmaqla onların həndəsi ortasına bərabərdir. Belə ki, $b_{xy} > 0$ və $b_{yx} > 0$ olduqda $r > 0$ olur, $b_{xy} < 0$ və $b_{yx} < 0$ olduqda isə $r < 0$ olur.

8.10.2. Determinasiya əmsalı, reqressiya tənliyinin adekvatlığı

Reqressiya tənliyinin statistik verilənlərə adekvatlığını yoxlamaq üçün determinasiya əmsalı anlayışından istifadə edilir. Determinasiya əmsalı R^2 ilə işarə edilir və aşağıdakı kimi hesablanır:

$$R^2 = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}(x_i) - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

Cüt xətti reqressiya modelində determinasiya əmsalı korrelyasiya əmsalının kvadratına bərabər olur: $R^2 = r^2$.

Doğrudan da,

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}(x_i) - \bar{y})^2}{s_y^2} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y} - b_1 \bar{x} + b_1 x_i - \bar{y})^2}{s_y^2} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n b_1^2 (x_i - \bar{x})^2}{s_y^2} = b_1^2 \frac{s_x^2}{s_y^2} = (b_1 \frac{s_x}{s_y})^2 = r^2. \end{aligned}$$

Determinasiya əmsalının xassələri:

1. Determinasiya əmsalı $[0,1]$ parçasında qiymət alır: $0 \leq R^2 \leq 1$.
2. Əgər R^2 determinasiya əmsalı 1-ə yaxın olarsa, bu halda reqressiya modelinin adekvatlığı yüksək hesab olunur.
3. Əgər $R^2 = 1$ olarsa, (x_i, y_i) cütləri reqressiya xəttinin üzərindədir. Yəni x və y dəyişənləri arasındakı asılılıq funksionaldır.
4. Əgər $R^2 = 0$ olarsa, onda modelə təsir edən elə xarici faktorlar var ki, qurulma zamanı onlar nəzərə alınmayıb.

Bu zaman reqressiya tənliyinin qrafiki absis oxuna paralel yerləşir.

Qeyd edək ki, müşahidələrin sayının az olduqda determinasiya əmsalı böyük qiymətlərə malik olur. Bunu aradan qaldırmaq üçün dəqiqləşdirilmiş determinasiya əmsalından istifadə edilir:

$$r^{*2} = 1 - \frac{n-1}{n-2} (1 - r^2),$$

burada r seçimin korrelyasiya əmsalıdır.

Cədvəl 1. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ Qauss funksiyasının qiymətlər cədvəli

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	x -in yüzdəlik hissələri									
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3721	3605	3588	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1827	1804	1781	1759	1736
1,3	1714	1692	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1540	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1181	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0941	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
	x -in onluq hissələri									
2, 3,	0540 0044	0440 0033	0355 0024	0283 0017	0224 0012	0175 0009	0136 0006	0104 0004	0079 0030	0060 0020

Cədvəl 2. $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ Laplas funksiyasının qiymətləri

x	x -in yüzdə bir hissələri				
	0	1	2	3	4
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331
0,4	0,0554	0,0591	0,0628	0,0664	0,0700
0,5	0,0915	0,0950	0,0985	0,2019	0,2054
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,0357	0,0389
0,7	0,0580	0,0611	0,0642	0,0673	0,0703
0,8	0,0881	0,0910	0,0939	0,0967	0,0995
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264
1,0	0,0413	0,0437	0,0461	0,0485	0,0508
1,1	0,0643	0,0665	0,0686	0,0708	0,0729
1,2	0,0849	0,0869	0,0888	0,0907	0,0925
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099
1,4	0,0192	0,0207	0,0222	0,0236	0,0251
1,5	0,0332	0,0345	0,0357	0,0370	0,0382
1,6	0,0452	0,0463	0,0474	0,0484	0,0495
1,7	0,0554	0,0564	0,0573	0,0582	0,0591
1,8	0,0641	0,0649	0,0656	0,0664	0,0671
1,9	0,0713	0,0719	0,0726	0,0732	0,0738
2,0	0,0772	0,0778	0,0783	0,0788	0,0793
2,1	0,0821	0,0826	0,0830	0,0834	0,0838
2,2	0,0861	0,0864	0,0868	0,0871	0,0875
2,3	0,0893	0,0896	0,0898	0,0901	0,0904
2,4	0,0918	0,0920	0,0922	0,0925	0,0927
2,5	0,0938	0,0940	0,0941	0,0943	0,0945
2,6	0,0953	0,0955	0,0956	0,0957	0,0959
2,7	0,0965	0,0966	0,0967	0,0968	0,0969
2,8	0,0974	0,0975	0,0976	0,0977	0,0977
2,9	0,0981	0,0982	0,0982	0,0983	0,0984
3,0	0,0987	0,0987	0,0987	0,0988	0,0988

