С. В. БАХВАЛОВ, П. С. МОДЕНОВ,
А. С. ПАРХОМЕНКО

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебного пособия
для государственных университетов
и педагогических институтов*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1964

517.3
Б 30
УДК 516$^{1}/_{4}$ (076.1)

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Сергей Владимирович Бахвалов,
Петр Сергеевич Моденов,
Алексей Серапионович Пархоменко

Сборник задач по аналитической геометрии

М., 1964 г., 440 стр. с илл.

Редактор *И. Е. Морозова*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр*   Корректор *О. А. Бутусова*

Сдано в набор 28/XII 1963 г. Подписано к печати 6/III 1964 г. Бумага $84\times108/_{32}$. Физ. печ. л. 13,75. Условн. печ. л. 22,55. Уч.-изд. л. 25,97. Тираж 75 000 экз. Т-00998. Цена книги 88 коп. Заказ № 1201.

Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Государственного комитета
Совета Министров СССР по печати.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

ПРЕДИСЛОВИЕ

В третьем издании часть задач заменена новыми. В ряде случаев задачи даны в более удобной формулировке. Исправлены замеченные опечатки второго издания. Задачник делится на две части: аналитическая геометрия на плоскости (сюда же в качестве первой главы входит и аналитическая геометрия на прямой) и аналитическая геометрия в пространстве. Переходной главой от геометрии на плоскости к геометрии в пространстве является глава X (векторная алгебра), где в большинстве параграфов помещены как задачи из геометрии на плоскости, так и задачи из геометрии в пространстве. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Ответы к некоторым задачам снабжены указаниями.

Чтобы не стеснять преподавателя порядком расположения материала в задачнике, авторы стремились по возможности избегать ссылок на предыдущие задачи.

В большинстве задач, особенно в начале книги, даются указания на то, в какой системе координат (прямоугольной или аффинной) следует решать задачу. Это сделано для того, чтобы приучить студентов с самого же начала отличать аффинные задачи от метрических. Однако, если преподаватель находит нужным пользоваться лишь прямоугольной системой, эти указания на систему координат можно игнорировать.

При составлении сборника использованы следующие задачники и учебные курсы:

Андреев К. А., Сборник упражнений по аналитической геометрии, издание 2-е, М., 1904.

Бобровников Н. П., О совместных инвариантах целых рациональных функций от двух переменных (кандидатская диссертация).

Бюшгенс С. С., Аналитическая геометрия, ч. I и II, издание 4-е, Гостехиздат, 1946.

Бюшгенс С. С., Дифференциальная геометрия, Гостехиздат, 1940.

Гюнтер Н. М. и Кузьмин Р. О., Сборник задач по высшей математике, т. I, издание 11-е, Гостехиздат, 1947.

Дубнов Я. С., Основы векторного исчисления, ч. I, издание 4-е, Гостехиздат, 1950.

Цубербиллер О. Н., Сборник задач и упражнений по аналитической геометрии, издание 26-е, Физматгиз, 1963.

Шифф В. И., Сборник упражнений и задач по аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, издание 3-е, СПб.—М., 1910.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПРЯМОЙ И НА ПЛОСКОСТИ

ГЛАВА I
ГЕОМЕТРИЯ НА ПРЯМОЙ

Декартовой осью координат называется прямая, на которой фиксированы две различные точки: точка O (**начало координат**) и точка E (**единичная точка**). Положительным направлением декартовой оси координат называется направление луча, выходящего из точки O и содержащего точку E. Противоположное направление называется отрицательным направлением оси координат. Отрезок OE называется масштабным или единичным отрезком (рис. 1). Координатой точки M называется число x, определяемое равенством $x=\pm\frac{OM}{OE}$, причем перед дробью берется знак плюс, когда точки M и E лежат на декартовой оси по одну сторону от точки O, и знак минус, когда точки M и E расположены по разные стороны относительно точки O; $x=0$, если точка M совпадает с точкой O.

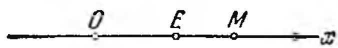

Рис. 1.

Таким образом, абсолютная величина координаты x точки M равна отношению отрезка OM к масштабному отрезку OE. Точку M, имеющую координату x, мы будем обозначать так: $M(x)$ или (x).

Направленным отрезком или **вектором** $\overrightarrow{M_1M_2}$ называется отрезок, концы которого взяты в определенном порядке. Первая точка (M_1) называется **началом вектора**, вторая точка (M_2)—его **концом**.

Вектор обозначают также одной буквой ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ...).

Координатой вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, лежащего на декартовой оси координат, называется число X, определяемое равенством $X=\pm\frac{M_1M_2}{OE}$, причем перед дробью берется знак плюс, если векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{OE}$ одинаково направлены, и знак минус, если эти векторы имеют противоположные направления. Таким образом, абсолютная величина координаты X вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ равна отношению отрезка M_1M_2 к масштабному отрезку OE.

Координата X вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ определяется по формуле

$$X=x_2-x_1, \tag{1}$$

где x_1—координата начала (M_1) вектора, x_2—координата конца (M_2).

Длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ или расстояние между двумя точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ определяется по формуле

$$d=|x_2-x_1|. \tag{2}$$

Простым отношением (ABC) трех точек A, B, C, лежащих на одной прямой и взятых в определенном порядке (A, B, C), называется число λ, равное

$$\lambda=\pm\frac{AC}{CB},$$

причем перед дробью берется знак плюс, если точка C лежит между A и B, и знак минус — в противном случае. Таким образом, абсолютная величина простого отношения (ABC) равна отношению отрезка AC к отрезку CB.

Простое отношение трех точек $A(x_1)$, $B(x_2)$, $C(x_3)$ определяется по формуле

$$\lambda=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_3}. \tag{3}$$

Если простое отношение (ABC) равно λ (точки A и B различны), то говорят также: «точка C делит отрезок AB в отношении λ».

Каково бы ни было число $\lambda\neq-1$, всегда существует и притом только одна точка C, которая делит отрезок, ограниченный двумя различными точками A и B, в отношении λ; если точки A и B имеют координаты, соответственно равные x_1 и x_2, то координата x делящей точки вычисляется по формуле

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}. \tag{4}$$

Если точки A и B различны, а $\lambda=-1$, то не существует точки C, делящей отрезок AB в отношении λ.

Сложным, или ангармоническим, отношением четырех точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой (точки A и D различны, точки B и C различны), называется число

$$\omega=(ABCD)=(ABC):(ABD).$$

Ангармоническое отношение $(ABCD)$ четырех точек $A(x_1)$, $B(x_2)$, $C(x_3)$, $D(x_4)$, лежащих на декартовой оси координат, вычисляется по формуле

$$\omega=(ABCD)=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_3}:\frac{x_4-x_1}{x_2-x_4}. \tag{5}$$

Если $(ABCD)=-1$, то говорят, что точки C и D гармонически разделяются точками A и B.

Говорят, что одна из декартовых систем координат получается переносом другой декартовой системы координат на той же прямой, если эти системы имеют одинаковые положительные направления оси и равные масштабные отрезки $OE=O'E'$. Если x и x' — координаты одной и той же точки M в двух указанных системах, то

$$x = x' + a, \tag{6}$$

или

$$x' = x - a, \tag{7}$$

где a есть координата «нового начала» в «старой» системе (т. е. в системе с началом координат O и единичной точкой E).

Общим преобразованием декартовой системы координат на прямой называется переход к новому началу координат O' и новой единичной точке E'. Связь между координатами x и x' одной и той же точки M, лежащей на оси координат, определяется при этом линейным соотношением

$$x' = \alpha x + \beta, \tag{8}$$

где $\alpha \neq 0$.

Если в соотношении (8) x и x' считать координатами двух различных (вообще говоря) точек M и M' в одной и той же системе, то этим соотношением устанавливается преобразование множества всех точек прямой, в котором точке $M(x)$ ставится в соответствие точка $M'(\alpha x + \beta)$. Это преобразование называется аффинным. При аффинном преобразовании прямой сохраняется простое отношение трех любых точек. Преобразования мы будем иногда обозначать одной буквой: A, B, C, ...

Если преобразование B ставит в соответствие точке $M(x)$ точку $M'(x')$, а преобразование A точке $M'(x')$ ставит в соответствие точку $M''(x'')$, то произведением AB преобразований A и B называется преобразование, которое точке $M(x)$ ставит в соответствие точку $M''(x'')$. Преобразование A^{-1}, которое точке $M'(x')$ ставит в соответствие точку $M(x)$, называется преобразованием, обратным преобразованию A.

Пусть нам дано конечное или бесконечное множество $\mathfrak{M}$ преобразований A, B, C, ... Множество $\mathfrak{M}$ называется группой преобразований, если оно: 1) вместе с каждым преобразованием A содержит обратное преобразование A^{-1} и 2) вместе с каждыми двумя преобразованиями A и B содержит и их произведение AB.

Множество всех аффинных преобразований прямой образует группу аффинных преобразований этой прямой.

§ 1. Координаты точек и векторов на прямой

1. Построить точки $A(2)$, $B(-3)$, $C(4)$, $D(\sqrt{2})$, $F(\sqrt{3})$, $G(-\sqrt{29})$, принимая масштабный отрезок равным 1 *см*.

2. Определить координату вектора $\overrightarrow{AB}$ в каждом из следующих случаев:

1) $A(2)$, $B(5)$; 3) $A(-5)$, $B(-4)$;
2) $A(-2)$, $B(4)$; 4) $A(2)$, $B(-7)$.

Проверить результаты построением.

3. Определить расстояние d между точками A и B в каждом из следующих случаев:

1) $A(1)$, $B(-7)$; 2) $A(3)$, $B(-2)$; 3) $A(-6)$, $B(-10)$.

Проверить результаты построением.

4. Найти простое отношение (ABC) в каждом из следующих случаев:

1) $A(2)$, $B(7)$, $C(5)$; 4) $A(3)$, $B(2)$, $C(3)$;
2) $A(-3)$, $B(-3)$, $C(6)$; 5) $A(1)$, $B(1)$, $C(1)$.
3) $A(-1)$, $B(0)$, $C(3)$;

5. Найти все шесть значений простого отношения, составленного из трех точек $A(1)$, $B(3)$, $C(-2)$.

6. Дано: $(ABC)=\lambda$. Найти (ACB), (BAC), (BCA), (CAB), (CBA).

7. Найти координату x точки M, делящей отрезок, ограниченный точками $M_1(3)$ и $M_2(6)$, в отношении:

1) $\lambda=3$; 2) $\lambda=\frac{2}{3}$; 3) $\lambda=-\frac{1}{2}$; 4) $\lambda=0$; 5) $\lambda=1$.

8. Найти координату x середины отрезка M_1M_2 в каждом из следующих случаев:

1) $M_1(3)$, $M_2(9)$; 2) $M_1(-5)$, $M_2(2)$; 3) $M_1(-6)$, $M_2(6)$.

9. Доказать, что если точки O, E и M имеют соответственно координаты 0, 1 и x, то $x=-(MEO)$.

10. Доказать тождество $X_{AB}X_{CD}+X_{AC}X_{DB}+X_{AD}X_{BC}=0$, где A, B, C, D — произвольно расположенные точки на декартовой оси координат, X_{AB} — координата вектора $\overrightarrow{AB}$ и т. д.

11*. Даны $(ABP)=\lambda$, $(ABQ)=\mu$. Найти (PQA) и (PQB).

12*. Даны $(ABP)=\lambda$, $(ABQ)=\mu$, $(ABR)=\nu$. Найти (PRQ).

13*. Даны $(ABP)=\lambda$, $(ABQ)=\mu$, R — середина отрезка PQ. Найти (ABR).

14. В точках с координатами 1, 2, 3, ..., 10 соответственно помещены массы 1, 2, 3, ..., 10. Найти координату центра тяжести системы.

15. Найти ангармоническое отношение четырех точек A, B, C, D в каждом из следующих случаев:

1) $A(1)$, $B(-3)$, $C(1)$, $D(4)$;
2) $A(2)$, $B(-6)$, $C(0)$, $D(5)$;

3) $A(4)$, $B(0)$, $C(-3)$, $D(4)$;
4) $A(1)$, $B(1)$, $C(3)$, $D(2)$;
5) $A(-5)$, $B(-2)$, $C(-2)$, $D(6)$;
6) $A(-1)$, $B(6)$, $C(-4)$, $D(-4)$.

16*. Дано $(ABCD)=\omega$. Предполагая точки A, B, C, D попарно различными, найти все 24 значения ангармонического отношения из данных четырех точек, соответствующих всем перестановкам данных точек. Рассмотреть случаи: а) $\omega=-\operatorname{tg}^2\alpha$; б) $\omega=-1$.

17. Даны точки $A(1)$, $B(2)$, $C(4)$ и $(ABCD)=-1$. Найти координату точки D.

18*. Доказать, что если пара точек C, D гармонически разделяет пару A, B, то $\frac{2}{X_{AB}}=\frac{1}{X_{AC}}+\frac{1}{X_{AD}}$.

19*. Доказать, что если отрезок AB делится точкой O пополам, а точками C и D гармонически, то $OA^2=OC\cdot OD$.

20*. Дана гармоническая четверка точек A_1, A_2, A_3, A_4. Доказать, что середина отрезка A_3A_4 является внешней точкой по отношению к отрезку A_1A_2.

21. Даны точки $A(-1)$, $B(3)$ и $C(7)$. Найти новые координаты этих точек, если начало координат перенесено в точку $O'(4)$.

22. Даны координаты 3 и 7 точки A в двух декартовых системах координат, полученных одна из другой переносом начала. Найти старую координату нового начала координат и новую координату старого начала координат.

23. В какую точку надо перенести начало координат, чтобы координата точки $A(-3)$ стала равной -6?

24. Начало координат перенесено в единичную точку. Какова будет новая координата старого начала?

25. Найти старую координату новой единичной точки, если начало координат перенесено в точку $O'(4)$.

26. Записать преобразование декартовой системы координат, если за новое начало координат и новую единичную точку принимаются точки $O'(-2)$ и $E'(4)$.

27. Найти новые координаты точек $A(3)$, $B(-2)$, $C(7)$, $O(0)$ и $E(1)$, если за новое начало координат и новую единичную точку принимаются точки $O'(-2)$ и $E'(5)$.

28. Преобразование декартовой системы координат определяется соотношением $x'=-2x+3$. Найти старые координаты нового начала координат O' и новой единичной точки E'.

29. В чем заключается преобразование декартовой системы координат на прямой, если сумма новой координаты старого начала и старой координаты нового начала равна нулю.

30. Записать преобразование декартовой системы координат на прямой, при котором начало координат сохраняется, а за новую единичную точку берется точка $E'(a)$ $(a \neq 0)$.

31. Найти старые координаты нового начала координат и новой единичной точки, если преобразование декартовой системы координат выражается так: $x' = ax$ $(a \neq 0)$.

32. Преобразование декартовой системы координат на прямой задано соотношением $x' = ax + b (a \neq 0)$. Найти старые координаты нового начала координат и новой единичной точки, а также новые координаты старого начала координат и старой единичной точки.

§ 2. Аффинные преобразования на прямой

33. Образует ли группу множество преобразований оси координат, определяемое соотношением $x' = -x + a$, где a принимает все действительные значения. Каков геометрический смысл преобразования $x' = -x + a$?

34. Образует ли группу множество преобразований прямой, определяемое соотношением: 1) $x' = x + a$? 2) $x' = ax$? В чем геометрический смысл каждого из указанных преобразований (в каждом случае a принимает все действительные значения; во втором случае значение $a = 0$ исключается)?

35. Найти преобразование, обратное преобразованию $x' = ax + b$, $a \neq 0$.

36. Даны преобразования A и B, определяемые соответственно соотношениями $x' = 2x + 3$, $x' = -x + 8$. Найти преобразования AB, BA, $A^{-1}B$, $B^{-1}A$, A^2B.

37. Найти неподвижную точку аффинного преобразования $x' = ax + b$.

38. Как запишется аффинное преобразование $x' = ax + b$, если произвести преобразование декартовой системы координат на прямой, принимая за новое начало координат и новую единичную точку: $O^*(\alpha)$ и $E^*(\beta)$ $(\alpha \neq \beta)$?

39. Аффинное преобразование, при котором хотя бы одна точка остается неподвижной, называется центроаффинным. Образует ли группу множество всех центроаффинных преобразований прямой?

40. Образует ли группу множество аффинных преобразований $x' = ax + b$, если:

1) a принимает все действительные положительные значения, b принимает все действительные значения?

2) a принимает все действительные отрицательные значения, b принимает все действительные значения?

3) a и b принимают все рациональные значения ($a \neq 0$)?

41. Образует ли группу множество центроаффинных преобразований $x' = 2^k x$, где

1) k принимает все целые значения?

2) k принимает все целые положительные значения?

3) k принимает все целые отрицательные значения?

42. Доказать, что необходимым и достаточным условием сохранения ориентации (направления) отрезка в аффинном преобразовании $x' = ax + b$, $a \neq 0$, является условие $a > 0$.

43. Найти аффинное преобразование, при котором точки $A(2)$ и $B(4)$ переходят в точки $A'(-2)$ и $B'(3)$.

44. Найти аффинное преобразование, при котором две различные точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$ переходят в две различные точки $A'(x_1')$ и $B'(x_2')$.

45. Найти все аффинные преобразования прямой, при которых:

1) сохраняются длина и направление вектора;

2) сохраняется длина произвольного отрезка.

ГЛАВА II

КООРДИНАТЫ ТОЧЕК И ВЕКТОРОВ НА ПЛОСКОСТИ

Общей декартовой, или аффинной, системой координат на плоскости называется упорядоченная пара двух пересекающихся осей координат Ox и Oy, причем началом координат для каждой из осей служит их общая точка O (рис. 2). Эта точка O называется началом координат. Первая из осей координат называется осью абсцисс (или осью Ox), вторая — осью ординат (или осью Oy). Векторы $\overrightarrow{OE_1}=e_1$ и $\overrightarrow{OE_2}=e_2$ (E_1 и E_2 — единичные точки соответственно оси Ox и Oy) называются масштабными векторами осей координат.

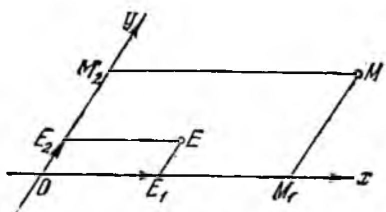

Рис. 2.

Проведем через произвольную точку M прямые, параллельные осям координат Oy и Ox; пусть M_1 и M_2 — точки пересечения указанных прямых соответственно с осями Ox и Oy, x — координата точки M_1 на оси Ox с началом координат O и единичной точкой E_1, y — координата точки M_2 на оси Oy с началом координат O и единичной точкой E_2; тогда числа x и y называются координатами точки M; число x называется абсциссой точки M, число y — ординатой точки M. Чтобы указать, что точка M имеет координаты x и y, пишут $M(x, y)$. Точка $E(1, 1)$ называется единичной точкой плоскости.

Общая декартова система координат называется прямоугольной, если угол между осями координат прямой, а масштабные векторы осей имеют одинаковую длину. Если масштабные векторы осей имеют одинаковую длину, а угол между осями не равен $\frac{\pi}{2}$, то система называется косоугольной.

Необходимое и достаточное условие того, что три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ лежат на одной прямой, может быть записано в одном из следующих видов:

$$\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}=0 \qquad (1)$$

или

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Простое отношение $\lambda = (ABC)$ трех точек $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, лежащих на одной прямой (точки B и C различны), равно каждой из следующих дробей:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3}, \qquad \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3} \tag{3}$$

(если $x_2 - x_3 \neq 0$ и $y_2 - y_3 \neq 0$).

Координаты x и y точки C, делящей отрезок, ограниченный двумя различными точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, в отношении $\lambda \neq -1$, определяются соотношениями:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{4}$$

Координаты середины отрезка AB с концами $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ равны полусуммам соответствующих координат его концов:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{5}$$

Формулы (1)—(5) верны в общей декартовой системе координат.

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ определяются следующим образом: проведем через его начало A и конец B прямые, параллельные

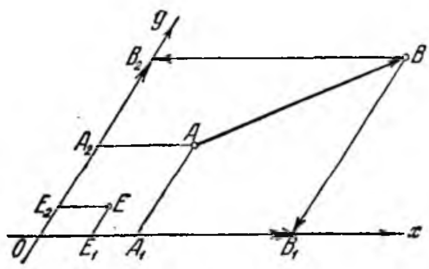

Рис. 3.

оси Oy, до встречи с осью Ox в точках A_1 и B_1 и прямые, параллельные оси Ox, до встречи с осью Oy в точках A_2 и B_2; координаты X, Y векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$ на осях Ox, Oy называются координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ относительно общей декартовой системы координат Oxy (рис. 3).

Если x_1, y_1 — координаты точки A и x_2, y_2 — координаты точки B, то

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1. \tag{6}$$

Если X, Y — координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, то пишут:

$$\overrightarrow{AB} = \{X, Y\}.$$

Общее преобразование одной аффинной системы координат в другую определяется по формулам:

$$x = a_1x' + b_1y' + c_1,$$
$$y = a_2x' + b_2y' + c_2,$$

где (рис. 4) a_1, a_2 — координаты вектора $\overrightarrow{O'E_1'}$, b_1, b_2 — координаты вектора $\overrightarrow{O'E_2'}$, c_1, c_2 — координаты точки O' относительно системы

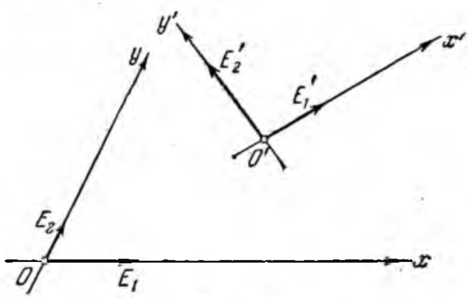

Рис. 4.

координат Oxy, x, y — координаты произвольной точки M плоскости относительно системы Oxy и x', y' — координаты той же точки M относительно системы $O'x'y'$.

В случае параллельного переноса формулы имеют вид:

$$x = x' + c_1,$$
$$y = y' + c_2. \tag{7}$$

Формулы преобразования поворота одной прямоугольной системы координат Oxy в другую прямоугольную систему $Ox'y'$ имеют вид:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \tag{8}$$

где α — угол от положительного направления оси Ox до положительного направления оси Ox'. Системы Oxy и $Ox'y'$ в этом случае называются системами одного класса. Если же новая система координат $Ox'y'$ получается из старой системы Oxy поворотом на угол α и последующей симметрией относительно Ox', то формулы преобразования будут:

$$x = x' \cos\alpha + y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha - y' \cos\alpha.$$

В этом случае системы Oxy и $Ox'y'$ называются системами разных классов.

Расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ на плоскости относительно прямоугольной системы координат определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{9}$$

или

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2}, \tag{10}$$

где X, Y — координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

В случае общей декартовой системы координат расстояние между точками $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, измеренное некоторой единицей e, определяется по формуле

$$d = \sqrt{g_{11}(x_2 - x_1)^2 + 2g_{12}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + g_{22}(y_2 - y_1)^2} \tag{11}$$

или

$$d = \sqrt{g_{11}X^2 + 2g_{12}XY + g_{22}Y^2}, \tag{12}$$

где g_{11}, g_{22} — квадраты длин векторов $\overrightarrow{OE}_1$, $\overrightarrow{OE}_2$, измеренные единицей e, а g_{12} — произведение тех же длин на косинус угла (ω) между $\overrightarrow{OE}_1, \overrightarrow{OE}_2$; g_{ik} удовлетворяют условиям: $g_{11} > 0$, $g_{12} > 0$, $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$. Обратно, если эти условия выполнены, то существуют векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ такие, что

$$|\boldsymbol{e}_1|^2 = g_{11}, \qquad |\boldsymbol{e}_2|^2 = g_{22}, \qquad |\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2| \cos\omega = g_{12}, \tag{13}$$

где ω — угол между векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, $|\boldsymbol{e}_1|$ и $|\boldsymbol{e}_2|$ — длины векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

В прямоугольной системе координат угол от вектора $\overrightarrow{AB} = \{X, Y\}$ до вектора $\overrightarrow{CD} = \{X', Y'\}$ определяется по формулам:

$$\cos\varphi = \frac{XX' + YY'}{dd'}, \qquad \sin\varphi = \frac{XY' - X'Y}{dd'}, \tag{14}$$

где d и d' — длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Угол от единичного вектора оси Ox до вектора $\overrightarrow{AB}$ определяется по формулам:

$$\cos\varphi = \frac{X}{d}, \qquad \sin\varphi = \frac{Y}{d}. \tag{15}$$

Для того чтобы два вектора $\{X, Y\}$ и $\{X', Y'\}$ были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы

$$XX' + YY' = 0. \tag{16}$$

В случае общей декартовой системы координат угол от вектора $\overrightarrow{AB}=\{X, Y\}$ до вектора $\overrightarrow{CD}=\{X', Y'\}$ определяется по формулам:

$$\cos\varphi=\frac{g_{11}XX'+g_{12}(XY'+X'Y)+g_{22}YY'}{dd'}, \tag{17}$$

$$\sin\varphi=\frac{\begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix}\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}}{dd'}, \tag{18}$$

где g_{ik} имеют указанные выше значения.

Площадь S треугольника ABC с вершинами

$$A(x_1, y_1), \quad B(x_2, y_2), \quad C(x_3, y_3),$$

заданными относительно прямоугольной системы координат, определяется по формулам:

$$S=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix} \tag{19}$$

или

$$S=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Площадь ориентированного треугольника ABC вычисляется по формуле

$$\sigma=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \tag{21}$$

причем $\sigma>0$, если треугольник ABC одинаково ориентирован с треугольником OE_1E_2, и $\sigma<0$ в противном случае.

В случае аффинной системы координат по формуле (19) определяется отношение площади треугольника ABC к площади масштабного параллелограмма.

Полярная система координат на плоскости определяется точкой O (полюс), исходящим из нее лучом Ox (полярная ось), масштабным отрезком e и направлением отсчета углов (рис. 5).

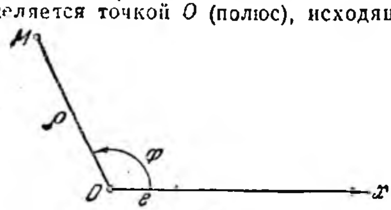

Рис. 5.

Полярными координатами точки M, не совпадающей с полюсом, называются: расстояние ρ (полярный радиус) от точки M до полюса O и угол φ (полярный угол) от полярной оси Ox до луча OM.

Полярный угол φ имеет бесконечное множество значений; главным значением полярного угла называется его значение, удовлетворяющее условию $0\leqslant\varphi<2\pi$. Если φ_0 — одно из значений полярного угла, то все значения полярного угла заключаются в выражении $\varphi_0+2k\pi$, где k — любое целое число. Для полюса считают $\varrho=0$ (φ не определяется).

Иногда рассматривают обобщенные полярные координаты: полярный радиус может принимать как положительные, так и отрицательные значения; если для точки M $\varrho>0$, то полярный угол φ отсчитывается от полярной оси до луча OM, если же $\varrho<0$, то полярный угол φ отсчитывается от полярной оси до луча, имеющего направление, противоположное лучу OM.

Если полюс O принять за начало декартовой прямоугольной системы координат, направление полярной оси за положительное направление оси Ox, а за ось Oy принять такую ось, что угол от положительного направления оси Ox до положительного направления оси Oy равен $+\frac{\pi}{2}$, то между декартовыми координатами x и y точки и ее полярными координатами ϱ и φ имеют место следующие соотношения:

$$x=\varrho\cos\varphi, \qquad y=\varrho\sin\varphi \tag{22}$$

и

$$\varrho=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{23}$$

В задачах, где требуется определить длины отрезков, углы или площади, имеется в виду декартова прямоугольная система координат (если только в условии задачи не оговорено противное).

§ 1. Прямоугольные и аффинные координаты

46. Построить точки $A(2,\ 3)$, $B(0,\ 4)$, $C(-2,\ 1)$, $D(-3,\ -5)$, $F(6,\ -2)$, $G(5,\ 0)$, $K(0,\ -1)$, $S(-3,\ 0)$, $T(0,\ 7)$ относительно прямоугольной системы координат.

47. Относительно косоугольной системы координат с координатным углом $\omega=\frac{\pi}{6}$ построить точки $A(3,\ 2)$, $B(-4,\ 6)$, $C(-2,\ -5)$, $D(4,\ -1)$.

48. Дана аффинная система координат, у которой координатный угол $\omega=\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$, а единичный отрезок оси абсцисс в $2\frac{1}{2}$ раза больше единичного отрезка оси ординат. Относительно этой системы координат построить точки $A(4,\ 2)$, $B(-2,\ 1)$, $C(-3,\ -3)$, $D(\sqrt{2},\ -\sqrt{3})$.

49. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найти координаты его вершин, принимая за начало координат вершину A, за положительное направление оси абсцисс — направление стороны AB, за положительное направление оси ординат —

направление диагонали AE, а за единицу масштаба по обеим осям — сторону шестиугольника.

50. В трапеции $ABCD$ нижнее основание AB в три раза больше ее верхнего основания CD. Принимая за начало координат точку A, за положительное направление оси абсцисс — направление основания AB, за положительное направление оси ординат — направление боковой стороны AD, а стороны AB и AD — за единичные отрезки на этих осях, найти координаты вершин трапеции, а также координаты точки O пересечения ее диагоналей и координаты точки S пересечения ее боковых сторон.

51. В равнобочной трапеции большее ее основание $AB = 8$, высота равна 3, а угол при основании равен 45°. Принимая за ось абсцисс прямоугольной системы координат большее основание трапеции, а за ось ординат — перпендикуляр в его середине и выбирая за положительное направление оси ординат то направление этого перпендикуляра, которое идет внутрь трапеции, найти координаты вершин трапеции, точки M пересечения ее диагоналей и точки S пересечения ее боковых сторон.

52. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-1, 3)$, $B(2, -1)$. Найти две другие его вершины при условии, что диагонали параллелограмма параллельны осям координат.

53. Относительно прямоугольной системы координат дана точка $M(x, y)$. Найти точку, симметричную точке M:

1) относительно начала координат;

2) относительно оси абсцисс;

3) относительно оси ординат;

4) относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов;

5) относительно биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

54. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(-2, 1)$, $B(1, 3)$, $C(4, 0)$. Найти четвертую его вершину.

§ 2. Расстояние между двумя точками

55. Найти расстояние d между точками A и B в каждом из следующих случаев:

1) $A(4, 3)$, $B(7, 7)$; 3) $A(12, -1)$, $B(0, 4)$;

2) $A(3, 1)$, $B(-2, 4)$; 4) $A(3, 5)$, $B(4, 6)$.

56. Найти расстояние от начала координат каждой из следующих точек:

1) $A(11,\ 4)$;   3) $C(-11,\ 0)$;
2) $B(-3,\ -4)$;   4) $D(5,\ 12)$.

57. На осях координат найти точки, каждая из которых равноудалена от точек $(1,\ 1)$ и $(3,\ 7)$.

58. На оси Oy найти точку, равноудаленную от точки $(-8,\ -4)$ и от начала координат.

59. Установить, будет ли треугольник ABC: $A(3,\ 1)$, $B(7,\ 5)$, $C(5,\ -1)$, остроугольным, прямоугольным или тупоугольным.

60. На осях координат найти точки, отстоящие от точки $M(-5,\ 9)$ на расстоянии, равном 15.

61. Дана окружность с центром в точке $C(6,\ 7)$ и радиусом $r=5$. Из точки $A(7,\ 14)$ к этой окружности проведены касательные. Найти их длины.

62. Из точки $C(-4,\ -6)$ как из центра радиусом $r=10$ описана окружность. Найти точки ее пересечения с биссектрисами координатных углов.

63. Дан треугольник ABC: $A(2,\ -3)$, $B(1,\ 3)$ и $C(-6,\ -4)$. Найти точку M, симметричную вершине A относительно стороны BC.

64. Найти центр и радиус круга, описанного около треугольника ABC: $A(2,\ 2)$, $B(-5,\ 1)$, $C(3,\ -5)$.

65. Зная две противолежащие вершины ромба $A(8,\ -3)$ и $C(10,\ 11)$, найти две другие его вершины при условии, что длина стороны ромба равна 10.

66. Найти центр окружности, проходящей через точку $A(-4,\ 2)$ и касающейся оси Ox в точке $B(2,\ 0)$.

67. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точку $A(2,\ -1)$ и касающейся обеих осей координат.

§ 3. Деление отрезка в данном отношении

68. Доказать, что в каждом из нижеследующих случаев точки A, B, C находятся на одной прямой, и найти простое отношение (ABC):

1) $A(2,\ 1)$, $B(-2,\ 5)$, $C(0,\ 3)$;
2) $A(1,\ 6)$, $B(5,\ 10)$, $C(-3,\ 2)$;
3) $A(0,\ 0)$, $B(-3,\ -3)$, $C(1,\ 1)$.

69. Найти координаты точки M, делящей отрезок M_1M_2, ограниченный точками $M_1(2, 3)$ и $M_2(-5, 1)$, в отношении:

$$1)\ \lambda=2;\quad 2)\ \lambda=-\frac{1}{2};\quad 3)\ \lambda=-4;\quad 4)\ \lambda=\frac{1}{3}.$$

70. Найти координаты середины отрезка M_1M_2 в каждом из следующих случаев:

1) $M_1(2, 3)$, $M_2(-4, 7)$;
2) $M_1(-2, 4)$, $M_2(2, -4)$;
3) $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 1)$.

71. Даны две точки $A(3, 4)$ и $B(2, -1)$. Найти точки пересечения прямой AB с осями координат.

72. Найти центр тяжести треугольника, вершины которого $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

73. Даны середины сторон треугольника $M_1(2, 4)$, $M_2(-3, 0)$, $M_3(2, 1)$. Найти его вершины.

74. Один из концов отрезка AB находится в точке $A(2, 3)$, его серединой служит точка $M(1, -2)$. Найти другой конец отрезка.

75. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-4, -7)$ и $B(2, 6)$ и точка пересечения его диагоналей $M(3, 1)$. Найти две другие вершины параллелограмма.

76. На осях Ox и Oy отложены соответственно отрезки $OA=8$, $OB=4$. Найти отношение, в котором отрезок AB делится основанием перпендикуляра, опущенного на прямую AB из начала координат. Система координат прямоугольная.

77. Даны две точки $A(-3, 1)$ и $B(2, -3)$. На прямой AB найти такую точку M, чтобы она была расположена по ту же сторону от точки A, что и точка B, и чтобы отрезок AM был втрое больше отрезка AB.

78. Даны три последовательные вершины трапеции $A(-2, -3)$, $B(1, 4)$, $C(3, 1)$. Найти четвертую ее вершину D при условии, что основание AD в пять раз больше основания BC.

79. Даны две точки $A(-4, 2)$, $B(8, -7)$. Найти точки C и D, делящие отрезок AB на три равные части.

80. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $C(2, 2)$, $D(1, 5)$ разделен на три равные части.

81. Дана точка $A(2, 4)$. Найти точку B при условии, что точка C пересечения прямой AB с осью ординат делит отрезок AB в отношении, равном $\frac{2}{3}$, а точка D пересечения прямой AB с осью абсцисс делит отрезок AB в отношении $-\frac{3}{4}$.

82. Даны две точки $A(9, -1)$ и $B(-2, 6)$. В каком отношении делит отрезок AB точка C пересечения прямой AB с биссектрисой второго и четвертого координатных углов?

83. Найти две точки A и B, зная, что точка $C(-5, 4)$ делит отрезок AB в отношении $\frac{3}{4}$, а точка $D(6, -5)$ — в отношении $\frac{2}{3}$.

84. Вершина A параллелограмма $ABCD$ соединена с серединой M стороны BC, а вершина B — с точкой N, лежащей на стороне CD и отстоящей от точки D на расстоянии, равном $\frac{1}{3}$ стороны CD. В каких отношениях делятся отрезки AM и BN точкой K их пересечения?

85. В треугольнике ABC: $A(5, -4)$, $B(-1, 2)$, $C(5, 1)$ проведена медиана AD. Найти ее длину.

86. На прямой, проходящей через точки $(4, 2)$ и $(0, -1)$, найти точки, отстоящие от точки $(-4, -4)$ на расстоянии 5.

87. На прямой, проходящей через точки $(4, 8)$ и $(-1, -4)$, найти точки, отстоящие от второй из данных точек на расстоянии 4.

88. Дан треугольник ABC: $A(4, 1)$, $B(7, 5)$, $C(-4, 7)$. Вычислить длину биссектрисы AD угла A.

89*. Найти центр и радиус круга, вписанного в треугольник ABC: $A(9, 2)$, $B(0, 20)$, $C(-15, -10)$.

90*. Найти точку пересечения общих касательных двух окружностей, центры которых совпадают с точками $C_1(2, 5)$ и $C_2\left(7\frac{1}{3}, 10\frac{1}{3}\right)$, а радиусы соответственно равны 3 и 7.

91. Даны три последовательные вершины трапеции $A(-1, -2)$, $B(1, 3)$, $C(9, 9)$. Найти четвертую вершину D этой трапеции, зная, что ее основание $AD = 15$.

92. В трех точках $A\left(7, 1\frac{1}{2}\right)$, $B(6, 7)$ и $C(2, 4)$ помещены грузы соответственно 60, 100 и 40. Определить центр тяжести этой системы.

93. Найти положение центра тяжести однородного стержня, согнутого под прямым углом, если длины его частей соответственно равны $OA = 2$, $OB = 5$.

94. Найти положение центра тяжести проволочного треугольника, длины сторон которого 3, 4 и 5 *см*.

95. Найти центр тяжести четырехугольной однородной пластинки, зная, что углы пластинки помещаются в точках: $A(4, 4)$, $B(5, 7)$, $C(10, 10)$, $D(12, 4)$.

96*. Доказать, что среднее арифметическое одноименных координат вершин правильного многоугольника равно соответствующей координате его центра.

97*. Найти сумму квадратов длин всех сторон и всех диагоналей правильного многоугольника.

§ 4. Площадь треугольника

98. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого служат точки $A(4, 2)$, $B(9, 4)$ и $C(7, 6)$.

99. Вычислить площадь пятиугольника, вершинами которого служат точки $A(-2, 0)$, $B(0, -1)$, $C(2, 0)$, $D(3, 2)$ и $E(-1, 3)$.

100. Вычислить площадь треугольника ABC в каждом из следующих случаев:

1) $A(2, 1)$, $B(3, 4)$, $C(1, 6)$;

2) $A(-2, 4)$, $B(0, -3)$, $C(1, 7)$;

3) $A(5, 4)$, $B(11, 0)$, $C(0, 3)$.

101. Найти расстояние от точки $(2, 0)$ до прямой, проходящей через точки $(1, 1)$ и $(5, 4)$.

102. Найти расстояние от начала координат до прямой, проходящей через точки $(1, 5)$ и $(2, 4)$.

103. Две вершины треугольника находятся в точках $(5, 1)$ и $(-2, 2)$, третья вершина — на оси Ox. Зная, что площадь треугольника равна 10, найти третью вершину.

104. Площадь треугольника $S = 3$, две его вершины суть точки $A(3, 1)$ и $B(1, -3)$, центр тяжести этого треугольника лежит на оси Ox. Определить координаты третьей вершины C.

§ 5. Полярные координаты

105. Построить точки, полярные координаты которых имеют следующие значения: $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$; $\left(1, \frac{5\pi}{3}\right)$; $\left(5, \frac{7\pi}{6}\right)$; $\left(0{,}5; \frac{\pi}{2}\right)$; $\left(2{,}5; \frac{2\pi}{3}\right)$; $(6, \pi)$; $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$; $\left(\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$; $\left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$.

106. Дан правильный шестиугольник, сторона которого равна a. Приняв за полюс одну из его вершин, а за полярную ось — сторону, через нее проходящую, определить полярные координаты остальных пяти вершин.

107. Вычислить расстояние между двумя данными точками:

1) $A\left(2, \frac{\pi}{12}\right)$ и $B\left(1, \frac{5\pi}{12}\right)$; 3) $E\left(3, \frac{11\pi}{18}\right)$ и $F\left(4, \frac{\pi}{9}\right)$.

2) $C\left(4, \frac{\pi}{5}\right)$ и $D\left(6, \frac{6\pi}{5}\right)$;

108. Даны полярные координаты точек $A\left(8, -\frac{2}{3}\pi\right)$ и $B\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$. Вычислить полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки A и B.

109. Относительно полярной системы координат дана точка $A\left(5, \frac{2\pi}{3}\right)$. Найти:

1) точку B, симметричную точке A относительно полюса;

2) точку C, симметричную точке A относительно полярной оси.

110. Относительно полярной системы координат даны точки: $A\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$, $C\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$, $D(5, \pi)$, $E(5, 0)$. Какие координаты будут иметь эти точки, если повернуть полярную ось около полюса в положительном направлении на угол $\frac{3\pi}{4}$?

111. Вычислить площадь треугольника, одна из вершин которого помещается в полюсе, а две другие имеют полярные координаты $\left(4, \frac{\pi}{9}\right)$, $\left(1, \frac{5\pi}{18}\right)$.

112. Найти прямоугольные координаты точек, которые даны своими полярными координатами: $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$,

$C\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(3, -\frac{\pi}{6}\right)$, причем ось абсцисс совпадает с полярной осью, а начало координат — с полюсом.

113. Зная прямоугольные координаты точек $A(-1, 1)$, $B(0, 2)$, $C(5, 0)$, найти их полярные координаты.

114. Найти полярные координаты точки M, зная ее декартовы координаты $x=8$, $y=-6$.

115. Зная полярные координаты точки $\varrho=10$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$, найти ее прямоугольные координаты, если начало полярных координат в точке (2, 3), а полярная ось параллельна Ox.

116. Полюс — в точке (3, 5). Полярная ось параллельна положительному направлению оси Oy. Найти полярные координаты точек $M_1(9, -1)$ и $M_2(5, 5-2\sqrt{3})$.

§ 6. Преобразование координат

117. Найти новые координаты точек $A(2, 3)$, $B(-5, 4)$, $C(0, 2)$ в системе, полученной переносом данной аффинной, если за новое начало координат принимается точка $O'(7, -1)$.

118. В аффинной системе координат задана точка $M(2, 5)$. Ее координаты после переноса соответственно равны -4 и 7. Найти старые координаты нового начала O' и новых единичных точек E_1', E_2', E' и новые координаты старого начала O и старых единичных точек E_1, E_2 и E.

119. Найти формулы преобразования декартовой аффинной системы координат на плоскости в каждом из следующих случаев, если даны старые координаты новых единичных векторов и старые координаты нового начала координат:

1) $\overrightarrow{O'E_1'}=\{2, 5\}$, $\overrightarrow{O'E_2'}=\{7, 9\}$, $O'(3, 1)$;

2) $\overrightarrow{O'E_1'}=\{5, 0\}$, $\overrightarrow{O'E_2'}=\{0, 4\}$, $O'(3, 5)$;

3) $\overrightarrow{O'E_1'}=\{0, 2\}$, $\overrightarrow{O'E_2'}=\{-7, 0\}$, $O'(0, 2)$;

4) $\overrightarrow{O'E_1'}=\{a, 0\}$, $\overrightarrow{O'E_2'}=\{0, b\}$, $O'(0, 0)$;

5) $\overrightarrow{O'E_1'}=\{0, a\}$, $\overrightarrow{O'E_2'}=\{b, 0\}$, $O'(0, 0)$.

120. Найти формулы преобразования аффинной системы координат, если даны старые координаты новых единичных точек и нового начала координат:

1) $E_1'(2,\ 5)$, $E_2'(-3,\ 7)$, $O'(5,\ 4)$;

2) $E_1'(0,\ 0)$, $E_2'(0,\ 1)$, $O'(1,\ 0)$;

3) $E_1'(a,\ 0)$, $E_2'(0,\ b)$, $O'(a,\ b)$.

121*. По отношению к аффинной системе координат даны три точки: $A(2,\ 1)$, $B(3,\ 0)$, $C(1,\ 4)$. В новой аффинной системе координат те же точки имеют координаты: $A(1,\ 6)$, $B(1,\ 9)$, $C(3,\ 1)$. Найти формулы преобразования аффинной системы координат. Найти старые координаты нового начала координат и новых единичных точек и новые координаты старого начала координат и старых единичных точек.

122. Даны две системы координат Oxy и $O'x'y'$. Координаты x и y произвольной точки относительно первой системы выражаются через ее координаты x' и y' относительно второй системы следующими формулами:

$$x = 2x' - 5y' + 3, \qquad y = -x' + 2y' - 2.$$

Найти координаты начала второй системы и единичных векторов ее осей относительно первой системы.

123*. Даны две системы координат Oxy и $O'x'y'$. Относительно первой системы начало второй системы находится в точке $O'(-4,\ 2)$, ось $O'x'$ пересекает ось Ox в точке $A(2,\ 0)$, а ось $O'y'$ пересекает ось Oy в точке $B(0,\ 8)$. Принимая за единичные векторы второй системы векторы $\overrightarrow{O'A}$ и $\overrightarrow{O'B}$, выразить координаты произвольной точки относительно первой системы через ее координаты во второй системе.

124*. Дан параллелограмм $OACB$. Рассмотрим две системы координат, принимая за начало обеих систем вершину параллелограмма O, за единичные векторы осей Ox и Oy первой системы соответственно стороны параллелограмма $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, а за единичные векторы осей Ox' и Oy' второй системы соответственно векторы $\overrightarrow{OK}$ и $\overrightarrow{OL}$ (K и L — середины сторон AC и BC). Найти координаты вершин параллелограмма во второй системе.

125*. Дан треугольник OAB и в нем проведены медианы AD и BE, пересекающиеся в точке O'. Рассмотрим две системы координат: Oxy и $O'x'y'$. За начало первой системы возьмем точку O, а за единичные векторы осей Ox и Oy — соответственно векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. За начало второй системы возьмем точку O', а за единичные векторы осей $O'x'$ и $O'y'$ — соответственно векторы $\overrightarrow{O'A}$ и $\overrightarrow{O'B}$. Выразить координаты x, y произвольной точки относительно первой системы через ее координаты x', y' во второй системе.

126. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая за начало первой системы точку A, а за единичные векторы осей Ox и Oy векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$, за начало второй системы точку D и за единичные векторы осей Dx' и Dy' векторы $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DF}$, найти координаты вершин шестиугольника относительно обеих систем.

127*. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC. За начало первой системы Oxy возьмем точку O пересечения боковых сторон трапеции AB и DC, а за единичные векторы осей Ox и Oy — соответственно векторы $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. За начало второй системы $O'x'y'$ возьмем точку O' пересечения диагоналей AC и BD, а за единичные векторы осей $O'x'$ и $O'y'$ — векторы $\overrightarrow{O'B}$ и $\overrightarrow{O'C}$. Найти формулы, выражающие координаты произвольной точки относительно первой системы через ее координаты во второй системе.

128. Найти формулы перехода от косоугольной системы координат Oxy с координатным углом ω к такой прямоугольной системе $Ox'y'$, положительными направлениями осей которой являются биссектрисы первого и второго координатных углов косоугольной системы.

129*. Найти формулы перехода от одной косоугольной системы координат Oxy с координатным углом ω к другой косоугольной системе $Ox'y'$, если одноименные оси этих систем взаимно перпендикулярны, а разноименные образуют острые углы.

130. Даны две прямоугольные системы координат. Начало новой системы находится в точке $O'(-4, 2)$; угол от положительного направления оси Ox до положительного направления оси $O'x'$ равен $\frac{2\pi}{3}$; обе системы одного класса. Найти выражение старых координат точки через ее новые координаты.

131. Новое начало O' прямоугольной системы $O'x'y'$ имеет относительно прямоугольной системы Oxy координаты $(-3, -2)$; $\cos(Ox, O'x') = -\frac{4}{5}$, $\sin(Ox, O'x') = -\frac{3}{5}$; системы Oxy и $O'x'y'$—разных классов. Найти выражение старых координат x и y через новые координаты x' и y'.

132. Новая система координат получена из старой переносом начала в точку $O'(3, -4)$ и поворотом на угол α такой, что $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$. По отношению к исходной системе координат дана точка $A(6, -2)$. Найти ее координаты в новой системе.

133. Оси координат повернуты на угол $\alpha = 60°$. Координаты точек $A(2\sqrt{3}, -4)$, $B(\sqrt{3}, 0)$ и $C(0, -2\sqrt{3})$ определены в новой системе. Вычислить координаты этих же точек в старой системе координат.

134. Даны точки $M(3, 1)$, $N(-1, 5)$ и $P(-3, -1)$. Найти их координаты в новой системе, если оси координат повернуты на угол $\alpha = -45°$.

135. Написать формулы преобразования прямоугольной системы координат в прямоугольную систему, оси которой имеют направления биссектрис координатных углов первой системы.

136*. Даны две прямоугольные системы координат Oxy и $O'x'y'$. Начало второй системы находится в точке $O'(2, 3)$. Ось $O'x'$ пересекает ось Ox в точке $A(6, 0)$, а ось $O'y'$ пересекает ось Oy в точке $B\left(0, \frac{1}{3}\right)$. Принимая за положительные направления осей $O'x'$ и $O'y'$ направления векторов $\overrightarrow{O'A}$ и $\overrightarrow{O'B}$, выразить координаты произвольной точки относительно первой системы через ее координаты во второй системе.

137*. Дан прямоугольный треугольник OAB с катетами $OA = 3$, $OB = 1$ и в нем проведена высота OC. Принимая за начало первой системы координат точку O, за положительные направления осей Ox и Oy направления векторов $\overrightarrow{OA}$ и

$\overrightarrow{OB}$, за начало второй системы точку C, за положительное направление оси Cx' направление вектора $\overrightarrow{OC}$ и выбирая положительное направление оси Cy' так, чтобы обе системы были одного класса, выразить координаты произвольной точки относительно первой системы через ее координаты во второй системе.

§ 7. Координаты векторов на плоскости

138. Определить координаты конца вектора $\overrightarrow{AB}$ в следующих случаях:

1) $X=4$, $Y=-2$, $A(1,\ 2)$;
2) $X=-1$, $Y=3$, $A(-1,\ 0)$;
3) $X=0$, $Y=-3$, $A(4,\ 3)$.

139. Найти значение угла от вектора $\overrightarrow{AB}$ до вектора $\overrightarrow{CD}$ в каждом из следующих случаев:

1) $A(2,\ 1)$, $B(-2,\ 3)$, $C(1,\ 0)$, $D(3,\ 4)$;
2) $A(1,\ 2)$, $B(2,\ 3)$, $C(2,\ -1)$, $D(-3,\ 1)$;
3) $A(1,\ 1)$, $B(2,\ 4)$, $C(5,\ -1)$, $D(9,\ 1)$;
4) $A(2,\ 3)$, $B(3,\ 6)$, $C(3,\ 5)$, $D(1,\ 9)$;
5) $A(1,\ 7)$, $B(2,\ 4)$, $C(-3\sqrt{3},\ 3)$ $D(1,\ \sqrt{3})$;
6) $A(0,\ 0)$, $B(2,\ 1)$, $C(0,\ 0)$, $D(-2,\ 5)$.

140. Даны четыре точки: $A(-3,\ 1)$, $B(2,\ 4)$, $C(0,\ -5)$, $D(-3,\ 0)$. Доказать, что $AB \perp CD$.

141. Найти косинус, синус и тангенс угла от единичного вектора $\overrightarrow{OE_1}$ до вектора $\overrightarrow{AB}$ в каждом из следующих случаев:

1) $A(-2,\ 3)$, $B(4,\ 9)$;
2) $A(2,\ 1)$, $B(3,\ 0)$;
3) $A(3,\ 2)$, $B(-5,\ 2)$;
4) $A\ (5,\ 3)$, $B\ (5,\ -7)$;
5) $A\ (1,\ 4)$, $B\ (2,\ 5)$;
6) $A\ (1,\ 4)$, $B\ (2,\ 1)$.

142. Определить длину вектора $\overrightarrow{AB}$ и его направление в следующих случаях:

1) $A(-1,\ 4)$, $B(4,\ -8)$;
2) $A(4,\ 7)$, $B(-2,\ -1)$;
3) $A(1,\ 2)$, $B(4,\ 6)$.

143. Определить координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ в следующих случаях:

1) $d=5$; α — острый угол, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$;

2) $d=51$; α — угол 2-й четверти, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{8}{15}$;

3) $d=25$; α — угол 3-й четверти, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$,

где α — угол от единичного вектора оси Ox до вектора $\overrightarrow{AB}$, а d — длина вектора.

144*. Дан вектор $\overrightarrow{OA}=\{x, y\}$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{OB}$, получающегося из вектора $\overrightarrow{OA}$ поворотом на угол φ.

145. Даны две точки $A(2, 1)$ и $B(5, 5)$. Найти конец вектора $\overrightarrow{AC}$, получающегося из вектора $\overrightarrow{AB}$ поворотом на угол $\frac{5\pi}{6}$.

146. Даны две соседние вершины квадрата $A(-3, 2)$ и $B(2, 4)$. Найти две другие вершины.

147*. Основанием равнобедренного треугольника служит отрезок AC: $A(-4, 2)$, $C(4, -4)$. Найти координаты вершины B этого треугольника, зная, что углы при его основании равны $\operatorname{arctg}\frac{5}{6}$.

148. Найти численную величину ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, направление которой определяется вектором $\overrightarrow{CD}$, если $A(-4, 2)$, $B(6, 4)$, $C(-6, -1)$, $D(-1, -13)$.

149. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-3, 2)$, $B(5, -4)$. Найти две другие его вершины C и D.

150. Даны две вершины равностороннего треугольника $A(2, 1)$, $B(6, 3)$. Найти его третью вершину.

151*. Определить координаты k-й вершины правильного n-угольника, если даны координаты первой вершины $A_1(x_1, y_1)$ и координаты центра $S(x_0, y_0)$.

152*. Векторы $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$ имеют длины a_1, a_2, a_3 и образуют углы ω_1, ω_2, ω_3 с положительным направлением оси Ox. Определить координаты вектора $\overrightarrow{A_0A_3}$.

153*. Векторы $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, ... , $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ имеют соответственно длины d_1, d_2, ... , d_n и образуют углы φ_1, φ_2, ... , φ_n с положительным направлением оси Ox. Определить координаты точки A_n, если $A_0(x_0, y_0)$.

§ 8. Длины и углы векторов в общих декартовых координатах

154. Построить аффинную систему координат, если:

1) $g_{11}=4, \quad g_{12}=0, \quad g_{22}=1;$

2) $g_{11}=g_{22}=1, \quad g_{12}=\frac{1}{2};$

3) $g_{11}=4, \quad g_{12}=8, \quad g_{22}=25;$

4) $g_{11}=4, \quad g_{12}=-8, \quad g_{22}=25.$

155. Определить длину вектора $\boldsymbol{a}=\{56, -10\}$, если $g_{11}=4$, $g_{12}=8$, $g_{22}=25$.

156. Определить длину вектора $\boldsymbol{a}=\{7, -8\}$, если $g_{11}=4$, $g_{12}=8$, $g_{22}=25$.

157. Определить единичный вектор $\boldsymbol{b}$, перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{a}=\{7, -8\}$, если $g_{11}=4$, $g_{12}=8$, $g_{22}=25$.

158. Даны длины единичных векторов репера $|\boldsymbol{e}_1|=2$, $|\boldsymbol{e}_2|=3$ и угол между ними $\omega=\frac{\pi}{3}$. Определить g_{11}, g_{12}, g_{22} и расстояние d между точками $A(1, -2)$, $B(-3, 4)$.

159. Длины единичных векторов аффинной системы координат суть соответственно $|\boldsymbol{e}_1|=4$, $|\boldsymbol{e}_2|=2$. Угол между ними $\omega=\frac{\pi}{3}$. Относительно этой системы координат вершины треугольника ABC имеют координаты $A(1, 3)$, $B(1, 0)$, $C(2, 1)$. Определить длины сторон AB и AC этого треугольника и угол A между ними.

160. Длины единичных векторов аффинной системы координат суть соответственно $|\boldsymbol{e}_1|=2$, $|\boldsymbol{e}_2|=\sqrt{3}$, а угол между ними $\omega=\frac{5\pi}{6}$. Относительно этой системы координат даны два вектора $\boldsymbol{a}=\{1, 2\}$, $\boldsymbol{b}=\{2, 2\}$. Найти угол от первого вектора до второго.

161. Относительно аффинной системы координат дан треугольник ABC с вершинами в точках $A(1, 1)$, $B(5, 3)$, $C(3, 5)$, длины сторон которого суть $AB=\sqrt{52}$, $AC=4$, $BC=\sqrt{28}$. Определить длины единичных векторов этой системы координат и угол между ними.

162*. Относительно аффинной системы координат дан прямоугольный треугольник ABC с вершинами в точках $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(3, 2)$, прямым углом при вершине C и катетами $CA=2$, $CB=3$. Определить длины сторон $A'B'$ и $A'C'$ треугольника $A'B'C'$ и угол между ними, если вершины этого треугольника имеют координаты $A'(1, 1)$, $B'(2, 2)$, $C'(2, 4)$.

ГЛАВА III

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

Если на плоскости выбраны какая угодно общая декартова система координат и какая угодно прямая, то существует уравнение первой степени, т. е. уравнение вида

$$Ax+By+C=0 \tag{1}$$

(A и B не равны нулю одновременно), которое обращается в тождество, если вместо x и y подставить координаты любой точки, лежащей на рассматриваемой прямой.

Обратно: если на плоскости выбрана какая угодно общая декартова система координат и задано какое угодно уравнение вида (1), где A и B не равны нулю одновременно, то существует на плоскости прямая, координаты любой точки которой обращают это уравнение в тождество.

Уравнение (1) называется общим уравнением прямой. Если прямая задана своим общим уравнением (1), то для координат всех точек, лежащих по одну сторону от нее,

$$Ax+By+C>0, \tag{2}$$

а для координат x, y всех точек, лежащих по другую сторону от нее,

$$Ax+By+C<0. \tag{3}$$

Соответствующие части плоскости будем называть положительной и отрицательной полуплоскостями. При умножении левой части уравнения прямой на отрицательное число положительная полуплоскость становится отрицательной, и наоборот.

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, заданные относительно общей декартовой системы координат, может быть записано так:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0, \tag{4}$$

или

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0, \tag{5}$$

или (если $x_2-x_1\neq 0$, $y_2-y_1\neq 0$)

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \tag{6}$$

или (если $x_2-x_1\neq 0$)

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1). \tag{7}$$

Направляющим вектором прямой называется любой ненулевой вектор, параллельный этой прямой (или лежащий на этой прямой). Пусть $a=\{l,\ m\}$ — направляющий вектор прямой. Угловым коэффициентом прямой, не параллельной оси Oy (и не совпадающей с осью Oy), называется число

$$k=\frac{m}{l}.$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$, заданные относительно общей декартовой системы координат, определяется формулой

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Если система координат прямоугольная, то угловой коэффициент есть тангенс угла от оси Ox до этой прямой.

Уравнение всякой прямой, не параллельной оси Oy общей декартовой системы координат, проходящей через точку $(x_1,\ y_1)$ с угловым коэффициентом k, имеет вид:

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{8}$$

Уравнение всякой прямой, не параллельной оси Oy, пересекающей ее в точке $(0,\ b)$ и имеющей угловой коэффициент k, может быть записано так:

$$y=kx+b. \tag{9}$$

Уравнение прямой, не проходящей через начало координат и пересекающей оси координат в точках $(a,\ 0)$ и $(0,\ b)$, может быть записано в виде (уравнение прямой в отрезках):

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_1,\ y_1)$ параллельно вектору $\{l,\ m\}$, можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ l & m \end{vmatrix}=0 \tag{10}$$

или

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}. \tag{11}$$

Если заданы произвольная точка $(x_1,\ y_1)$ и произвольный вектор $\{l,\ m\}\neq 0$, то параметрические уравнения прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору, будут:

$$x = x_1 + lt, \quad y = y_1 + mt. \qquad (12)$$

Число t является координатой точки M указанной прямой, на самой прямой, если за начало координат принимается точка (x_1, y_1), а за масштабный вектор — вектор $\{l, m\}$.

Необходимые и достаточные условия того, что две прямые, заданные своими общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

относительно общей декартовой системы координат, пересекаются, параллельны или совпадают, даны в следующей таблице:

Расположение прямых	Условие
Пересекаются	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$
Параллельны	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, но один из определителей (или оба) $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$ отличен от нуля
Совпадают	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0$

Необходимое и достаточное условие совпадения двух прямых, заданных общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

может быть сформулировано и так: левые части уравнений этих прямых отличаются числовым множителем $\lambda \neq 0$:

$$A_1x + B_1y + C_1 \equiv \lambda (A_2x + B_2y + C_2)$$

(тождество относительно x и y).

Если прямые, заданные общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

относительно общей декартовой системы координат, пересекаются, то координаты точки пересечения определяются по формулам Крамера:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \tag{13}$$

Если прямые, заданные уравнениями:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0$$

относительно общей декартовой системы координат, пересекаются, то в уравнении

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0, \tag{14}$$

где по крайней мере одно из чисел α или β не равно нулю, коэффициенты при x и y одновременно в нуль не обращаются, и это уравнение определяет прямую, проходящую через точку пересечения двух данных.

Обратно: любая прямая, проходящая через точку пересечения двух данных прямых:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

может быть определена уравнением вида:

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

Если прямые

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0$$

параллельны, то уравнение

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0,$$

где по крайней мере одно из чисел α или β не равно нулю, определяет прямую, параллельную данным, при условии

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq-\frac{\beta}{\alpha},$$

и обратно: любая прямая, параллельная данным:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

может быть определена уравнением вида:

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

Пучком прямых (собственным) называется множество всех прямых, лежащих в одной и той же плоскости и проходящих через одну и ту же точку, называемую центром пучка. Множество всех параллельных между собой прямых плоскости также называется пучком параллельных прямых или несобственным пучком.

Если по отношению к общей декартовой системе координат даны уравнения трех прямых:

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0, \\ A_3x+B_3y+C_3=0, \end{aligned} \tag{15}$$

то условие

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

есть необходимое и достаточное условие принадлежности данных прямых к одному пучку (в частности, к одному пучку параллельных прямых).

Уравнение пучка прямых, проходящих через точку (x_1, y_1), может быть записано в виде

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0, \tag{17}$$

где A и B принимают все действительные значения, одновременно в нуль не обращаясь.

Вектор $\{-B, A\}$ всегда параллелен прямой, заданной по отношению к общей декартовой системе координат уравнением

$$Ax+By+C=0.$$

В декартовой прямоугольной системе координат вектор $\{A, B\}$ перпендикулярен к прямой

$$Ax+By+C=0.$$

Если вектор $\{A, B\}$ отложить от произвольной точки этой прямой, то его конец будет находиться в положительной полуплоскости по отношению к прямой $Ax+By+C=0$.

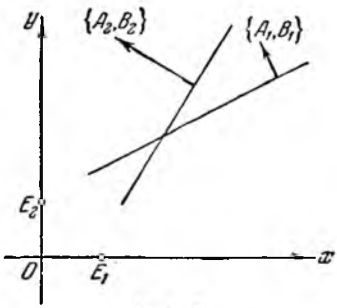

Рис. 6.

Если относительно декартовой прямоугольной системы координат две прямые заданы уравнениями:

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$

то косинус угла φ между векторами

$$n_1=\{A_1, B_1\} \quad \text{и} \quad n_2=\{A_2, B_2\}$$

определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

По этой же формуле определяется и косинус того угла (и ему вертикального), образованного рассматриваемыми прямыми, для координат внутренних точек которого имеет место неравенство

$$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)<0$$

(рис. 6).

Тангенс угла от прямой, имеющей угловой коэффициент k_1, до прямой, имеющей угловой коэффициент k_2, определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$$

(если только эти прямые не взаимно перпендикулярны).

Для того чтобы две прямые, имеющие угловые коэффициенты k_1 и k_2, были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были обратны по величине и по знаку, т. е.

$$k_2=-\frac{1}{k_1},$$

или

$$1+k_1k_2=0.$$

Косинусы и синусы углов $\varphi_{1,2}$ между двумя прямыми

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

заданными относительно декартовой прямоугольной системы координат, определяются по формулам:

$$\cos\varphi_{1,2}=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

$$\sin\varphi_{1,2}=\frac{|A_1B_2-A_2B_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

а если прямые не взаимно перпендикулярны, то

$$\operatorname{tg}\varphi_{1,2}=\pm\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}.$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

заданных относительно декартовой прямоугольной системы координат, имеет вид:

$$A_1A_2+B_1B_2=0.$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат уравнением

$$Ax+By+C=0,$$

определяется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Пусть α — угол от положительного направления оси Ox до луча OP, проходящего через начало координат, перпендикулярного к прямой AB и пересекающего эту прямую, а p — расстояние от начала координат до прямой AB. Тогда уравнение прямой AB

может быть написано в виде:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Это уравнение называется **нормальным уравнением прямой**. Нормальным уравнением будем называть и уравнение

$$-x\cos\alpha - y\sin\alpha + p = 0.$$

Если прямая задана общим уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

то нормальное уравнение имеет вид:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

где знак перед радикалом выбирается произвольно.

Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих различные приемы решения задач на прямую.

При решении задач на прямую знакомство с этими примерами окажет учащемуся существенную помощь.

Пример 1. *Даны две пересекающиеся прямые:*

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

и точка $M_0(x_0, y_0)$, не лежащая ни на одной из этих прямых. Написать уравнение биссектрисы того угла между двумя данными прямыми, в котором лежит данная точка.

Решение. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка искомой биссектрисы. Так как расстояния от точки $M(x, y)$ до данных прямых равны, то

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Так как точки $M(x, y)$ и $M_0(x_0, y_0)$ лежат внутри одного и того же угла, то числа $A_1x + B_1y + C_1$ и $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1$ одного знака, а числа $A_2x + B_2y + C_2$ и $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2$ также одного знака, т. е.

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) > 0,$$

$$(A_2x + B_2y + C_2)(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) > 0.$$

Если числа $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1$ и $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2$ одного знака, то и числа $A_1x + B_1y + C_1$ и $A_2x + B_2y + C_2$ также одного знака; уравнение искомой биссектрисы имеет вид:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{1}$$

Если же числа $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1$ и $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2$ противоположных знаков (рис. 7), то и числа $A_1x + B_1y + C_1$ и $A_2x + B_2y + C_2$

противоположных знаков, а потому искомая биссектриса в этом случае имеет уравнение

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \tag{2}$$

П р и м е ч а н и е. Уравнениям (1) и (2) удовлетворяют, конечно, не только точки, лежащие внутри того угла, где лежит точка M_0, но и точки этой прямой, лежащей внутри угла, ему вертикального.

П р и м е р 2. *Даны две пересекающиеся прямые:*

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

и точка $M_0(x_0, y_0)$, *не лежащая ни на одной из них. Найти косинус того угла между этими прямыми, в котором лежит данная точка.*

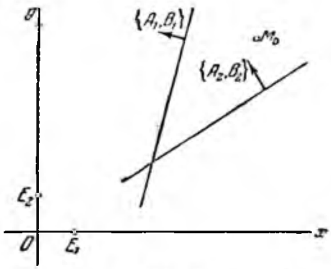

Рис. 7.

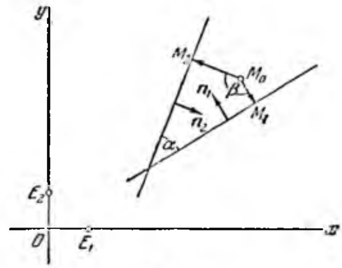

Рис. 8.

Р е ш е н и е. Опустим из точки M_0 на данные прямые перпендикуляры M_0M_1 и M_0M_2. Обозначим через α искомый угол, а через β угол между векторами $\overline{M_0M_1}$ и $\overline{M_0M_2}$. Тогда $\alpha=180°-\beta$.

1) Если числа $A_1x_0+B_1y_0+C_1$ и $A_2x_0+B_2y_0+C_2$ положительны, то векторы $n_1=\{A_1, B_1\}$ и $n_2=\{A_2, B_2\}$ имеют направления, соответственно противоположные векторам $\overline{M_0M_1}$ и $\overline{M_0M_2}$ (рис. 8), поэтому угол β между векторами $\overline{M_0M_1}$ и $\overline{M_0M_2}$ равен углу между векторами n_1 и n_2, т. е.

$$\cos\beta=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

и, следовательно,

$$\cos\alpha=-\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

2) Если числа $A_1x_0+B_1y_0+C_1$ и $A_2x_0+B_2y_0+C_2$ отрицательны, то векторы

$$n_1=\{A_1, B_1\} \text{ и } n_2=\{A_2, B_2\}$$

имеют соответственно те же направления, что и векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$. Следовательно, и в этом случае

$$\cos\alpha = -\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

3) Если $A_1x_0+B_1y_0+C_1>0$, а $A_2x_0+B_2y_0+C_2<0$, то векторы $n_1=\{A_1, B_1\}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$ имеют противоположные направления, а векторы $n_2=\{A_2, B_2\}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$ имеют одинаковые направления, поэтому угол между векторами n_1 и n_2 равен $180°-\beta=\alpha$, и

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

4) Если $A_1x_0+B_1y_0+C_1<0$, а $A_2x_0+B_2y_0+C_2>0$, то опять (рис. 9)

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

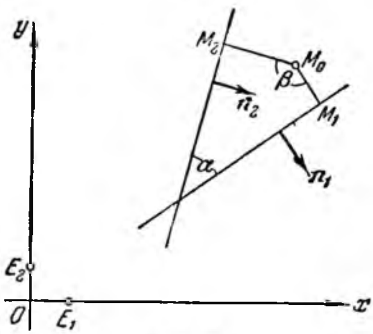

Рис. 9.

Пример 3. *Даны две пересекающиеся и не перпендикулярные прямые:*

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$

и точка $M_0(x_0, y_0)$, не лежащая ни на одной из этих прямых. При каком необходимом и достаточном условии эта точка лежит в остром угле, образованном этими прямыми?

Решение. Необходимость. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит в остром угле α, образованном данными прямыми. Тогда если числа $A_1x_0+B_1y_0+C_1$ и $A_2x_0+B_2y_0+C_2$ одного знака, то (см. пример 2):

$$\cos\alpha = -\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

и так как α — острый угол, то

$$A_1A_2+B_1B_2<0$$

и, следовательно,

$$(A_1A_2+B_1B_2)(A_1x_0+B_1y_0+C_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)<0.$$

Если же числа $A_1x_0+B_1y_0+C_1$ и $A_2x_0+B_2y_0+C_2$ разных знаков, то (см. пример 2):

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

и так как α — острый угол, то

$$A_1A_2+B_1B_2>0,$$

и потому снова

$$(A_1A_2+B_1B_2)(A_1x_0+B_1y_0+C_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)<0.$$

Аналогично доказывается, что если точка M_0 лежит в тупом угле, образованном данными прямыми, то

$$(A_1A_2+B_1B_2)(A_1x_0+B_1y_0+C_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)>0;$$

отсюда следует, что условие

$$(A_1A_2+B_1B_2)(A_1x_0+B_1y_0+C_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)<0$$

и достаточно для того, чтобы точка $M_0(x_0, y_0)$ лежала в остром угле, образованном данными прямыми.

Пример 4. *Даны две пересекающиеся и не взаимно перпендикулярные прямые:*

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Составить уравнение биссектрисы острого угла между ними.

Решение. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка биссектрисы острого угла между двумя данными прямыми. Тогда

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Так как точка $M(x, y)$ лежит в остром угле, образованном данными прямыми, то на основании примера 3

$$(A_1A_2+B_1B_2)(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)<0.$$

Поэтому, если $A_1A_2+B_1B_2>0$, то числа $A_1x+B_1y+C_1$ и $A_2x+B_2y+C_2$ разных знаков и потому уравнение биссектрисы острого угла в этом случае будет:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Если же $A_1A_2+B_1B_2<0$, то числа $A_1x+B_1y+C_1$ и A_2x+B_2y+ $+C_2$ одного знака и, значит, уравнение биссектрисы острого угла между двумя данными прямыми в этом случае будет:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Пример 5. *Стороны треугольника заданы уравнениями:*

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0, \qquad A_3x+B_3y+C_3=0.$$

Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника, лежащего против третьей стороны.

Решение. Решая системы уравнений:

$$A_2x+B_2y+C_2=0, \qquad A_3x+B_3y+C_3=0,$$

и

$$A_3x+B_3y+C_3=0, \qquad A_1x+B_1y+C_1=0,$$

находим координаты двух вершин M_1 и M_2 треугольника:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}, \qquad y_1=\frac{-\begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}};$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} B_3 & C_3 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}, \qquad y_2=\frac{-\begin{vmatrix} A_3 & C_3 \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}.$$

Подставляя координаты каждой из этих вершин в левую часть уравнения противолежащей стороны, находим:

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1=A_1\frac{\begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}-B_1\frac{\begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}+C_1=$$

$$=\frac{A_1\begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix}-B_1\begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix}+C_1\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}$$

и аналогично

$$A_2x_2+B_2y_2+C_2=\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}.$$

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка биссектрисы внутреннего угла M_3 данного треугольника. Тогда точки M_1 и M лежат по одну сторону от прямой M_2M_3, а потому числа

$$A_1x+B_1y+C_1$$

и

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1=\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}$$

одного знака. Точно так же и числа

$$A_2x+B_2y+C_2$$

и

$$\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}$$

одного знака. Поэтому, если числа

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$$

одного знака, то и числа $A_1x+B_1y+C_1$ и $A_2x+B_2y+C_2$ также одного знака, а потому уравнение искомой биссектрисы в этом случае будет:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Если же числа

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$$

разных знаков, то и числа $A_1x+B_1y+C_1$ и $A_2x+B_2y+C_2$ также разных знаков, а потому уравнение искомой биссектрисы в этом случае будет:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Пример 6. *Стороны треугольника заданы уравнениями:*

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0;$$
$$A_3x+B_3y+C_3=0.$$

Найти косинус внутреннего угла треугольника, лежащего против третьей стороны.

Решение. Обозначим вершины треугольника, лежащие против его сторон:

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3=0$$

соответственно через

$$M_1(x_1,\ y_1),\qquad M_2(x_2,\ y_2),\qquad M_3(x_3,\ y_3).$$

Как было показано в предыдущей задаче:

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1=\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}},$$

$$A_2x_2+B_2y_2+C_2=\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}.$$

Рассмотрим следующие случаи:

I.

$$\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}>0, \qquad \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}>0.$$

В этом случае конец вектора

$$n_1=\{A_1,\ B_1\},$$

отложенного от любой точки стороны

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$

и вершина M_1 лежат в одной и той же полуплоскости от этой прямой, а конец вектора

$$n_2=\{A_2,\ B_2\},$$

отложенного от любой точки стороны

$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$

и вершина M_2 лежат в одной и той же полуплоскости от этой

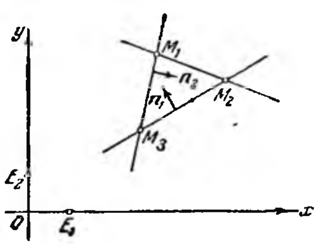

Рис. 10.

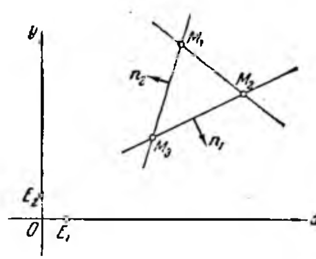

Рис. 11.

прямой (рис. 10). Поэтому угол между векторами n_1 и n_2 дополняет внутренний угол M_3 треугольника до 180° и, следовательно,

$$\cos M_3=-\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

II. $$\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} < 0, \qquad \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}} < 0.$$

В этом случае формула для определения $\cos M_3$ будет такой же (рис. 11).

III. Числа

$$\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} \quad \text{и} \quad \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}$$

разных знаков, например

$$\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} > 0, \qquad \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}} < 0.$$

В этом случае конец вектора

$$\boldsymbol{n}_1 = \{A_1,\ B_1\},$$

отложенного от любой точки стороны

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

и вершина M_1 лежат в одной и той же полуплоскости от этой

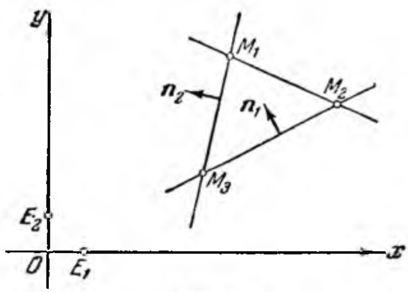

Рис. 12.

прямой, а конец вектора

$$\boldsymbol{n}_2 = \{A_2,\ B_2\},$$

отложенного от любой точки стороны

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

и вершина M_2 будут лежать в разных полуплоскостях от этой прямой (рис. 12). Поэтому угол между векторами n_1 и n_2 равен внутреннему углу M_2 треугольника и, следовательно,

$$\cos M_2=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Из изложенного следует, что если числа

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$$

одного знака, то

$$\cos M_2=-\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

а если эти числа разных знаков, то

$$\cos M_2=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Пример 7. *Стороны треугольника заданы уравнениями:*

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0, \qquad A_3x+B_3y+C_3=0.$$

Определить положение данной точки $M_0(x_0, y_0)$ относительно этого треугольника.

Решение. Обозначим, как и выше, через $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ вершины данного треугольника, лежащие соответственно против сторон:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0, \qquad A_3x+B_3y+C_3=0.$$

Как было показано в примере 5,

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1=\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}=\mu_1,$$

$$A_2x_2+B_2y_2+C_2=\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}=\mu_2,$$

$$A_3x_3+B_3y_3+C_3=\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}=\mu_3.$$

Рассмотрим три числа:

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1, \qquad A_2x_0+B_2y_0+C_2, \qquad A_3x_0+B_3y_0+C_3.$$

Если числа μ_1 и $A_1x_0+B_1y_0+C_1$ одного знака, то точки M_0 и M_1 лежат по одну сторону от прямой $A_1x+B_1y+C_1=0$, а если эти числа разных знаков, то точки M_0 и M_1 лежат по разные стороны от прямой $A_1x+B_1y+C_1=0$. Если, наконец, $A_1x_0+B_1y_0+C_1=0$, то точка M_0 лежит на прямой $A_1x+B_1y+C_1=0$. Аналогичные выводы можно сделать и для других двух прямых:

$$A_2x+B_2y+C_2=0, \quad A_3x+B_3y+C_3=0.$$

Точка M_0 относительно треугольника может занимать семь различных положений. Рассмотрим несколько случаев:

1) Числа μ_1 и $A_1x_0+B_1y_0+C_1$ одного знака;
числа μ_2 и $A_2x_0+B_2y_0+C_2$ одного знака;
числа μ_3 и $A_3x_0+B_3y_0+C_3$ одного знака.

Это условие, необходимое и достаточное для того, чтобы точка M_0 лежала внутри треугольника $M_1M_2M_3$.

2) Числа μ_1 и $A_1x_0+B_1y_0+C_1$ одного знака;
числа μ_2 и $A_2x_0+B_2y_0+C_2$ одного знака;
числа μ_3 и $A_3x_0+B_3y_0+C_3$ разных знаков.

В этом случае точка M_0 лежит внутри угла, образованного лучами M_3M_1 и M_3M_2, причем точки M_3 и M_0 лежат по разные стороны от прямой M_1M_2 (рис. 13).

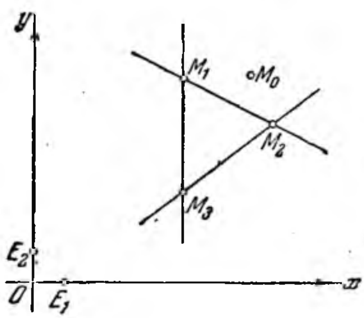

Рис. 13.

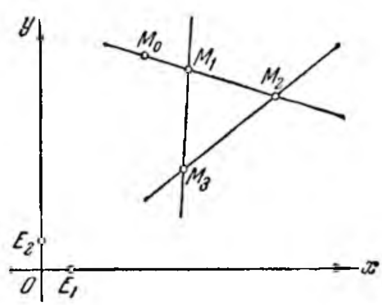

Рис. 14.

3) Числа μ_1 и $A_1x_0+B_1y_0+C_1$ одного знака;
числа μ_2 и $A_2x_0+B_2y_0+C_2$ разных знаков;
числа μ_3 и $A_3x_0+B_3y_0+C_3$ разных знаков.

В этом случае точка M_0 лежит внутри угла, образованного продолжением лучей M_1M_2 и M_1M_3 за точку M_1.

4) Числа μ_1 и $A_1x_0+B_1y_0+C_1$ одного знака;
числа μ_2 и $A_2x_0+B_2y_0+C_2$ разных знаков;

$$A_3x_0+B_3y_0+C_3=0.$$

В этом случае точка M_0 лежит на продолжении стороны M_1M_2 за точку M_1 (рис. 14).

Пример 8. *Относительно общей декартовой системы координат заданы уравнения двух пересекающихся прямых:*

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$

и точка $E'(x_0, y_0)$, не лежащая ни на одной из этих прямых. Прямая

$$A_1x+B_1y+C_1=0$$

принимается за новую ось ординат; прямая

$$A_2x+B_2y+C_2=0$$

принимается за новую ось абсцисс, а точка E' за единичную точку новой системы координат $O'x'y'$.

Доказать, что выражения новых координат x', y' произвольной точки M через ее старые координаты x и y будут иметь вид:

$$x'=\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_1x_0+B_1y_0+C_1}, \quad y'=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{A_2x_0+B_2y_0+C_2}.$$

Решение. Приведенные формулы можно рассматривать как формулы, выражающие координаты x', y' точки M в некоторой новой системе $O'x'y'$ через ее координаты x и y в данной системе, так как эти формулы линейны относительно x и y и

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Уравнение оси $O'y'$ в новой системе $O'x'y'$ будет $x'=0$, а так как

$$x'=\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_1x_0+B_1y_0+C_1},$$

то уравнение оси $O'y'$ в начальной системе Oxy будет

$$A_1x+B_1y+C_1=0.$$

Аналогично доказывается, что уравнение оси $O'x'$ в начальной системе Oxy будет:

$$A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Наконец, координаты точки $E'(x_0, y_0)$ в системе $O'x'y'$ будут:

$$x'=\frac{A_1x_0+B_1y_0+C_1}{A_1x_0+B_1y_0+C_1}=1, \qquad y'=\frac{A_2x_0+B_2y_0+C_2}{A_2x_0+B_2y_0+C_2}=1.$$

Значит, система координат $O'x'y'$ совпадает с той новой общей декартовой системой координат, которая задана в условии задачи.

Пример 9. *Относительно декартовой прямоугольной системы координат даны две взаимно перпендикулярные прямые:*

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Первая прямая принимается за новую ось ординат, причем ее положительное направление определяется вектором $\{A_2, B_2\}$; вторая прямая принимается за новую ось абсцисс, причем ее положительное направление определяется вектором $\{A_1, B_1\}$. Найти выражения новых координат x', y' произвольной точки M через ее старые координаты x и y.

Решение. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y)$, где x и y — координаты этой точки в старой системе. Тогда на основании формулы, определяющей расстояние от точки до прямой, имеем:

$$|x'| = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Далее, $A_1x + B_1y + C_1 > 0$ для координат всех точек той полуплоскости от прямой $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, где лежит конец вектора $\{A_1, B_1\}$, отложенного от любой точки этой прямой, а в силу выбора положительного направления новой оси $O'x'$, $x' > 0$, для любой точки той же полуплоскости.