Cədvəl 3. u_α funksiyasının qiymətləri $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

bərabərliyindən ilə təyin olunur

α	0,001	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025
u_α	3,0902	2,5758	2,3263	2,1701	2,0537	1,9600

x -in yüzdə bir hissələri					
5	6	7	8	9	x
0,0200	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359	0,0
0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753	0,1
0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141	0,2
0,1368	0,0406	0,0443	0,0480	0,0517	0,3
0,0736	0,0772	0,0808	0,0844	0,0879	0,4
0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224	0,5
0,0422	0,0454	0,0486	0,0517	0,0549	0,6
0,0734	0,0764	0,0794	0,0823	0,0852	0,7
0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133	0,8
0,0289	0,0315	0,0340	0,0365	0,0389	0,9
0,0581	0,0554	0,0577	0,0599	0,0621	1,0
0,0749	0,0770	0,0790	0,0810	0,0830	1,1
0,0944	0,0962	0,0980	0,0997	0,4015	1,2
0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,0177	1,3
0,0265	0,0279	0,0292	0,0306	0,0319	1,4
0,0394	0,0406	0,0418	0,0429	0,0441	1,5
0,0505	0,0515	0,0525	0,0535	0,0545	1,6
0,0599	0,0608	0,0616	0,0625	0,0633	1,7
0,0678	0,0686	0,0693	0,0699	0,0706	1,8
0,0744	0,0750	0,0756	0,0761	0,0767	1,9
0,0798	0,0803	0,0808	0,0812	0,0817	2,0
0,0842	0,0846	0,0850	0,0854	0,0857	2,1
0,0878	0,0881	0,0884	0,0887	0,0890	2,2
0,0906	0,0909	0,0911	0,0913	0,0916	2,3
0,0929	0,0931	0,0932	0,0934	0,0936	2,4
0,0946	0,0948	0,0949	0,0951	0,0952	2,5
0,0960	0,0961	0,0962	0,0963	0,0964	2,6
0,0970	0,0971	0,0972	0,0973	0,0974	2,7
0,0978	0,0979	0,0979	0,0980	0,0981	2,8
0,0984	0,0985	0,0985	0,0985	0,0986	2,9
0,0989	0,0989	0,0989	0,0990	0,0990	3,0

Ədəbiyyat siyahısı

1. Allahverdiyev C.E., Əhmədova H.M., Hacıyev A.H. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika ensiklopediyası. Bakı, Elm, 2010, 1192 s.
2. Akdeniz F. Olasılıq ve İstatistik.15-ci baskı, Adana Nobel Akademik yayınçılık, 2010, 591 s.
3. Боровков А.А. Теория вероятностей. (3-изд.). Москва, Наука, 2003, 427 с.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей (7-изд.). Москва, Наука, 2003, 318 с.
5. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Киев: 1979, 408 с.
6. Əhmədova H.M. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Dərs vəsaiti, Bakı, 2002, 528 s.
7. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. Москва, 1989, 319 с.
8. Khanliyev T.A., Ünver İ., Küçük Z., Kesemen T. Olasılık kuramında çözümlü problemler. Ankara, Nobel Akademik yayınçılık, 2017, 378 s.
9. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. 3-е изд. Москва, ФАЗИС, 1998, 129 с.
10. Крамер Г. Математические методы статистики. Москва, Мир, 1975. с.
11. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. Москва, Изд. ЮНИТИ, 2004, 573 с.
12. Лагутин М.Б. Наглядная математическая статистика. Москва, БИНОМ, 2015, 462 с.
13. Лоэв М. Теория вероятностей. Москва, Изд. иностр. литер., 1962, 720 с.
14. Малыхин В.И. Финансовая математика. Москва, Изд. Юнити, 2003, 237 с.
15. Майстров Л.Е. Теория вероятностей: исторический очерк.

- Москва, Наука, 1967, 319 с.
16. Мостеллер Ф. 50 занимательных вероятностных задач. Москва, Наука, 2-е издание, 1975, 111 с.
 17. Prasanna Sahoo. Probability theory and mathematical statistics. University of Louisville, Louisville, USA, 2013, 675 p.
 18. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей. Москва, 1986, 326 с.
 19. Ross S. A First Course in Probability. New York: Macmillan, 1988, 530 p.
 20. Rəhimov F.H. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Dərs vəsaiti, Bakı, 2012, 275 s.
 21. Сенатов В.В. Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения. Москва, URSS. 2009, 352 с.
 22. Стоянов Й. Контрпримеры в теории вероятностей, Москва, Изд. МЦННО, 2014, 288 с.
 23. Székely G. J. Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics, Reidel., 1986, 240 p.
 24. Süleymanov H.M. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı, Çaşıoğlu, 1999, 360 s.
 25. Тарасов Л.В. Закономерности окружающего мира. Случайность, необходимость, вероятность. Москва, Физматлит, 2004, 384 с.
 26. Фалин Г.И. Математический анализ рисков в страховании. Москва, 1994, 130 с.
 27. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Москва, Мир, т.1, т.2, 1984, 1410 с.
 28. Ширяев А.Н. Вероятность. Москва, Наука, 1988, 569 с.
 29. Ширяев А.Н. Задачи по теории вероятностей. Москва, Наука, Изд. МЦНМО, 2006, 416 с.
 30. Şahbazov Ə.Ə. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Dərs vəsaiti, Bakı, 1973, 578 s.