Аналогично, если $A_1x + B_1y + C_1 < 0$, то и $x' < 0$.

Наконец, если $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, то и $x' = 0$.

Таким образом,

$$x' = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Аналогично

$$y' = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

§ 1. Составление уравнения прямой по различным ее заданиям

Если в условии задачи не указано название системы координат, то нужно предполагать ее прямоугольной.

163. Составить уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент 3 и отсекающей на оси ординат отрезок, равный 4. Система координат аффинная.

164. Составить уравнения прямых, проходящих через начало координат и наклоненных к оси Ox под углом: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 120°; 5) 135°; 6) 150°.

165. Составить уравнение прямой, наклоненной к оси Ox под углом 150° и отсекающей на оси Oy отрезок, равный $-\frac{1}{3}$. Найти точку пересечения этой прямой с осью абсцисс.

166. Найти угловой коэффициент и отрезки, отсекаемые на осях координат каждой из следующих прямых:

1) $2x - y + 4 = 0$; 4) $-3x + 4y - 6 = 0$;
2) $2x + 3y - 6 = 0$; 5) $3x + \sqrt{3}y + 3 = 0$.
3) $x + 2y + 1 = 0$;

Система координат аффинная.

167. Построить прямые по их уравнениям:

1) $y = 3x + 4$; 5) $y = 4x$; 10) $x + 2 = 0$;
2) $y = \frac{1}{2}x + 2$; 6) $y = -\frac{1}{2}x$; 11) $3x - 2 = 0$;
12) $y - 4 = 0$;
3) $y = \frac{3}{4}x - 5$; 7) $2x + 3y - 9 = 0$; 13) $2y + 3 = 0$;
8) $5x + 3y + 15 = 0$; 14) $x + y = 0$;
4) $y = -\frac{2}{3}x + 4$; 9) $3x + \sqrt{3}y + 1 = 0$; 15) $x - y = 0$.

Система координат аффинная.

168. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (2, 3) и имеющей угловой коэффициент, равный -5. Система координат аффинная.

169. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(-5, 3)$ и наклоненной к оси Ox под углом $135°$.

170. Построить прямую, зная одну ее точку A и угловой коэффициент в каждом из нижеследующих случаев:

1) $A(2, 4)$, $k = \frac{2}{3}$; 3) $A(-5, -2)$, $k = 3$;
2) $A(-2, 3)$, $k = -\frac{3}{4}$; 4) $A(4, -3)$, $k = -2$.

Система координат аффинная.

171. Луч света направлен по прямой $2x - 3y - 12 = 0$; дойдя до оси абсцисс, он от нее отразился. Определить точку встречи луча с осью и уравнение отраженного луча.

172. Составить уравнения прямых, проходящих через пары точек:

1) (1, 3) и (2, 4); 3) (1, 3) и (1, -7);
2) (2, 3) и $(-4, -6)$; 4) (2, -3) и (4, -3).

Система координат аффинная.

173. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку $(-1, -8)$. Система координат аффинная.

174. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $(3, -2)$ параллельно осям координат. Система координат аффинная.

175. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси Ox отрезок 3 и проходящей через точку $(-5, 3)$. Система координат аффинная.

176. Под каким углом к оси Ox наклонена прямая, проходящая через точки $(2, -5)$ и $(0, -3)$.

177. Под каким углом к оси Ox наклонена прямая, проходящая через точки $(1, 4)$ и $(3, 5)$.

178. Дан треугольник ABC: $A(-2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(6, -5)$. Написать уравнение медианы этого треугольника, проведенной из вершины A. Система координат аффинная.

179. Дан треугольник ABC: $A(4, 4)$, $B(-6, -1)$, $C(-2, -4)$. Написать уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине C.

180. Написать уравнение сторон равнобочной трапеции, зная, что основания ее соответственно равны 10 и 6, а боковые стороны образуют с основанием угол в $60°$. За ось Ox берется большее основание, за ось Oy берется ось симметрии трапеции, а за положительное направление оси Oy берется направление луча, пересекающего меньшее основание.

181. Составить уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки 3 и 5. Система координат аффинная.

182. Через точку $M(-4, 10)$ провести прямые, отсекающие на осях координат равные отрезки.

183. Через точку $(2, -1)$ провести прямую, отрезок которой между осями координат делился бы в данной точке пополам. Система координат аффинная.

184. Определить площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой: $x+2y-6=0$.

185. Написать уравнение прямой, параллельной прямой $2x+5y=0$ и образующей вместе с осями координат треугольник, площадь которого равна 5.

186. Через точку $M(4, -3)$ провести прямую так, чтобы площадь треугольника, образованного ею и осями, была равна 3.

187. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(3, -5)$ параллельно вектору $\{-4,2\}$. Система координат аффинная.

188. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(-6, -4)$ и имеющей угловой коэффициент $k=-\frac{3}{7}$. Система координат аффинная.

189. Составить параметрические уравнения прямой, отсекающей на осях Ox и Oy отрезки 3 и -5. Система координат аффинная.

190. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через начало координат и наклоненной к оси абсцисс под углом в 150°.

191. Написать в параметрической форме уравнения следующих прямых:

1) $3x+6y+5=0$;   4) $x=2$;
2) $x-2y-4=0$;   5) $y=-3$;
3) $y=-3x+5$;   6) $2x+3y=0$.

Система координат аффинная.

192. Записать в виде $Ax+By+C=0$ уравнения следующих прямых:

1) $x=t$, $y=1-3t$;
2) $x=2+5t$, $y=4-7t$.

Система координат аффинная.

§ 2. Взаимное расположение двух прямых. Условие параллельности

193. Установить, какие из нижеследующих пар прямых совпадают, параллельны или пересекаются; в последнем случае найти точку пересечения:

1) $x+y-3=0$, $2x+3y-8=0$;
2) $x-y+5=0$, $2x-2y+3=0$;
3) $x-2y+4=0$, $-2x+4y-8=0$;
4) $x+y+5=0$, $2x+3y+10=0$;
5) $2x+3y-1=0$, $4x+6y-7=0$;
6) $x-5y=0$, $2x-10y=0$;
7) $7x+9y-62=0$, $8x+3y+2=0$;
8) $x+2=0$, $2x+3=0$;
9) $x-y\sqrt{3}=0$, $x\sqrt{3}-3y=0$.

Система координат аффинная.

194. Установить, какие из нижеследующих пар прямых совпадают, параллельны или пересекаются; в последнем случае найти точку пересечения:

1) $x=3+t, \quad y=2-t; \qquad x=3t, \qquad y=-2t;$
2) $x=5+4t, \quad y=-2-2t; \quad x=1-2t, \qquad y=7+t;$
3) $x=4-8t, \quad y=2+6t; \qquad x=-4+4t, \quad y=8-3t.$

Система координат аффинная.

195. Установить, какие из нижеследующих пар прямых совпадают, параллельны или пересекаются; в последнем случае найти точку пересечения:

1) $3x+4y+5=0, \quad x=-3+4t, \quad y=1-3t;$
2) $2x-5y-7=0, \quad x=2+t, \quad y=-9-t;$
3) $6x-3y+5=0, \quad x=5+t, \quad y=-3+2t;$
4) $2x+5y-38=0, \quad x=-2+2t, \quad y=-9+5t;$
5) $3x+9y+5=0, \quad x=2+3t, \quad y=-t;$
6) $4x+5y-6=0, \quad x=-6+5t, \quad y=6-4t.$

Система координат аффинная.

196. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (2, 5) и параллельной вектору $\{5, 4\}$. Система координат аффинная.

197. Через точку (7, 4) провести прямую, параллельную прямой $3x-2y+4=0$. Система координат аффинная.

198. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (—8, 1) параллельно прямой $x+y+7=0$. Система координат аффинная.

199*. Через точку $M(2, 5)$ провести прямую, равноудаленную от точек $P(-1, 2)$ и $Q(5, 4)$. Система координат аффинная.

200. Даны середины $M_1(2, 3)$, $M_2(-1, 2)$ и $M_3(4, 5)$ сторон треугольника. Составить уравнения сторон. Система координат аффинная.

201. Зная уравнения двух сторон параллелограмма $x-3y=0$ и $2x+5y+6=0$ и одну из его вершин $C(4, -1)$, составить уравнения двух других сторон параллелограмма. Система координат аффинная.

202. Даны вершины треугольника: $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$ и $C(0, 4)$. Через каждую из них провести прямую, параллельную противолежащей стороне. Система координат аффинная.

203. Составить уравнение прямой, параллельной и равноудаленной от двух параллельных прямых: $x+y-1=0$, $x+y-13=0$. Система координат аффинная.

204. Составить уравнения прямых, равноудаленных от трех точек (1, 2), (3, 0), (—4, —5). Система координат аффинная.

205. Доказать, что условие

$$Ax_1+By_1+C=Ax_2+By_2+C$$

необходимо и достаточно для того, чтобы прямая $Ax+By+$ $+C=0$ была коллинеарна прямой, проходящей через точки $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$, т. е. эти прямые или параллельны, или совпадают. Система координат аффинная.

206. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x-y-1=0$, $x-2y=0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3,\ -1)$. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма. Система координат аффинная.

207*. Составить уравнения сторон параллелограмма $ABCD$, зная, что его диагонали пересекаются в точке $M(1,\ 6)$, а стороны AB, BC, CD и DA проходят соответственно через точки $P(3,\ 0)$, $Q(6,\ 6)$, $R(5,\ 9)$, $S(-5,\ 4)$. Система координат аффинная.

208*. Даны вершины треугольника $A(0,\ 1)$, $B(-2,\ 5)$, $C(4,\ 9)$. Составить уравнения сторон ромба, вписанного в данный треугольник, если одна из его вершин совпадает с точкой A, стороны, выходящие из вершины A, лежат на сторонах AC и AB данного треугольника, а вершина, противолежащая вершине A, лежит на стороне BC.

209. В параллелограмме $ABCD$ даны уравнения сторон AB: $3x+4y-12=0$ и AD: $5x-12y-6=0$ и точка $E\left(-2,\ \frac{13}{6}\right)$ — середина стороны BC. Найти уравнения других сторон параллелограмма. Система координат аффинная.

§ 3. Условие перпендикулярности двух прямых

210. Установить, какие из нижеследующих пар прямых будут взаимно перпендикулярны:

1) $x-2y+3=0,\quad 2x+y-5=0;$
2) $2x+3y-6=0,\quad 2x-3y+4=0;$
3) $3x+7y+4=0,\quad 7x-3y+2=0;$

4) $5x+6y-8=0, \quad 6x+5y+2=0;$
5) $x-y=0, \quad x+y=0;$
6) $x+3=0, \quad y-2=0.$

211. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (7, 4) перпендикулярно к прямой $3x-2y+4=0$.

212. Через точку пересечения прямых $3x-y=0$, $x+4y-2=0$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $2x+7y=0$.

213. Даны вершины треугольника: $A(4, 6)$, $B(-4, 0)$ и $C(-1, -4)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

214. Найти проекцию точки $(-5, 6)$ на прямую $7x-13y-105=0$.

215. Найти точку, симметричную точке $M(-2, 9)$ относительно прямой $2x-3y+18=0$.

216*. На прямой $x+y-3=0$ найти точку M такую, чтобы лучи MA и MB, выходящие из этой точки M и проходящие через точки $A(-2, -1)$ и $B(1, 3)$, образовывали с данной прямой равные углы.

217. На прямой $x-3y+1=0$ найти точку, равноудаленную от двух точек $(-3, 1)$ и $(5, 4)$.

218. Даны четыре точки $M_1(0, 0)$, $M_2(0, 1)$, $M_3(-2, 1)$ и $M_4(1, 1)$. Найти точку M, зная, что она служит вершиной равнобедренных треугольников MM_1M_2 и MM_3M_4, боковые стороны которых MM_1, MM_2 и MM_3, MM_4.

219. Даны две вершины треугольника $A(-6, 2)$, $B(2, -2)$ и точка $H(1, 2)$ пересечения его высот. Вычислить координаты третьей вершины C.

220. В треугольнике ABC известны: сторона AB: $4x+y-12=0$, высота BH: $5x-4y-15=0$ и высота AH: $2x+2y-9=0$. Написать уравнения двух других сторон и третьей высоты.

221. Точка пересечения высот треугольника лежит в начале координат. Уравнения двух сторон этого треугольника $x+3y-1=0$, $3x+5y-6=0$. Составить уравнение третьей стороны.

222. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(3, -4)$ и уравнения двух высот: $7x-2y-1=0$ и $2x-7y-6=0$.

§ 4. Угол двух прямых

223. Определить углы между двумя прямыми, если известны их угловые коэффициенты $k_1 = \frac{1}{3}$, $k_2 = -\frac{1}{2}$.

224. Через точку (3, 1) провести прямые, наклоненные к прямой $2x + 3y - 1 = 0$ под углом 45°.

225. Через начало координат провести прямые, образующие с прямой $5x - 6y + 2 = 0$ углы, тангенсы которых равны $\pm\frac{7}{6}$.

226*. Даны две точки $A(3, 3)$ и $B(0, 2)$. На прямой $x + y - 4 = 0$ найти точку, из которой отрезок AB виден под углом 45°.

227. Для каждой из нижеследующих упорядоченных пар прямых найти тангенс угла от первой прямой до второй прямой:

1) $2x + 3y = 0, \quad x - y + 5 = 0;$
2) $x - 3y + 2 = 0, \quad 2x + y = 0;$
3) $2x + 5y - 3 = 0, \quad 5x + 2y - 6 = 0;$
4) $3x + 4y - 12 = 0, \quad 5x - 12y + 60 = 0.$

228*. Даны уравнения основания равнобедренного треугольника $x + y - 1 = 0$ и боковой его стороны $x - 2y - 2 = 0$; точка $(-2, 0)$ лежит на другой боковой стороне. Найти уравнение третьей стороны треугольника.

229. Даны две прямые: $x + 3y = 0$ и $x - y + 8 = 0$. Найти третью прямую так, чтобы вторая из данных прямых была биссектрисой угла между первой из данных прямых и искомой прямой.

230*. Даны вершины $(-2, 1)$ и $(4, 5)$ в основании равнобедренного треугольника и косинус угла A при его вершине: $\cos A = \frac{15}{17}$. Найти координаты вершины A.

231*. Даны вершина B $(-3, -1)$ равнобедренного треугольника, вершина C $(2, 1)$ в его основании и $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ угла при вершине. Составить уравнения сторон треугольника.

232*. Даны две вершины $A(1, 2)$ и $B(3, 4)$ треугольника и косинусы внутренних углов A и B, прилежащих к данным вершинам: $\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos B = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Составить уравнения сторон треугольника и найти его третью вершину.

233*. Дана вершина $C(-3, 2)$ треугольника, косинусы его внутренних углов A и B: $\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos B = \frac{3}{5}$, и уравнение $2x - y - 2 = 0$ стороны AB. Составить уравнения сторон треугольника.

234*. Определить тангенсы внутренних углов треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x + 2y = 0$, $3x - y = 0$, $x + y - 1 = 0$.

§ 5. Расположение точек относительно прямой

235. Определить положение точек $M_1(0, 0)$, $M_2(2, 1)$, $M_3(-3, 1)$, $M_4(3, -1)$, $M_5(4, 2)$, $M_6(-1, 1)$, $M_7(1, -1)$, $M_8(-6, 4)$ относительно прямой $2x + 3y = 0$. Система координат аффинная.

236. В каком отношении прямая $2x - y + 5 = 0$ делит отрезок, начало которого находится в точке $(-5, 4)$, а конец — в точке $(2, 1)$? Система координат аффинная.

237. Даны две точки $A(-3, 1)$ и $B(5, 4)$ и прямая $x - 2y = 0$. Доказать, что данная прямая пересекает продолжение отрезка AB за точку B. Система координат аффинная.

238. Доказать, что прямая $5x - y - 5 = 0$ пересекает отрезок прямой $3x - 2y - 6 = 0$, заключенный между осями координат. Система координат аффинная.

239. Даны четыре точки $M_1(5, 3)$, $M_2(1, 2)$, $M_3(3, 0)$ и $M_4(2, 4)$. Доказать, что прямые M_1M_2 и M_3M_4 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке, лежащей как между точками M_1 и M_2, так и между точками M_3 и M_4.

240*. При каком необходимом и достаточном условии точка (x_0, y_0) лежит между двумя параллельными прямыми $Ax + By + C = 0$, $Ax + By + D = 0$ $(C \neq D)$? Система координат аффинная.

241*. При каких значениях параметра u мы будем получать точки прямой $x = 2 + 5u$, $y = -1 + u$, принадлежащие отрезку этой прямой, заключенному между двумя прямыми $x + 4y - 1 = 0$, $x + y = 0$? Система координат аффинная.

242*. По отношению к аффинной системе координат заданы три прямые: $Ax + By + C = 0$, $Ax + By + D = 0$,

$Ax+By+E=0$. Доказать, что вторая прямая проходит между первой и третьей тогда и только тогда, когда $C<D<E$ или $C>D>E$.

243*. В каждом из нижеследующих случаев определить, принадлежат ли две точки, заданные своими координатами, одному углу, смежным углам или вертикальным углам, образованным прямыми, заданными своими уравнениями:

1) (3, 5), (—2, 1), $3x-y+8=0$, $2x+5y-6=0$;
2) (6, —2), (5, 2), $x+y-3=0$, $2x+3y=0$;
3) (2, —2), (3, 6), $x-2y+1=0$, $2x+6y-9=0$.

Система координат аффинная.

244. Две параллельные прямые $2x-5y+6=0$ и $2x-5y-7=0$ делят плоскость на три области: полосу, заключенную между этими прямыми, и две области вне этой полосы. Установить, каким областям принадлежат точки $A(2, 1)$, $B(3, 2)$, $C(1, 1)$, $D(2, 8)$, $E(7, 1)$, $F(-4, 6)$. Система координат аффинная.

245. Определить положение отрезка M_1M_2 относительно прямой l: $2x-y+5=0$, в каждом из следующих случаев:

1) $M_1(2, 3)$, $M_2(0, -1)$;
2) $M_1(1, 1)$, $M_2(3, 5)$;
3) $M_1(4, 3)$, $M_2(-2, 2)$;
4) $M_1(0, 2)$, $M_2(5, 0)$;
5) $M_1(-6, 4)$, $M_2(-2, 4)$,

и проверить результаты построением. Система координат аффинная.

246*. Определить положение прямой $x-7y+5=0$ относительно треугольника, вершины которого $A(3, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(1, 0)$. Система координат аффинная.

247*. Определить положение точек $A(3, 1)$, $B(7, -6)$, $C(-1, 1)$, $D(3, 2)$ относительно треугольника, уравнения сторон которого $2x-y+2=0$, $x+y-4=0$, $2x+y=0$. Система координат аффинная.

248*. Определить положение прямой $2x-y+3=0$ относительно треугольника, стороны которого заданы уравнениями $3x-y+4=0$, $2x-y+1=0$, $x-2y=0$. Система координат аффинная.

249*. Найти косинус того угла между двумя прямыми $2x-7y+3=0$, $x+5y=0$, в котором лежит данная точка $(3, 1)$.

250*. В каком (остром или тупом) угле, образованном прямыми $2x-y+3=0$, $x-4y=0$, лежит точка $(2, -1)$.

§ 6. Взаимное расположение трех прямых; пучок прямых

251. Определить взаимное расположение прямых в каждой из следующих троек прямых:

1) $2x+y-3=0$, $3x-2y+5=0$, $5x-y+2=0$;
2) $x-2y+3=0$, $2x-4y+7=0$, $3x-6y+4=0$;
3) $x+4y-5=0$, $x-2y+7=0$, $x+3=0$;
4) $y-5=0$, $y+2=0$, $y=0$;
5) $x-y+3=0$, $2x-2y+7=0$, $4x-4y+1=0$;
6) $2x+3y+5=0$, $x-y+1=0$, $3x-4y-12=0$;
7) $3x+2y+6=0$, $9x+6y-5=0$, $5x-y+3=0$.

Система координат аффинная.

252. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x+y-3=0$, $7x-4y+2=0$. Система координат аффинная.

253. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых: $7x-y+3=0$ и $3x+5y-4=0$, и через точку $A(2, -1)$. Система координат аффинная.

254. Через точку пересечения прямых $3x-5y+2=0$, $5x-2y+4=0$ провести прямую, параллельную прямой $2x-y+4=0$. Система координат аффинная.

255. Через точку пересечения прямых $2x-6y+3=0$, $5x+y-2=0$ провести прямые, параллельные осям координат. Система координат аффинная.

256. Через точку пересечения прямых $x+y-6=0$, $2x+y-13=0$ провести прямую, отсекающую на осях координат равные отрезки (учитывая и знаки).

257. Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения пар прямых $2x-y=0$, $x+4y-2=0$ и $x+2y=0$, $3x-7y+4=0$. Система координат аффинная.

258. Через точку пересечения прямых $3x-y=0$, $x+4y-2=0$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $2x+7y=0$.

259. Составить уравнения прямых, проходящих через точку пересечения прямых $x+y-4=0$, $2x+3y-9=0$ и наклоненных ко второй из данных прямых под углом $45°$.

260. Через точку пересечения прямых $2x+y=0$, $3x+7y-11=0$ провести прямую, образующую с прямой $x+4y=0$ углы, тангенсы которых равны ± 2.

261. Через точку пересечения прямых $3x+y+10=0$, $4x+5y+6=0$ провести прямую, отстоящую от начала координат на расстоянии 4.

262*. Даны две параллельные прямые

$$Ax+By+C=0, \quad Ax+By+D=0 \quad (C \neq D).$$

Определить положение прямой $Ax+By+\frac{C+\lambda D}{1+\lambda}=0$ относительно этих прямых. Система координат аффинная.

§ 7. Расстояние от точки до прямой

263. Найти расстояния от точек $(3,\ 1)$, $(2,\ -4)$, $(5,\ -1)$, $(0,\ -3)$, $(0,\ 0)$ до прямой $3x+4y=0$.

264. Определить расстояния от точек $(1,\ 0)$ и $(-1,\ 2)$ до прямой $3x-y+4=0$.

265. Найти длины высот треугольника, стороны которого заданы уравнениями: $3x-4y-3=0$, $5x+12y+2=0$, $3x+4y+390=0$.

266. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $5x+12y-1=0$ и отстоящих от нее на расстоянии 5.

267. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $7x-2y+4=0$ и отстоящих от нее на расстоянии $\sqrt{53}$.

268. Доказать, что прямые $3x-7y+2=0$, $3x-7y+3=0$ параллельны, и найти расстояние d между ними.

269. Составить уравнения биссектрис углов между следующими прямыми:

1) $3x-y+5=0$, $3x+y-4=0$;

2) $3x-4y+2=0$, $5x+12y-3=0$;

3) $x-y=0$, $x+y=0$;

4) $x+2y=0$, $3x+4y=0$.

270. На осях координат найти точки, равноудаленные от прямых $5x-y+6=0$, $5x+y-3=0$.

271. На прямой $x+2y-12=0$ найти точки, равноудаленные от прямых $x+y-5=0$ и $7x-y+11=0$.

272. На прямой $x-3y+13=0$ найти точки, отстоящие от прямой $x+2y+3=0$ на расстоянии $\sqrt{5}$.

273. Найти точку, отстоящую от каждой из прямых $4x-3y+20=0$, $3x+4y-60=0$ на расстоянии 5.

274. Составить уравнения прямых, перпендикулярных к прямой $2x+6y-3=0$ и отстоящих от точки (5, 4) на расстоянии $\sqrt{10}$.

275. Составить уравнение прямой, параллельной прямой $5x-12y+46=0$ и отстоящей от точки (1, 1) на расстоянии 3.

276. Составить уравнение прямой, параллельной оси Oy и отстоящей от точки (3, 5) на расстоянии 7.

277. Составить уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент $k=-\frac{1}{2}$ и отстоящей от начала координат на расстоянии $\sqrt{5}$.

278. Через начало координат провести прямую, отстоящую от точки (3, -2) на расстоянии 1.

279*. Через точку (3, -1) провести прямую, отстоящую от точки (2, -3) на расстоянии $\frac{9}{\sqrt{17}}$.

280*. Составить уравнение прямой, отстоящей от точки (1, 1) на расстоянии 2, а от точки (2, 3) на расстоянии 4.

281*. Составить уравнения прямых, отстоящих от точки (1, 9) на расстоянии 5 и наклоненных к прямой $x-7y=0$ под углом 45°. Найти вершины квадрата, образованного этими прямыми.

282. Составить уравнения прямых, образующих с осью Oy углы, тангенсы которых равны ± 2 и отстоящих от начала координат на расстоянии $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

283. На прямой $x+y-8=0$ найти точки, равноудаленные от точки (2, 8) и от прямой $x-3y+2=0$.

284. На прямой $x-2y=0$ найти точки, отстоящие от прямой $2x+4y+1=0$ на расстоянии $\sqrt{5}$.

285. Составить уравнения двух параллельных прямых, зная, что расстояние между ними равно $\frac{4}{\sqrt{5}}$ и что на оси Ox они отсекают отрезки, равные соответственно -3 и -7.

286. Найти точки, равноудаленные от биссектрис координатных углов и от точки $(1, \sqrt{2})$.

287. Найти точки, отстоящие от прямой $3x+4y=0$ на расстоянии 2, а от прямой $x+3y-1=0$ на расстоянии $\sqrt{10}$.

288. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат, зная, что сумма расстояний от точек $(1, 1)$ и $(2, -3)$ до этой прямой равна $\frac{8}{\sqrt{5}}$.

289. Найти точку, находящуюся на равных расстояниях от точек $(4, 1)$ и $(8, -3)$ и от прямой $5x+12y=0$.

290*. Внутри треугольника, образованного прямыми $7x+y-2=0$, $5x+5y-4=0$ и $2x-2y+5=0$, найти точку, равноудаленную от двух его сторон $7x+y-2=0$, $5x+5y-4=0$ и отстоящую от третьей стороны $2x-2y+5=0$ на расстоянии $\frac{3}{4}\sqrt{2}$.

291. Центр симметрии квадрата находится в точке $(-1, 0)$; уравнение одной из его сторон $x+3y-5=0$. Составить уравнения трех других сторон.

292*. Даны уравнения $x+y-5\sqrt{2}=0$, $x+y=0$ параллельных сторон ромба и точки $(3, 5)$ и $(1, 0)$, лежащие на двух других его сторонах. Составить уравнения двух других сторон.

293*. Составить уравнения сторон квадрата, две параллельные стороны которого проходят через точки $(2, 1)$ и $(3, 5)$, а две другие — через точки $(0, 1)$ и $(-3, -1)$.

294*. Составить уравнение биссектрисы того угла между прямыми $x+y-3=0$, $7x-y+4=0$, в котором лежит данная точка $(-1, 5)$.

295*. Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $7x-y+4=0$, $x+y-2=0$ и точка $(3, 5)$ на его основании. Составить уравнение основания.

296*. Составить уравнения биссектрис внутренних углов треугольника, стороны которого заданы уравнениями: $3x-4y=0$, $4x-3y=0$, $5x+12y-10=0$.

297. Найти центр круга, вписанного в треугольник, ограниченный осями координат и прямой $3x-4y-5=0$.

298*. Найти центр круга, вписанного в треугольник, стороны которого заданы уравнениями $x+y+12=0$, $7x+y=0$, $7x-y+28=0$.

299*. Составить уравнение биссектрисы острого угла между двумя прямыми $x-3y=0$, $3x-y+5=0$.

300. Привести к нормальному виду уравнение прямой $10x+56y-39=0$, если $g_{11}=4$, $g_{12}=8$, $g_{22}=25$.

301. Определить расстояние от точки $M(2, 1)$ до прямой $10x+56y-37=0$, если $g_{11}=4$, $g_{12}=8$, $g_{22}=25$.

§ 8. Смешанные задачи на прямую

302. Даны две прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$. Найти геометрическое место середин отрезков, высекаемых данными прямыми на прямых, параллельных оси ординат. Система координат аффинная.

303*. Найти геометрическое место точек пересечения диагоналей прямоугольников, вписанных в треугольник так, что две вершины прямоугольника лежат на основании данного треугольника, а две другие — на его боковых сторонах.

304*. Найти геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограммов, вписанных в данный четырехугольник так, что стороны этих параллелограммов параллельны диагоналям четырехугольника.

305*. Три вершины параллелограмма, стороны которого остаются параллельными данным направлениям, скользят по трем данным прямым. Найти геометрическое место четвертой вершины.

306*. Найти геометрическое место точек, расположенных внутри треугольника, сумма расстояний которых до двух сторон треугольника равна расстоянию до третьей стороны.

307. На прямых $x+y-2=0$, $5x+y-14=0$ найти соответственные точки A и B такие, чтобы прямая AB имела угловой коэффициент, равный 3, и чтобы длина отрезка AB равнялась $\sqrt{10}$.

308*. Через точку $(1, 1)$ провести прямые, образующие между собой угол, тангенс которого равен $\frac{2}{11}$ и которые от прямой $x-y+1=0$ отсекают отрезок длины $2\sqrt{2}$.

309. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(2, -1)$, зная, что ее отрезок между параллельными прямыми $x-y+5=0$, $x-y-2=0$ равен 5.

310. Составить уравнение прямой, равноудаленной от точек $(2, 5)$ и $(3, 1)$ и такой, что ее отрезок между двумя данными прямыми $x+y-3=0$, $x+y-10=0$ равняется 5.

311. Найти площадь треугольника, уравнения сторон которого $2x+3y-13=0$, $x+2y-7=0$, $x+y-5=0$.

312*. Через точку $(15, 6)$ провести прямую, отсекающую от прямых $5x-2y-5=0$, $2x+5y-2=0$ треугольник, площадь которого равна 29.

313*. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $x-3y=0$ и отсекающих от двух пересекающихся прямых $3x-2y-1=0$, $4x-5y+1=0$ треугольник, площадь которого равна $\frac{7}{2}$.

314. Даны две точки $A(3, 5)$ и $B(-1, -2)$. На прямой $7x-6y+1=0$ найти точку C такую, что площадь треугольника ABC равна 1.

315. Даны четыре точки $A(3, 0)$, $B(-1, -2)$, $C(-3, 1)$ и $D(7, 2)$. На прямой $5x-2y-95=0$ найти точку M такую, чтобы треугольники MAB и MCD были равновелики.

316*. Даны вершина $(-2, 3)$ треугольника, угловой коэффициент $k=\frac{1}{2}$ стороны, противолежащей этой вершине, и площадь треугольника $S=5$. Найти две другие вершины, зная, что они расположены на прямых

$$x+4y-9=0, \qquad x+4y-21=0.$$

317*. Даны уравнения медиан треугольника: $4x+y-6=0$, $2x+y-2=0$, $x-2=0$ и его площадь $S=3$. Найти вершины треугольника.

318*. Точки $(-7, 2)$ и $(3, 0)$ являются вершинами равнобедренного треугольника, при которых углы треугольника равны. Составить уравнения сторон этого треугольника, зная, что площадь его равна 26.

319*. Дана вершина $(3, 5)$ равнобедренного треугольника, уравнение $x-2y+12=0$ его основания и площадь $S=15$. Составить уравнения боковых сторон.

320*. Даны уравнения $7x+y=0$, $x-y=0$ высот равнобедренного треугольника, опущенных на его равные стороны, и его площадь $S=80$. Найти вершины треугольника.

321. Даны две вершины $(0, 7)$ и $(-2, 3)$ треугольника, площадь которого $S=3$, и прямая $x-7=0$, на которой лежит третья вершина. Составить уравнения сторон треугольника.

322. За новые оси аффинной системы координат принимаются прямые

$$x-y+2=0 \text{ (ось } O'y'), \qquad 2x+y-4=0 \text{ (ось } O'x'),$$

а за новую единичную точку принимается точка $(3, 7)$. Составить формулы преобразования координат. Система координат аффинная.

323. Как запишется уравнение $x-y+6=0$ прямой в новой аффинной системе координат, если за новые оси координат принимаются прямые

$$2x-y+7=0 \text{ (ось } O'y'), \qquad x+y-4=0 \text{ (ось } O'x'),$$

а за новую единичную точку принимается старое начало координат. Система координат аффинная.

324*. Через точку $P(-3, -5)$ провести прямую, отрезок которой между прямыми $2x+3y-15=0$, $4x-5y-12=0$ в точке P делился бы пополам. Система координат аффинная.

325*. Дана точка $(0, 2)$ пересечения медиан треугольника и уравнения двух его сторон $5x-4y+15=0$, $4x+y-9=0$. Найти координаты вершин треугольника и уравнение третьей стороны. Система координат аффинная.

326*. Даны уравнения двух сторон треугольника $2x-y=0$, $5x-y=0$ и уравнение $3x-y=0$ одной из его медиан. Составить уравнение третьей стороны, зная, что на ней лежит точка $(3, 9)$, и найти координаты его вершин.

327*. Точка пересечения медиан треугольника лежит в начале координат. Уравнения двух его сторон: $x+y-4=0$, $2x+y-1=0$. Найти вершины треугольника и уравнение третьей стороны. Система координат аффинная.

328*. Даны уравнения $4x+5y=0$, $x-3y=0$ медиан треугольника и его вершина $(2, -5)$. Составить уравнения сторон треугольника и найти его вершины. Система координат аффинная.

329*. Даны уравнения $3x-2y+1=0$, $x-y+1=0$ двух сторон треугольника и уравнение $2x-y-1=0$ одной из его медиан. Составить уравнение третьей его стороны. Система координат аффинная.

330*. Даны уравнения $x+y-5=0$, $2x+y-11=0$ двух медиан треугольника и уравнение $x-2y+7=0$ одной из его сторон. Составить уравнения двух других сторон треугольника и найти его вершины. Система координат аффинная.

331*. Составить уравнения прямых, проходящих соответственно через точки $(0, 4)$ и $(5, 0)$, зная уравнение $2x-2y+1=0$ одной из биссектрис угла между ними.

332*. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(2, -4)$ и уравнения биссектрис двух его углов $x+y-2=0$ и $x-3y-6=0$.

333.** Даны уравнения $x+4=0$, $4x+7y+5=0$ биссектрис двух внутренних углов треугольника и уравнение $3x+4y=0$ стороны, соединяющей вершины, из которых выходят данные биссектрисы. Составить уравнения двух других сторон треугольника.

334*. Даны уравнения сторон треугольника $3x+y-3=0$, $3x+4y=0$ и уравнение $x-y+5=0$ биссектрисы одного из внутренних углов этого треугольника. Составить уравнение третьей стороны.

335. На прямой $7x+3y-14=0$ найти точки, сумма расстояний каждой из которых до двух точек $(2, 3)$ и $(-1, 4)$ равна 8.

336. Даны четыре точки $M_1(5, 6)$, $M_2(2, 1)$, $M_3(7, 3)$ и $M_4(3, 11)$. Найти точки, из которых отрезки M_1M_2 и M_3M_4 видны под прямым углом.

337*. Составить уравнения медиан треугольника, стороны которого заданы уравнениями $A_kx+B_ky+C_k=0$, $k=1, 2, 3$, относительно аффинной системы координат.

338*. Составить уравнения высот треугольника, стороны которого заданы уравнениями $A_kx+B_ky+C_k=0$, $k=1, 2, 3$.

339*. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A треугольника ABC, стороны которого заданы уравнениями:

$$\begin{aligned} 2x+y-7&=0 \quad (AB),\\ 3x-4y-5&=0 \quad (BC),\\ 5x-3y-1&=0 \quad (CA). \end{aligned}$$

340. Найти косинус внутреннего угла A треугольника, стороны которого заданы уравнениями:

$$\begin{aligned} 2x + y - 7 &= 0 \quad (AB), \\ 3x - 4y - 5 &= 0 \quad (BC), \\ 5x - 3y - 1 &= 0 \quad (CA). \end{aligned}$$

341*. Даны две пары параллельных прямых

$$Ax + By + C = 0, \quad Ax + By + D = 0 \quad (C \neq D)$$

и

$$A'x + B'y + C' = 0, \quad A'x + B'y + D' = 0 \quad (C' \neq D').$$

Вычислить площадь параллелограмма, ими образованного.

342*. Даны две пересекающиеся и не взаимно перпендикулярные прямые

$$A_kx + B_ky + C_k = 0, \quad k = 1, 2,$$

и еще прямая

$$x = x_0 + lu, \quad y = y_0 + mu.$$

При каком необходимом и достаточном условии отрезок последней прямой между двумя первыми лежит в остром угле, образованном двумя первыми прямыми.

343*. Даны три прямые $A_kx + B_ky = 0$, $k = 1, 2, 3$, проходящие через начало координат. При каком необходимом и достаточном условии третья прямая проходит в остром угле, образованном двумя первыми. Система координат прямоугольная.

344*. AB и CD — две пересекающиеся прямые. Через произвольную точку P, не лежащую ни на одной из них, проводится фиксированная прямая PMN (M и N — точки пересечения этой прямой соответственно с прямыми AB и CD). Через точку P проводятся произвольные прямые, пересекающие прямые AB и CD соответственно в точках S и T; пусть K — точка пересечения прямых SN и MT. Найти геометрическое место точек K.

345*. Прямая l пересекает стороны BC, CA и AB треугольника ABC соответственно в точках P, Q и R. Эти стороны вращаются вокруг точек P, Q и R, причем вершины A и B скользят по двум прямым p и q. Найти геометрическое место третьей вершины.

346*. Возьмем на плоскости n точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Пусть прямая l пересекает прямые $M_1M_2, M_2M_3, \ldots, M_{n-1}M_n$ соответственно в точках $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$. Будем вращать прямые $M_1M_2, M_2M_3, \ldots, M_{n-1}M_n$ соответственно вокруг точек $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ и пусть при этом точки $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ описывают прямые линии. Какую линию описывает точка M_n?

347*. На стороне BC треугольника ABC взята точка O, не совпадающая ни с точкой B, ни с точкой C. Через точку O проводятся прямые. Пусть какая-нибудь из проведенных прямых пересекает стороны AB и AC в точках P и Q. Найти геометрическое место точек, в которых пересекаются окружности, описанные около треугольников OBP и OQC.

ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ

Рассмотрим ряд примеров на составление уравнений геометрических мест в декартовых координатах, в полярных координатах, а также параметрических уравнений.

Пример 1. *Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых отношение расстояний до двух данных точек A и B равно данному числу k, не равному* 1:

$$\frac{MA}{MB}=k.$$

Решение. Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат, принимая за ось абсцисс прямую AB. Пусть абсциссы точек A и B в выбранной системе будут x_1 и x_2. Мы пока не знаем, существует ли хотя бы одна точка M, для которой

$$\frac{MA}{MB}=k.$$

Предположим, что такие точки существуют, и пусть $M(x, y)$ — одна из этих точек. Тогда

$$MA=\sqrt{(x-x_1)^2+y^2}, \quad MB=\sqrt{(x-x_2)^2+y^2},$$

откуда

$$\frac{\sqrt{(x-x_1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-x_2)^2+y^2}}=k. \tag{1}$$

Полученное уравнение мы подвергнем ряду преобразований. При этом каждый раз мы должны:

I. Установить, будет ли всякое решение преобразованного уравнения решением предыдущего уравнения. Если преобразованное уравнение имеет решения, не являющиеся решениями предыдущего уравнения, то надо указать, какие дополнительные условия следует присоединить к преобразованному уравнению, чтобы исключить эти решения; эти дополнительные условия обычно являются неравенствами.

II. Установить, что любое решение исходного уравнения является решением и преобразованного уравнения. Если это не так, то подобное преобразование недопустимо, так как мы при этом получим такое уравнение, которому не будут удовлетворять координаты некоторых точек заданного геометрического места.

Если исходное и преобразованное уравнения равносильны, то условия I и II будут выполнены.

Возведем обе части уравнения (1) в квадрат; получим:

$$\frac{(x-x_1)^2+y^2}{(x-x_2)^2+y^2}=k^2. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) равносильны; в самом деле, если числа x и y удовлетворяют уравнению (1), то эти же числа удовлетворяют и уравнению (2).

Обратно, если числа x и y удовлетворяют уравнению (2), то, так как слева и справа в равенстве (2) стоят неотрицательные числа, из равенства (2) следует:

$$\frac{\sqrt{(x-x_1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-x_2)^2+y^2}}=\sqrt{k^2}=|k|=k.$$

Далее, освобождаясь в уравнении (2) от знаменателя, получим:

$$(x-x_1)^2+y^2=k^2[(x-x_2)^2+y^2]. \tag{3}$$

Уравнения (2) и (3) равносильны. В самом деле, если числа x и y удовлетворяют уравнению (2), то они удовлетворяют и уравнению (3). Обратно, если числа x и y удовлетворяют уравнению (3), то $(x-x_2)^2+y^2 \neq 0$. В самом деле: если бы $(x-x_2)^2+y^2=0$, то отсюда следовало, что $x=x_2$, $y=0$, и далее, так как числа x и y по предположению удовлетворяют равенству (3), то мы имели бы $(x_1-x_2)^2=0$, что не имеет места $(x_1 \neq x_2)$, так как точки A и B различны.

Итак, если числа x и y удовлетворяют равенству (3), то $(x-x_2)^2+y^2 \neq 0$, и, значит, из равенства (3) следует равенство (2).

Преобразуя уравнение (3), получаем следующую цепь равносильных друг другу уравнений:

$$x^2-2x_1x+x_1^2+y^2=k^2x^2-2k^2x_2x+k^2x_2^2+k^2y^2, \tag{4}$$

$$(1-k^2)\,x^2+(1-k^2)\,y^2-2\,(x_1-k^2x_2)\,x+x_1^2-k^2x_2^2=0, \tag{5}$$

$$x^2+y^2-2\,\frac{x_1-k^2x_2}{1-k^2}\,x+\frac{x_1^2-k^2x_2^2}{1-k^2}=0, \tag{6}$$

$$\left(x-\frac{x_1-k^2x_2}{1-k^2}\right)^2+y^2+\frac{x_1^2-k^2x_2^2}{1-k^2}-\frac{(x_1-k^2x_2)^2}{(1-k^2)^2}=0, \tag{7}$$

$$\left(x-\frac{x_1-k^2x_2}{1-k^2}\right)^2+y^2=\left[\frac{k\,(x_2-x_1)}{1-k^2}\right]^2. \tag{8}$$

Уравнения (1) и (8) равносильны.

Уравнение (8) есть уравнение окружности с центром в точке

$$C\left(\frac{x_1-k^2x_2}{1-k^2},\ 0\right)$$

и радиусом

$$r=\frac{k\,|x_2-x_1|}{|1-k^2|}.$$

Поэтому геометрическое место, определяемое условием задачи, и есть эта окружность.

Центр C окружности лежит на прямой AB (так как ордината точки C равна 0) и делит отрезок AB «внешним образом» в отношении $-k^2$. Так как $|x_2-x_1|$ — длина отрезка AB, то радиус этой окружности равен

$$r=\frac{kAB}{|1-k^2|}.$$

Пример 2. *Найти геометрическое место точек M, сумма квадратов расстояний каждой из которых до двух вершин A и B треугольника ABC равна квадрату расстояния до третьей вершины C.*

Решение. Выберем на плоскости какую-нибудь декартову прямоугольную систему координат и пусть x_1, y_1; x_2, y_2 и x_3, y_3 — координаты вершин A, B, C треугольника. Предположим, что существует хотя бы одна точка $M(x, y)$, удовлетворяющая условию задачи, т. е.

$$MA^2+MB^2=MC^2;$$

тогда

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=(x-x_3)^2+(y-y_3)^2,$$

или

$$x^2+y^2-2(x_1+x_2-x_3)\,x-2(y_1+y_2-y_3)\,y+\\ +x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-x_3^2-y_3^2=0,$$

или

$$[x-(x_1+x_2-x_3)]^2+[y-(y_1+y_2-y_3)]^2+x_1^2+y_1^2+x_2^2+\\ +y_2^2-x_3^2-y_3^2-(x_1+x_2-x_3)^2-(y_1+y_2-y_3)^2=0,$$

или

$$[x-(x_1+x_2-x_3)]^2+[y-(y_1+y_2-y_3)]^2=[(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2]+\\ +[(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2]-[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2].$$

Рассмотрим точку D с координатами:

$$x_0=x_1+x_2-x_3,\quad y_0=y_1+y_2-y_3.$$

Тогда последнее уравнение примет вид:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=BC^2+CA^2-AB^2.$$

Если $BC^2+CA^2>AB^2$, т. е. угол C острый, то это уравнение определяет окружность с радиусом

$$r=\sqrt{BC^2+CA^2-AB^2}.$$

Так как

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_0+x_3}{2}, \qquad \frac{y_1+y_2}{2}=\frac{y_0+y_3}{2},$$

то середины отрезков CD и AB совпадают, т. е. центр окружности есть вершина параллелограмма, противоположная C, две другие (противоположные) вершины которого суть A и B.

Если $BC^2+CA^2=AB^2$, то

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0,$$

откуда

$$x=x_0, \quad y=y_0,$$

т. е. в случае, если угол C прямой, заданное геометрическое место состоит из одной точки $D(x_0, y_0)$.

Наконец, если $BC^2+CA^2<AB^2$, то уравнению

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=BC^2+CA^2-AB^2$$

не удовлетворяет никакая пара действительных чисел, т. е. нет ни одной точки плоскости, удовлетворяющей условию задачи.

Пример 3. *Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых сумма расстояний до двух сторон BC и CA треугольника ABC равна расстоянию до третьей стороны AB.*

Решение. Возьмем на плоскости произвольную прямоугольную декартову систему координат, и пусть в этой системе нормальные уравнения сторон BC, CA и AB будут соответственно:

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3=0$$

($A_1^2+B_1^2=1$, $A_2^2+B_2^2=1$, $A_3^2+B_3^2=1$, причем пусть нормирование произведено так, что левые части всех трех уравнений положительны для координат внутренних точек треугольника).

Пусть $M(x, y)$ — точка, удовлетворяющая условию задачи, и D, E, F — основания перпендикуляров, опущенных из точки M соответственно на стороны BC, CA и AB. Тогда

$$MD+ME=MF,$$

откуда

$$|A_1x+B_1y+C_1|+|A_2x+B_2y+C_2|=|A_3x+B_3y+C_3|$$

или

$$|A_1x+B_1y+C_1|+|A_2x+B_2y+C_2|-|A_3x+B_3y+C_3|=0. \qquad (1)$$

Для координат всех внутренних точек треугольника имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1>0,\\ A_2x+B_2y+C_2>0,\\ A_3x+B_3y+C_3>0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Поэтому, если внутри треугольника существуют точки, удовлетворяющие условию задачи, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению

$$(A_1x+B_1y+C_1)+(A_2x+B_2y+C_2)-(A_3x+B_3y+C_3)=0,$$

или

$$(A_1+A_2-A_3)\,x+(B_1+B_2-B_3)\,y+C_1+C_2-C_3=0. \qquad (3)$$

Докажем, что это уравнение первой степени относительно x и y, т. е. что числа $A_1+A_2-A_3$ и $B_1+B_2-B_3$ одновременно не равны нулю. Предположим обратное, т. е. что

$$A_3=A_1+A_2, \quad B_3=B_1+B_2.$$

Рассмотрим определители

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}.$$

В силу неравенств (2) эти определители одного знака (см. гл. III, примеры 5, 6).

Однако

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_1+A_2 & B_1+B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

и мы получаем противоречие.

Отсюда следует, что уравнение (3) определяет прямую.

Итак, если у заданного геометрического места есть точки, лежащие внутри треугольника, то они лежат на прямой (3).

Обозначим через P точку, в которой биссектриса внутреннего угла A пересекает сторону BC. Координаты точки P удовлетворяют уравнениям:

$$A_1x+B_1y+C_1=0$$

и

$$A_2x+B_2y+C_2=A_3x+B_3y+C_3.$$

Следовательно, координаты точки P удовлетворяют и уравнению

$$(A_1x+B_1y+C_1)+(A_2x+B_2y+C_2)-(A_3x+B_3y+C_3)=0,$$

т. е. уравнению (3). Следовательно, точка P лежит на прямой (3). Аналогично доказывается, что точка Q, в которой биссектриса внутреннего угла B пересекает сторону AC, также лежит на прямой (3). Поэтому уравнение (3) определяет прямую, проходящую через точки P и Q.

Все точки *отрезка* PQ принадлежат заданному геометрическому месту.

Рассмотрим область, ограниченную отрезком BC и лучами, которые мы получим, продолжив стороны AB и AC за точки B и C.

Для координаты всех точек этой области имеют место неравенства:

$$A_1x+B_1y+C_1<0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2>0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3>0.$$

Поэтому если в этой области существуют точки, удовлетворяющие условию задачи, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению

$$-(A_1x+B_1y+C_1)+(A_2x+B_2y+C_2)-(A_3x+B_3y+C_3)=0, \qquad (4)$$

или

$$(-A_1+A_2-A_3)\,x+(-B_1+B_2-B_3)\,y+(-C_1+C_2-C_3)=0. \qquad (4')$$

Докажем, что числа $-A_1+A_2-A_3$ и $-B_1+B_2-B_3$ одновременно в нуль не обращаются.

Предполагая противное:

$$A_2=A_1+A_3, \qquad B_2=B_1+B_3,$$

будем иметь:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_1+A_3 & B_1+B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix},$$

в то время как определители

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$$

должны иметь один и тот же знак.

Таким образом, уравнение (4) определяет прямую линию. Эта прямая линия проходит через точки пересечения прямых

$$A_2x+B_2y+C_2=A_3x+B_3y+C_3,$$
$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$

т. е. через точку P и через точку пересечения прямых

$$A_1x+B_1y+C_1=A_2x+B_2y+C_2,$$
$$A_3x+B_3y+C_3=0,$$

т. е. через точку R, в которой биссектриса внутреннего угла C встречает сторону AB. Таким образом, в рассматриваемой области искомому геометрическому месту принадлежат все точки луча, ограниченного точкой P, который мы получим, продолжая отрезок RP за точку P.

Рассмотрим область, ограниченную лучами, выходящими из точки A и являющимися продолжениями сторон BA и CA за точку A. Для координат всех точек этой области

$$A_1x+B_1y+C_1>0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2<0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3<0.$$

Поэтому если в этой области есть точки, принадлежащие искомому геометрическому месту, то координаты всех таких точек будут удовлетворять условию

$$(A_1x+B_1y+C_1)-(A_2x+B_2y+C_2)+(A_3x+B_3y+C_3)=0 \qquad (5)$$

или

$$(A_1-A_2+A_3)\,x+(B_1-B_2+B_3)\,y+C_1-C_2+C_3=0. \qquad (5')$$

Числа $A_1 - A_2 + A_3$ и $B_1 - B_2 + B_3$ одновременно не обращаются в нуль, поэтому уравнение (5′) или (5) определяет прямую. Эта прямая проходит через точку пересечения прямых

$$A_1x + B_1y + C_1 = A_2x + B_2y + C_2,$$
$$A_3x + B_3y + C_3 = 0,$$

т. е. через точку R и через точку пересечения прямых

$$A_2x + B_2y + C_2 = A_3x + B_3y + C_3,$$
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

т. е. через точку P.

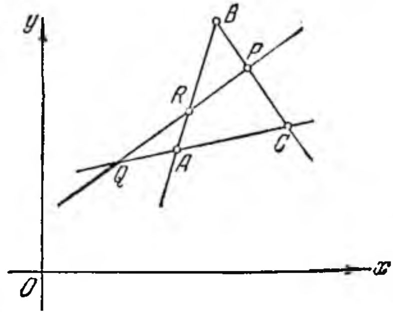

Рис. 15.

Поэтому уравнение (5) есть уравнение прямой PR. Если эта прямая имеет точки в рассматриваемой области, то все эти точки принадлежат искомому геометрическому месту (рис. 15). Если же прямая PR не имеет точек в рассматриваемой области, то на ней нет точек искомого геометрического места (рис. 16).

Аналогично устанавливаем, что в области, ограниченной стороной AC и продолжениями сторон BA и BC соответственно за точки A и C, искомому геометрическому месту принадлежат все точки той части прямой RQ, которая лежит в этой области.

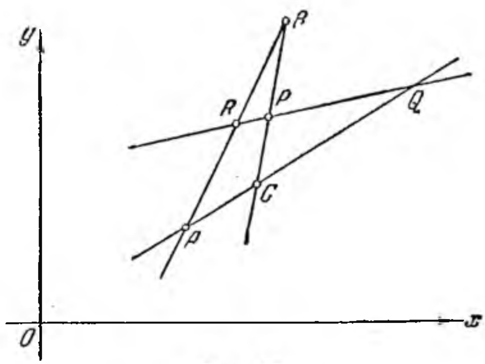

Рис. 16.

В области, ограниченной лучами, выходящими из точки B и полученными продолжением сторон AB и CB за точку B, искомому геометрическому месту принадлежат все точки той части прямой RQ, которые лежат в этой области (такие точки могут существовать, но могут и не существовать).

В области, ограниченной стороной AB и продолжениями сторон CA и CB за точки A и B, имеют место неравенства:

$$A_1x+B_1y+C_1>0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2>0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3<0.$$

Поэтому если в этой области есть точки искомого геометрического места, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению

$$(A_1x+B_1y+C_1)+(A_2x+B_2y+C_2)+(A_3x+B_3y+C_3)=0 \qquad (6)$$

или

$$(A_1+A_2+A_3)\,x+(B_1+B_2+B_3)\,y+(C_1+C_2+C_3)=0. \qquad (6')$$

В области, ограниченной двумя лучами, выходящими из точки C и полученными при продолжении сторон AC и BC за точку C, имеют место неравенства:

$$A_1x+B_1y+C_1<0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2<0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3>0.$$

Поэтому если в этой области есть точки искомого геометрического места, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению

$$-(A_1x+B_1y+C_1)-(A_2x+B_2y+C_2)-(A_3x+B_3y+C_3)=0$$

или тому же уравнению (6).

Если в уравнении (6') коэффициенты $A_1+A_2+A_3$ и $B_1+B_2+B_3$ одновременно в нуль не обращаются, то уравнение (6') определяет некоторую прямую линию. Эта прямая линия проходит через точку R' пересечения прямых PQ и AB, если эти две прямые пересекаются.

В самом деле, из уравнения прямой PQ

$$(A_1x+B_1y+C_1)+(A_2x+B_2y+C_2)-(A_3x+B_3y+C_3)=0$$

и уравнения прямой AB

$$A_3x+B_3y+C_3=0$$

следует, что

$$(A_1x+B_1y+C_1)+(A_2x+B_2y+C_2)+(A_3x+B_3y+C_3)=0.$$

Аналогично доказывается, что прямая (6) проходит через точку Q' пересечения прямых AC и PR (если эти прямые пересекаются) и точку P' пересечения прямых BC и RQ (если эти прямые пересекаются). Искомому геометрическому месту принадлежат все точки прямой $P'Q'R'$, которые находятся в двух последних областях.

Если в уравнении (6) $A_1+A_2+A_3=0$, $B_1+B_2+B_3=0$, то $C_1+C_2+C_3\neq 0$, ибо в противном случае три прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3=0$ проходили бы через одну точку. В этом случае уравнению (6') не удовлетворяет ни одна пара чисел x и y, т. е. в последних двух областях нет точек искомого геометрического места. Это имеет место тогда и только тогда, когда треугольник ABC равносторонний*).

Итак, искомое геометрическое место состоит из указанных выше частей четырех прямых PQ, QP', $P'Q'$, $Q'P$.

Пример 4. *Составить уравнение геометрического места точек $M(x, y)$, сумма расстояний каждой из которых до двух данных точек $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ равна данному числу $2a$, причем $a > c > 0$.*

Решение. Согласно условию задачи

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Но

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

поэтому искомое уравнение будет иметь вид:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{1}$$

Преобразуем это уравнение:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) равносильны. Возводя обе части уравнения (2) в квадрат, получим:

$$(x+c)^2 + y^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2. \tag{3}$$

Уравнения (2) и (3) равносильны. В самом деле: если выполнено равенство (2), то будет выполнено и равенство (3). Обратно: если выполнено равенство (3), то

$$(x+c)^2 + y^2 - \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = 0$$

или

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2a - \right.$$
$$\left. - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right) = 0.$$

Докажем, что при любых действительных значениях x и y имеет место неравенство:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \neq 0.$$

В самом деле, предположим, что при некоторых действительных значениях x и y мы будем иметь:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

---

*) В самом деле, положим $\boldsymbol{n}_1 = \{A_1, B_1\}$, $\boldsymbol{n}_2 = \{A_2, B_2\}$, $\boldsymbol{n}_3 = \{A_3, B_3\}$; тогда $\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2 + \boldsymbol{n}_3 = 0$, а так как $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ и $\boldsymbol{n}_3$ — единичные векторы, нормальные к сторонам треугольника ABC, то отсюда следует, что все углы треугольника ABC равны $60°$.

Рассмотрим точку M с координатами x и y. Тогда это равенство примет вид:

$$MF_2 - MF_1 = 2a.$$

Но

$$MF_2 - MF_1 < 2c$$

(разность двух сторон треугольника меньше третьей), поэтому

$$2a < 2c,$$

что противоречит условию.

Итак,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} + 2a \neq 0,$$

значит,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 0,$$

а это и есть уравнение (2).

Упрощая уравнение (3), получим равносильное ему уравнение

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (4)$$

Возводя обе части этого уравнения в квадрат, получим:

$$(a^2-cx)^2 = a^2[(x-c)^2+y^2], \qquad (5)$$

или

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2), \qquad (6)$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1. \qquad (7)$$

Уравнения (5), (6) и (7) равносильны друг другу. Докажем, что уравнения (4) и (5) также равносильны.

Если имеет место равенство (4), то будет иметь место и равенство (5). Обратно, если пара действительных чисел x и y удовлетворяет уравнению (5), то она удовлетворяет и уравнению (7), откуда следует, что $|x| \leqslant a$ (если бы было $|x| > a$, то левая часть равенства (7) была бы больше 1), а так как $c < a$, то $a^2 > cx$, т. е. $a^2 - cx > 0$. Поэтому из равенства (5) следует

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Таким образом, числа x и y, удовлетворяющие уравнению (5), удовлетворяют и уравнению (4). Таким образом, мы показали, что уравнения (1) и (7) равносильны. Полагая $a^2 - c^2 = b^2$, перепишем уравнение (7) в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Линия, определяемая условием задачи или этим уравнением, называется эллипсом. Точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса. Числа a и b называются полуосями эллипса. Точка O называется центром эллипса.

Пример 5. *Вокруг точки O, лежащей на окружности с диаметром a, вращается луч, причем прямая, содержащая этот луч, пересекает окружность в переменной точке P. На прямой OP от точки P в направлении луча откладывается отрезок $PM = b$. Составить уравнение линии, описываемой точкой M при вращении луча.* Эта линия называется улиткой Паскаля.

Решение. Введем полярную систему координат, принимая за полюс точку O, а за полярную ось диаметр OA. Обозначим через ϱ и φ обобщенные полярные координаты точки M, причем под углом φ будем понимать угол от полярной оси до вращающегося луча. Обозначим через ϱ' и φ обобщенные полярные координаты точки P, соответствующей точке M, причем φ будем брать тем же, что и для точки M.

Тогда

$$\varrho' = a\cos\varphi$$

при любом φ, а

$$\varrho = a\cos\varphi + b.$$

Это есть искомое уравнение линии в полярных координатах.

Возможны три случая: 1) $b < a$; 2) $b = a$; 3) $b > a$.

В первом и во втором случаях линия проходит через полюс, так как из условия $\varrho = 0$ находим:

$$\cos\varphi = -\frac{b}{a}, \quad \left|-\frac{b}{a}\right| = \frac{b}{a} \leqslant 1.$$

В третьем случае линия через полюс не проходит, ибо условие $\varrho = 0$ не выполняется ни при каком φ (так как $b > a$).

Найдем уравнение улитки Паскаля в декартовых прямоугольных координатах, принимая за начало координат полюс O, а за положительное направление оси абсцисс направление полярной оси. Будем исходить из полученного нами уравнения улитки Паскаля в полярных координатах:

$$\varrho = a\cos\varphi + b. \tag{1}$$

Для всех точек линии, отличных от полюса, будем иметь:

$$\varrho = \pm\sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\cos\varphi = \frac{x}{\varrho} = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Уравнение (1) принимает вид:

$$\varrho = \frac{ax}{\varrho} + b.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты всех точек линии (и только этих точек), кроме полюса O (если он принадлежит линии).

Умножая обе частоты последнего уравнения на ϱ, получим:

$$\varrho^2 = ax + b\varrho.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты всех точек линии (и координата полюса O, даже если он линии не принадлежит).

Последнее уравнение можно переписать так:

$$x^2+y^2=ax+b\varrho,$$

или

$$x^2+y^2-ax=b\varrho. \qquad (2)$$

Возводя обе части уравнения (2) в квадрат, получим:

$$(x^2+y^2-ax)^2=b^2\varrho^2,$$

или

$$(x^2+y^2-ax)^2=b^2(x^2+y^2). \qquad (3)$$

Покажем, что уравнение (3) в декартовых координатах определяет ту же линию, что и уравнение (1) в полярных координатах.

В самом деле, если полярные координаты точки M удовлетворяют уравнению (1), то декартовы координаты этой же точки M удовлетворяют уравнению (3).

Обратно, возьмем точку $M(x, y)$ (не совпадающую с началом координат), лежащую на линии, определяемой уравнением (3), и докажем, что эта точка лежит на линии, определяемой уравнением (1).

В самом деле, если точка $M(x, y)$ лежит на линии, определяемой уравнением (3), то ее координаты удовлетворяют этому уравнению. Отсюда следует, что

$$(x^2+y^2-ax)^2=b^2\varrho^2,$$

откуда

$$x^2+y^2-ax=\pm b\varrho,$$

или

$$\varrho^2-a\varrho\cos\varphi=\pm b\varrho,$$

а так как точка M не совпадает с началом координат, то $\varrho\neq 0$ и

$$\varrho=a\cos\varphi\pm b.$$

Если $\varrho=a\cos\varphi+b$, то точка M лежит на линии (1). Если же $\varrho=a\cos\varphi-b$, то $-\varrho=a\cos(\varphi+\pi)+b$. Точка с полярными координатами $a\cos\varphi-b$, φ совпадает с точкой, имеющей полярные координаты $-(a\cos(\varphi+\pi)+b)$, $\varphi+\pi$.

Итак, уравнение улитки Паскаля в декартовых координатах имеет вид:

$$(x^2+y^2-ax)^2=b^2(x^2+y^2).$$

Пример 6. *По оси Ox без скольжения катится окружность радиуса a. Составить параметрические уравнения линии, описываемой той точкой M катящейся окружности, которая в начальный момент находилась в начале координат, принимая за параметр t угол от радиуса CM окружности, идущего в точку M, до радиуса CA этой окружности, идущего в точку касания.* Эта линия называется **циклоидой**.

Решение. Рассмотрим ломаную $OACM$ (рис. 17). Проектируя эту ломаную на ось Ox, получим:

$$\text{пр}_{Ox}\,OM = \text{пр}_{Ox}\,OACM = \text{пр}_{Ox}\,OA + \text{пр}_{Ox}AC + \text{пр}_{Ox}CM.$$

Но

$$\text{пр}_{Ox}\,OM = x, \qquad \text{пр}_{Ox}\,AC = 0, \quad \text{пр}_{Ox}\,OA = OA = \overset{\frown}{AM} = at$$

(так как окружность катится без скольжения).

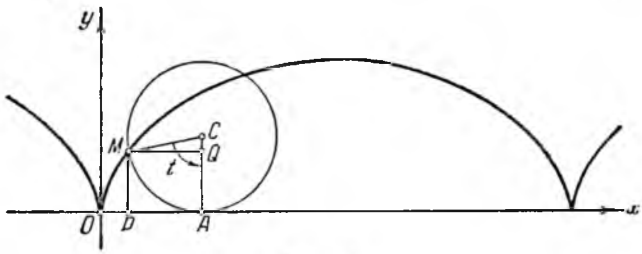

Рис. 17.

Так как угол от CM до CA равен t, а угол от оси Ox до CM равен $\frac{\pi}{2}+(\pi-t)$, то

$$\text{пр}_{Ox}\,CM = a\cos\left(\frac{3}{2}\pi - t\right) = -a\sin t.$$

Итак,

$$x = a\,(t - \sin t).$$

Далее, проектируя ту же ломаную на ось Oy, будем иметь:

$$\text{пр}_{Oy}OM = \text{пр}_{Oy}\,OACM = \text{пр}_{Oy}\,OA + \text{пр}_{Oy}\,AC + \text{пр}_{Oy}\,CM.$$

Имеем:

$$\text{пр}_{Oy}\,OM = y, \qquad \text{пр}_{Oy}\,OA = 0, \qquad \text{пр}_{Oy}\,AC = a.$$

Так как угол от оси Ox до CM равен $\frac{3}{2}\pi - t$, а угол от оси Ox до оси Oy равен $+\frac{\pi}{2}$, то угол от оси Oy до CM равен:

$$\frac{3}{2}\pi - t - \frac{\pi}{2} = \pi - t,$$

следовательно,

$$\text{пр}_{Oy}\,CM = a\cos(\pi - t) = -a\cos t.$$

Итак,

$$y = a\,(1 - \cos t).$$

Таким образом, параметрические уравнения циклоиды будут:

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t),$$

где параметр t принимает все действительные значения.

348. Найти геометрическое место точек, для которых сумма квадратов расстояний от двух постоянных точек есть величина постоянная.

349. Найти геометрическое место точек, для которых разность квадратов расстояний от двух постоянных точек есть величина постоянная.

350. Найти геометрическое место точек, для которых расстояние от точки $A(4, 0)$ вдвое больше расстояния от точки $B(1, 0)$.

351*. Прямоугольный треугольник с катетами a и b перемещается так, что вершины его острых углов скользят по взаимно перпендикулярным прямым. Найти линию, описываемую при этом перемещении вершиной прямого угла.

352. На осях Ox и Oy общей декартовой системы координат фиксированы точки A и B. Через точку $P(x_0, y_0)$, лежащую на прямой AB, проводят произвольную секущую, пересекающую оси Ox и Oy соответственно в точках C и D. Пусть M — точка пересечения прямых CB и AD. Составить уравнение линии, которую описывает точка M, когда секущая вращается вокруг точки P.

353. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от трех данных точек есть величина постоянная.

354. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до сторон прямоугольника постоянна, при условии, что этому геометрическому месту принадлежит одна из вершин прямоугольника.

355*. Даны две окружности. Найти геометрическое место точек, касательные из которых, проведенные к этим двум окружностям, имеют равные длины.

356. Даны окружность с центром в начале координат и радиусом r и точка $A(a, 0)$ вне ее. Найти геометрическое место точек, расстояние которых до точки A равнялось бы длинам касательных, проведенных из этих точек к окружности.

357*. Даны точка O и прямая l, не проходящая через точку O. Пусть P — переменная точка прямой l. На луче OP

берется точка M, такая, что $OP \cdot OM = k$, где k — данное положительное число. Найти геометрическое место точек M.

358*. Найти геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух постоянных точек $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ есть величина постоянная, равная $2a\,(a < c)$. Это геометрическое место называется гиперболой, а точки F_1 и F_2 — ее фокусами.

359*. Найти геометрическое место точек, для которых расстояние от постоянной точки равнялось бы расстоянию до постоянной прямой, не проходящей через эту точку. Это геометрическое место называется параболой, постоянная точка — ее фокусом, а постоянная прямая — ее директрисой.

360. Даны точка $F(3, 0)$ и прямая, параллельная оси Oy и отсекающая на оси Ox положительный отрезок, равный $\frac{25}{3}$. Найти геометрическое место точек, для которых отношение расстояния до данной точки к расстоянию до данной прямой равно $\frac{3}{5}$.

361. Даны точка $F(5, 0)$ и прямая, параллельная оси ординат и отсекающая на оси абсцисс положительный отрезок, равный $\frac{9}{5}$. Найти геометрическое место точек, для которых отношение расстояния от данной точки к расстоянию до данной прямой равно $\frac{5}{3}$.

362. Дана окружность с центром в начале координат и радиусом r. Во что обратится эта окружность, если ординаты всех ее точек уменьшить в одно и то же число (k) раз.

363. Найти геометрическое место точек, делящих в данном отношении $(\neq 1)$ хорды окружности, параллельные данному направлению.

364. Около начала координат O как центра описаны две окружности радиусами a и b. Луч, вращающийся вокруг точки O, пересекает эти окружности соответственно в точках A и B. Через точку B проводится прямая, параллельная оси абсцисс, а через точку A — прямая, параллельная оси ординат. Найти линию, описываемую точкой M пересечения этих двух прямых при вращении луча.

365. В треугольниках с постоянной площадью S, ограниченных осями координат и пересекающей их прямой, опускаются перпендикуляры из вершин прямого угла на гипотенузу. Найти геометрическое место оснований этих перпендикуляров.

366*. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по сторонам прямого угла. Точка M делит этот отрезок на две части, длины которых a и b. Найти линию, описываемую точкой M при движении отрезка.

367. Найти геометрическое место точек, произведение расстояний которых от двух постоянных точек $F_1(-b, 0)$ и $F_2(b, 0)$ есть величина постоянная, равная a^2 (о в а л К а с с и н и).

368. Определить геометрическое место середины отрезков касательных к окружности $x^2+y^2=R^2$, заключенных между осями координат.

369. Прямоугольник, две стороны которого совпадают с осями координат, изменяется так, что его диагональ сохраняет постоянную величину a. Линия, описываемая основанием перпендикуляра, опущенного из вершины прямоугольника, противоположной началу координат, на его диагональ, называется а с т р о и д о й. Найти ее уравнение, принимая за оси координат неподвижные стороны прямоугольника.

370. Написать в полярных координатах уравнение прямой, перпендикулярной к полярной оси и отсекающей на ней отрезок $OA=a$.

371. Написать уравнение окружности радиуса a в полярных координатах, приняв за полюс точку O на окружности, а за полярную ось проходящий через нее диаметр OA.

372. Даны точка O и прямая, находящаяся от точки O на расстоянии $OA=a$. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий данную прямую в переменной точке B. На этом луче по обе стороны от точки B откладываются отрезки $BM_1=BM_2=b$. Написать в полярных координатах уравнение линии (к о н х о и д а Н и к о м е д а), описываемой точками M_1 и M_2 при вращении луча, принимая за полюс точку O, а за полярную ось перпендикуляр OA, опущенный из точки O на данную прямую. Перейти затем к декартовым координатам, принимая за начало системы точку O, а за ось абсцисс прямую OA.

373. Даны точка O и прямая, находящаяся от точки O на расстоянии $OA=a$. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий прямую в переменной точке B. На этом луче по обе стороны от точки B откладываются равные отрезки $BM_1 = BM_2 = AB$. Написать уравнение линии (строфоида), описываемой точками M_1 и M_2 при вращении луча, в полярных координатах, принимая за полюс точку O, а за полярную ось перпендикуляр OA, опущенный из точки O на данную прямую. Перейти затем к декартовым координатам, принимая за начало координат точку O, а за ось абсцисс прямую OA.

374. На окружности радиуса a дана точка O. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий окружность в переменной точке A. На этом луче по обе стороны от точки A откладываются отрезки $AM_1 = AM_2 = 2a$. Линия, описываемая точками M_1 и M_2, называется кардиоидой. Написать уравнение этой линии в полярных координатах, принимая за полюс точку O, а за полярную ось проходящий через нее диаметр OK, и перейти затем к декартовым координатам.

375. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из неподвижной точки на касательные к данной окружности, принимая за полюс полярной системы координат неподвижную точку, а за полярную ось прямую, соединяющую эту точку с центром окружности. Расстояние от данной точки до центра окружности обозначить через a, радиус окружности — через b.

376. На окружности радиуса a взята точка O и через точку K, диаметрально противоположную O, к окружности проведена касательная. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий окружность и касательную соответственно в точках A и B. На этом луче от точки O откладывается отрезок OM, равный отрезку AB луча, заключенному между окружностью и касательной. Линия, описываемая точкой M при вращении луча, называется циссоидой Диоклеса. Написать ее уравнение в полярных координатах, принимая за полюс точку O и за полярную ось диаметр OK. Перейти затем к декартовым координатам.

377. Лемнискатой Бернулли называется овал Кассини, когда постоянная величина a^2, о которой говорится в определении последнего (см. задачу 367), равна квадрату половины расстояния между постоянными точками F_1 и F_2. Написать уравнение лемнискаты Бернулли в полярных координатах, принимая за полюс середину отрезка F_1F_2, а за полярную ось прямую F_1F_2.

378. На окружности радиуса a взята точка O и через нее проведен диаметр OA. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий окружность в переменной точке B. На этом луче по обе стороны от точки B откладываются отрезки $BM_1 = BM_2 = AB$. Написать уравнения линий, описываемых точками M_1 и M_2 при вращении луча.

379. Отрезок постоянной длины $2a$ скользит своими концами по сторонам прямого угла. Найти линию, описываемую при этом движении отрезка основанием перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на отрезок (в полярных и декартовых координатах).

380. На окружности радиуса a взята точка O. Через точку K, диаметрально противоположную O, к окружности проведена касательная. Вокруг точки O вращается прямая, пересекающая окружность и касательную соответственно в точках A и B. Из точки A проводится прямая, параллельная касательной, а из точки B — прямая, параллельная диаметру OK. Найти геометрическое место точек пересечения этих прямых (в е р з ь е р а М а р и и А н ь е з и), принимая за начало прямоугольной системы координат точку O, а за ось абсцисс диаметр OK.

381. Найти геометрическое место точек (о в а л Д е к а р т а), зная, что между их расстояниями r_1 и r_2 от двух постоянных точек A и B существует линейное соотношение $r_2 = ar_1 + b$, принимая точку A за полюс, а прямую AB за полярную ось при условии, что $AB = c$.

382. Вокруг точки O вращается луч с постоянной угловой скоростью ω. По этому лучу движется точка M с постоянной скоростью v. Составить уравнение линии, описываемой точкой M, в полярных координатах, если в начальный момент движения луч совпадает с полярной осью, а точка M — с точкой O. Линия, описываемая точкой M, называется с п и р а л ь ю А р х и м е д а.

383*. Круг радиуса r катится по кругу радиуса R, оставаясь вне его. Найти параметрические уравнения линии, описываемой точкой катящегося круга (э п и ц и к л о и д а), принимая за начало координат центр неподвижного круга, а за параметр угол t между положительным направлением оси абсцисс и радиусом неподвижного круга, идущим в точку касания подвижного круга с неподвижным. В начальном положении подвижная окружность касалась неподвижной в точке A пересечения последней с осью абсцисс.

384*. Круг радиуса r катится по кругу радиуса R, оставаясь внутри него. Написать параметрические уравнения линии, описываемой точкой катящегося круга (гипоциклоида). Выбор системы координат и обозначений такой же, как и в предыдущей задаче.

385. Показать, что при $R=4r$ гипоциклоида обращается в астроиду

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

386. Показать, что при $R=2r$ гипоциклоида обращается в диаметр неподвижного круга.

387*. Отрезок постоянной длины движется так, что один его конец скользит по окружности $x^2+y^2=r^2$, а другой — по оси Ox (шатунно-кривошипный механизм). Составить уравнение кривой, которую описывает точка отрезка, разделяющая его на части a и b.

388*. По окружности $x^2+y^2=r^2$ катится прямая, начальное положение которой $x=r$. Определить траекторию точки катящейся прямой, принимая за начальное ее положение точку $(r,\ 0)$ (эвольвента окружности).

389. Исследовать геометрическое место точек — центров окружностей, касающихся двух фиксированных окружностей. Рассмотреть три случая: 1) одна из фиксированных окружностей лежит внутри другой; 2) одна из фиксированных окружностей лежит вне другой; 3) одна из фиксированных окружностей вырождается в прямую, не пересекающую вторую окружность.

ГЛАВА V

ОКРУЖНОСТЬ

Уравнение окружности с центром в точке $C(a, b)$ и радиусом r относительно декартовой прямоугольной системы координат имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{1}$$

Это уравнение называется нормальным уравнением окружности.

Если центр совпадает с началом координат, то нормальное уравнение окружности будет:

$$x^2+y^2=r^2. \tag{2}$$

Уравнение

$$Ax^2+Ay^2+2Bx+2Cy+D=0$$

при условии $A\neq 0$, $B^2+C^2-AD>0$ в декартовой прямоугольной системе координат определяет окружность с центром в точке $\left(-\frac{B}{A}, -\frac{C}{A}\right)$ и радиусом

$$r=\sqrt{\frac{B^2+C^2-AD}{A^2}}.$$

Результат подстановки координат произвольной точки плоскости в левую часть уравнения окружности, взятого в виде:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0,$$

т. е. число

$$\sigma=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2$$

есть степень точки $M(x, y)$ относительно этой окружности, т. е. число d^2-r^2, где d — расстояние от точки (x, y) до центра окружности, а r — радиус окружности.

Если точка M лежит вне окружности, то ее степень относительно этой окружности положительна и равна квадрату длины отрезка касательной, проведенной из данной точки M к окружности, или на основании известной теоремы элементарной геометрии произведению отрезка любой секущей, проведенной из этой точки к данной окружности на ее внешнюю часть:

$$\sigma=MT^2=MA\cdot MB.$$

Если точка M лежит внутри окружности, то ее степень относительно этой окружности отрицательна и по абсолютной величине равна произведению отрезков, на которые точка M делит любую проходящую через нее хорду:

$$\sigma = -MA\cdot MB.$$

Если точка M лежит на окружности, то ее степень относительно этой окружности равна нулю:

$$\sigma = 0.$$

Если

$$u_1 \equiv (x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2=0,$$
$$u_2 \equiv (x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2^2=0$$

— уравнения двух окружностей, то уравнение

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2=0,$$

где λ_1 и λ_2 — произвольные числа, не равные нулю одновременно, определяет окружность (или прямую). Если окружности $u_1=0$ и $u_2=0$ пересекаются, то окружность

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2=0$$

проходит через точки их пересечения.

Уравнение

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2=0$$

можно рассматривать как уравнение геометрического места точек, для каждой из которых отношение степеней $\frac{u_1}{u_2}$ равно данному числу $-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Если $\lambda_2=-\lambda_1\neq 0$, то уравнение $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2=0$ принимает вид $u_1-u_2=0$ или $u_1=u_2$ и определяет прямую линию, называемую **радикальной осью** двух данных окружностей, т. е. радикальной осью двух окружностей называется геометрическое место точек, степени каждой из которых относительно данных окружностей равны между собой.

Если заданы три окружности

$$u_1=0,\ u_2=0,\ u_3=0,$$

центры которых не лежат на одной прямой, то три радикальные оси

$$u_1=u_2,\ u_2=u_3,\ u_3=u_1,$$

взятые для каждой пары окружностей, проходят через одну точку, называемую **радикальным центром** этих трех окружностей.

Если

$$u \equiv (x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0,$$
$$v \equiv Ax+By+C=0$$

— уравнения окружности и прямой, то уравнение

$$u+\lambda v=0$$

определяет окружность. Если окружность $u=0$ и прямая $v=0$ пересекаются, то окружность $u+\lambda v=0$ проходит через точки их пересечения.

390. Составить уравнение окружности, если дан ее центр $S(-1, 3)$ и радиус $r=4$.

391. Составить уравнение окружности радиуса $r=5$ с центром в начале координат.

392. Определить координаты центра S и радиус r каждой из следующих окружностей:

1) $x^2+y^2-6x=0$;
2) $x^2+y^2+6x-8y=0$;
3) $x^2+y^2-10x+24y-56=0$;
4) $3x^2+3y^2+6x-4y-1=0$.

393. Привести к нормальному виду уравнения окружностей:

1) $x^2+y^2-2x+4y=0$;
2) $x^2+y^2+x-5y-3=0$;
3) $3x^2+3y^2-2x+7y+1=0$.

394. Определить положение точек $A(3, 1)$, $B(1, 0)$, $C(-2, 0)$ и $D(-2, 1)$ относительно окружности $x^2+y^2-1=0$.

395. Составить параметрические уравнения окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, приняв за параметр угол θ от положительного направления оси Ox до направления радиуса окружности.

396. Как расположены на плоскости точки, координаты которых удовлетворяют условиям:

1) $(x-1)^2+(y-3)^2\geqslant 25$;
2) $16\leqslant(x-1)^2+(y+3)^2\leqslant 25$;
3) $(x-1)^2+(y-2)^2\leqslant 25$, $(x-4)^2+(y-6)^2\leqslant 9$;
4) $x^2+y^2-6x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$;
5) $x^2+y^2-4y\leqslant 0$, $|x|\geqslant 1$.

397. Составить уравнение окружности, касающейся оси Ox в точке $(6, 0)$ и проходящей через точку $(9, 9)$.

398. Составить уравнение окружности, центр которой лежит на оси Oy и которая касается оси Ox.

399. Составить уравнение окружности, центр которой лежит на оси Ox и которая касается оси Oy.

400. При каком условии окружность $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ проходит через начало координат?

401. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $(2,\ 1)$, $(-1,\ 2)$ и через начало координат.

402. При каком условии уравнение x^2+y^2+Ax+ $+By+C=0$ определяет окружность?

403. Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке $(2,\ 3)$ и касающейся прямой $x-2y+1=0$.

404. Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке $(1,\ -3)$ и проходящей через точку $(3,\ 5)$.

405. Составить уравнение окружности с центром в начале координат и проходящей через точку $(2,\ -4)$.

406. Составить уравнение окружности радиуса $r=\sqrt{26}$ и проходящей через точки $(2,\ 7)$ и $(-2,\ 1)$.

407. Составить уравнение окружности радиуса $r=3$, касающейся осей координат.

408. Составить уравнение окружности с центром в точке $(2,\ -3)$, касающейся оси Ox.

409. Уравнение $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ определяет окружность. При каком условии (необходимом и достаточном) эта окружность: 1) касается оси Ox? 2) касается оси Oy? 3) касается обеих осей координат?

410. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $(2,\ 1)$ и $(3,\ 4)$, если ее центр лежит на прямой $2x-y+1=0$.

411*. Составить уравнение окружности, касающейся двух прямых $2x+y-1=0$, $2x-y+2=0$ и проходящей через начало координат.

412*. Составить уравнение окружности, касающейся трех прямых $x+y-2=0$, $x-y+4=0$, $x-7y=0$.

413. Окружность проходит через точки $(1,\ 4)$, $(-7,\ 4)$ и $(2,\ -5)$. Найти ее центр, радиус и уравнение.

414*. Определить координаты центра S окружности, вписанной в треугольник ABC, если даны уравнения его сторон: $x-4=0$, $3x-4y+36=0$, $4x+3y+23=0$.

415. Составить уравнение окружности радиуса 1, касающейся прямой $3x+4y-5=0$ и проходящей через точку $(-4,\ 4)$.

416. Составить уравнение окружности радиуса $\sqrt{5}$, касающейся прямой $x+2y-3=0$, зная, что ее центр лежит на оси Oy.

417. Составить уравнение окружности радиуса $r=1$, касающейся оси Ox, зная, что ее центр лежит на прямой $3x-y+7=0$.

418. Составить уравнение окружности, касающейся координатных осей и проходящей через точку $(-2, 1)$.

419. Составить уравнение окружности, имеющей радиус $r=\sqrt{2}$ и касающейся двух прямых $x-y+2=0$, $7x+y=0$.

420. Составить уравнение окружности радиуса r, касающейся осей координат.

421. Составить уравнение окружности радиуса $r=5$ и касающейся прямой $2x-y+4=0$ в точке $(-1, 2)$.