Predmet göstəricisi

A

Aprior ehtimallar 130

Aposterior ehtimallar 130

Arksinus

-paylanması 234-236

-qanunu 150, 235, 237

Assimetriya əmsalı 323, 324

Asılı olmayan

-hadisələr 100-113

-təsadüfi kəmiyyətlər 257-259

Aktuar riyaziyyatı 441

B

Banax məsələsi 153

Bernulli

- sxemi 143, 145, 146

- sınağı 143, 158, 159

- teoremi 173, 411

-paylanması 202, 423

Bertran paradoksu 91

Beta paylanması 233, 234

Bərabərsizlik

-Çebışev 33, 409, 413, 417, 422

-İensen 342, 343

-Koşi-Bunyakovski 344

-Lyapunov 343, 344

-Markov 338, 339

-Rao-Kramer 465

Boze-Eyşteyn statistikası 41

Borel

-çoxluğu 76, 77

-teoremi 423

Binomial paylanma 145, 202, 382

Bric məsələsi 49

Byuffon məsələsi 91

Borel-Kantelli lemması 400, 401

C

Cırlaşmış paylanma 202

Ç

Çebışev

-məsələsi 70, 71

-bərabərsizliyi 339-342, 349

- teoremi 409-413, 415

Çevirmə düsturu 387, 388

D

Dalamber səhvi 66, 67

Diskret təsadüfi kəmiyyət
194, 196, 197

Diskret paylanma 196, 245, 247, 249

Dispersiya 278, 292-303, 306, 309, 313, 315, 316 329, 337, 340, 343, 345, 347

Diversifikasiya effekti 346

Doğruyaoxşarlıq funksiyası
470-474

Determinasiya əmsalı 506, 507

Doğuran funksiya 181

E

Effektivlik 465, 466

Ehtimal fəzası 75, 191, 193, 194

Ekvivalent hadisələr 19

Eksess 324, 461

Entropiya 137, 140

Erqodik

-paylanma 366

-teoremi 367

Erlanq paylanması 219
Empirik paylanma funksiyası
453-455

Etibarlılıq intervalı 476-478

Ə

Əks hadisə 22

Ən kiçik kvadratlar üsulu 503,
504

F

Fermi-Dirak statistikası 41

Fişer

-paylanması 474, 476

- informasiya miqdarı 465

G

Gücləndirilmiş böyük ədədlər
qanunu 420-426

X

Xinçin teoremi 415, 431

Xətti regressiya 500, 506

Xarakteristik funksiya 376,
389, 391

χ^2 paylanması 474, 475, 486

χ^2 uzlaşma kriteriyası 484

H

Hadisələr cəbri 72

Həndəsi

-paylanma 205, 206, 264

-ehtimal 86-89

Hiperhəndəsi paylanma 207,
208

Hipotezlər 122, 480-483

İ

İensen bərabərsizliyi 342,
343

K

Kantelli teoremi 421-423

Kantor funksiyası 246, 247
Keçmişin unudulması xassəsi
205, 206

Kəsilməzlik teoremi 388, 417

Kramer teoremi 385

Kriteriyanın gücü 481

Kritik oblast 481

Kolmoqorov aksiomları 75,
78

Kolmoqorov-Çepmen tənliyi
366

Koşi paylanması 230, 391

Kompozisiya düsturu 268

Korrelyasiya əmsalı 333-338

Koşi-Bunyakovski

bərabərsizliyi 344

Kolmoqorov teoremi 418

Kvadratik orta meyl 297, 298

Q

Qaliley məsələsi 66

Qamma paylanma 219, 220

Qauss funksiyası 159, 508

Qauss əyrisi 222, 223

Qeyri-korrelyar təsadüfi

kəmiyyətlər 332

Qlivenko teorem 455

q -tərtib kvantil 321

L

Laplas

- paylanması 217

- funksiyası 161, 226

Lebeq teoremi 247

Levi-Xinçin 430, 431

Lindeberq 433, 435, 437, 438

Loqarifmik normal paylanma
228-230

Lyapunov bərabərsizliyi 343

Lyapunov teoremi 435

M

Maksvel-Boltsman statistikas
40, 41

Maksimal ehtimal 155-157

Maksvel paylanması 227, 228

Maliyyə riyaziyyatı 345

Markov

-zənciri 362-366, 368

-xassəsi 205, 363

-bərabərsizliyi 338, 339

-teoremi 413, 415

Martinqal asılılığı 371

Median 318, 457-459

Meylsizlik 463

Məhdud yığılma teoremi 403

Mənfi binomial paylanma 206

Moda 316-318, 321, 323

Momentlər problemi 389, 390

Monoton yığılma teoremi 403

Muavr-Laplasın lokal limit
teoremi 158

Muavr-Laplasın integral limit
teoremi 159, 160, 428

N

Normal paylanma 222-225,
227-231

Normallaşmış təsadüfi

kəmiyyət 296, 325

Nisbi tezliklərin dayanıqlığı
xassəsi 24, 25, 178

P

Paylanma

-Arksinus 234-236

-Bernulli 202, 423

-Beta 233, 234

-Binomial 145, 202

-Cırlaşmış 202

-Diskret 196, 245, 247, 249

-Erqodik 366

-Erlanq 219

-Fişer 474, 476

-funksiyası 188

-Həndəsi 205, 206

-Hiperhəndəsi 207, 208

-Koşi 230-232

-Qamma 219, 220

-qanunu 196, 382

-Laplas 217

-Loqarifmik normal 228-230

-Maksvel 227, 228

-müntəzəm 212, 245, 261

-normal 222, 273, 275, 276

-Paskal 206

-Pareto 232

-Puasson 169, 204

-Reley 222

-Styudent 476

-Veybul 220-222

- χ^2 474

Paylanmanın sıxlıq funksiyası
209, 490

Paradoks

-böyük ədədlər qanunu 179,
181

-Şevalye de Mere 117, 118

-Sankt Peterburq 291, 292

Pirson kriteriyası 484

Puasson

-teoremi 168, 412

Puankare teoremi 81

Polinomial sxem 183, 185

R

Raykov teoremi 386

Rao-Kramer bərabərsizliyi
465

Reley paylanması 222

Riyazi gözləmə 278, 298, 300,
415, 417, 418, 421
Regressiya tənliyi 497, 501-
507

S

Sankt Peterburq lotereyası
291, 292
Statistik ehtimal 25
Sinqulyar paylanma 245-247
Stoxastik matris 364
Styudent paylanması 476
 σ - cəbr 72-74, 187, 192, 193,
198, 199

Ş

Şəvalye de Mere

-məsələsi 63-66
-paradoksu 117-119

Şerti paylanma

-qanunu 352
-funksiyası 354

Şerti

-ehtimal 92-100
-paylanma 352
-sıxlıq funksiyası 355
-riyazi gözləmə 357, 358, 360

T

Tartaliya məsələsi 62, 63

Teorem

-Bernulli 173, 411
-Borel 423
-Boxner-Xinçin 380
-Çebışev 409
-Erqodik 367
-Xinçin 415
-Kantelli 421
-Kolmoqorov 418
-Kramer 385
-Qlivenko 455

-Lindeberq 433
-Lebeq 247
-Lyapunov 435
-Levi-Xinçin 430
-Marsinkeviç 381
-Məhdud yığılma 403
-Monoton yığılma 403
-Poya 380
-Puasson 168, 412
-Puankare 81
-Raykov 386
Təsadüfi kəmiyyət 186, 430
Təkrar loqarifm qanunu 427,
428
Tutarlılıq 464

U

Uyuşmayan hadisələr 20

Ü

Üstlü paylanma 215-219
Üç siqma qaydası 225, 340

V

Veybul paylanması 220-222,
265
Variyasiya əmsalı 297, 298

Y

Yığılma

-sanki yəqin 393, 394, 408
-zəif 395, 396
-paylanmaya görə 395
-ehtimala görə 393, 409
- L_r mənadı 395-397, 404
Yeganəlik teoremi 385, 386,
388, 389

Z

Zəif yığılma 395, 396