422. Составить уравнение окружности, касающейся оси Oy в точке $(0, -3)$ и проходящей через точку $(-2, 1)$.

423. Составить уравнение окружности, касающейся прямой $x+2y=0$ и прямой $x-2y+1=0$ в точке $(-1, 0)$.

424. Составить уравнение окружности, касающейся прямой $x-7y+10=0$ в точке $(4, 2)$, зная, что ее центр лежит на прямой $2x+y=0$.

425. Составить уравнение окружности, касающейся прямой $4x-3y+1=0$ и оси Oy, зная, что ее центр лежит на оси Ox.

426. Составить уравнение окружности, проходящей через начало координат и имеющей центр в точке $(1, 1)$.

427*. Составить уравнение окружности, касающейся двух параллельных прямых $x+y-2=0$, $x+y+3=0$ и проходящей через точку $(1, 0)$.

428. При каком условии уравнение Ax^2+Ay^2+2Bx+ $+2Cy+D=0$ определяет окружность (действительную). Найти координаты центра этой окружности и ее радиус.

429. Определить геометрическое место точек, из которых отрезок AB, $A(-1, 0)$, $B(2, 4)$, виден под углом α таким, что $\operatorname{ctg}\alpha=3$.

430*. Найти необходимое и достаточное условие того, что прямая $Ax+By+C=0$:

1) пересекает окружность $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$;
2) не пересекает эту окружность;
3) касается этой окружности.

431. Доказать, что прямая $x+y-12=0$ не пересекает окружность $x^2+y^2-2y=0$.

432. Определить длину хорды окружности $x^2+y^2-2x-8y-8=0$, отсекаемой прямой $5x+12y-14=0$.

433. Определить общие точки двух окружностей: $x^2+y^2-6x+4y-12=0$, $x^2+y^2+10x-8y+16=0$.

434. При каком необходимом и достаточном условии начало координат лежит внутри окружности $x^2+y^2+Ax+By+C=0$?

435. При каком необходимом и достаточном условии точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит внутри окружности $x^2+y^2+Ax+By+C=0$?

436. Составить уравнения касательных, проведенных из начала координат к окружности $(x-5)^2+y^2-9=0$.

437. Составить уравнение касательной к окружности $x^2+y^2-2x+6y=0$ в начале координат.

438. Составить уравнение касательной к окружности $x^2+y^2+Ax+By=0$ в начале координат.

439. Составить уравнение касательной к окружности $x^2+y^2-2x-4=0$ в точке $(3, 1)$.

440. Доказать, что синус половины угла, под которым окружность $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$ видна из точки $M_0(x_0, y_0)$, определяется соотношением

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{r}{\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}}.$$

441. Составить уравнения касательных к окружности $x^2+y^2+2x-4y+1=0$, параллельных прямой $3x-4y=0$.

442. Составить уравнения касательных к окружности $x^2+y^2-3x+2y-3=0$, перпендикулярных к прямой $4x+3y=0$.

443. Составить уравнение окружности, из любой точки которой окружность $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$ видна под прямым углом.

444. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $(5, 0)$, $(4, 1)$ и касающейся прямой $3x+4y+34=0$.

445. При каком необходимом и достаточном условии прямая $Ax+By+C=0$ касается окружности $x^2+y^2=R^2$?

446. Составить уравнение касательных к окружности $(x-1)^2+(y+2)^2=25$, параллельных прямой $3x-4y=0$.

447. Найти степени точек $A(2, 1)$, $B(3, -7)$, $K(0, -1)$ относительно окружности $x^2+y^2-2x=0$.

448. Определить длину отрезка касательной, проведенной из точки $(5, 6)$ к окружности $(x+1)^2+(y-2)^2-25=0$.

449. Определить длину отрезка касательной, проведенной из точки $(7, 1)$ к окружности $x^2+y^2-6x=0$.

450. Определить длину отрезка касательной, проведенной из начала координат к окружности $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$ $(a^2+b^2>r^2)$.

451. Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения двух окружностей $x^2+y^2-2x-4y-20=0$, $x^2+y^2-8x-8y-4=0$.

452. Составить уравнение общей хорды двух окружностей $(x-1)^2+(y+2)^2-13=0$, $(x+3)^2+(y-1)^2-36=0$.

453*. Составить уравнение окружности с центром в точке $(0, 2)$ и пересекающей окружность $x^2+y^2-6x+8y-11=0$ под прямым углом.

454*. Составить уравнение окружности с центром на прямой $x+2y+2=0$ и пересекающей каждую из двух данных окружностей $x^2+y^2-6x=0$, $x^2+y^2+8y=0$ под прямым углом.

455. Определить радикальную ось двух окружностей:

$$x^2+y^2-6x+2y-6=0,$$
$$x^2+y^2+4x+2y+4=0.$$

456. Найти радикальный центр окружностей

$$(x-a_k)^2+(y-b_k)^2-r_k^2=0, \quad k=1,\ 2,\ 3.$$

457. Уравнения

$$x^2+y^2+A_kx+B_ky+C_k=0, \quad k=1,\ 2,\ 3,$$

определяют три окружности, центры которых неколлинеарны. Найти их радикальный центр.

458. Найти радикальный центр трех окружностей:

$$x^2+y^2+x+2y=0,$$
$$x^2+y^2+2x+2y+3=0,$$
$$x^2+y^2+3x+y-1=0.$$

459*. Составить уравнение окружности, пересекающей ортогонально три окружности:

$$x^2+y^2+x+2y=0,$$
$$x^2+y^2+2x+2y+3=0,$$
$$x^2+y^2+3x+y-1=0.$$

460. Составить уравнение окружности, проходящей через точки (1, 1), (0, 2) и касающейся окружности $(x-5)^2+(y-5)^2=16$.

461. Составить уравнение окружности, проходящей через точку (1, —2) и точки пересечения прямой $x-7y+10=0$ с окружностью $x^2+y^2-2x+4y-20=0$.

462. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(4,\ 5)$, $B(-4,\ -1)$, $C(0,\ 1)$.

463. Через точки $A(4,\ 5)$ и $B(-4,\ -1)$ провести окружность так, чтобы прямая, проходящая через точки пересечения искомой окружности и данной $(x+3)^2+y^2=9$, содержала данную точку $M(-3,\ 0)$.

ГЛАВА VI

ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА И ПАРАБОЛА, ЗАДАННЫЕ КАНОНИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

Эллипс. Каноническое уравнение эллипса (рис. 18) имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

где a и b $(a>b)$ — длины полуосей, т. е. половины длин отрезков, отсекаемых эллипсом (1) на осях координат. Точки пересечения эллипса (1) с его осями симметрии, т. е. с осями координат, называются его вершинами.

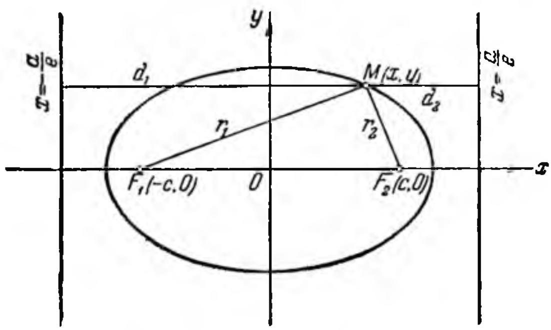

Рис. 18.

Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, где

$$c=\sqrt{a^2-b^2}, \tag{2}$$

называются фокусами. Число

$$e=\frac{c}{a}<1 \tag{3}$$

называется эксцентриситетом эллипса.

Если $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса (1) и r_1, r_2 — расстояния от фокусов F_1, F_2, то

$$r_1 = a + ex, \quad r_2 = a - ex. \tag{4}$$

Эллипс есть геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний от фокусов есть величина постоянная, равная $2a$.

Прямые, определяемые уравнениями

$$x = \pm \frac{a}{e}, \tag{5}$$

называются **директрисами** эллипса (1).

Из уравнений (4) и (5) следует, что для любой точки эллипса: $\frac{r_1}{d_1} = e$, $\frac{r_2}{d_2} = e$, где d_1 и d_2 — расстояния этой точки до директрис $x = -\frac{a}{e}$ и $x = \frac{a}{e}$.

Середины параллельных хорд эллипса лежат на одной прямой, называемой **диаметром** эллипса, сопряженным этим хордам.

Если k — угловой коэффициент хорд эллипса (1), то уравнение сопряженного им диаметра имеет вид:

$$\frac{x}{a^2} + k\frac{y}{b^2} = 0. \tag{6}$$

Два диаметра, из которых каждый делит пополам хорды, параллельные другому, называются сопряженными. Если k_1, k_2 — их угловые коэффициенты, то

$$k_1 k_2 = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{7}$$

Касательная к эллипсу (1) в его точке $M_0(x_0, y_0)$ определяется уравнением

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \tag{8}$$

Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы (рис. 19) имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{9}$$

где a и b — **длины полуосей**, действительной и мнимой.

При $a = b$ гипербола (9) называется **равносторонней**.

Точки пересечения гиперболы (9) с ее действительной осью (т. е. с осью Ox) называются **вершинами**.

Точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{10}$$

называются **фокусами** гиперболы (9); число $e=\frac{c}{a}>1$ называется **эксцентриситетом** гиперболы.

Если $N(x, y)$ — произвольная точка левой ветви гиперболы (9) ($x\leqslant -a$) и r_1, r_2 — ее расстояния от фокусов F_1, F_2, то

$$r_1=-a-ex, \qquad r_2=a-ex. \tag{11}$$

Если $M(x, y)$ — произвольная точка правой ветви гиперболы (9) ($x\geqslant a$) и r_1, r_2 — ее расстояния от фокусов F_1, F_2, то

$$r_1=a+ex, \qquad r_2=-a+ex. \tag{12}$$

Гипербола есть геометрическое место точек, для которых абсолютная величина разности расстояний от фокусов есть величина постоянная, равная $2a$.

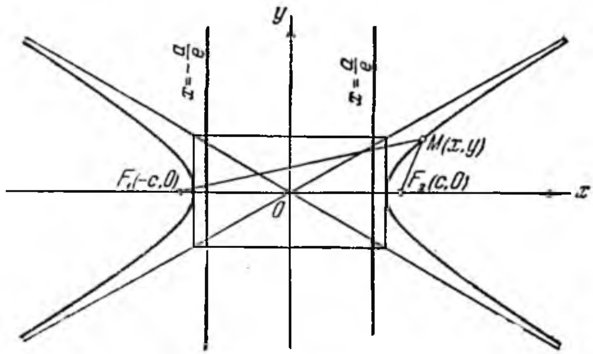

Рис. 19.

Прямые, определяемые уравнениями

$$x=\pm\frac{a}{e}, \tag{13}$$

называются **директрисами** гиперболы (9).

Из уравнений (11), (12), (13) следует, что для любой точки гиперболы

$$\frac{r_1}{d_1}=e, \qquad \frac{r_2}{d_2}=e,$$

где r_1 — расстояние от левого фокуса до точки любой ветви гиперболы, r_2 — расстояние от правого фокуса до точки любой ветви гиперболы и d_1, d_2 — расстояния этих точек от директрис

$$x=-\frac{a}{e}, \qquad x=\frac{a}{e}.$$

Как и в случае эллипса, вводится понятие диаметра и сопряженных диаметров гиперболы.

Уравнение диаметра имеет вид:

$$\frac{x}{a^2}-k\frac{y}{b^2}=0, \qquad (14)$$

где k — угловой коэффициент сопряженных ему хорд.

Угловые коэффициенты сопряженных диаметров гиперболы связаны условием

$$k_1k_2=\frac{b^2}{a^2}. \qquad (15)$$

Уравнение **касательной к гиперболе** (9) в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1. \qquad (16)$$

Асимптоты гиперболы (9) определяются уравнениями

$$y=\pm\frac{b}{a}x. \qquad (17)$$

Уравнение гиперболы, отнесенной к асимптотам, имеет вид:

$$xy=C, \quad \text{где} \quad C\neq 0. \qquad (18)$$

Две гиперболы $xy=C$, $xy=-C$ называются **сопряженными**.

Парабола. Каноническое уравнение параболы (рис. 20) имеет вид:

$$y^2=2px, \qquad (19)$$

где число p, называемое параметром параболы, есть расстояние от фокуса до директрисы.

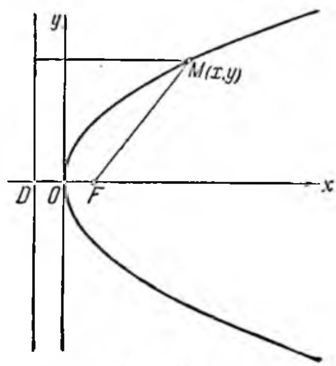

Рис. 20.

Точка пересечения параболы (19) с ее осью симметрии (т. е. с осью Ox) называется **вершиной**, **фокус** F параболы (19) имеет координаты $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Директриса параболы (19) определяется уравнением

$$x=-\frac{p}{2}. \qquad (20)$$

Расстояние r любой точки $M(x, y)$ параболы (19) до фокуса определяется формулой

$$r=\frac{p}{2}+x. \qquad (21)$$

Парабола есть геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до фокуса равно расстоянию до директрисы.

Все диаметры параболы (19) параллельны ее оси симметрии (ось Ox) и определяются уравнением

$$y=\frac{p}{k}, \tag{22}$$

где k — угловой коэффициент сопряженных ему хорд.

Касательная к параболе (19) в точке $M_0(x_0, y_0)$ определяется уравнением

$$y_0y=p(x+x_0). \tag{23}$$

Парабола часто задается уравнением

$$y=ax^2. \tag{24}$$

В этом случае ось параболы совпадает с осью Oy, а параметр $p=\frac{1}{2|a|}$.

Уравнение в полярных координатах. Если за полярную ось принять ось Ox канонической системы координат (ось линии второго порядка), а за полюс — левый фокус в случае эллипса, правый фокус — в случае гиперболы и фокус — в случае параболы, то уравнение в полярных координатах каждой из этих линий имеет один и тот же вид:

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\varphi},$$

где ρ и φ — полярные координаты точки кривой; p — длина полухорды, проходящей через фокус и перпендикулярной к оси; e — эксцентриситет кривой (в случае параболы $e=1$), при этом для эллипса и гиперболы $p=\frac{b^2}{a}$, а для параболы p — параметр.

§ 1. Эллипс

464. Составить каноническое уравнение эллипса, если:

1) полуоси его соответственно равны 5 и 4;

2) расстояние между фокусами равно 8 и бо́льшая ось равна 10;

3) бо́льшая ось равна 26 и эксцентриситет $e=\frac{12}{13}$.

465. Определить фокусы эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

466. Определить фокусы эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$.

467. Определить эксцентриситет эллипса, если:

1) отрезок между фокусами виден из вершины малой оси под углом 60°;

2) расстояние между двумя вершинами эллипса различных осей в два раза больше расстояния между фокусами;

3) расстояние между фокусами есть среднее арифметическое длин осей.

468*. Составить уравнение семейства эллипсов, имеющих одни и те же фокусы $F_1(-c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$.

469. Определить положение следующих точек: 1) $A_1(1,\ 2)$; 2) $A_2(-1,\ 3)$; 3) $A_3(6,\ 1)$; 4) $A_4(-1,\ 7)$; 5) $A_5\left(\sqrt{3},\ 5\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ относительно эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.

470. Оси эллипса совпадают с осями координат. Эллипс проходит через точки $P(2,\ 2)$, $Q(3,\ 1)$. Составить уравнение эллипса.

471. Составить уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты $F(0,\ 1)$, $F_2(1,\ 0)$ и бо́льшая ось равна 2.

472. Расстояния от одного из фокусов эллипса до концов его большей оси соответственно равны 7 и 1. Составить уравнение этого эллипса.

473. Дан эллипс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$. Написать уравнения его директрис.

474. Прямые $x=\pm 8$ служат директрисами эллипса, малая ось которого равна 8. Найти уравнение этого эллипса.

475. Определить эксцентриситет эллипса, зная, что:

1) малая ось его видна из фокуса под прямым углом;

2) расстояние между фокусами равно расстоянию между вершинами малой и большой осей;

3) расстояние между директрисами в четыре раза больше расстояния между фокусами.

476. На эллипсе $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше расстояния ее от левого фокуса.

477. Через фокус $F(c,\ 0)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ проведена хорда, перпендикулярная к большой оси. Найти длину этой хорды.

478. Вычислить длину стороны квадрата, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

479. Определить диаметр эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, сопряженный хордам, имеющим угловой коэффициент $k=\frac{2}{3}$.

480. Составить уравнение прямой, проходящей через середины хорд $2x-y+7=0$, $2x-y-1=0$ эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

481. Составить уравнение такой хорды эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, которая точкой $M(2, 1)$ делится пополам.

482*. Доказать, что стороны прямоугольника, вписанного в эллипс, параллельны его осям.

483. Написать уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1$ в точке $M(4, 3)$.

484*. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, проходящих через точку $N(10, 4)$.

485. Определить касательные к эллипсу $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, параллельные прямой $x+y-1=0$.

486. Найти уравнения тех касательных эллипса $3x^2+8y^2=45$, расстояния которых от центра эллипса равны 3.

487*. Доказать, что касательные к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, проведенные в концах одного и того же диаметра, параллельны между собой, и обратно, если две касательные к эллипсу параллельны, то точки касания лежат на одном и том же диаметре.

488. Найти уравнения сторон квадрата, описанного около эллипса $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

489*. Доказать, что произведение расстояний любой касательной эллипса от двух его фокусов есть величина постоянная, равная квадрату малой полуоси.

490*. При каком необходимом и достаточном условии прямая $Ax+By+C=0$ касается эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$?

491*. Найти общие касательные к следующим двум эллипсам: $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ и $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$.

492. Доказать, что касательные к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ отсекают на двух касательных, проведенных в концах большой оси, отрезки, произведение которых есть величина постоянная, равная b^2.

493*. Доказать, что отрезки касательных к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, заключенные между касательными, проведенными в вершинах большой оси, видны из фокусов под прямым углом.

494*. Найти геометрическое место точек, из которых эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ виден под прямым углом.

495. Эллипс с полуосями a и b перемещен так, что центр его совпал с точкой $C(x', y')$, а оси остались параллельными осям координат. Какое уравнение имеет эллипс в этом новом положении?

496. Эллипс касается оси ординат в начале координат, а центр его находится в точке $(5, 0)$. Составить уравнение эллипса, зная, что эксцентриситет его $e=0{,}8$.

497*. Эллипс при движении по плоскости касается двух взаимно перпендикулярных прямых (осей координат). Какую линию описывает центр эллипса?

498*. Эллипс, имеющий фокусы в точках $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, касается прямой $x+y-5=0$. Составить уравнение эллипса.

499. OA и OB — два сопряженных полудиаметра эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, M — середина хорды AB и C — точка пересечения луча OM с эллипсом. Определить отношение $\frac{OM}{OC}$.

500*. Составить уравнение геометрического места точек, симметричных центру эллипса относительно касательных.

501*. Доказать, что длина перпендикуляра, опущенного из центра эллипса на прямую, соединяющую концы двух перпендикулярных диаметров эллипса, есть величина постоянная.

502*. Найти геометрическое место проекций какого-либо фокуса эллипса на касательные к этому эллипсу.

503*. Найти геометрическое место точек, симметричных с каким-либо фокусом эллипса относительно касательных к этому эллипсу.

504. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности и проходящих через данную точку, лежащую внутри этой окружности.

505*. Найти произведение расстояний от фокуса данного эллипса до любых двух параллельных касательных к этому эллипсу.

506*. При каком условии из точки (x_0, y_0) можно провести касательные к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Составить уравнение этих касательных.

507*. Составить уравнение геометрического места вершин углов данной величины α, стороны которых касаются эллипса. Рассмотреть частный случай: угол равен $\frac{\pi}{2}$.

508*. Найти угол между касательными, проведенными из точки (x_0, y_0) к эллипсу: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

509*. Доказать, что если прямой угол вращается вокруг точки, лежащей внутри окружности, то хорды, определяемые точками пересечения сторон угла с окружностью, касаются одного и того же эллипса.

510*. При каком необходимом и достаточном условии прямая $Ax+By+C=0$: 1) пересекает эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$? 2) не пересекает этот эллипс?

511*. Доказать, что окружность, диаметром которой служит отрезок произвольной касательной к эллипсу, заключенный между касательными, проведенными в концах его большей оси, проходит через фокусы.

512*. Доказать, что две касательные к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, пересекающиеся на оси Oy, пересекаются с любой третьей касательной в двух точках, лежащих на одной окружности с фокусами.

513*. Найти геометрическое место точек пересечения касательных к эллипсу (с фокусами F_1 и F_2) в точках M_1 и M_2 при условии, что прямые M_1F_1 и M_2F_2 параллельны.

514*. Назовем точку внутренней по отношению к эллипсу, если любая прямая, проходящая через эту точку, пересекает эллипс в двух (различных) точках.

При каком необходимом и достаточном условии точка (x_0, y_0) будет внутренней для эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$?

515*. Доказать, что точка M будет внешней по отношению к данному эллипсу тогда и только тогда, когда из этой точки можно провести к эллипсу две (различные) касательные.

516*. Доказать, что точка M является внутренней по отношению к данному эллипсу тогда и только тогда, когда $MF_1+MF_2<2a$, где F_1 и F_2 — фокусы эллипса, а $2a$ — его бóльшая ось.

517*. Найти площадь параллелограмма, у которого двумя соседними сторонами являются сопряженные радиусы эллипса с полуосями a и b (радиусом эллипса называется отрезок, соединяющий его центр с произвольной точкой эллипса; радиусы эллипса, лежащие на его сопряженных диаметрах, называются сопряженными радиусами эллипса).

518*. Найти сумму квадратов длин сопряженных радиусов эллипса с полуосями a и b.

519*. Составить уравнение эллипса, принимая за оси координат два сопряженных диаметра эллипса.

520*. Найти пределы, в которых изменяется угол (острый) между двумя сопряженными диаметрами эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

521*. Найти равные сопряженные радиусы эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

522. Проведем через каждую точку M эллипса две хорды MA и MB, соответственно параллельные двум данным направлениям.

Доказать, что прямая AB касается некоторого эллипса, подобного данному, причем точкой касания служит середина отрезка AB.

523*. Через две произвольные точки A и A' плоскости проводятся две параллельные секущие к эллипсу. Пусть первая секущая пересечет эллипс в точках P и Q, а вторая в точках P' и Q'. Доказать, что $\frac{AP\cdot AQ}{A'P'\cdot A'Q'}=\text{const}$.

524*. Найти сумму двух хорд эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, проходящих через его фокус и параллельных сопряженным диаметрам этого эллипса.

525*. Плоская жесткая фигура перемещается в своей плоскости так, что две ее точки движутся соответственно по двум пересекающимся прямым. Доказать, что точки фигуры описывают эллипсы.

526*. Доказать, что сумма квадратов обратных величин двух взаимно перпендикулярных радиусов эллипса есть величина постоянная.

527*. Эллипс катится по равному ему эллипсу, причем первоначально бóльшие оси обеих линий расположены одна на продолжении другой (с точкой касания в вершине).

Какое геометрическое место описывают фокусы подвижного эллипса?

528*. Доказать, что если четырехугольник $PQRS$, описанный около эллипса, обладает тем свойством, что одна из диагоналей PR проходит через один из фокусов F_1, а другая QS проходит через другой фокус F_2, то PR есть биссектриса угла QF_1S, а QS — биссектриса угла PF_2R. Произведение двух противоположных сторон этого четырехугольника равно произведению двух других его противоположных сторон.

529*. Доказать, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус эллипса делит проходящую через него хорду, постоянна.

Доказать, что и отношение произведения этих отрезков к длине хорды также постоянно.

§ 2. Гипербола

530. Определить положение точек $A(4,\ 1)$, $B(1, -2)$, $C(\sqrt{2},\ 1)$ относительно гиперболы $x^2-y^2=1$.

531. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

1) действительная полуось $a=5$ и мнимая $b=3$;

2) расстояние между фокусами равно 10 и действительная ось равна 8.

532. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

1) действительная ось равна 48 и эксцентриситет $e=\frac{13}{12}$;

2) действительная ось равна 16 и угол φ между асимптотой и осью абсцисс определяется условием $\operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{4}$.

533. Вычислить эксцентриситет равносторонней гиперболы.

534. Даны уравнения асимптот гиперболы $y=\pm\frac{5}{12}x$ и координаты точки $M(24, 5)$, лежащей на гиперболе. Составить уравнение гиперболы.

535. Определить фокусы гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$.

536. Определить фокусы гиперболы $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{64}=-1$.

537. Определить каноническое уравнение гиперболы, если:

1) расстояние между директрисами равно $\frac{32}{5}$ и эксцентриситет $e=\frac{5}{4}$;

2) угол между асимптотами равен $60°$ и $c=2\sqrt{3}$.

538. Определить длину хорды гиперболы, проходящей через фокус и перпендикулярной к действительной оси.

539. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ при условии, что эксцентриситет ее $e=\frac{5}{4}$.

540. Дана гипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

Требуется:

1) вычислить координаты фокусов;

2) вычислить эксцентриситет;

3) написать уравнения асимптот и директрис;

4) написать уравнение сопряженной гиперболы и вычислить ее эксцентриситет.

541. Доказать, что отрезки, отсекаемые директрисами на асимптотах (считая от центра гиперболы), равны действительной полуоси. Пользуясь этим свойством, построить директрисы гиперболы.

542. Доказать, что директриса гиперболы проходит через основание перпендикуляра, опущенного из соответствующего фокуса на асимптоту гиперболы. Вычислить длину этого перпендикуляра.

543. Вычислить полуоси гиперболы, зная, что:

1) расстояние между фокусами равно 8 и расстояние между директрисами равно 6;

2) директрисы даны уравнениями $x = \pm 3\sqrt{2}$ и угол между асимптотами прямой;

3) асимптоты даны уравнениями $y = \pm 2x$ и фокусы находятся на расстоянии 5 от центра;

4) асимптоты даны уравнениями $y = \pm \frac{5}{3}x$ и гипербола проходит через точку $N(6, 9)$.

544. Написать канонические уравнения двух сопряженных гипербол, зная, что расстояние между директрисами первой из них равно 7,2 и расстояние между директрисами второй равно 12,8.

545. Определить угол между асимптотами гиперболы, у которой:

1) эксцентриситет $e = 2$;

2) расстояние между фокусами вдвое больше расстояния между директрисами.

546. Дана равносторонняя гипербола $x^2 - y^2 = 8$. Найти софокусную гиперболу, проходящую через точку $M(-5, 3)$.

547. На гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ найти точку, для которой:

1) фокальные радиусы перпендикулярны друг к другу;

2) расстояние от левого фокуса вдвое больше, чем от правого.

548*. Доказать, что произведение расстояний любой точки гиперболы до двух асимптот есть величина постоянная.

549. Составить уравнение такой хорды гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, которая точкой $M(5, 1)$ делится пополам.

550. Проверить, что оси гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ являются единственными диаметрами, перпендикулярными к тем хордам, которые они делят пополам.

551. Найти вершины квадрата, вписанного в гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, и исследовать, в какие гиперболы возможно вписать квадрат.

552. Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ в точке $M(5, -4)$.

553. Составить уравнение касательной к гиперболе $x^2-y^2=8$ в точке $M(3, -1)$.

554*. Составить уравнение касательных к гиперболе $x^2-\frac{y^2}{4}=1$, проходящих через точку $M(1, 4)$.

555. Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$, если касательная:

1) параллельна прямой $3x-y-17=0$;

2) перпендикулярна к прямой $2x+5y+11=0$.

556*. Найти необходимое и достаточное условие касания прямой $Ax+By+C=0$ с гиперболой $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

557*. Определить произведение расстояний от фокусов гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ до касательной.

558. Даны фокусы гиперболы $F_1(4, 2)$, $F_2(-1, -10)$ и уравнение касательной $3x+4y-5=0$. Определить полуоси.

559*. Определить геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых касаются данной гиперболы.

560*. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой имеют координаты $F_1(1, 0)$, $F_2(0, 1)$ и асимптоты параллельны осям координат.

561*. Доказать, что расстояние от любой точки M гиперболы до фокуса F равно отрезку прямой, проходящей через эту точку параллельно асимптоте, заключенному между точкой M и директрисой, соответствующей фокусу F.

562. Составить каноническое уравнение гиперболы, если дано ее уравнение в полярных координатах $\varrho=\frac{9}{4-5\cos\varphi}$.

563. Составить уравнение гиперболы в полярных координатах, если дано ее уравнение в декартовых координатах $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$.

564. Можно ли к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ провести касательные любого направления и если нет, то какое ограничение наложено на угловые коэффициенты касательных к этой гиперболе?

565. Гипербола, оси которой совпадают с осями координат, касается прямой $x-y-2=0$ в точке $M(4, 2)$. Составить уравнение этой гиперболы.

566*. Составить уравнение гиперболы, зная уравнения ее асимптот $y=\pm\frac{1}{2}x$ и уравнение одной из ее касательных $5x-6y-8=0$.

567. Привести к простейшему виду уравнения гипербол:

1) $9x^2-25y^2-18x-100y-316=0$;
2) $5x^2-6y^2+10x-12y-31=0$;
3) $x^2-4y^2+6x+5=0$.

Определить положение их центров и величину осей.

568*. Найти геометрическое место проекций какого-либо фокуса гиперболы на касательные к этой гиперболе.

569*. Найти геометрическое место точек, симметричных с каким-нибудь фокусом гиперболы относительно касательных к этой гиперболе.

570. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности и проходящих через данную точку, лежащую вне этой окружности.

571*. Найти произведение расстояний от фокуса данной гиперболы до любых двух параллельных касательных к этой гиперболе.

572*. При каком условии из точки (x_0, y_0) можно провести к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ две касательные? Составить уравнения этих касательных. При каком условии из точки (x_0, y_0) к данной гиперболе можно провести только одну касательную? Составить ее уравнение.

573*. Составить уравнение геометрического места вершин углов данной величины α, стороны которого касаются гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Рассмотреть случай $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

574*. Найти угол между касательными, проведенными из точки (x_0, y_0) к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

575*. Доказать, что произведение отрезков, отсекаемых касательной к гиперболе на ее асимптотах (считая от центра), равно квадрату половины расстояния между фокусами.

576*. Найти площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и произвольной касательной к этой гиперболе.

577*. Доказать, что точка гиперболы служит серединой отрезка касательной к этой гиперболе, заключенного между асимптотами.

578*. Найти площадь параллелограмма, одна из вершин которого есть точка гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, а две стороны параллелограмма лежат на асимптотах.

579. Найти геометрическое место точек, для каждой из которых произведение расстояний до двух пересекающихся прямых равно данному положительному числу.

580*. Назовем точку внутренней по отношению к гиперболе, если любая прямая, проходящая через эту точку и не параллельная ни одной из асимптот, пересекает гиперболу в двух (различных) точках. При каком необходимом и достаточном условии точка (x_0, y_0) будет внутренней по отношению к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$?

581*. Доказать, что точка M, не совпадающая с центром гиперболы, будет внешней точкой этой гиперболы тогда и только тогда, когда из нее можно провести к гиперболе по крайней мере одну касательную.

582*. Доказать, что точка M является внутренней относительно данной гиперболы тогда и только тогда, когда $|MF_1-MF_2|>2a$, где F_1 и F_2 — фокусы гиперболы, а $2a$ — ее действительная ось.

583*. Доказать, что если прямая l пересекает гиперболу в двух точках, лежащих на одной ее ветви, то все точки прямой l, лежащие между точками пересечения прямой l с гиперболой, являются внутренними относительно гиперболы, а все точки прямой l, лежащие вне отрезка этой прямой, ограниченного точками пересечения с гиперболой, — внешними. Если же прямая l пересекает различные ветви гиперболы, то картина будет обратная.

584*. Доказать, что все точки касательной к гиперболе, кроме точки прикосновения, являются внешними по отношению к этой гиперболе.

585*. При каком необходимом и достаточном условии касательные, проведенные из точки (x_0, y_0) к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, касаются различных ее ветвей?

586*. При каком необходимом и достаточном условии точка (x_0, y_0) лежит в области, ограниченной двумя лучами, выходящими из центра гиперболы и идущими по ее асимптотам, и самой гиперболой?

587*. При каком необходимом и достаточном условии все точки отрезка с концами $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ внутренние по отношению к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$?

588*. Доказать, что точка пересечения касательных к гиперболе, проведенных в точках M_1 и M_2, равноудалена от четырех прямых F_1M_1, F_2M_2, F_1M_2 и F_2M_1, где F_1 и F_2 — фокусы гиперболы.

589*. Найти геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что через каждую точку можно провести два луча, касающихся разных ветвей гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и образующих острый угол.

590*. Найти геометрическое место точек пересечения касательных к гиперболе в точках M_1 и M_2 таких, что $M_1F_1 \parallel M_2F_2$ (F_1 и F_2 — фокусы гиперболы).

591. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных окружностей (одна окружность лежит вне другой).

592*. Найти геометрическое место вторых фокусов и геометрическое место центров эллипсов, имеющих данный фокус и проходящих через две данные точки. Найти те же геометрические места точек, если вместо эллипсов рассматриваются гиперболы.

593*. Найти геометрическое место вторых фокусов (и геометрическое место центров) эллипсов и гипербол, для которых задан один фокус и две касательные. Решить ту же задачу в случае, если задан фокус, одна точка и одна касательная.

594*. Найти геометрическое место точек касания прямых MF_1 и MF_2 с окружностью, вписанной в треугольник MF_1F_2; M — произвольная точка гиперболы, F_1 и F_2 — фокусы гиперболы.

595*. Доказать, что софокусные эллипс и гипербола (т. е. эллипс и гипербола, имеющие общие фокусы) пересекаются ортогонально.

596*. Доказать, что отрезок произвольной касательной к гиперболе, заключенный между двумя данными касательными к этой гиперболе, виден из фокуса под постоянным углом.

597*. Доказать, что окружность, диаметром которой является отрезок любой касательной к гиперболе, высекаемый из нее касательными к гиперболе в ее вершинах, проходит через фокусы. Найти также произведение отрезков касательных к гиперболе в ее вершинах, концами которых служат вершины гиперболы и точки пересечения этих касательных с произвольной касательной к гиперболе.

598*. Доказать, что две касательные к гиперболе, симметричные относительно мнимой оси, пересекаются с любой третьей касательной в двух точках, лежащих на одной окружности с фокусами.

599*. Доказать, что точки пересечения касательной к гиперболе с ее асимптотами лежат на одной окружности с фокусами.

600*. Пусть P_1 и P_2 — точки пересечения касательной к гиперболе в точке M с асимптотами. Доказать, что $MP_1^2 = MP_2^2 = MF_1 \cdot MF_2$ (F_1 и F_2 — фокусы гиперболы).

601*. Через точку M проведены касательные MM_1 и MM_2 к гиперболе (M_1 и M_2 — точки прикосновения). Доказать, что

1) $$\frac{MM_1^2}{M_1F_1 \cdot M_1F_2} = \frac{MM_2^2}{M_2F_1 \cdot M_2F_2} = \frac{R^2}{b^2},$$

где R — радиус окружности, касающейся четырех прямых M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1 и M_2F_2 (см. задачу 588), а b — мнимая полуось гиперболы);

2) $$\frac{MF_1^2}{F_1M_1 \cdot F_1M_2} = \frac{MF_2^2}{F_2M_1 \cdot F_2M_2}.$$

602*. Найти геометрическое место вершин прямого угла, стороны которого касаются соответственно двух данных эллипсов (или двух данных гипербол или данного эллипса и данной гиперболы), софокусных между собой.

603*. При каком необходимом и достаточном условии прямая $Ax+By+C=0$: 1) пересекает гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$? 2) не пересекает эту гиперболу?

604*. Доказать, что сопряженные диаметры равносторонней гиперболы одинаково наклонены к ее асимптотам.

605. Доказать, что гиперболы, заданные уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=k$ (a и b фиксированы, k — параметр):

1) имеют общие асимптоты;

2) имеют общие пары сопряженных диаметров.

606. Доказать, что касательная к гиперболе имеет направление диаметра, сопряженного с диаметром, проходящим через точку касания.

607. Доказать, что сопряженные гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$ кососимметричны друг другу относительно одной из асимптот по направлению другой.

608. Назовем сопряженными радиусами гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ два отрезка, лежащих на сопряженных диаметрах этой гиперболы, причем концами этих отрезков являются центр симметрии данной гиперболы и точки пересечения сопряженных диаметров гиперболы с данной гиперболой и с гиперболой $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, сопряженной данной.

Доказать, что если

$$M\left[\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\ \frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]$$

— конец одного из сопряженных радиусов, то конец другого будет

$$M'\left[\frac{a}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right),\ \frac{b}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right].$$

609*. Доказать, что два треугольника, образованных двумя радиусами гиперболы и касательными в их концах, равновелики.

610*. Доказать, что отрезки MM_1 и MM_2 касательных, проведенных из какой-либо точки M к гиперболе (M_1 и M_2 — точки прикосновения), относятся друг к другу как длины радиусов этой гиперболы, которым они параллельны.

611*. Доказать, что длины хорд, стягивающие дуги, заключенные между двумя параллельными секущими, к гиперболе, относятся друг к другу как радиусы гиперболы, параллельные этим хордам.

612*. Доказать, что диагонали параллелограмма, стороны которого касаются гиперболы, являются сопряженными диаметрами гиперболы.

613*. Составить уравнение гиперболы, принимая за оси координат два сопряженных диаметра этой гиперболы.

614*. Доказать, что прямые, соединяющие какие-либо две фиксированные точки гиперболы с произвольной точкой той же гиперболы, отсекают на ее асимптоте отрезок постоянной длины, равный другому отрезку, отсекаемому на той же асимптоте прямыми, параллельными другой асимптоте и проходящими через данные точки.

615*. Найти два сопряженных диаметра гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, образующих между собой угол α.

616. Найти геометрические места точек M пересечения прямых, проходящих через две данные точки A и B плоскости при условии, что прямые AM и BM параллельны двум сопряженным диаметрам гиперболы.

617*. Доказать, что касательные в точках пересечения двух равносторонних гипербол с общим центром взаимно перпендикулярны, если асимптоты одной из гипербол служат осями симметрии другой.

618*. Через две точки A и B гиперболы проведены прямые, параллельные ее асимптотам. Доказать, что:

1) вторая диагональ параллелограмма, образованного таким построением, проходит через центр гиперболы;

2) половина этой диагонали есть среднее пропорциональное между расстояниями от центра параллелограмма до точки, в которой диагональ пересекает касательную в точке A и до центра гиперболы;

3) половина той же диагонали есть среднее пропорциональное между расстояниями от центра параллелограмма до точек, в которых вторая диагональ пересекает гиперболу.

619*. Через две произвольные точки A и A' плоскости проводят две параллельные секущие к гиперболе. Пусть первая секущая пересечет гиперболу в точках P и Q, а вторая в точках P' и Q'. Доказать, что $\frac{AP \cdot AQ}{A'P' \cdot A'Q'} = \text{const}$.

620*. Через точку A плоскости проводится прямая, пересекающая гиперболу в точках P и Q. Доказать, что $\frac{AP \cdot AQ}{r^2} = \text{const}$, где r — радиус гиперболы, параллельный рассматриваемой секущей.

621*. Доказать, что если две из точек пересечения окружности с равносторонней гиперболой служат концами одного из диаметров окружности, то две другие (если они существуют) служат концами одного из диаметров гиперболы; касательная в одной из последних точек перпендикулярна к диаметру окружности, соединяющему две первые точки пересечения.

622*. Доказать, что геометрическое место точек прикосновения касательных или оснований нормалей, проведенных из данной точки A оси, не проходящей через фокусы, к софокусным эллипсам и гиперболам, есть окружность.

623*. Найти геометрические места фокусов эллипсов, касающихся в двух точках данной окружности.

624*. Найти геометрическое место фокусов гипербол, касающихся в двух точках данной окружности.

625*. Какой линии касаются асимптоты гипербол с заданными фокусом и соответствующей этому фокусу директрисой?

626*. Доказать, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус гиперболы делит проходящую через него хорду, постоянна. Доказать, что отношение произведения этих отрезков к длине хорды также постоянно.

§ 3. Парабола

627. Определить координаты фокуса параболы $y^2 = 4x$.

628. Определить координаты фокуса параболы $x^2 = 4y$.

629. Определить координаты фокуса параболы $y^2 = -8x$.

630. Составить уравнение директрисы параболы $y^2 = 6x$.

631. Составить каноническое уравнение параболы, если расстояние фокуса от вершины равно 3.

632. Составить каноническое уравнение параболы, если расстояние фокуса от директрисы равно 2.

633. Составить уравнение параболы, если даны координаты фокуса $F(3, 0)$ и уравнение директрисы $x=-1$.

634. Определить фокус параболы $y=x^2-4x+5$.

635. Составить уравнение параболы, зная, что:

1) расстояние фокуса от вершины равно 3, парабола касается оси Oy и симметрична относительно оси Ox;

2) фокус имеет координаты $(5, 0)$, а ось ординат служит директрисой;

3) парабола симметрична относительно оси Ox, проходит через начало координат и через точку $M(1, -4)$;

4) фокус параболы находится в точке $(0, 2)$ и вершина совпадает с началом координат;

5) парабола симметрична относительно оси Oy, проходит через начало координат и через точку $M(6, -2)$.

636. На параболе $y^2=8x$ найти точку, фокальный радиус-вектор которой равен 20.

637. Через фокус параболы $y^2=2px$ проведена хорда, перпендикулярная к ее оси. Определить длину этой хорды.

638. Найти такую хорду параболы $y^2=4x$, которая точкой $(3, 1)$ делится пополам.

639. Составить уравнение касательной к параболе $y^2=4x$ в точке $M(9, 6)$.

640. Дано уравнение касательной $x-3y+9=0$ к параболе $y^2=2px$. Составить уравнение параболы.

641*. Найти необходимое и достаточное условие касания прямой $Ax+By+C=0$ и параболы $y^2=2px$.

642*. Написать уравнение прямой, параллельной данной $y=kx+b$ и касающейся параболы $y^2=2px$.

643*. Определить общие касательные к параболе $y^2=4x$ и к эллипсу $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

644*. Определить геометрическое место точек, симметричных началу системы координат относительно касательных к параболе $y^2=2px$.

645*. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы $y^2=2px$ на касательные.

646. Составить уравнение параболы $y^2=8x$ в полярных координатах.

647. Составить каноническое уравнение параболы, определяемой уравнением $\rho=\frac{6}{1-\cos\varphi}$.

648. Доказать, что прямая, соединяющая фокус F параболы с точкой пересечения касательных к параболе в двух произвольных ее точках M_1 и M_2, делит пополам угол M_1FM_2.

649. Найти кратчайшее расстояние параболы $y^2=64x$ от прямой $4x+3y+46=0$.

650. Доказать, что любая касательная параболы пересекает директрису и фокальную хорду, перпендикулярную к оси, в точках, равноудаленных от фокуса.

651*. Прямой угол скользит так, что стороны его все время касаются параболы $y^2=2px$. Определить траекторию его вершины.

652*. Проверить, что фокус параболы и точки прикосновения двух касательных к параболе, проведенных из любой точки директрисы, лежат на одной прямой.

653. Составить уравнение параболы, зная, что вершина ее имеет координаты (a, b), параметр равен p и направление оси симметрии совпадает: 1) с положительным направлением оси Ox; 2) с отрицательным направлением оси Ox; 3) с положительным направлением оси Oy; 4) с отрицательным направлением оси Oy.

654. Определить координаты вершины параболы, величину параметра и направление оси, если парабола дана одним из следующих уравнений:

1) $y^2-10x-2y-19=0$; 5) $y=Ax^2+Bx+C$;
2) $y^2-6x+14y+49=0$; 6) $y=x^2-8x+15$;
3) $y^2+8x-16=0$; 7) $y=x^2+6x$.
4) $x^2-6x-4y+29=0$;

655*. Доказать, что параболы, имеющие общий фокус и совпадающие, но противоположно направленные оси, пересекаются под прямым углом.

656. Парабола симметрична относительно оси Ox, вершина ее помещается в точке $(-5, 0)$, и на оси ординат она отсекает хорду, длина которой $l=12$. Написать уравнение этой параболы.

657. Мостовая арка имеет форму параболы. Определить параметр этой параболы, зная, что пролет арки равен 24 *м*, а высота 6 *м*.

658. Камень, брошенный под острым углом к горизонту, описал дугу параболы и упал на расстоянии 16 *м* от начального положения. Определить параметр параболической траектории, зная, что наибольшая высота, достигнутая камнем, равна 12 *м*.

659. Найти геометрическое место центров кругов, проходящих через данную точку и касающихся данной прямой.

660. Найти геометрическое место центров кругов, касающихся оси ординат и круга $x^2+y^2=1$.

661*. Назовем точку M внутренней по отношению к данной параболе, если любая прямая, проходящая через точку M, направление которой отлично от направления оси параболы, пересекает эту параболу в двух различных точках. При каком необходимом и достаточном условии точка (x_0, y_0) будет внутренней точкой параболы $y^2=2px$?

662*. Доказать, что необходимое и достаточное условие того, что точка M — внутренняя точка параболы, может быть записано в виде: $r<d$, где r — расстояние от точки M до фокуса параболы, а d — расстояние от той же точки до директрисы.

663*. Доказать, что точка $M_0(x_0, y_0)$ является внешней точкой параболы $y^2=2px$ тогда и только тогда, когда из точки M_0 можно провести к данной параболе две различные касательные.

664*. Предполагая, что точка $M_0(x_0, y_0)$ внешняя по отношению к параболе $y^2=2px$, составить уравнения касательных к этой параболе, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$.

665. Доказать, что фокус — внутренняя точка параболы.

666*. Доказать, что если прямая не пересекает параболу, то все ее точки — внешние точки этой параболы.

667*. Доказать, что все точки касательной к параболе (за исключением точки касания) — внешние точки этой параболы.

668*. Доказать, что геометрическое место точек, симметричных с фокусом параболы относительно ее касательных, есть директриса.

669*. Найти геометрическое место точек, для каждой из которых угол M_1MM_2, образованный касательными MM_1 и MM_2 к параболе $y^2=2px$, проведенными через точку M, имеет данную величину α (M_1 и M_2 — точки прикосновения).

670. Доказать, что касательная к параболе имеет направление, сопряженное с диаметром, проходящим через точку касания.

671*. Доказать, что точка пересечения касательных к параболе в концах какой-либо ее хорды лежит на диаметре, сопряженном с направлением этой хорды.

672. Составить уравнение параболы, принимая за ось Ox какой-нибудь ее диаметр, а за ось Oy касательную к параболе в точке пересечения этого диаметра с параболой.

673. Доказать, что все параболы подобны между собой.

674. Найти геометрическое место точек, для каждой из которых сумма или разность расстояний от данной точки и от данной прямой есть величина постоянная.

675. На отрезке, соединяющем произвольную точку M плоскости с данной точкой A, как на диаметре построена окружность и к этой окружности проведена касательная l, параллельная данной прямой. Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых расстояние до соответствующей прямой l постоянно.

676*. Доказать, что отрезок подвижной касательной к параболе, заключенный между двумя неподвижными касательными, проектируется на директрису в отрезок постоянной длины.

677*. Доказать, что если точка перемещается по одной из касательных к параболе, то угол между прямой, соединяющей эту точку с фокусом, и второй касательной к параболе, проходящей через ту же точку, сохраняет постоянную величину.

678*. Пусть M — точка пересечения касательных к параболе в точках M_1 и M_2, а F — фокус параболы.

Доказать, что: 1) $MF^2 = M_1F \cdot M_2F$; 2) $\frac{M_1F}{M_2F} = \left(\frac{M_1M}{M_2M}\right)^2$.

679*. Найти геометрическое место вершин прямых углов, стороны которого касаются соответственно двух данных софокусных парабол.

680*. При каком необходимом и достаточном условии прямая $Ax + By + C = 0$: 1) пересекает параболу $y^2 = 2px$? 2) не пересекает параболу?

681*. Доказать, что если через какую-либо точку хорды, соединяющей точки прикосновения двух касательных к параболе, провести прямые, им параллельные, то диагональ полученного таким образом параллелограмма, не проходящая через выбранную точку хорды, будет касательной к параболе.

682*. Доказать, что прямые, соединяющие основания перпендикуляров, опущенных из каждой точки одной стороны треугольника на две другие его стороны, касаются одной и той же параболы. Фокусом этой параболы служит основание соответствующей высоты треугольника. Директрисой является прямая, соединяющая основания двух других его высот.

683. Доказать, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус параболы делит проходящую через него хорду, постоянна. Доказать, что отношение произведения этих отрезков к длине хорды также постоянно.

684*. Даны парабола и прямая l, перпендикулярная к ее оси. Найти на оси параболы такую точку P, чтобы разность квадратов расстояний любой точки M параболы от этой точки и от прямой l не зависела бы от выбора точки M параболы.

685*. Доказать, что если две параболы со взаимно-перпендикулярными осями пересекаются в четырех точках, то через эти четыре точки можно провести окружность; центр этой окружности есть четвертая вершина параллелограмма, две противоположные вершины которого находятся в фокусах, а третья вершина в точке пересечения директрис.

686*. Дан треугольник T. Пусть T' — треугольник, имеющий своими вершинами проекции некоторой точки M, лежащей в плоскости треугольника T, на его стороны.

1) Доказать, что если точка M описывает прямую l, то стороны треугольника T' огибают три параболы C_1, C_2, C_3, вписанные в один и тот же угол. Как должна быть расположена прямая l для того, чтобы эти три параболы касались друг друга в одной и той же точке?

2) Как следует выбрать прямую l для того, чтобы директрисы парабол C_1, C_2, C_3 проходили через одну точку? Найти геометрическое место этих точек.

3) Доказать, что если прямая l вращается около данной точки K, то директрисы парабол C_1, C_2, C_3 вращаются соответственно около трех определенных точек I_1, I_2, I_3. Найти огибающую прямых KI_1 при условии, что точка K или точка I_1 описывает прямую.

4) Для каких положений точки K точки I_1, I_2, I_3 лежат на одной прямой? Доказать, что прямые, на которых лежат точки I_1, I_2, I_3 соответственно различным положениям точки K, проходят через неподвижную точку.

ГЛАВА VII

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ЗАДАННЫЕ ОБЩИМИ УРАВНЕНИЯМИ

Общее уравнение линии второго порядка обычно записывается в одном из следующих видов:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0; \tag{1}$$

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0; \tag{1'}$$

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0. \tag{1''}$$

Уравнение (1) определяет одну из следующих линий:

I. $\begin{cases} \dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1 & \text{эллипс,} \\ \dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=-1 & \text{мнимый эллипс,} \\ \dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=0 & \text{две мнимые пересекающиеся прямые,} \\ \dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1 & \text{гипербола,} \\ \dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=0 & \text{две пересекающиеся прямые.} \end{cases}$

II. $Y^2=2pX$ парабола.

III. $\begin{cases} X^2=a^2,\ a\neq 0, & \text{две параллельные прямые,} \\ X^2=-a^2,\ a\neq 0, & \text{две мнимые параллельные прямые,} \\ X^2=0 & \text{две совпадающие прямые.} \end{cases}$

Следующие выражения:

$$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{2}$$

$$K_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}, \tag{3}$$

$$I_1=a_{11}+a_{22}, \tag{4}$$

где $a_{12}=a_{21}$, являются инвариантами по отношению к преобразованию одной декартовой прямоугольной системы координат в другую прямоугольную. Это означает, что если

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0$$

— уравнение линии второго порядка в одной декартовой прямоугольной системе координат, а

$$a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_1x'+2a'_2y'+a'=0$$

— уравнение той же линии, полученное в результате преобразования одной прямоугольной системы координат в другую, то

$$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix},$$

$$I_1=a_{11}+a_{22}=a'_{11}+a'_{22},$$

$$K_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a' \end{vmatrix}.$$

В случае $I_2=0$, $K_3=0$ инвариантом (в том же смысле) будет также

$$K_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix}; \tag{5}$$

K_2 называется с е м и и н в а р и а н т о м.

Уравнение

$$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0 \tag{6}$$

называется х а р а к т е р и с т и ч е с к и м. Его корни λ_1 и λ_2 всегда действительны.

Линии второго порядка можно разбить на т р и г р у п п ы.

К первой группе отнесем линии, имеющие единственный центр симметрии; это будут: эллипс, мнимый эллипс, две мнимые пересекающиеся прямые, гипербола и две пересекающиеся прямые.

Необходимое и достаточное условие того, что линия второго порядка имеет единственный центр симметрии (т. е. является линией первой группы), имеет вид:

$$I_2\neq 0.$$

Ко второй группе отнесем линии, не имеющие центра симметрии, т. е. одну параболу. Необходимое и достаточное условие того, что линия является параболой, имеет вид:

$$I_2=0, \qquad K_3\neq 0.$$

К третьей группе отнесем линии, имеющие прямую центров симметрии; это будут: две параллельные прямые, две мнимые параллельные прямые, две совпадающие прямые. Необходимое и достаточное условие того, что линия второго порядка имеет прямую центров симметрии (относится к третьей группе), имеет вид:

$$I_2=0, \qquad K_3=0.$$

При помощи преобразования декартовой прямоугольной системы координат уравнение линии первой группы может быть приведено к виду:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0; \tag{7}$$

уравнение линии второй группы — к виду:

$$I_1 X^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}\,Y = 0, \tag{8}$$

а уравнение линий третьей группы — к виду:

$$I_1 X^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0. \tag{9}$$

Необходимые и достаточные признаки линий второго порядка могут быть выражены следующими соотношениями между инвариантами:

I. Эллипс	$I_2 > 0$,	$I_1 K_3 < 0$,
мнимый эллипс	$I_2 > 0$,	$I_1 K_3 > 0$,
две мнимые пересекающиеся прямые	$I_2 > 0$,	$K_3 = 0$,
гипербола	$I_2 < 0$,	$K_3 \neq 0$,
две пересекающиеся прямые	$I_2 < 0$,	$K_2 = 0$,
II. Парабола	$I_2 = 0$,	$K_3 \neq 0$,
III. Две параллельные прямые	$I_2 = 0$,	$K_3 = 0,\ K_2 < 0$,
две мнимые параллельные прямые	$I_2 = 0$,	$K_3 = 0,\ K_2 > 0$,
две совпадающие прямые	$I_2 = 0$,	$K_3 = 0,\ K_2 = 0$,

Все вышеизложенное сведено в таблицу на стр. 129.

Расположение эллипса или гиперболы относительно начальной системы координат определяется следующим образом: координаты нового начала (центра) мы находим, решая систему уравнений:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0, \qquad a_{21}x + a_{22}y + a_2 = 0. \tag{10}$$

Угловой коэффициент новой оси $O'X$ в случае $a_{12} \neq 0$ находится по формуле

$$k = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}, \tag{11}$$

где λ_1 — корень характеристического уравнения, являющийся коэффициентом при X^2 в уравнении

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0.$$

Если линия — эллипс и если через λ_1 обозначить меньший по абсолютной величине корень характеристического уравнения, то

№ группы	Место центров	Признак места центров	Преобразованное уравнение	№	Название линии	Признак линии	Каноническое уравнение линии
I	Точка	$I_2 \neq 0$	$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0$	1	Эллипс	$I_2 > 0,\ I_1 K_3 < 0$	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$
				2	Мнимый эллипс	$I_2 > 0,\ I_1 K_3 > 0$	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$
				3	Две мнимые пересекающиеся прямые	$I_2 > 0,\ K_3 = 0$	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$
				4	Гипербола	$I_2 < 0,\ K_3 \neq 0$	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$
				5	Две пересекающиеся прямые	$I_2 < 0,\ K_3 = 0$	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$
II	Нет центра	$I_2 = 0,$ $K_3 \neq 0$	$I_1 X^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}\, Y = 0$	6	Парабола	$I_2 = 0,\ K_3 \neq 0$	$X^2 = 2pY$
III	Прямая	$I_2 = 0,$ $K_3 = 0$	$I_1 X^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0$	7	Две параллельные прямые	$I_2 = 0,\ K_3 = 0,\ K_2 < 0$	$X^2 = a^2$
				8	Две мнимые параллельные прямые	$I_2 = 0,\ K_3 = 0,\ K_2 > 0$	$X^2 = -a^2$
				9	Две совпадающие прямые	$I_2 = 0,\ K_3 = 0,\ K_2 = 0$	$X^2 = 0$

формула

$$k=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}$$

определяет угловой коэффициент бо́льшей оси эллипса.

Если линия — гипербола и если через λ_1 обозначить тот корень характеристического уравнения, знак которого совпадает со знаком K_3, то формула

$$k=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}$$

($a_{12}\neq 0$) дает угловой коэффициент действительной оси гиперболы.

Расположение параболы относительно начальной системы координат будет известно, если мы будем знать вершину параболы, вектор, направленный по ее оси в сторону вогнутости, и параметр.

Вершина параболы определяется при совместном решении уравнения оси параболы

$$a_{11}x+a_{12}y+\frac{a_{11}a_1+a_{12}a_2}{a_{11}+a_{22}}=0 \tag{12}$$

или

$$a_{21}x+a_{22}y+\frac{a_{22}a_2+a_{12}a_1}{a_{11}+a_{22}}=0$$

с уравнением параболы. Вектор

$$\left\{\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_1 & a_2\end{vmatrix},\quad -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}\right\} \tag{13}$$

параллелен оси параболы и направлен в сторону ее вогнутости.

Параметр параболы определяется по формуле

$$p=\sqrt{-\frac{K_3}{I_1^3}}\ . \tag{14}$$

Если линия второго порядка распадается на две прямые, то уравнения этих прямых мы получим, разлагая левую часть уравнения на линейные множители и приравнивая каждый из множителей нулю.

Если линия второго порядка задана относительно аффинной системы координат, метрика которой определяется величинами g_{11}, g_{12}, g_{22}, то инвариантами линий второго порядка по отношению к преобразованию одной аффинной системы координат в другую являются следующие выражения:

$$I_2=\frac{1}{G}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}, \tag{15}$$

$$K_3=\frac{1}{G}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_1\\ a_{21} & a_{22} & a_2\\ a_1 & a_2 & a\end{vmatrix}, \tag{16}$$

$$I_1=\frac{1}{G}\left(\begin{vmatrix}a_{11} & g_{12}\\ a_{21} & g_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}g_{11} & a_{12}\\ g_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\right), \tag{17}$$

где

$$G=g_{11}g_{22}-g_{12}^2. \tag{18}$$

Семиинвариант K_2 в аффинной системе имеет вид:

$$K_2=\frac{1}{G}\left(\begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} & a_1 \\ g_{21} & a_{22} & a_2 \\ 0 & a_2 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & g_{12} & a_1 \\ a_{21} & g_{22} & a_2 \\ a_1 & 0 & a \end{vmatrix}\right). \tag{19}$$

Определение коэффициентов канонических уравнений через инварианты совершается так же, как и в случае прямоугольной системы координат.

Расположение эллипса и гиперболы определяется следующим образом:

координаты центра определяются из уравнений (10);

угловой коэффициент новой оси $O'X$ (оси кривой) находится по формуле

$$k=\frac{g_{11}\lambda_1-a_{11}}{a_{12}-g_{12}\lambda_1} \tag{20}$$

или по формуле

$$k=\frac{g_{21}\lambda_1-a_{21}}{a_{22}-g_{22}\lambda_1}, \tag{21}$$

где λ_1 — корень характеристического уравнения, являющийся коэффициентом при X^2.

Расположение параболы определяется так же, как и в случае прямоугольной системы координат, только уравнение оси имеет вид:

$$a_{11}x+a_{12}y+\frac{g_{11}a_{12}a_2-g_{12}(a_{12}a_1+a_{11}a_2)+g_{22}a_{11}a_1}{g_{11}a_{22}-2g_{12}a_{12}+g_{22}a_{11}}=0 \tag{22}$$

или

$$a_{21}x+a_{22}y+\frac{g_{11}a_{22}a_2-g_{12}(a_{22}a_1+a_{12}a_2)+g_{22}a_{12}a_1}{g_{11}a_{22}-2g_{12}a_{12}+g_{22}a_{11}}=0. \tag{23}$$

Координаты центра линии второго порядка (центра симметрии), заданной уравнением

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0,$$

определяются из системы уравнений

$$a_{11}x+a_{12}y+a_1=0, \qquad a_{21}x+a_{22}y+a_2=0. \tag{24}$$

Если $I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$, то существует единственный центр.

Диаметр линии второго порядка, сопряженный хордам, параллельным вектору $\{l, m\}$, определяется уравнением

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_1)\,l+(a_{21}x+a_{22}y+a_2)\,m=0 \tag{25}$$

или

$$lF_x+mF_y=0, \tag{25'}$$

где

$$F_x = a_{11}x + a_{12}y + a_1, \qquad F_y = a_{21}x + a_{22}y + a_2 \tag{26}$$

— половины частных производных по x и y от левой части уравнения линии второго порядка.

Если направление хорд задано угловым коэффициентом k, то уравнение диаметра принимает вид:

$$F_x + kF_y = 0. \tag{27}$$

В случае центральной линии все диаметры проходят через центр.

Диаметры параболы параллельны между собой и имеют угловой коэффициент

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} \quad (\text{если } a_{12} \neq 0) \tag{28}$$

или

$$k = -\frac{a_{21}}{a_{22}} \quad (\text{если } a_{22} \neq 0). \tag{29}$$

Если $a_{12} = a_{22} = 0$, то диаметры параллельны оси Oy.

Направляющие векторы $\{l_1, m_1\}$ и $\{l_2, m_2\}$ двух сопряженных направлений относительно линии второго порядка (1) удовлетворяют условию

$$a_{11}l_1l_2 + a_{12}(l_1m_2 + l_2m_1) + a_{22}m_1m_2 = 0. \tag{30}$$

Если сопряженные направления задаются угловыми коэффициентами k_1 и k_2, то условие (30) принимает вид:

$$a_{11} + a_{12}(k_1 + k_2) + a_{22}k_1k_2 = 0. \tag{31}$$

Если координатные оси сопряжены относительно линии второго порядка, то ее уравнение не содержит члена с произведением координат ($a_{12} = 0$).

Уравнение центральной линии второго порядка, отнесенной к сопряженным диаметрам, имеет вид:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a = 0. \tag{32}$$

Ось линии второго порядка (ось симметрии) есть диаметр, перпендикулярный к сопряженным хордам.

Центральные линии второго порядка имеют две оси; если система координат прямоугольная и $a_{12} \neq 0$, то угловые коэффициенты осей определяются из уравнения

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0. \tag{33}$$

Парабола имеет одну ось. В случае прямоугольной системы координат угловой коэффициент сопряженных ей хорд

$$k = \frac{a_{12}}{a_{11}} \qquad (\text{если } a_{11} \neq 0) \tag{34}$$

или

$$k = \frac{a_{22}}{a_{12}} \qquad (\text{если } a_{12} \neq 0). \tag{35}$$

Если $a_{11}=a_{12}=0$, то хорды параболы, перпендикулярные к ее оси симметрии, будут параллельны оси Oy.

В случае аффинной системы координат угловые коэффициенты хорд, сопряженных осям центральной линии второго порядка, удовлетворяют уравнению

$$\begin{vmatrix} k^2 & -k & 1 \\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}=0. \tag{36}$$

Если линия второго порядка есть парабола, то угловой коэффициент k хорд, сопряженных ее оси, определяется формулой

$$k=-\frac{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{12} & g_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}}, \quad \text{если} \quad \begin{vmatrix} g_{12} & g_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{37}$$

или

$$k=-\frac{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{12} & g_{22} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad \text{если} \quad \begin{vmatrix} g_{12} & g_{22} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0; \tag{38}$$

если оба указанных детерминанта равны нулю, то хорды, сопряженные оси параболы, параллельны оси Oy.

Асимптоты гиперболы проходят через ее центр; координаты $\{l, m\}$ их направляющих векторов удовлетворяют уравнению

$$a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2=0, \tag{39}$$

а угловые коэффициенты (в случае, если $a_{22}\neq 0$) — уравнению

$$a_{11}+2a_{12}k+a_{22}k^2=0. \tag{40}$$

Направления прямых, параллельных асимптотам, называются асимптотическими.

Если уравнение

$$F(x, y)=0 \tag{41}$$

второй степени относительно x и y определяет гиперболу, то уравнение

$$F(x, y)=\frac{K_3}{I_2} \tag{42}$$

определяет пару ее асимптот.

Уравнения асимптот гиперболы $F(x, y)$ можно также записать в виде:

$$lF_x+mF_y=0, \tag{43}$$

где $\{l, m\}$ — направляющий вектор прямых, имеющих асимптотическое направление, или

$$F_x+kF_y=0, \tag{44}$$

где k — угловой коэффициент прямых, имеющих асимптотическое направление.

Если координатная ось Ox (Oy) имеет асимптотическое направление, то

$$a_{11}=0 \qquad (a_{22}=0).$$

Уравнение гиперболы, отнесенной к асимптотам, имеет вид:

$$2a_{12}xy+a=0. \tag{45}$$

Касательная к линии (1) в ее точке $M_0(x_0, y_0)$ определяется уравнением

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)x+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)y+a_1x_0+a_2y_0+a=0. \tag{46}$$

Уравнение линии второго порядка, отнесенное к любому ее диаметру и к касательной в его конце, имеет вид:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_1x=0. \tag{47}$$

В частности, для параболы

$$a_{22}y^2+2a_1x=0. \tag{48}$$

Если $F_1=0$ и $F_2=0$ — уравнения двух линий второго порядка, то совокупность линий

$$\lambda_1F_1+\lambda_2F_2=0 \tag{49}$$

есть пучок линий второго порядка, определяемый данными линиями. Любая линия пучка проходит через точки пересечения данных линий, и обратно, всякая линия второго порядка, проходящая через все точки пересечения данных линий, принадлежит пучку (49).

Через пять точек, из которых никакие четыре не лежат на одной прямой, можно провести линию второго порядка и притом только одну. Если никакие три точки не лежат на одной прямой, то линия будет нераспадающаяся.

Для того чтобы два уравнения второй степени

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0,$$
$$b_{11}x^2+2b_{12}xy+b_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+b=0$$

определяли одну и ту же линию второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие коэффициенты этих уравнений были бы пропорциональны.

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. *Определить вид и расположение линии, заданной уравнением*

$$6xy+8y^2-12x-26y+11=0.$$

Решение.

$$I_2=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}=-9<0$$

— первая группа;

$$K_3=\begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{vmatrix}=81\neq 0$$

— гипербола;

$$I_1 = 0 + 8 = 8.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0;$$

корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = -1.$$

Преобразованное уравнение:

$$9X^2 - Y^2 + \frac{81}{-9} = 0;$$

каноническое уравнение:

$$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{9} = 1.$$

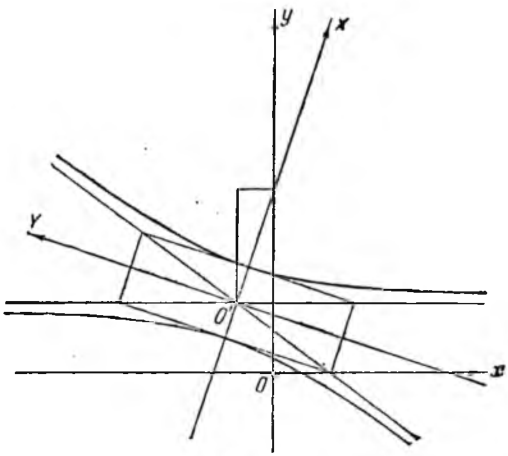

Рис. 21.

Уравнения для определения центра:

$$3y - 6 = 0, \qquad 3x + 8y - 13 = 0;$$

центр:

$$O'(-1,\ 2).$$

Угловой коэффициент оси $O'X$ — вещественной оси

$$k = \frac{9}{3} = 3$$

(рис. 21).

Пример 2. *Найти формулы преобразования координат, при котором уравнение*

$$6xy+8y^2-12x-26y+11=0$$

переходит в каноническое (см. предыдущую задачу).

Решение. Центр данной гиперболы находится в точке $O'(-1, 2)$. Тангенс угла φ наклона вещественной оси $O'X$ гиперболы к оси Ox равен 3, следовательно,

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{10}}, \qquad \sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

и, значит, формулы преобразования координат будут:

$$x=\frac{X-3Y}{\sqrt{10}}-1, \qquad y=\frac{3X+Y}{\sqrt{10}}+2,$$

откуда

$$X=\frac{x+3y-5}{\sqrt{10}}, \qquad Y=\frac{-3x+y-5}{\sqrt{10}}.$$

Пример 3. *Найти фокусы и директрисы линии*

$$6xy+8y^2-12x-26y+11=0.$$

Решение. Координаты фокусов в канонической системе координат будут:

$$X_{F_1}=-\sqrt{10}, \quad Y_{F_1}=0;$$
$$X_{F_2}=\sqrt{10}, \quad Y_{F_2}=0,$$

а в начальной (см. пример 2)

$$x_{F_1}=-2, \quad y_{F_1}=-1;$$
$$x_{F_2}=0, \quad y_{F_2}=5.$$

Уравнения директрис в канонической системе будут:

$$X=\pm\frac{1}{\sqrt{10}},$$

а в начальной

$$\frac{x+3y-5}{\sqrt{10}}=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$$

или

$$x+3y-4=0, \qquad x+3y-6=0.$$

Пример 4. *Найти вид и расположение линии*

$$x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0.$$

Решение.

$$I_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

$$K_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & -7 \end{vmatrix}=-\frac{25}{4}$$

— парабола;

$$I_1=1+4=5.$$

Параметр:

$$p=\sqrt{\frac{25}{4\cdot 5^3}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Каноническое уравнение:

$$Y^2=\frac{1}{\sqrt{5}}X.$$

Уравнение оси:

$$x-2y-\frac{1\cdot 2-2\left(-\frac{3}{2}\right)}{1+4}=0$$

или

$$x-2y+1=0.$$

Уравнения для определения вершины:

$$\left.\begin{aligned} x-2y+1&=0, \\ x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7&=0; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x-2y&=-1, \\ (x-2y)^2+4x-3y-7&=0; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x-2y+1&=0, \\ 4x-3y-6&=0. \end{aligned}\right\}$$

Вершина:

$$O'(3,\ 2).$$

Вектор оси, направленный в сторону вогнутости:

$$\left\{\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}\right\}=\left\{-5,\ -\frac{5}{2}\right\}\uparrow\uparrow\{-2,\ -1\}$$

(рис. 22) (полезно заметить, что при $X=\sqrt{5}$, $Y=\pm 1$).

Пример 5. *Найти фокусы и директрисы линии*

$$x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$$

(см. пример 4).

Решение. Данное уравнение определяет параболу с параметром $p=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ с вершиной $O'(3, 2)$, причем положительное

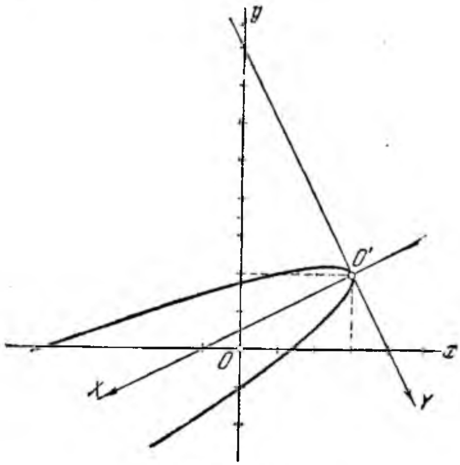

Рис. 22.

направление оси параболы определяется вектором $\{-2, -1\}$. Обозначая через φ угол от оси Ox до оси $O'X$, будем иметь:

$$\cos\varphi=-\frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{5}},$$

следовательно, формулы преобразования координат:

$$x=\frac{-2X+Y}{\sqrt{5}}+3, \qquad y=\frac{-X-2Y}{\sqrt{5}}+2,$$

откуда

$$X=\frac{-2x-y+8}{\sqrt{5}}, \qquad Y=\frac{x-2y+1}{\sqrt{5}}.$$

Координаты фокуса в канонической системе:

$$X=\frac{1}{4\sqrt{5}}, \qquad Y=0,$$

а в исходной

$$x=2,9; \qquad y=1,95.$$

Уравнение директрисы в канонической системе:

$$X=-\frac{1}{4\sqrt{5}},$$

а в начальной

$$\frac{-2x-y+8}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{4\sqrt{5}}$$

или

$$8x+4y-33=0.$$

Пример 6. *Определить вид и расположение линии*

$$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0.$$

Решение.

$$I_2=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 \end{vmatrix}=-\frac{9}{4}<0$$

— первая группа;

$$K_3=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$$

— две действительные пересекающиеся прямые.

Преобразуем данное уравнение так:

$$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=x^2+(-5y+1)x+4y^2+2y-2=$$
$$=x^2+(-5y+1)x+\left(\frac{-5y+1}{2}\right)^2+4y^2+2y-2-\left(\frac{-5y+1}{2}\right)^2=$$
$$=\left(x+\frac{-5y+1}{2}\right)^2+4y^2+2y-2-\frac{25y^2-10y+1}{4}=$$
$$=\left(x+\frac{-5y+1}{2}\right)^2+\frac{-9y^2+18y-9}{4}=$$
$$=\left(x+\frac{-5y+1}{2}\right)^2-\left(\frac{3y-3}{2}\right)^2=$$
$$=\left(x+\frac{-5y+1}{2}+\frac{3y-3}{2}\right)\left(x+\frac{-5y+1}{2}-\frac{3y-3}{2}\right)=$$
$$=(x-y-1)(x-4y+2).$$

Уравнения этих прямых:

$$x-y-1=0, \qquad x-4y+2=0.$$

§ 1. Центр, диаметры, асимптоты, касательные, оси линии второго порядка

687. Написать уравнение линии второго порядка, проходящей через пять точек: (0, 0), (0, 1), (1, 0), (2, —5), (—5, 2).

688. Определить центры следующих линий второго порядка:

1) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+11=0$;

2) $2xy-4x+2y+11=0$;

3) $4x^2+4xy+y^2-10x-5y+6=0$;

4) $x^2-2xy+y^2-3x+2y-11=0$.

689. Написать уравнение диаметра кривой второго порядка $5x^2-3xy+y^2-3x+2y-5=0$, проходящего через середину хорды, отсекаемой этой кривой на прямой $x-2y-1=0$.

690. Дана линия второго порядка $4xy-5y^2+2x+6y+1=0$. Написать уравнение диаметра этой линии, проходящего через точку $(-4, 2)$.

691. Дана линия второго порядка $5x^2-6xy+3y^2-2x=0$. Найти диаметр этой линии, параллельной прямой $2x-3y=0$.

692. Найти общий диаметр двух кривых $x^2-2xy-y^2-2x-2y=0$, $x^2-2xy+y^2-2x-2y=0$.

693. Даны линия второго порядка $5x^2-3xy+y^2-3x+2y-5=0$ и две точки $A(2, 1)$ и $B(1, 4)$. Написать уравнение хорды кривой, проходящей через точку B и сопряженной диаметру, проходящему через точку A.

694*. В линию второго порядка, данную уравнением $x^2-6xy+y^2+4=0$, вписан параллелограмм, одной из сторон которого служит прямая $x-1=0$. Написать уравнения остальных его сторон.

695. Написать уравнение линии второго порядка, проходящей через четыре точки $A(1, 0)$, $B(3, 2)$, $C(0, 2)$, $D(0, -2)$, зная, что хорды AB и CD имеют сопряженные друг к другу направления.

696*. Даны две линии второго порядка $3x^2-2xy+y^2+6x-10=0$, $3x^2-2xy-y^2+6y-10=0$. Для каждой кривой найти пару сопряженных диаметров так, чтобы диаметры одной пары были параллельны диаметрам другой пары.

697*. Доказать, что если центр линии второго порядка, описанной около треугольника, совпадает с центром тяжести его, то линия есть эллипс.

698. Найти асимптоты гиперболы $10x^2+21xy+9y^2-41x-39y+4=0$.

699. Найти асимптоты следующих гипербол:

1) $x^2-3xy-10y^2+6x-8y=0$;
2) $3x^2+2xy-y^2+8x+10y-14=0$;
3) $3x^2+7xy+4y^2+5x+2y-6=0$;
4) $10xy-2y^2+6x+4y+21=0$.

700. В точках пересечения кривой $x^2-2y^2-5x+4y+6=0$ с осью абсцисс провести касательные к этой кривой.

701. К кривой $x^2+xy+y^2+2x+3y-3=0$ провести касательные, параллельные прямой $3x+3y-5=0$.

702. Дана линия второго порядка $4x^2+4xy+y^2-6x+4y+2=0$. Написать уравнения касательных к этой линии, параллельных оси Oy.

703*. Через точку $(3, 4)$ провести касательные к кривой $2x^2-4xy+y^2-2x+6y-3=0$.

704*. Дано уравнение

$$(\alpha x+\beta y+\gamma)^2+2(Ax+By+C)=0, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказать, что: 1) это уравнение определяет параболу; 2) прямая $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ является диаметром и 3) прямая $Ax+By+C=0$ является касательной к параболе в точке пересечения последней с диаметром.

705*. Дано уравнение параболы

$$(\alpha x+\beta y)^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Написать уравнение касательной к параболе в произвольной ее точке (x_0, y_0) и уравнение соответствующего сопряженного диаметра.

706*. Показать, что:

1) кривая второго порядка, описанная около параллелограмма, всегда центральная, и ее центр совпадает с точкой пересечения диагоналей параллелограмма;

2) кривая второго порядка, вписанная в параллелограмм, всегда центральная, и ее центр совпадает с точкой пересечения диагоналей параллелограмма.

707*. Доказать, что если центр линии второго порядка, вписанной в треугольник, совпадает с центром тяжести этого треугольника, то линия есть эллипс.

708*. Доказать, что диагонали параллелограмма, описанного около кривой второго порядка, суть сопряженные диаметры этой кривой.

709. Определить оси следующих линий второго порядка:

1) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$;
2) $2xy-4x+2y-3=0$;
3) $x^2-4xy+4y^2-5x+10y+6=0$;
4) $2x^2+3xy-2y^2+5y-2=0$;
5) $x^2-4xy+4y^2-5x+6=0$.

Система координат прямоугольная.

710*. Доказать, что уравнение оси симметрии параболы, заданной общим уравнением, может быть записано так:

$$a_{11}(a_{11}x+a_{12}y+a_1)+a_{12}(a_{21}x+a_{22}y+a_2)=0$$

или

$$a_{21}(a_{11}x+a_{12}y+a_1)+a_{22}(a_{21}x+a_{22}y+a_2)=0.$$

711*. Найти условие, при котором две линии второго порядка имеют одни и те же главные направления (система координат прямоугольная).

712*. Найти множество точек, которые могут служить центрами эллипсов, описанных около данного треугольника.

713*. Найти расположение точек плоскости, которые могут служить центрами линий второго порядка, описанных около данного треугольника, в зависимости от типа этих линий.

714*. Найти геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что прямые, соединяющие их с двумя данными точками, одинаково наклонены к данному направлению.

715*. Найти геометрическое место центров гипербол, проходящих через две постоянные точки и имеющих одни и те же асимптотические направления.

716*. Показать, что если кривая второго порядка касается одной из сторон описанного около нее параллелограмма в середине этой стороны, то остальных трех сторон параллелограмма она касается также в их серединах; кривая в этом случае есть эллипс.

717*. Найти геометрическое место центров равносторонних гипербол, описанных около данного треугольника.

718*. Около линии второго порядка, заданной уравнением $2x^2-4xy+y^2-2x+6y-3=0$, описан параллелограмм, одна из вершин которого находится в точке $A(3, 4)$. Найти остальные его вершины.

§ 2. Определение вида линии второго порядка и ее расположения. Инварианты

719. Определить вид следующих кривых:

1) $x^2+2xy+y^2+y=0$;
3) $(x+2y)^2-3y^2=1$;
2) $x^2+2xy+y^2+x+y=0$;
4) $(2x-y)(x-y)-1=0$.

720. Пользуясь приведением многочлена второй степени к сумме квадратов по способу Лагранжа, определить вид следующих кривых второго порядка:

1) $2x^2+3xy+4y^2-5x+2y-1=0$;
2) $4x^2-4xy+y^2-8x+6y-2=0$;
3) $2xy-4y^2+6x+6y+1=0$.

721. Определить вид и расположение линий второго порядка, заданных нижеследующими уравнениями, пользуясь преобразованием координат:

1) $x^2+2y^2+4x-4y=0$;
2) $4x^2-y^2-8x-6y-4=0$;
3) $4x^2+4x+2y-1=0$;
4) $6x^2+8y^2+3x-4y+1=0$;
5) $2x^2-3y^2-6x+9y-2=0$;
6) $2x^2+6x+3y+6=0$;
7) $4y^2+4x-2y+1=0$;
8) $3x^2-2y^2+6x+4y+1=0$;
9) $xy+x+y=0$.

Определить форму, размеры и расположение линий второго порядка, заданных следующими уравнениями:

722. $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$.
723. $9x^2+24xy+16y^2-230x+110y-475=0$.
724. $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$.
725. $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.
726. $x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$.

727. $4x^2-12xy+9y^2-2x+3y-2=0.$

728. 1) $2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0;$

2) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0;$

3) $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0;$

4) $6xy-8y^2+12x-26y-11=0;$

5) $7x^2+16xy-23y^2-14x-16y-218=0;$

6) $7x^2-24xy-38x+24y+175=0;$

7) $9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0;$

8) $x^2+2xy+y^2-8x+4=0;$

9) $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0.$

729. Относительно прямоугольной системы координат кривая второго порядка задана уравнением

$$4xy+3y^2+16x+12y-36=0.$$

Доказать, что эта линия — гипербола, найти длины ее полуосей, координаты центра, уравнения действительной и мнимой осей, уравнения асимптот, координаты фокусов, координаты вершин, уравнения касательных в вершинах.

730. Составить каноническое уравнение параболы, заданной относительно прямоугольной системы координат уравнением

$$(x\cos t+y\sin t)^2=2p(x\sin t-y\cos t+q),$$

и определить ее расположение $\left(q>0,\ 0<t<\frac{\pi}{2}\right)$.

731. Доказать, что уравнение $(A_1x+B_1y+C_1)^2+$ $+(A_2x+B_2y+C_2)^2=1$, где $A_1A_2+B_1B_2=0$, определяет эллипс относительно прямоугольной системы координат. Составить каноническое уравнение этого эллипса и определить его расположение.

732. Фокус линии второго порядка находится в точке $(4, 2)$, соответствующая ему директриса имеет уравнение $2x-y-10=0$, эксцентриситет линии равен $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Найти второй фокус и вторую директрису этой линии.

733. Фокус линии второго порядка находится в точке $(0, -5)$, директриса, соответствующая другому фокусу, имеет уравнение $x-3y-4=0$; эксцентриситет линии равен $\sqrt{10}$. Найти второй фокус и вторую директрису.

734. Определить площадь эллипса, заданного общим уравнением

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0.$$

735. Какая линия второго порядка определяется условиями $I_1=0$, $K_2\neq 0$?

736*. Общие уравнения двух гипербол отличаются только свободными членами. Дать этому факту геометрическое истолкование.

737*. Кривая второго порядка, заданная общим уравнением $2F=0$, распадается на пару параллельных прямых. При каком необходимом и достаточном условии данная точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит между ними?

738*. Кривая второго порядка, заданная общим уравнением $2F=0$, распадается на пару пересекающихся и не взаимно перпендикулярных прямых. Найти необходимое и достаточное условие того, что данная точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит в остром угле, образованном этими прямыми.

739*. Кривая второго порядка, заданная общим уравнением $2F=0$, распадается на пару пересекающихся прямых. При каком необходимом и достаточном условии они будут взаимно перпендикулярны?

740*. Доказать, что если общее уравнение линии второго порядка $F(x, y)=0$ определяет гиперболу, то уравнение $F(x, y)=\frac{K_2}{I_2}$ определяет пару ее асимптот.

741. Доказать, что условия $I_1^2=4I_2$, $I_1K_2<0$ необходимы и достаточны для того, чтобы общее уравнение кривой второго порядка определяло окружность.

742. Доказать, что если первый инвариант кривой второго порядка равен нулю, то второй отрицателен.

743*. Найти необходимое и достаточное условие того, что гипербола, заданная общим уравнением $2F=0$, лежит в остром угле, образованном ее асимптотами.

744*. Доказать, что если общее уравнение кривой второго порядка определяет параболу, то, изменяя свободный член уравнения, получим семейство парабол с одним и тем же параметром, одной и той же осью и одним и тем же направлением оси в сторону вогнутости.

745*. Квадратичные формы, входящие в левые части общих уравнений двух гипербол, отличаются числовым множителем. Как истолковать это обстоятельство геометрически?

746. Общее уравнение кривой второго порядка определяет две параллельные прямые. Найти расстояние d между ними.

747*. Общие уравнения двух гипербол имеют вид:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0,$$
$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+b=0.$$

При каком необходимом и достаточном условии они будут лежать в разных вертикальных углах, образованных их общими асимптотами?

748. Дана линия второго порядка $3x^2-2xy+y^2+6x-9=0$. Найти кривую второго порядка, оси симметрии которой совпадают с осями данной кривой и отрезки на осях которой в два раза больше, чем у данной.

749. Доказать, что уравнение

$$(A_1x+B_1y+C_1)^2-(A_2x+B_2y+C_2)^2=1,$$

если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, определяет гиперболу, и определить ее асимптоты.

§ 3. Составление уравнений линий второго порядка

750*. Написать уравнение эллипса, зная его центр $C(2, 1)$ и концы двух сопряженных диаметров $A(5, 1)$, $B(0, 3)$.

751*. Написать уравнение параболы, для которой прямая $x-2y=0$ служит диаметром, а прямая $x+y=0$ — касательной в конце этого диаметра и которая проходит через точку $A(0, 1)$.

752*. Найти асимптоты гиперболы, зная, что центр ее находится в точке $C(2, 1)$, что она касается оси Ox в точке $A(3, 0)$ и встречает ось Oy в несобственной точке.

753*. Дан треугольник ABC: $A(4, 2)$, $B(8, 2)$, $C(4, 5)$. Написать уравнение параболы, описанной около этого треугольника так, чтобы медиана AD, проведенная из вершины A, была ее диаметром.

754*. Дан треугольник AOB: $O(0, 0)$, $A(8, 0)$, $B(0, 6)$. Написать уравнение линии второго порядка, проходящей через вершину O этого треугольника, пересекающей стороны OA и OB и касающейся стороны AB в ее середине.

755*. Три вершины параллелограмма находятся в точках $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(2, 2)$; A и B — противоположные вершины. Написать уравнение эллипса, вписанного в этот параллелограмм и касающегося сторон параллелограмма в их серединах.

756. Кривая второго порядка с центром в точке $(0, -1)$ проходит через точку $(3, 0)$ и встречает прямые $2x-3y+1=0$, $x+y-5=0$ в несобственных точках. Написать ее уравнение.

757. Написать уравнение линии второго порядка, пересекающей ось Ox в точке $(1, 0)$ и в несобственной ее точке и ось Oy в точке $(0, 1)$ и в несобственной ее точке и проходящей через точку $(1, 1)$.

758. Написать уравнение гиперболы, касающейся оси Ox в точке $A(3, 0)$, имеющей ось Oy своей асимптотой и проходящей через точку $M(1, 1)$.

759*. Написать уравнение гиперболы, имеющей асимптотами прямые $x-1=0$, $2x-y+1=0$ и касающейся прямой $4x+y+5=0$.

760*. Написать уравнение гиперболы, зная ее ось $2x-y+2=0$, асимптоту $y=0$ и точку $(1, 1)$.

761. Написать уравнение линии второго порядка, распадающейся на пару асимптот гиперболы $3x^2+10xy+7y^2+4x+2y+1=0$, и найти эти асимптоты.

762. Написать уравнение эллипса, зная, что центр его находится в точке $C(2, 1)$ и что прямые $y-2=0$ и $x-y=0$ служат касательными в концах двух сопряженных диаметров.

763. Написать уравнение эллипса, центр которого находится в точке $C(4, 3)$, вершина A лежит в начале координат, вершина B — на оси Oy.

764*. Написать уравнение параболы, проходящей через три точки $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(0, 2)$ при условии, что точки A и B симметричны относительно оси параболы.

765. Дан треугольник ABC: $A(6, 0)$, $B(0, 4)$, $C(6, 4)$. Написать уравнение линии второго порядка, описанной около этого треугольника, зная, что ее центр находится в точке $M(4, 3)$.

766*. Написать уравнение эллипса, для которого прямые $x+y-1=0$ и $x-y+1=0$ суть соответственно большая и малая оси и длины полуосей которого $a=2$, $b=1$.

767*. Написать уравнение линии второго порядка, для которой осями симметрии служат прямые $x+y+1=0$ и $x-y+1=0$ и которая проходит через точки $M_1(-2, -1)$, $M_2(0, -2)$.

768*. Написать уравнение параболы, осью которой служит прямая $x+y+1=0$ и которая проходит через точки $(0, 0)$, $(0, 1)$.

769*. Написать уравнение линии второго порядка, зная, что две ее вершины, принадлежащие одной оси, находятся в точках $A_1(2, 1)$, $A_2(10, 7)$ и что она проходит через точку $B(0, 7)$.

770. Написать уравнение гиперболы, фокусы которой находятся в точках $F_1(2, 3)$, $F_2(1, 0)$, зная, что она проходит через точку $A(2, 0)$.

771. Составить уравнение линии второго порядка, если даны уравнение директрисы $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$, координаты соответствующего фокуса (x_1, y_1) и координаты некоторой точки $M(x_2, y_2)$, лежащей на линии.

772*. Составить уравнение гиперболы, если даны координаты двух ее фокусов $F_1(x_1, y_1)$ и $F_2(x_2, y_2)$ и уравнение касательной $Ax+By+C=0$.

773. Составить уравнение параболы, если даны уравнение директрисы $3x-4y-1=0$ и координаты фокуса $F(2, 1)$.

774. Написать уравнение параболы, зная ее фокус $F(-1, -2)$ и директрису $x-y+8=0$.

775. Написать уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, а фокус — в точке $F(1, 1)$.

776. Написать уравнение линии второго порядка, зная ее фокус $F(0, 1)$, директрису $x-y+3=0$, соответствующую данному фокусу, и точку $A(7, 0)$ на линии.

777. Составить уравнение линии второго порядка, зная ее фокус $F(1, 1)$, директрису $x+2y-1=0$ и эксцентриситет $e=\sqrt{5}$.

778*. Написать уравнение линии второго порядка, зная ее фокусы $F_1(1, 1)$ и $F_2(-2, -2)$ и одну из директрис $x+y-1=0$.

779*. Написать уравнение линии второго порядка с центром в точке $C(1, 2)$, проходящей через начало координат, одной из директрис которой служит прямая $x+2y-1=0$.

780*. Написать уравнение гиперболы, для которой точка $F(-2, 2)$ служит фокусом, а прямые $2x-y+1=0$, $x+2y-7=0$ — асимптотами.

781. Для каждой прямой пучка, прямых $y=kx$ определяются сопряженные диаметры относительно двух различных линий второго порядка $2F=0$, $2\Phi=0$. Определить геометрическое место точек пересечения диаметров.

782. Даны линия второго порядка уравнением $2F=0$ и точка $S(x_0, y_0)$. Определить геометрическое место точек пересечения прямых пучка S с диаметрами, сопряженными этим прямым.

783. Определить геометрическое место середин хорд линии второго порядка, заданной общим уравнением $2F(x, y)=0$, проходящих через точку $S_0(x_0, y_0)$.

784. Даны две линии второго порядка уравнениями $2F=0$, $2\Phi=0$; k и $-\frac{1}{k}$ — угловые коэффициенты касательных к этим линиям, перпендикулярных между собой. Определить геометрическое место точек пересечения диаметров, сопряженных этим касательным.

785. Определить геометрическое место середин отрезков, оба конца которых принадлежат прямым $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, если прямые, их содержащие, имеют общую точку $S_0(x_0, y_0)$.

786*. Два угла постоянной величины вращаются соответственно вокруг своих вершин так, что одна сторона первого угла пересекается с одной стороной второго в точках данной прямой. Найти геометрическое место точек пересечения вторых сторон.

787*. Через точку пересечения каждого диаметра данной линии второго порядка (эллипса, гиперболы или параболы) с данной прямой проводим прямую, параллельную направлению, ему сопряженному. Найти огибающую построенных таким образом прямых.

788*. Доказать, что если стороны двух треугольников касаются линии второго порядка, то через шесть вершин этих треугольников можно провести линию второго порядка.

789*. Доказать, что если линия второго порядка проходит через вершины треугольника и точку пересечения его высот, то эта линия есть равносторонняя гипербола.

790*. Доказать, что если две равносторонние гиперболы пересекаются в четырех точках, то каждая из этих точек есть точка пересечения высот треугольника, образованного тремя другими точками.

791*. Рассмотрим три точки, симметричные относительно сторон треугольника с некоторой точкой M, лежащей в плоскости этого треугольника. Пусть M' — центр окружности, проходящей через эти три точки. Доказать, что:

1) если точка M описывает прямую линию l, то точка M' описывает линию C второго порядка; найти положения прямой l, при которых она касается линии C; исследовать тип линии C (эллипс, гипербола, парабола) в зависимости от положения прямой l;

2) если прямая l перемещается параллельно самой себе, то оси линии C остаются параллельными двум данным прямым.

Геометрическим местом центров линий C будет в этом случае также линия второго порядка C_1. Найти геометрическое место центров линий C_1, соответствующих различным направлениям прямой l.

§ 4. Линии второго порядка относительно аффинной системы координат

792. Определить вид следующих линий второго порядка, пользуясь приведением многочлена к сумме квадратов по способу Лагранжа:

1) $x^2-4xy+y^2-4x+2y-2=0$;
2) $x^2-2xy+4y^2+2x-2y-4=0$;
3) $x^2+4xy+4y^2-6x-8y=0$.

793. Пользуясь приведением многочлена второй степени к сумме квадратов по способу Лагранжа, показать, что каждое из нижеследующих уравнений определяет пару прямых, и найти уравнения этих прямых:

1) $2x^2-5xy-12y^2-x+26y-10=0$;
2) $3x^2+xy-2y^2-5x+5y-2=0$;
3) $4x^2+16xy+15y^2-8x-22y-5=0$;
4) $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0$.

794. Определить оси линии второго порядка, заданной относительно аффинной системы координат уравнением $18x^2+189xy+418y^2-3x-17y-1=0$, если $g_{11}=9$, $g_{12}=36$, $g_{22}=169$.

795. Определить главные оси линии второго порядка $50x^2-2y^2-5x+5y-1=0$, если $g_{11}=25$, $g_{12}=3$, $g_{22}=1$.

796. Составить уравнение оси параболы $4x^2+28xy+49y^2+12x-1=0$, если $g_{11}=4$, $g_{12}=8$, $g_{22}=25$.

797. Определить ось и вершину параболы $x^2-4xy+4y^2-4x-4y=0$, если $g_{11}=1$, $g_{12}=-\frac{1}{2}$, $g_{22}=1$.

798. Составить каноническое уравнение линии второго порядка $20x^2+124xy+221y^2-36x-126y+9=0$, если $g_{11}=4$, $g_{12}=6$, $g_{22}=25$. Определить расположение этой линии.

799. Составить каноническое уравнение линии второго порядка $x^2-3xy+y^2+5=0$, если $g_{11}=1$, $g_{12}=\frac{1}{2}$, $g_{22}=1$. Определить расположение этой линии.

800. Составить каноническое уравнение линии второго порядка $2xy-4x+2y+1=0$, если $g_{11}=4$, $g_{12}=1$, $g_{22}=1$. Определить расположение этой линии.

801. Составить каноническое уравнение параболы $49x^2+112xy+64y^2+30x+30y+6=0$, если $g_{11}=25$, $g_{12}=8$, $g_{22}=4$.

802*. Уравнение $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0$ определяет пару пересекающихся прямых ($a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$). Доказать, что если система координат декартова прямоугольная, то уравнение пары биссектрис между данными прямыми может быть записано так:

$$\begin{vmatrix} a_{11}x+a_{12}y & a_{21}x+a_{22}y \\ x & y \end{vmatrix}=0,$$

а если система координат аффинная, то

$$\begin{vmatrix} a_{11}x+a_{12}y & a_{21}x+a_{22}y \\ g_{11}x+g_{12}y & g_{21}x+g_{22}y \end{vmatrix}=0.$$

ГЛАВА VIII

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ И АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Ортогональным преобразованием плоскости называется такое преобразование, при котором каждой точке $M(x, y)$ плоскости, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат, ставится в соответствие точка $M'(x', y')$, координаты которой являются линейными функциями координат точки M:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_1, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{2}$$

— **ортогональная матрица**, т. е. такая, что

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Ортогональное преобразование взаимно однозначно, сохраняет расстояние между точками, углы между прямыми, сохраняет коллинеарность трех точек (т. е. принадлежность трех точек одной прямой), параллельность двух прямых.

Всякое преобразование, сохраняющее расстояние между точками, будет ортогональным в том смысле, что оно аналитически выражается соотношениями (1), где матрица (2) ортогональная.

Множество всех ортогональных преобразований плоскости образует **группу**.

Параметры, входящие в соотношения (1), имеют следующий геометрический смысл: точка $O'(a_1, a_2)$ — образ начала координат; вектор $e_1' = \{a_{11}, a_{21}\}$ — единичный и является образом вектора $e_1 = \{1, 0\}$; вектор $e_2' = \{a_{12}, a_{22}\}$ — единичный, ортогонален вектору e_1' и является образом вектора $e_2 = \{0, 1\}$. Если угол от вектора e_1 до вектора e_1' равен α, то

$$a_{11} = \cos\alpha, \quad a_{21} = \sin\alpha,$$

т. е.

$$e_1' = \{\cos\alpha,\ \sin\alpha\}.$$

Ортогональное преобразование называется ортогональным преобразованием **первого рода**, если $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$. Всякое такое преобразование сохраняет ориентацию плоскости. Если ортогональное преобразование является преобразованием первого рода, то

$$a_{12} = -\sin\alpha, \quad a_{22} = \cos\alpha,$$

т. е.

$$e_2' = \{-\sin\alpha,\ \cos\alpha\}.$$

Формулы ортогонального преобразования первого рода имеют вид:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + a_1, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + a_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Ортогональное преобразование первого рода называют также **движением**.

Ортогональное преобразование называется ортогональным преобразованием **второго рода**, если $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -1$. Всякое такое преобразование изменяет ориентацию плоскости на противоположную. Если ортогональное преобразование является преобразованием второго рода, то

$$a_{12} = \sin\alpha, \quad a_{22} = -\cos\alpha,$$

т. е.

$$e_2' = \{\sin\alpha,\ -\cos\alpha\}.$$

Формулы ортогонального преобразования второго рода имеют вид:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + a_1, \\ y' &= x\sin\alpha - y\cos\alpha + a_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Ортогональное преобразование

$$x' = x + a_1, \quad y' = y + a_2 \tag{6}$$

называется **переносом**.

Ортогональное преобразование

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned} \tag{7}$$

называется **поворотом** (на угол α вокруг начала координат).

Ортогональное преобразование

$$x' = x, \quad y' = -y \tag{8}$$

называется **симметрией** (относительно оси Ox). Перенос и поворот являются ортогональными преобразованиями первого рода. Симметрия является ортогональным преобразованием второго рода.

Аффинным преобразованием плоскости называется такое преобразование, при котором каждой точке $M(x,\ y)$

плоскости, заданной относительно общей декартовой системы координат, ставится в соответствие точка $M'(x', y')$, координаты которой являются линейными функциями координат точки M:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_1, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_2, \end{aligned} \tag{9}$$

причем определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{10}$$

Параметры, входящие в соотношения (9), имеют следующий геометрический смысл: точка $O'(a_1, a_2)$ — образ начала координат; вектор $e_1' = \{a_{11}, a_{21}\}$ — образ масштабного вектора $e_1 = \{1, 0\}$ оси Ox; $e_2' = \{a_{12}, a_{22}\}$ — образ масштабного вектора $e_2 = \{0, 1\}$ оси Oy.

Аффинное преобразование взаимно однозначно, сохраняет коллинеарность трех точек (т. е. принадлежность трех точек одной прямой), параллельность двух прямых, простое отношение трех точек и отношение площадей.

Всякое взаимно однозначное преобразование множества всех точек плоскости, сохраняющее коллинеарность трех любых точек, будет аффинным преобразованием в том смысле, что оно аналитически выражается соотношениями (9), причем выполняется неравенство (10).

Множество всех аффинных преобразований плоскости образует группу.

Д в о й н ы е т о ч к и аффинного преобразования, т. е. точки, сами себе соответствующие, определяются соотношениями (9), где вместо x' и y' подставлены x и y.

Д в о й н о й п р я м о й аффинного преобразования называется такая прямая, которая при этом аффинном преобразовании переходит в себя, при этом не обязательно, чтобы точки этой прямой были двойными.

Аффинное преобразование

$$x' = x, \quad y' = ky,$$

заданное по отношению к декартовой прямоугольной системе координат, называется с ж а т и е м (к оси Ox).

Число k называется к о э ф ф и ц и е н т о м с ж а т и я.

Каково бы ни было аффинное преобразование, существуют два взаимно перпендикулярных направления, которым соответствуют два также ортогональных между собой направления.

Два ортогональных направления, которым в аффинном преобразовании соответствуют также два ортогональных направления, называются г л а в н ы м и н а п р а в л е н и я м и данного аффинного преобразования.

Всякое аффинное преобразование есть произведение ортогонального преобразования и двух взаимно перпендикулярных сжатий.

Если в аффинном преобразовании имеется хотя бы одна неподвижная точка, то оно называется ц е н т р о а ф ф и н н ы м; если в нем сохраняются величины площадей всех фигур, то оно называется **эквиаффинным**, а если, кроме того, сохраняется и ориентация плоскости, то оно называется **унимодулярным**.

Собственным вектором аффинного преобразования называется такой ненулевой вектор, который при этом преобразовании переходит в вектор, ему коллинеарный.

Координаты собственного вектора $\{l, m\}$ аффинного преобразования (9) определяются из уравнений:

$$(a_{11}-\lambda)\,l+a_{12}m=0,$$
$$a_{21}l+(a_{22}-\lambda)\,m=0,$$

где λ — корень уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Центроаффинное преобразование

$$x'=a_{11}x+a_{12}y,$$
$$y'=a_{21}x+a_{22}y,$$

заданное относительно декартовой прямоугольной системы координат, называется **симметрическим**, если матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

этого преобразования является симметрической, т. е. если $a_{12}=a_{21}$.

Всякое симметрическое центроаффинное преобразование имеет два взаимно ортогональных собственных вектора, и обратно, если некоторое центроаффинное преобразование имеет два взаимно ортогональных собственных вектора, то оно симметрическое.

Множество всех линий второго порядка может быть разделено на девять аффинных классов; две линии второго порядка относятся к одному аффинному классу, если одна из них может быть переведена в другую некоторым аффинным преобразованием; две линии второго порядка относятся к различным классам, если одна из них в другую не может быть переведена никаким аффинным преобразованием.

Эти девять аффинных классов следующие:

1) эллипсы;
2) гиперболы;
3) параболы;
4) пары пересекающихся прямых;
5) пары параллельных прямых;
6) двойная прямая;
7) две мнимые параллельные прямые;
8) две мнимые пересекающиеся прямые (точка);
9) мнимые эллипсы.

При аффинном преобразовании диаметр, центр, асимптота, касательная к линии C второго порядка переходят в диаметр, центр, асимптоту и касательную к линии C', являющейся образом линии C; сопряженные диаметры линии C переходят в сопряженные диаметры линии C'.

Пример 1. *Найти двойные прямые аффинного преобразования:*

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_1, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Решение. Рассмотрим прямую

$$Ax' + By' + C = 0. \tag{2}$$

Прообразом этой прямой в данном аффинном преобразовании (1) будет прямая

$$A(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + B(a_{21}x + a_{22}y + a_2) + C = 0,$$

или

$$(a_{11}A + a_{21}B)x + (a_{12}A + a_{22}B)y + Aa_1 + Ba_2 + C = 0. \tag{3}$$

Для того чтобы прямая (2) была двойной, т. е. чтобы ее прообраз (3) совпадал с этой прямой, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты уравнений (2) и (3) были пропорциональны:

$$\begin{aligned} a_{11}A + a_{21}B &= \lambda A, \\ a_{12}A + a_{22}B &= \lambda B, \\ Aa_1 + Ba_2 + C &= \lambda C, \end{aligned} \tag{4}$$

или

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)A + a_{12}B &= 0, \\ a_{12}A + (a_{22} - \lambda)B &= 0, \\ Aa_1 + Ba_2 + C(1 - \lambda) &= 0. \end{aligned} \tag{4'}$$

Так как A и B не равны нулю одновременно, то из первых двух уравнений системы (4′) следует, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Таким образом, λ должно быть корнем уравнения (5).

Отметим, что в силу неравенства

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

ни один из корней уравнения (5) не равен нулю.

Если это уравнение не имеет действительных корней, то (действительных) двойных прямых нет. Пусть корни уравнений (5) действительны и различны.

В этом случае из чисел

$$a_{11} - \lambda, \quad a_{21}, \quad a_{12}, \quad a_{22} - \lambda,$$

где λ — корень уравнения (5), по крайней мере одно отлично от нуля, а потому первые два уравнения системы (4′) определяют отношение $A:B$.

Если при этом $\lambda \neq 1$, то из последнего уравнения системы (4′) находим:

$$C = \frac{Aa_1 + Ba_2}{\lambda - 1}.$$

Если же $\lambda = 1$ — один из корней уравнения (4′), то C — любое число. В этом случае существует пучок двойных параллельных между собой прямых.

Таким образом, если корни уравнения (5) действительны и различны, причем ни один из них не равен 1, то существуют две и только две различные двойные прямые.

Если корни уравнения (5) действительны и различны и один из них λ_2 равен 1, то отличному от 1 корню λ_1 соответствует одна определенная двойная прямая, а корню $\lambda_2 = 1$ соответствует пучок параллельных между собой двойных прямых.

Пусть теперь уравнение (5) имеет двойной корень, не равный 1.

Если в этом случае среди чисел $a_{11} - \lambda$, a_{21}, a_{12}, $a_{22} - \lambda$ есть хотя бы одно, отличное от нуля, то первые два уравнения системы (4) определят отношение $A:B$, а последнее уравнение этой системы определит число C.

В этом случае имеется лишь одна двойная прямая.

Если уравнение (5) имеет двойной корень, не равный 1, и если $a_{11} - \lambda = a_{21} = a_{12} = a_{22} - \lambda = 0$, то первые два уравнения системы (4) удовлетворяются при любых значениях A и B. Из последнего уравнения системы (4′) находим:

$$C = \frac{Aa_1 + Ba_2}{\lambda - 1}.$$

Все двойные прямые:

$$Ax + By + \frac{Aa_1 + Ba_2}{\lambda - 1} = 0,$$

или

$$A\left(x - \frac{a_1}{1-\lambda}\right) + B\left(y - \frac{a_2}{1-\lambda}\right) = 0.$$

Все двойные прямые проходят через точку

$$\left(\frac{a_1}{1-\lambda}, \frac{a_2}{1-\lambda}\right).$$

Так как A и B произвольны, то двойной прямой является всякая прямая, проходящая через эту точку.

В рассматриваемом случае данное аффинное преобразование имеет вид:

$$x' = \lambda x + a_1, \qquad y' = \lambda y + a_2.$$

Перенося начало координат в точку $\left(\frac{a_1}{1-\lambda}, \frac{a_2}{1-\lambda}\right)$, будем иметь:

$$x = x^* + \frac{a_1}{1-\lambda}, \quad y = y^* + \frac{a_2}{1-\lambda};$$

$$x' = x^{*\prime} + \frac{a_1}{1-\lambda}, \; y' = y^{*\prime} + \frac{a_2}{1-\lambda}.$$

Следовательно,

$$x^{*\prime}+\frac{a_1}{1-\lambda}=\lambda\left(x^*+\frac{a_1}{1-\lambda}\right)+a_1,$$
$$y^{*\prime}+\frac{a_2}{1-\lambda}=\lambda\left(y^*+\frac{a_2}{1-\lambda}\right)+a_2$$

или

$$x^{*\prime}=\lambda x^*, \qquad y^{*\prime}=\lambda y^*,$$

т. е. мы имеем преобразование подобия с центром подобия в точке

$$\left(\frac{a_1}{1-\lambda},\ \frac{a_2}{1-\lambda}\right).$$

Если оба корня уравнения (5) равны 1, но хотя бы одно из чисел $a_{11}-\lambda$, a_{12}, a_{21}, $a_{22}-\lambda$ не равно нулю, то для $A:B$ находится вполне определенное значение, а C произвольно. В этом случае имеем пучок двойных параллельных между собой прямых.

Если оба корня уравнения (5) равны 1 и $a_{11}-\lambda=a_{12}=a_{21}=a_{22}-\lambda=0$, то данное аффинное преобразование имеет вид:

$$x'=x+a_1, \qquad y'=y+a_2$$

(параллельный перенос). Двойными прямыми являются (в случае, если a_1 и a_2 не равны нулю одновременно) прямые, параллельные вектору $\{a_1, a_2\}$. Если же $a_1=a_2=0$, то мы имеем тождественное преобразование: любая прямая является двойной.

Пример 2. *Определить главные направления центроаффинного преобразования A, заданного относительно прямоугольной системы координат:*

$$x'=a_{11}x+a_{12}y, \qquad y'=a_{21}x+a_{22}y. \tag{1}$$

Решение. Рассмотрим центроаффинное преобразование A^*:

$$x'=a_{11}x+a_{21}y, \qquad y'=a_{12}x+a_{22}y. \tag{2}$$

Аффинное преобразование A^*A будет определяться формулами:

$$x'=a_{11}(a_{11}x+a_{12}y)+a_{21}(a_{21}x+a_{22}y),$$
$$y'=a_{12}(a_{11}x+a_{12}y)+a_{22}(a_{21}x+a_{22}y),$$

или

$$x'=(a_{11}^2+a_{21}^2)\,x+(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22})\,y,$$
$$y'=(a_{12}a_{11}+a_{22}a_{21})\,x+(a_{12}^2+a_{22}^2)\,y.$$

Это преобразование симметрическое.

Будем обозначать образ любого вектора $\boldsymbol{e}$ в аффинном преобразовании A через $A\boldsymbol{e}$. Отметим, что для двух любых векторов $\boldsymbol{e}_1=\{x_1, y_1\}$ и $\boldsymbol{e}_2=\{x_2, y_2\}$ скалярные произведения $\boldsymbol{e}_1A\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_2A^*\boldsymbol{e}_1$ равны между собой:

$$\boldsymbol{e}_1A\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2A^*\boldsymbol{e}_1. \tag{3}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} e_1Ae_2 &= \{x_1, y_1\}\ \{a_{11}x_2 + a_{12}y_2,\ a_{21}x_2 + a_{22}y_2\} = \\ &= x_1(a_{11}x_2 + a_{12}y_2) + y_1(a_{21}x_2 + a_{22}y_2) = \\ &= a_{11}x_1x_2 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}y_1x_2 + a_{22}y_1y_2 = \\ &= x_2(a_{11}x_1 + a_{21}y_1) + y_2(a_{12}x_1 + a_{22}y_1) = \\ &= \{x_2, y_2\}\ \{a_{11}x_1 + a_{21}y_1,\ a_{12}x_1 + a_{22}y_1\} = e_2A^*e_1. \end{aligned}$$

Так как аффинное преобразование A^*A является симметрическим, то оно имеет два ортогональных собственных вектора:

$$e_1 = \{x_1, y_1\},$$

$$e_2 = \{x_2, y_2\},$$

т. е.

$$A^*Ae_1 = \lambda_1 e_1,$$
$$A^*Ae_2 = \lambda_2 e_2.$$

Из первого равенства находим:

$$e_2A^*Ae_1 = \lambda_1 e_1 e_2 = 0,$$

так как $e_1 \perp e_2$.

Обозначая векторы Ae_1 и Ae_2 через e_1' и e_2', в силу свойства (3) будем иметь:

$$e_2A^*Ae_1 = e_2A^*e_1' = e_1'Ae_2 = e_1'e_2' = 0.$$

Таким образом, собственные векторы аффинного преобразования A^*A будут параллельны главным направлениям аффинного преобразования (1).

Обратно, пусть e_1 и e_2 — векторы, параллельные главным направлениям аффинного преобразования (1). Тогда

$$Ae_1Ae_2 = 0$$

или

$$e_1'Ae_2 = 0,$$

откуда в силу свойства (3) будем иметь:

$$e_1'Ae_2 = e_2A^*e_1' = e_2A^*Ae_1 = 0.$$

Значит,

$$e_2 \perp A^*Ae_1;$$

но векторы e_1 и e_2 ортогональны — по определению главных направлений, следовательно, вектор A^*Ae_1 коллинеарен вектору e_1, т. е.

$$A^*Ae_1 = \lambda_1 e_1.$$

Аналогично доказываем, что

$$A^*Ae_2 = \lambda_2 e_2.$$

Таким образом, векторы, параллельные главным направлениям аффинного преобразования (1), будут собственными векторами аффинного преобразования (2).

Итак, для отыскания главных направлений аффинного преобразования A надо найти все пары взаимно ортогональных собственных векторов преобразования A^*A.

Если собственные значения симметрического преобразования различны, то преобразование A имеет единственную пару главных направлений.

Пример 3. *Пусть относительно общей декартовой системы координат задано аффинное преобразование:*

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1,$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2.$$

Написать формулы этого аффинного преобразования в новой системе координат, если переход от старой системы Oxy к новой $\overset{*}{O}\overset{*}{x}\overset{*}{y}$ задан соотношениями.

$$x = c_{11}\overset{*}{x} + c_{12}\overset{*}{y} + c_1,$$
$$y = c_{21}\overset{*}{x} + c_{22}\overset{*}{y} + c_2.$$

Решение. Пусть $\overset{*}{x}$, $\overset{*}{y}$ — координаты произвольной точки M в системе $\overset{*}{O}\overset{*}{x}\overset{*}{y}$, а $\overset{*}{x}{}'$, $\overset{*}{y}{}'$ — координаты точки M', являющейся образом точки M в данном аффинном преобразовании. Пусть далее x, y — координаты точки M в системе Oxy, а x', y' — координаты точки M' в той же системе Oxy.

Тогда

$$x' = c_{11}\overset{*}{x}{}' + c_{12}\overset{*}{y}{}' + c_1,$$
$$y' = c_{21}\overset{*}{x}{}' + c_{22}\overset{*}{y}{}' + c_2.$$

Следовательно,

$$c_{11}\overset{*}{x}{}' + c_{12}\overset{*}{y}{}' + c_1 = a_{11}(c_{11}\overset{*}{x} + c_{12}\overset{*}{y} + c_1) + a_{12}(c_{21}\overset{*}{x} + c_{22}\overset{*}{y} + c_2) + a_1,$$
$$c_{21}\overset{*}{x}{}' + c_{22}\overset{*}{y}{}' + c_2 = a_{21}(c_{11}\overset{*}{x} + c_{12}\overset{*}{y} + c_1) + a_{22}(c_{21}\overset{*}{x} + c_{22}\overset{*}{y} + c_2) + a_2.$$

Разрешая эти соотношения относительно $\overset{*}{x}{}'$ и $\overset{*}{y}{}'$, мы получим формулы вида:

$$\overset{*}{x}{}' = b_{11}\overset{*}{x} + b_{12}\overset{*}{y} + b_1,$$
$$\overset{*}{y}{}' = b_{21}\overset{*}{x} + b_{22}\overset{*}{y} + b_2\ ^{*}).$$

Пример 4. *Найти аффинные преобразования, переводящие линию второго порядка в себя.*

---

*) Числа b_{ik}, b_i определяются из следующего матричного равенства:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{11} & b_1 \\ b_{21} & b_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1) Найдем аффинные преобразования, переводящие эллипс в себя.

Пусть

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2 \tag{1}$$

— искомое аффинное преобразование. Прообразом эллипса, заданного каноническим уравнением:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

в этом преобразовании будет тот же эллипс:

$$\frac{(a_{11}x + a_{12}y + a_1)^2}{a^2} + \frac{(a_{21}x + a_{22}y + a_2)^2}{b^2} = 1$$

или

$$\left(\frac{a_{11}^2}{a^2} + \frac{a_{21}^2}{b^2}\right)x^2 + 2\left(\frac{a_{11}a_{12}}{a^2} + \frac{a_{21}a_{22}}{b^2}\right)xy + \left(\frac{a_{12}^2}{a^2} + \frac{a_{22}^2}{b^2}\right)y^2 +$$
$$+ 2\left(\frac{a_1a_{11}}{a^2} + \frac{a_2a_{21}}{b^2}\right)x + 2\left(\frac{a_1a_{12}}{a^2} + \frac{a_2a_{22}}{b^2}\right)y + \frac{a_1^2}{a^2} + \frac{a_2^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Так как уравнение (3) определяет тот же эллипс, что и уравнение (2), то соответствующие коэффициенты этих уравнений пропорциональны:

$$\begin{gathered}
\frac{a_{11}^2}{a^2} + \frac{a_{21}^2}{b^2} = \lambda\frac{1}{a^2},\\
\frac{a_{11}a_{12}}{a^2} + \frac{a_{21}a_{22}}{b^2} = 0,\\
\frac{a_{12}^2}{a^2} + \frac{a_{22}^2}{b^2} = \lambda\frac{1}{b^2},\\
\frac{a_1a_{11}}{a^2} + \frac{a_2a_{21}}{b^2} = 0,\\
\frac{a_1a_{12}}{a^2} + \frac{a_2a_{12}}{b^2} = 0,\\
\frac{a_1^2}{a^2} + \frac{a_2^2}{b^2} - 1 = -\lambda.
\end{gathered} \tag{4}$$

Из четвертого и пятого уравнений следует, что $a_1 = a_2 = 0$, так как эта система однородна и ее определитель не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a_{11}}{a^2} & \dfrac{a_{21}}{b^2} \\ \dfrac{a_{12}}{a^2} & \dfrac{a_{22}}{b^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2b^2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Из шестого соотношения находим $\lambda = 1$.

Таким образом, искомое преобразование будет:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y, \qquad y' = a_{21}x + a_{22}y,$$

и уравнения (4) принимают вид:

$$\frac{a_{11}^2}{a^2} + \frac{a_{21}^2}{b^2} = \frac{1}{a^2},$$

$$\frac{a_{11}a_{12}}{a^2} + \frac{a_{21}a_{22}}{b^2} = 0,$$

$$\frac{a_{12}^2}{a^2} + \frac{a_{22}^2}{b^2} = \frac{1}{b^2}$$

или

$$a_{11}^2 + \left(\frac{a}{b}a_{21}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{b}{a}a_{12}\right)^2 + a_{22}^2 = 1,$$

$$a_{11}\frac{b}{a}a_{12} + \frac{a}{b}a_{21}a_{22} = 0.$$

Мы видим, что матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a}{b}a_{21} \\ \frac{b}{a}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ортогональная. Значит, можно положить:

$$a_{11} = \cos\varphi, \qquad \frac{a}{b}a_{21} = -\sin\varphi,$$

$$\frac{b}{a}a_{12} = \sin\varphi, \qquad a_{22} = \cos\varphi,$$

или

$$a_{11} = \cos\varphi, \qquad \frac{a}{b}a_{21} = \sin\varphi,$$

$$\frac{b}{a}a_{12} = \sin\varphi, \qquad a_{22} = -\cos\varphi.$$

Таким образом, искомое преобразование:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - \frac{b}{a}y\sin\varphi, \\ y' &= \frac{a}{b}x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{aligned} \tag{5}$$

или

$$x' = x\cos\varphi + \frac{a}{b}y\sin\varphi,$$
$$y' = \frac{b}{a}x\sin\varphi - y\cos\varphi. \tag{6}$$

Преобразование (5) можно рассматривать как произведение CBA следующих преобразований:

$$A\begin{cases} x_1 = \dfrac{x}{a}, \\ y_1 = \dfrac{y}{b}; \end{cases}$$

$$B\begin{cases} x_2 = x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi, \\ y_2 = x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi; \end{cases}$$

$$C\begin{cases} x_3 = ax_2, \\ y_3 = by_2. \end{cases}$$

Преобразование A преобразует данный эллипс в окружность радиуса 1, центр которой совпадает с центром данного эллипса.

Преобразование B есть поворот на угол φ вокруг центра этой окружности (преобразует эту окружность в себя).

Преобразование C снова повернутую окружность преобразует в данный эллипс.

Преобразование (6) можно рассматривать как произведение четырех преобразований:

$$A\begin{cases} x_1 = \dfrac{x}{a}, \\ y_1 = \dfrac{y}{b}; \end{cases}$$

$$B\begin{cases} x_2 = x_1, \\ y_2 = -y_1; \end{cases}$$

$$C\begin{cases} x_3 = x_2\cos\varphi - y_2\sin\varphi, \\ y_3 = x_2\sin\varphi + y_2\cos\varphi; \end{cases}$$

$$D\begin{cases} x_4 = ax_3, \\ y_4 = by_3. \end{cases}$$

Преобразование A преобразует данный эллипс в окружность радиуса 1, центр которой совпадает с центром данного эллипса.

Преобразование B есть симметрия относительно оси Ox; оно окружность S преобразует в себя.

Преобразование C есть поворот на угол φ вокруг центра этой окружности; это преобразование окружность S преобразует в себя. Наконец, преобразование D переводит окружность S в данный эллипс.

2) Найдем аффинные преобразования, переводящие гиперболу в себя.

Пусть

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1,$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2$$

— искомое аффинное преобразование.

Прообразом гиперболы

$$x'y' = C, \tag{1}$$

отнесенной к асимптотам, будет та же гипербола:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_1)(a_{21}x + a_{22}y + a_2) = C,$$

или

$$a_{11}a_{21}x^2 + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})xy + a_{12}a_{22}y^2 + \\ + (a_1a_{21} + a_2a_{11})x + (a_2a_{12} + a_1a_{22})y + a_1a_2 = C. \tag{2}$$

Так как уравнения (1) и (2) определяют одну и ту же гиперболу, то соответствующие коэффициенты этих уравнений будут пропорциональны:

$$\begin{aligned} a_{11}a_{21} &= 0, \\ a_{12}a_{22} &= 0, \\ a_1a_{21} + a_2a_{11} &= 0, \\ a_1a_{22} + a_2a_{12} &= 0, \\ a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} &= \lambda, \\ a_1a_2 - C &= -\lambda C. \end{aligned} \tag{3}$$

Из третьего и четвертого соотношений в силу неравенства

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

получаем:

$$a_1 = a_2 = 0.$$

В таком случае из последнего равенства находим: $\lambda = 1$ и система (3) принимает вид:

$$\begin{aligned} a_{11}a_{21} &= 0, \\ a_{12}a_{22} &= 0, \\ a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} &= 1. \end{aligned}$$

I. Пусть $a_{21} = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} a_{12}a_{22} &= 0, \\ a_{11}a_{22} &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $a_{22} \neq 0$, значит, $a_{12} = 0$. Полагая $a_{11} = k$, получим $a_{22} = \frac{1}{k}$ и искомое преобразование

$$x' = kx, \qquad y' = \frac{1}{k}y,$$

где k — любое действительное число, не равное 0.

II. Пусть $a_{12}=0$. Тогда $a_{11}a_{21}=0$, $a_{11}a_{22}=1$, откуда $a_{11}\neq 0$, $a_{22}\neq 0$, значит, $a_{21}=0$, и мы приходим к тому же преобразованию.

III. Пусть $a_{11}=0$. Тогда $a_{12}a_{22}=0$, $a_{12}a_{21}=1$, значит, $a_{12}\neq 0$, $a_{21}\neq 0$, следовательно, $a_{22}=0$ и, полагая $a_{12}=k$, будем иметь:

$$x'=ky, \qquad y'=\frac{1}{k}x.$$

IV. Наконец, если $a_{22}=0$, то мы приходим к преобразованию того же вида.

§ 1. Поворот плоскости

803*. Плоскость поворачивается около точки (2, 3) на угол α, такой, что $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$. В какую прямую переходит прямая $x+2y-3=0$?

804. Плоскость поворачивается около точки (—1, 3) на угол 45°. В какие прямые переходят при этом оси координат?

805. Плоскость поворачивается около начала координат на угол α. В какую прямую при этом переходит прямая $x=p$?

806. Найти тангенс угла, на который надо повернуть плоскость около какой-либо ее точки, чтобы прямая $2x+5y-3=0$ стала параллельной оси ординат.

807. Плоскость поворачивается около точки (—3, 4) на угол $+90°$. В какие прямые при этом переходят биссектрисы координатных углов?

808. Составить уравнения сторон правильного шестиугольника, если $4x+2y-1=0$ — уравнение одной из его сторон, а центр симметрии находится в начале координат.

809. Даны уравнение $2x-y=0$ стороны равностороннего треугольника и точка (5, 1) пересечения его медиан. Составить уравнение двух других сторон.

810. Найти две вершины равностороннего треугольника, зная, что они лежат на осях координат и что третья вершина совпадает с точкой (1, 1).

811. Найти вершины A и B острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника, зная третью вершину $C(1, 2)$ и прямые $8x-y+20=0$, $7x+4y-41=0$, на которых лежат искомые вершины.

812*. Даны три параллельные прямые: $y=0$, $y-2=0$, $y-3=0$. Найти угловые коэффициенты сторон равностороннего треугольника, вершины которого лежат соответственно на данных прямых.

813. Центр правильного n-угольника находится в точке (x_0, y_0); уравнение одной из его сторон $Ax+By+C=0$. Найти уравнение остальных $n-1$ сторон.

§ 2. Аффинные преобразования

814. Дано аффинное преобразование $x'=2x+3y+5$, $y'=4x-3y-2$. В какие точки перейдут при этом преобразовании точки $O(0, 0)$, $A(5, 2)$, $B(-1, 4)$?

815. Дано аффинное преобразование $x'=3x+y-6$, $y'=x+y+1$. Какая точка переходит при этом преобразовании в точку $(9, 8)$?

816. Дано аффинное преобразование $x'=3x+4y-12$, $y'=4x-3y+6$. На прямой $7x-2y-24=0$ найти такую точку, которая при этом преобразовании переходит в точку, лежащую на данной прямой.

817*. Аффинное преобразование α переводит точки $A(2, 1)$, $B(3, 0)$, $C(1, 4)$ соответственно в точки $A'(1, 6)$, $B'(1, 9)$, $C'(3, 1)$. Куда перейдет при этом преобразовании точка $M(5, 7)$? Какая точка останется неподвижной?

818*. Определить аффинное преобразование, которое три данные точки $A_1(1, 0)$, $A_2(0, 2)$, $A_3(-3, 0)$ переводит соответственно в точки $A_1'(2, 3)$, $A_2'(-1, 4)$, $A_3'(-2, -1)$.

819. Определить двойную точку аффинного преобразования $x'=4x+5y-11$, $y'=2x+4y-7$.

820. Определить двойные точки аффинного преобразования $x'=3x+4y-8$, $y'=x+3y-4$.

821. Дано аффинное преобразование $x'=2x+3y+5$, $y'=4x-3y-2$. В какие прямые перейдут при этом преобразовании 1) оси Ox и Oy; 2) прямые $2x+3y+5=0$, $4x-3y-2=0$; 3) прямая $2x-6y-7=0$.

822. Дано аффинное преобразование $x'=2x+y-2$, $y'=x-y-1$ и точка $A(1, 1)$. Найти прямую, проходящую через точку A, которая при этом преобразовании переходит в прямую, также проходящую через точку A.

823*. Определить двойные прямые аффинного преобразования $x'=7x-y+1$, $y'=4x+2y+4$.

824. Доказать, что аффинное преобразование

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax - by \\ y' &= bx + ay \end{aligned}\right\} \quad a^2 + b^2 \neq 0$$

не имеет двойных прямых.

825*. Как запишется аффинное преобразование $x' = x + 2y$, $y' = 4x + 3y$, если за новые оси аффинной системы координат принять двойные прямые данного преобразования.

826*. Дано аффинное преобразование $x' = 5x + y$, $y' = 4x + 8y$. Найти такие векторы, которые при этом преобразовании переходят в векторы, им коллинеарные.

827. Дано аффинное преобразование $x' = 3x - y$, $y' = x + y$. Найти векторы, которые при этом преобразовании переходят в векторы, им коллинеарные.

828. Дано аффинное преобразование $x' = 2x - 5y$, $y' = 2x + 3y$. Найти такие векторы, которые при данном аффинном преобразовании переходят в векторы, им коллинеарные.

829. Дано аффинное преобразование $x' = 10x + 11y$, $y' = 10x + 9y$. Найти такой вектор, который при данном преобразовании переходит в вектор, к нему перпендикулярный.

830. Найти общий вид тех аффинных преобразований, для которых каждая точка оси Ox является двойной точкой.

831. Найти общий вид тех аффинных преобразований, для которых оси координат являются двойными прямыми.

832. Найти общий вид тех аффинных преобразований, для которых ось Ox является двойной прямой, а все точки оси Oy — двойными точками.

833. Написать формулы аффинного преобразования, при котором оси координат являются двойными прямыми, точка $A(2, 0)$ переходит в точку $A'(-6, 0)$, а точка $B(0, 4)$ переходит в точку $B'(0, 8)$.

834. Найти такое аффинное преобразование, для которого все точки оси Ox являются двойными, а точка $A(2, 6)$ переходит в точку $A'(-1, -4)$.

835. Как запишется аффинное преобразование, которое прямоугольник $OACB$ превращает в параллелограмм $OAC'B'$ с теми же длинами сторон и углом $\angle AOB' = \omega$, если за начало прямоугольной системы координат принять вершину O, а за положительные направления осей — направления сторон прямоугольника.

836*. Определить такие аффинные преобразования, при которых каждая точка прямой $Ax+By+C=0$ является двойной точкой.

837*. Определить такое аффинное преобразование, при котором каждая точка прямой $x+2y-1=0$ является двойной и точки $M(1, 2)$ и $M'(2, 2)$ — соответствующими точками.

838. Определить аффинное преобразование, при котором точки прямой $Ax+By+C=0$ переходят в себя же и точка $O(0, 0)$ в точку $S_0(x_0, y_0)$.

839. Найти такое преобразование, при котором каждая точка переходит в точку, симметричную ей относительно прямой $Ax+By+C=0$.

840. Найти такое аффинное преобразование, при котором каждая точка переходит в точку, симметричную ей относительно прямой $x+y-5=0$.

841*. Определить аффинное преобразование, при котором прямые $x+y+1=0$, $x-y+2=0$ переходят в себя же, и точка $M(1, 1)$ переходит в $M'(2, 1)$.

842. Написать формулы аффинного преобразования, при котором прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ переходят соответственно в оси Oy и Ox, а точка $M_0(x_0, y_0)$ в точку $E(1, 1)$.

843*. Найти такое аффинное преобразование, при котором прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $D_1x+E_1y+F_1=0$ переходят соответственно в прямые $A_2x+B_2y+C_2=0$ и $D_2x+E_2y+F_2=0$, а точка $M_1(x_1, y_1)$ — в точку $M_2(x_2, y_2)$.

844. Найти такое аффинное преобразование, при котором прямые $5x-6y-7=0$ и $3x-4y=0$ переходят соответственно в прямые $2x+y-4=0$ и $x-y+1=0$, а точка $(6, 4)$ в точку $(2, 1)$.

845. Найти аффинное преобразование, обратное преобразованию $x'=2x+3y-7$, $y'=3x+5y-9$.

846. Даны два аффинных преобразования

$$A:\quad x'=2x+y-5,\qquad y'=3x-y+7;$$
$$B:\quad x'=x-y+4,\qquad y'=-x+2y+5.$$

Найти преобразования AB и BA.

847*. Найти все аффинные преобразования, квадрат каждого из которых равен единичному преобразованию.

848*. Относительно прямоугольной системы координат дано аффинное преобразование $x' = 7x + y$, $y' = -5x + 5y$. Найти два таких взаимно перпендикулярных вектора, которые при этом преобразовании переходят во взаимно перпендикулярные векторы. Представить данное аффинное преобразование как произведение преобразования поворота и двух взаимно перпендикулярных сжатий.

849. Образует ли группу множество аффинных преобразований плоскости $x' = ax + b$, $y' = cy + d$, где a, b, c, d принимают все действительные значения, причем $a \neq 0$, $c \neq 0$.

850. Образует ли группу множество аффинных преобразований плоскости $x' = x$, $y' = ky$, где k принимает все действительные значения, кроме $k = 0$. Выяснить геометрический смысл каждого из этих преобразований.

851. Образует ли группу множество аффинных преобразований $x' = x + ky$, $y' = y$ (k принимает все действительные значения). В чем геометрический смысл каждого из указанных преобразований?

852. Образует ли группу множество аффинных преобразований $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$, где λ принимает все действительные значения, кроме $\lambda = 0$. В чем геометрический смысл каждого из указанных преобразований?

853*. Образует ли группу множество аффинных преобразований $x' = r(x\cos\varphi - y\sin\varphi)$, $y' = r(x\sin\varphi + y\cos\varphi)$, где r принимает все действительные положительные значения, а φ принимает все действительные значения. В чем геометрический смысл указанных преобразований? Система координат прямоугольная.

854. Образует ли группу множество аффинных преобразований $x' = ax - by$, $y' = bx + ay$, где a и b принимают все действительные значения, одновременно в нуль не обращаясь? В чем геометрический смысл каждого из указанных преобразований?

855*. Образует ли группу множество аффинных преобразований $x' = r(x\cos\varphi - y\sin\varphi) + \alpha$, $y' = r(x\sin\varphi + y\cos\varphi) + \beta$, где r принимает все действительные положительные значения, а φ, α и β принимают все действительные значения? В чем геометрический смысл каждого из указанных преобразований?

856. Определить площадь треугольника, заданного уравнениями его сторон:

$$A_1x+B_1y+C_1=0;$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0;$$
$$A_3x+B_3y+C_3=0,$$

относительно прямоугольной системы координат.

857. Определить площадь параллелограмма, стороны которого относительно прямоугольной системы координат определяются уравнениями:

$$Ax+By+C=0;$$
$$Ax+By+D=0;$$
$$A'x+B'y+C'=0;$$
$$A'x+B'y+D'=0.$$

858. Через точку $P(15, 6)$ провести прямую, отсекающую от прямых $5x-2y-5=0$, $2x+5y-2=0$ треугольник, площадь которого равна 29.

859. Через точку $P(-3, -5)$ провести прямую, отрезок которой между прямыми $2x+3y-15=0$, $4x-5y-12=0$ в точке P делится пополам. Система координат аффинная.

§ 3. Аффинные преобразования линий второго порядка

860. Найти геометрическое место точек пересечения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, проходящих через концы его сопряженных диаметров.

861. OA, OB — два сопряженных полудиаметра эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, M — середина хорды AB и C — точка пересечения луча OM с эллипсом. Определить отношение $\frac{OM}{OC}$.

862. Концы сопряженных диаметров эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ соединены хордами. Определить геометрическое место их середин.

863. Определить коэффициент подобия двух эллипсов $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1$ при условии, что треугольник ABC, вписанный в первый эллипс, является описанным около второго эллипса.

864*. Доказать, что вершины ромба, описанного около эллипса, лежат на его осях.

865. Доказать, что центр тяжести любого треугольника, вписанного в один эллипс и описанного около другого, подобного первому, с тем же центром, есть центр эллипса.

866*. Определить эллипс наибольшей площади, вписанный в данный параллелограмм.

867*. Доказать, что площадь треугольника, сторонами которого являются два сопряженных полудиаметра эллипса и хорда, соединяющая концы их, есть величина постоянная.

868*. Определить геометрическое место середин хорд эллипса, отсекающих от него сегменты постоянной площади.

869*. Доказать, что все точки, из которых к эллипсу можно провести касательные равной длины, лежат на его осях.

870. Доказать, что прямые, соединяющие концы M_1 и M_2 двух сопряженных радиусов эллипса, касаются некоторого эллипса, гомотетичного данному. Найти коэффициент гомотетии.

871. Доказать, что отрезки MM_1 и MM_2 касательных, проведенных из какой-либо точки M к эллипсу (M_1 и M_2 — точки прикосновения), относятся между собой как длины радиусов, которым они параллельны.

872. Доказать, что длины хорд, стягивающие дуги, заключенные между двумя параллельными секущими к эллипсу, относятся друг к другу как радиусы эллипса, параллельные этим хордам.

873. Доказать, что диагонали параллелограмма, стороны которого касаются эллипса, являются сопряженными диаметрами этого эллипса.

874*. Доказать, что если через какую-нибудь точку M, лежащую на продолжении общей хорды двух пересекающихся эллипсов, гомотетичных между собой, провести к этим эллипсам касательные MM_1 и MM_2 (M_1 и M_2 — точки прикосновения), то отрезки MM_1 и MM_2 будут относиться друг к другу как длины радиусов одного из эллипсов, параллельных проведенным касательным.

875*. Доказать, что произведение отрезков M_1P_1 и M_2P_2, отсекаемых касательной P_1P_2 к эллипсу от двух параллельных касательных M_1P_1 и M_2P_2 к этому эллипсу (M_1 и M_2 — точки прикосновения), одно и то же для всех касательных к эллипсу.

876*. Доказать, что произведение отрезков MP_1 и MP_2 касательной P_1MP_2 к эллипсу (M — точка прикосновения), где P_1 и P_2 — точки, в которых рассматриваемая касательная пересекается с двумя произвольными параллельными, касательными к эллипсу, постоянно.

877. Найти геометрическое место точек M пересечения прямых, проходящих через две данные точки A и B плоскости при условии, что прямые AM и BM параллельны двум сопряженным диаметрам данного эллипса.

878*. Около эллипса описан четырехугольник. Доказать, что сумма площадей двух треугольников, имеющих общей вершиной центр эллипса, а основаниями соответственно две противоположные стороны четырехугольника, равна сумме площадей двух других таких треугольников.

879. Пусть OA и OA' — два сопряженных радиуса эллипса, OB и OB' — два других сопряженных радиуса того же эллипса. Доказать, что среди прямых AB, $A'B'$, AB' и $A'B$ есть две параллельные.

880. Через точку A плоскости к эллипсу проведена секущая, пересекающая этот эллипс в точках P и Q. Доказать, что $\frac{AP \cdot AQ}{r^2} = \text{const}$, где r — радиус эллипса, параллельный секущей.

881. Вычислить площадь эллипса с полуосями a и b.

882. Доказать, что два сопряженных диаметра эллипса делят его на четыре равновеликие части.

883. Рассмотрим два радиуса эллипса таких, что площадь эллиптического сектора, образованного этими радиусами и дугой эллипса, имеет данную величину. Доказать, что:

1) хорды, соединяющие концы этих радиусов, касаются некоторого эллипса, гомотетичного данному, причем точками касания служат середины хорд;

2) сегменты, заключенные между этими хордами и дугой эллипса, имеют постоянную площадь;

3) треугольник, имеющий сторонами одну из этих хорд и касательные к эллипсу в ее концах, имеет постоянную площадь.

884. Доказать, что если соединить произвольную точку эллипса с двумя данными на нем точками и провести через центр эллипса прямые, параллельные построенным, то площадь одного из полученных при этом построении секторов эллипса имеет постоянную величину, равную площади сектора, образованного двумя радиусами, имеющими своими концами две данные точки эллипса.

885. На эллипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ даны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через центр эллипса и делящей пополам площадь эллиптического сектора OM_1M_2 (O — центр эллипса).

886. Доказать, что если $M(x_0, y_0)$ — произвольная точка плоскости и P — точка пересечения луча OM с эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=\left(\frac{OM}{OP}\right)^2$.

887*. Найти все аффинные преобразования, переводящие гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в себя. Образуют ли группу все эти преобразования? Доказать, что все они эквиаффинны.

888. Определить аффинное преобразование, при котором гипербола $x^2-y^2=1$ переходит в ту же гиперболу, а точка $M(1, 0)$ — в точку $M'(\sqrt{2}, 1)$.

889*. Пусть A — какое-нибудь аффинное преобразование, переводящее гиперболу Γ в гиперболу Γ', софокусную с гиперболой Γ. Доказать, что тогда $PQ'=P'Q$, где P и Q — две произвольные точки гиперболы Γ, а P' и Q' — их образы в рассматриваемом аффинном преобразовании.

890*. Рассмотрим два радиуса гиперболы, таких, что площадь гиперболического сектора, образованного этими радиусами и дугой гиперболы, имеет данную величину.

Доказать, что:

1) хорды, соединяющие концы этих радиусов, касаются некоторой гиперболы, гомотетичной данной, причем точками касания служат середины хорд;

2) сегменты гиперболы, заключенные между этими хордами и дугой гиперболы, имеют постоянную площадь;

3) треугольник, имеющий сторонами одну из хорд и касательные к гиперболе в ее концах, имеет постоянную площадь.

891*. Доказать, что если соединить произвольную точку гиперболы с двумя данными на ней точками и провести через центр гиперболы прямые, параллельные построенным, то площадь одного из гиперболических секторов, получившихся при построении, имеет постоянную величину, равную половине площади сектора, образованного двумя радиусами гиперболы, имеющими своими концами две данные точки гиперболы.

892*. Определить аффинное преобразование, которое параболу $y^2=2px$ переводит в ту же параболу.

893*. Определить унимодулярное аффинное преобразование, при котором парабола $y^2=2px$ переходит в ту же параболу.

894. Точка S пересечения двух касательных к параболе $y^2=2px$ в точках M_1 и M_2 соединена отрезком с серединой N хорды M_1M_2. Определить, в каком отношении λ делится отрезок SN точкой T пересечения этого отрезка с параболой.

895*. Определить такое аффинное преобразование параболы $y^2=2x$, которое диаметр $y=1$ переводит в диаметр $y'=3$, а точку $M(2, 2)$ переводит в точку $M'(8, 4)$.

896*. Определить геометрическое место точек, соответствующих фокусу параболы при всех унимодулярных преобразованиях параболы $y^2=2px$ в ту же параболу.

897*. Определить геометрическое место середин хорд параболы $y^2=2px$, отсекающих сегменты параболы постоянной площади.

898. Определить геометрическое место точек пересечения касательных к параболе $y^2=2px$ в концах хорд, отсекающих от параболы сегменты постоянной площади.

899. Отношение расстояний двух параллельных хорд параболы от параллельной им касательной равно 9. Определить отношение λ длин хорд.

900*. Определить аффинное преобразование, переводящее параболу $(\alpha x+\beta y)^2+2a_1x+2a_2y+a=0$ $\left(\text{при условии } \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}\neq 0\right)$ в ту же параболу.

901*. Определить аффинное преобразование, которое параболу $(\alpha x+\beta y)^2+2a_1x+2a_2y+a=0$, $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}\neq 0$, переводит в параболу $y'^2=2px'$.

902*. Доказать, что площадь сегмента параболы, отсекаемого хордой AB, составляет $^2/_3$ площади треугольника, сторонами которого являются хорда AB и касательные к параболе в концах хорды.

903*. Доказать, что любой сегмент параболы можно аффинно преобразовать в любой другой сегмент параболы.

904*. Определить площадь сегмента параболы, отсекаемого хордой параболы, перпендикулярной к оси параболы и проходящей на расстоянии, равном a, от вершины.

905*. Определить такую прямую, параллельную данной прямой $y = kx$, которая отсекает сегмент параболы $y^2 = 2px$ данной площади P.

906*. Через точку $M(x_1, y_1)$ параболы $y^2 = 2px$ провести хорду, которая отсекает от этой параболы сегмент данной площади.

907. Доказать, что для всех сегментов параболы постоянной площади расстояние между диаметрами, проходящими через конечные точки хорд,— величина постоянная.

908*. Из переменной точки M к параболе Π проводятся касательные; хорда, соединяющая точки касания, отсекает от параболы сегмент постоянной площади. Доказать, что геометрическое место точек M есть парабола, которая получается из данной параллельным перенесением. Доказать также, что проекция хорды прикосновения на директрису есть величина постоянная.

909. Доказать, что прямые, отсекающие от данной параболы сегменты заданной площади, касаются одной и той же параболы, получаемой из данной параллельным перенесением в направлении ее оси.

910*. Доказать, что если из точек одной вертикали в разное время, но с одной и той же начальной скоростью выбрасываются три материальные точки, то (считая, что движение происходит в пустоте) площадь треугольника, образованного летящими точками, с течением времени изменяться не будет.

911*. Определить аффинное преобразование, которое эллипс $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a' = 0$ ($I_2 > 0$, $I_1K_2 < 0$) преобразует в тот же эллипс.

ГЛАВА IX

ЭЛЕМЕНТЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Проективной прямой называется множество, состоящее из точек обыкновенной (евклидовой) прямой и еще одного элемента, называемого несобственной или бесконечно удаленной точкой этой прямой.

Все прочие точки проективной прямой называются собственными точками этой прямой.

Однородными координатами собственной точки M проективной прямой называется любая пара чисел x_1, x_2, таких, что $x_2 \neq 0$ и отношение $x_1:x_2 = x$, где x — декартова координата точки M. Если x — декартова координата собственной точки проективной прямой, то ее однородные координаты будут kx, k, где k — любое число, не равное нулю, в частности x, 1.

Однородными координатами несобственной точки, по определению, является любая пара чисел k, 0, где $k \neq 0$, в частности 1, 0.

Точку M, имеющую однородные координаты x_1, x_2, обозначают так: $M(x_1:x_2)$.

Система проективных координат на проективной прямой определяется тремя точками этой прямой: O_1, O_2 и E. Точки O_1 и O_2 называются базисными, а точка E единичной.

Если однородные координаты точек O_1, O_2 и E суть соответственно:

$$a_{11}:a_{21}, \quad a_{12}:a_{22} \quad \text{и} \quad b_1:b_2,$$

а точка M имеет однородные координаты $x_1:x_2$, то ее проективные координаты $y_1:y_2$ определяются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= a_{11}\rho_1 y_1 + a_{12}\rho_2 y_2, \\ \rho x_2 &= a_{21}\rho_1 y_1 + a_{22}\rho_2 y_2, \end{aligned}$$

где ρ — произвольное число, не равное нулю, а числа ρ_1 и ρ_2 определяются из системы уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}\rho_1 + a_{12}\rho_2 &= \rho b_1, \\ a_{21}\rho_1 + a_{22}\rho_2 &= \rho b_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что проективные координаты точек O_1, O_2 и E будут:

$$O_1(1:0), \quad O_2(0:1), \quad E(1:1).$$

Однородные координаты суть линейные однородные функции проективных координат, и наоборот, проективные координаты суть линейные однородные функции однородных координат.

Однородные координаты есть частный случай проективных координат, когда точка O_1 — несобственная точка проективной прямой, точка O_2 — начало декартовой системы координат и E — единичная точка этой декартовой системы.

Двойное или сложное (или ангармоническое) отношение $(ABCD)$ упорядоченной четверки точек A, B, C, D проективной прямой определяется следующим образом:

1) если точки A, B, C, D собственные, то

$$(ABCD)=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}:\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}=\frac{(ABC)}{(ABD)};$$

2) если одна из точек, например D, несобственная, то сложное отношение $(ABCD)$ определяется как предел, к которому стремится сложное отношение $(ABCD')$ четырех собственных точек A, B, C, D' при условии, что точка D' неограниченно удаляется по прямой. Это определение приводит к следующим равенствам:

а) если D — несобственная точка, то

$$(ABCD)=-\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}};$$

б) если C — несобственная точка, то

$$(ABCD)=-\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DA}};$$

в) если B — несобственная точка, то

$$(ABCD)=-\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AD}};$$

г) если A — несобственная точка, то

$$(ABCD)=-\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{BC}}.$$

Двойное отношение четырех точек, заданных своими проективными координатами:

$$A(a_1:a_2),\quad B(b_1:b_2),\quad C(c_1:c_2),\quad D(d_1:d_2),$$

вычисляется по формуле

$$(ABCD)=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

В частности, если точки A, B, C совпадают соответственно с точками O_1, O_2 и E, а M — произвольная точка, имеющая в системе O_1, O_2, E проективные координаты $x_1:x_2$, то

$$(O_1O_2EM)=x_1:x_2.$$

Это соотношение служит геометрическим определением проективных координат.

Для построения точки по ее проективным координатам можно поступать так. Пусть, например, надо построить точку (2: —3). Возьмем любую точку O' плоскости, не лежащую на прямой O_1O_2. В общей декартовой системе координат с началом O' и единичной точкой, лежащей на прямой $O'E$, строим точку P (2, —3). Если прямая $O'P$ пересекает прямую O_1O_2 в собственной точке, то эта точка и будет иметь (проективные) координаты 2: —3. Если же прямая $O'P$ параллельна прямой O_1O_2, то (2: —3) — несобственная точка прямой O_1O_2.

Если $(ABCD)=-1$, то четверка точек A, B, C, D называется *гармонической*.

Если A, B, C, D — гармоническая четверка точек, точки A, B, C собственные, причем точка C — середина отрезка AB, то D — несобственная точка.

Проективным преобразованием множества всех точек проективной прямой называется преобразование, определяемое в проективных координатах соотношениями:

$$x_1' = \varrho\,(a_{11}x_1 + a_{12}x_2),$$
$$x_2' = \varrho\,(a_{21}x_1 + a_{22}x_2),$$

где ϱ — любое число, не равное нулю, и

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В этих соотношениях $x_1:x_2$ — координаты точки прообраза, а $x_1':x_2'$ — координаты точки образа, взятые по отношению к одной и той же проективной системе координат на прямой.

При проективном преобразовании сложное (*ангармоническое*) отношение четырех точек проективной прямой не меняется, и обратно, преобразование проективной прямой, при котором сохраняется ангармоническое отношение четырех любых точек, есть проективное преобразование.

Множество всех проективных преобразований прямой образует группу.

Тождественное преобразование, при котором каждая точка сама себе соответствует, называется единичным преобразованием.

В аффинных координатах проективное преобразование собственных точек проективной прямой определяется равенством

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \text{где} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Проективная плоскость. Присоединим к множеству точек каждой прямой обыкновенной (евклидовой) плоскости новый элемент, который будем называть несобственной или бесконечно удаленной точкой этой прямой. Если две прямые пересекаются, то мы будем присоединять к ним различные несобственные точки. Ко всем параллельным между собой прямым мы будем присоединять одну и ту же несобственную точку.

Множество всех точек обыкновенной (евклидовой) плоскости, пополненное указанным образом множеством несобственных точек, называется проективной плоскостью. Точки евклидовой плоскости мы будем называть собственными точками той проективной плоскости, которая получается из данной евклидовой плоскости присоединением несобственных элементов.

Прямые евклидовой плоскости, пополненные несобственными точками, мы будем называть собственными прямыми той проективной плоскости, которая получается из данной евклидовой плоскости присоединением к ней несобственных элементов.

Множество всех несобственных точек проективной плоскости называется **несобственной** или **бесконечно удаленной прямой**.

Однородными координатами собственной точки M проективной плоскости, которая в общей декартовой системе координат Oxy имеет координаты x и y, называются тройка чисел x, y, 1, а также любая тройка чисел x_1, x_2, x_3, им пропорциональная. Таким образом,

$$x_1 = kx, \qquad x_2 = ky, \qquad x_3 = k\cdot 1,$$

откуда получается связь декартовых координат с однородными:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Однородными координатами несобственной точки, присоединенной к данному пучку параллельных прямых, называются три числа

$$x_1, \; x_2, \; 0,$$

где x_1, x_2 — координаты любого ненулевого вектора, параллельного прямым этого пучка.

Если x_1, x_2, 0 — координаты какой-нибудь несобственной точки, то числа kx_1, kx_2, 0, где k — любое число, отличное от нуля, также будут координатами той же несобственной точки.

Точку M, имеющую однородные координаты x_1, x_2, x_3, обозначают так: $M\,(x_1 : x_2 : x_3)$.

Всякая прямая на проективной плоскости в однородных координатах определяется линейным однородным уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

и обратно. В частности, уравнение несобственной прямой будет

$$x_3 = 0,$$

а уравнения

$$x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = 0$$

суть соответственно уравнения осей Oy и Ox.

Система проективных координат на проективной плоскости определяется четырьмя точками O_1, O_2, O_3 и E, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Точки O_1, O_2, O_3 называются базисными, а точка E — единичной.

Треугольник $O_1O_2O_3$ называется базисным или координатным.

Если однородные координаты точек O_1, O_2, O_3 и E суть соответственно:

$$O_1(a_{11}:a_{21}:a_{31}),\quad O_2(a_{12}:a_{22}:a_{32}),$$
$$O_3(a_{13}:a_{23}:a_{33})\quad \text{и}\quad E(b_1:b_2:b_3),$$

а точка M имеет однородные координаты $x_1:x_2:x_3$, то ее проективные координаты $y_1:y_2:y_3$ определяются из следующих соотношений:

$$\varrho x_1 = a_{11}\varrho_1 y_1 + a_{12}\varrho_2 y_2 + a_{13}\varrho_3 y_3,$$
$$\varrho x_2 = a_{21}\varrho_1 y_1 + a_{22}\varrho_2 y_2 + a_{23}\varrho_3 y_3,$$
$$\varrho x_3 = a_{31}\varrho_1 y_1 + a_{32}\varrho_2 y_2 + a_{33}\varrho_3 y_3,$$

где ϱ — произвольное число, не равное 0, а числа ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 определяются из системы уравнений:

$$a_{11}\varrho_1 + a_{12}\varrho_2 + a_{13}\varrho_3 = b_1\varrho,$$
$$a_{21}\varrho_1 + a_{22}\varrho_2 + a_{23}\varrho_3 = b_2\varrho,$$
$$a_{31}\varrho_1 + a_{32}\varrho_2 + a_{33}\varrho_3 = b_3\varrho.$$

Отсюда следует, что проективные координаты точек O_1, O_2, O_3, E будут:

$$O_1(1:0:0),\quad O_2(0:1:0),\quad O_3(0:0:1),\quad E(1:1:1).$$

Однородные координаты суть линейные однородные функции проективных координат, и наоборот, проективные координаты суть линейные однородные функции однородных координат.

Однородные координаты есть частный случай проективных координат, когда точки O_1 и O_2 — несобственные точки осей Ox и Oy, O_3 — начало координат, а E — единичная точка общей декартовой системы координат Oxy.

Если

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

суть соответственно уравнения сторон O_2O_3, O_3O_1 и O_1O_2 базисного треугольника, а $b_1:b_2:b_3$ — однородные координаты единичной точки E, то проективные координаты $y_1:y_2:y_3$ произвольной точки M выражаются через ее однородные координаты $x_1:x_2:x_3$ соотношениями:

$$\varrho y_1 = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3},\qquad \varrho y_2 = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3}{a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3},$$
$$\varrho y_3 = \frac{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3}{a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3},$$

где ρ — любое число, отличное от нуля. Пусть точка M имеет проективные координаты $x_1:x_2:x_3$. Обозначим через M_3 и E_3 проекции точек M и E из точки O_3 на прямую O_1O_2. Тогда точка M_3 будет иметь на проективной прямой O_1O_2 в системе O_1, O_2, E_3 проективные координаты $x_1:x_2$, а потому

$$x_1:x_2=(O_1O_2E_3M_3).$$

Аналогично:

$$x_2:x_3=(O_2O_3E_1M_1),$$
$$x_3:x_1=(O_3O_1E_2M_2),$$

где E_1 и M_1 — проекции точек E и M из точки O_1 на прямую O_2O_3, а E_2 и M_2 — проекции точек E и M из точки O_2 на прямую O_3O_1

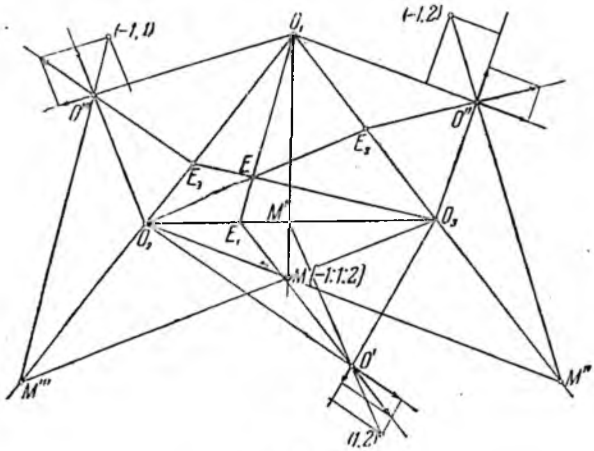

Рис. 23.

Для построения точки по ее проективным координатам можно поступать так. Пусть, например, надо построить точку $(-1:1:2)$ (рис. 23). Возьмем любую точку O' плоскости, не лежащую на прямой O_2O_3. В аффинной системе с началом O' и единичной точкой, лежащей на прямой $O'E_1$ (E_1 — проекция точки E из точки O_1 на прямую O_2O_3), строим точку $(1, 2)$, соединяем ее с O' и в пересечении с O_2O_3 получаем точку M'. Берем далее произвольную точку O''', не лежащую на прямой O_1O_2, и строим в аффинной системе с началом O''' и единичной точкой, лежащей на прямой $O'''E_3$, точку $(-1, 1)$, соединяем ее с O''' и в пересечении с O_1O_2 получаем точку M'''. Искомая точка $M\,(-1:1:2)$ лежит на пересечении прямых O_1M' и O_3M''' (аналогичным образом построенная прямая O_2M'' пройдет через ту же точку).

Проективная прямая на проективной плоскости определяется линейным однородным уравнением

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0,$$

называемым уравнением этой прямой.

Отношения $u_1:u_2:u_3$ называются координатами прямой или тангенциальными координатами. Запись $l(u_1:u_2:u_3)$ означает, что прямая l имеет координаты $u_1:u_2:u_3$.

В случае, если точка M лежит на прямой l, то говорят, что прямая и точка инцидентны.

Если фиксировать $x_1:x_2:x_3$, то соотношению

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0 \qquad (\alpha)$$

удовлетворяют координаты всех прямых, проходящих через точку $(x_1:x_2:x_3)$. В этом случае уравнение (α) называется уравнением точки $(x_1:x_2:x_3)$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1':x_2':x_3')$ и $M_2(x_1'':x_2'':x_3'')$, будет:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix}=0,$$

и значит, координаты прямой M_1M_2 будут:

$$\begin{vmatrix} x_2' & x_3' \\ x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_3' & x_1' \\ x_3'' & x_1'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1'' & x_2'' \end{vmatrix}.$$

Уравнение точки пересечения двух прямых $m_1(u_1':u_2':u_3')$ и $m_2(u_1'':u_2'':u_3'')$ будет:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix}=0,$$

и значит, координаты этой точки будут:

$$\begin{vmatrix} u_2' & u_3' \\ u_2'' & u_3'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_3' & u_1' \\ u_3'' & u_1'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_1' & u_2' \\ u_1'' & u_2'' \end{vmatrix}.$$

Необходимое и достаточное условие коллинеарности трех точек

$$M_1(x_1':x_2':x_3'), \quad M_2(x_1'':x_2'':x_3''), \quad M_3(x_1''':x_2''':x_3''')$$

таково:

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix}=0.$$

Необходимым и достаточным условием того, что три прямые

$$l_1(u_1':u_2':u_3'),\quad l_2(u_1'':u_2'':u_3''),\quad l_3(u_1''':u_2''':u_3''')$$

имеют общую точку, является равенство

$$\begin{vmatrix} u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \\ u_1''' & u_2''' & u_3''' \end{vmatrix}=0.$$

Параметрические уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1':x_2':x_3')$ и $M_2(x_1'':x_2'':x_3'')$, записываются так:

$$x_1=\alpha x_1'+\beta x_1'',$$
$$x_2=\alpha x_2'+\beta x_2'',$$
$$x_3=\alpha x_3'+\beta x_3'',$$

где α и β принимают все действительные значения, не равные нулю одновременно.

Параметрические уравнения точки пересечения двух прямых $l_1(u_1':u_2':u_3')$ и $l_2(u_1'':u_2'':u_3'')$ (или координаты любой прямой пучка, определяемого этими прямыми) будут:

$$u_1=\alpha u_1'+\beta u_1'',$$
$$u_2=\alpha u_2'+\beta u_2'',$$
$$u_3=\alpha u_3'+\beta u_3'',$$

где α и β принимают все действительные значения, не равные нулю одновременно.

Ангармоническое отношение четырех точек:

$$M_1(x_1':x_2':x_3'),\qquad M_2(x_1'':x_2'':x_3''),$$
$$M_3((\alpha x_1'+\beta x_1''):(\alpha x_2'+\beta x_2''):(\alpha x_3'+\beta x_3'')),$$
$$M_4((\lambda x_1'+\mu x_1''):(\lambda x_2'+\mu x_2''):(\lambda x_3'+\mu x_3'')),$$

лежащих на одной прямой, равно:

$$(M_1M_2M_3M_4)=\frac{\beta\lambda}{\alpha\mu}.$$

Ангармоническое отношение четырех прямых

$$l_1(u_1':u_2':u_3'),\quad l_2(u_1'':u_2'':u_3''),$$
$$l_3((\alpha u_1'+\beta u_1''):(\alpha u_2'+\beta u_2''):(\alpha u_3'+\beta u_3'')),$$
$$l_4((\lambda u_1'+\mu u_1''):(\lambda u_2'+\mu u_2''):(\lambda u_3'+\mu u_3'')),$$

проходящих через одну точку, равно:

$$(l_1 l_2 l_3 l_4) = \frac{\beta\lambda}{\alpha\mu}.$$

Преобразование проективной системы координат $O_1O_2O_3E$ в систему $O_1'O_2'O_3'E'$ определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3', \\ \varrho x_2 &= a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3', \\ \varrho x_3 &= a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3', \end{aligned} \tag{β}$$

где $(x_1:x_2:x_3)$ — координаты произвольной точки плоскости относительно системы $O_1O_2O_3E$, а $x_1':x_2':x_3'$ — координаты той же самой точки относительно системы $O_1'O_2'O_3'E'$; при этом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \varrho x_1' &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3, \\ \varrho x_2' &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3, \\ \varrho x_3' &= A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3, \end{aligned}$$

где A_{ik} пропорциональны элементам матрицы, обратной матрице (a_{ik}).

Если базисные точки O_1', O_2', O_3' и единичная точка E' заданы относительно системы $O_1O_2O_3E$ своими координатами $O_1'(b_{11}:b_{21}:b_{31})$, $O_2'(b_{12}:b_{22}:b_{32})$, $O_3'(b_{13}:b_{23}:b_{33})$ и $E(c_1:c_2:c_3)$, то уравнения (β) имеют вид:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= b_{11}\varrho_1 x_1' + b_{12}\varrho_2 x_2' + b_{13}\varrho_3 x_3', \\ \varrho x_2 &= b_{21}\varrho_1 x_1' + b_{22}\varrho_2 x_2' + b_{23}\varrho_3 x_3', \\ \varrho x_3 &= b_{31}\varrho_1 x_1' + b_{32}\varrho_2 x_2' + b_{33}\varrho_3 x_3', \end{aligned}$$

где ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 определяются из уравнений:

$$\begin{aligned} b_{11}\varrho_1 + b_{12}\varrho_2 + b_{13}\varrho_3 &= \lambda c_1, \\ b_{21}\varrho_1 + b_{22}\varrho_2 + b_{23}\varrho_3 &= \lambda c_2, \\ b_{31}\varrho_1 + b_{32}\varrho_2 + b_{33}\varrho_3 &= \lambda c_3. \end{aligned}$$

Проективным преобразованием множества точек проективной плоскости называется такое взаимно однозначное преобразование, при котором любые три точки, лежащие на одной прямой, переходят в три точки, также лежащие на одной прямой.

Проективное преобразование определяется соотношениями:

$$\varrho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$\varrho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$\varrho x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,$$

где $x_1:x_2:x_3$ и $x_1':x_2':x_3'$ — координаты соответствующих точек в этом проективном преобразовании и определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Множество всех проективных преобразований проективной плоскости образует группу.

Формулы проективного преобразования собственных точек проективной плоскости в аффинных координатах принимают вид:

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \qquad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}.$$

Проективное преобразование плоскости в эту же плоскость или в какую-либо другую плоскость определяется заданием четырех пар соответственных точек.

Пусть заданы четыре пары соответственных точек:

$$A(a_1:a_2:a_3) \longrightarrow A'(a_1':a_2':a_3'),$$
$$B(b_1:b_2:b_3) \longrightarrow B'(b_1':b_2':b_3'),$$
$$C(c_1:c_2:c_3) \longrightarrow C'(c_1':c_2':c_3'),$$
$$D(d_1:d_2:d_3) \longrightarrow D'(d_1':d_2':d_3').$$

Пусть $u=0$, $v=0$, $w=0$, $u'=0$, $v'=0$, $w'=0$ — уравнения прямых BC, CA, AB, $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$; тогда уравнения

$$u' = pu, \qquad v' = qv, \qquad w' = rw$$

определяют проективное преобразование, переводящее точки A, B, C соответственно в точки A', B', C'. Подставляя в левые части этих уравнений координаты точки D', а в правые — координаты D, найдем p, q, r.

Коррелятивным соответствием, или *корреляцией*, в проективной плоскости называется взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек проективной плоскости и множеством всех прямых этой плоскости. Корреляция называется *линейной*, если трем любым точкам, принадлежащим одной прямой, соответствуют три прямые, проходящие через одну точку.

Линейная корреляция называется *полярнтетом*, если любая точка A плоскости переходит в прямую a' и точка B, лежащая на прямой a', переходит в прямую b', проходящую через точку A.

Аналитически линейная корреляция определяется уравнениями:

$$\begin{aligned}
\rho' u_1' &= \omega_{11}x_1 + \omega_{12}x_2 + \omega_{13}x_3, & \rho u_1 &= \omega_{11}x_1' + \omega_{21}x_2' + \omega_{31}x_3',\\
\rho' u_2' &= \omega_{21}x_1 + \omega_{22}x_2 + \omega_{23}x_3, \quad \text{или} & \rho u_2 &= \omega_{12}x_1' + \omega_{22}x_2' + \omega_{32}x_3',\\
\rho' u_3' &= \omega_{31}x_1 + \omega_{32}x_2 + \omega_{33}x_3, & \rho u_3 &= \omega_{13}x_1' + \omega_{23}x_2' + \omega_{33}x_3',
\end{aligned}$$

где

$$\begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

и $x_1:x_2:x_3$ — координаты любой точки плоскости, а $u_1':u_2':u_3'$ — координаты соответствующей прямой.

Линейная корреляция будет поляритетом тогда и только тогда, когда матрица (ω_{ik}) симметрическая.

Линии второго порядка на проективной плоскости. Общее уравнение линии второго порядка в проективных координатах имеет вид:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 0. \qquad (1)$$

Преобразованием проективной системы координат это уравнение может быть приведено к одному из следующих пяти видов *):

1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ — мнимая линия;
2) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ — действительная линия;
3) $x_1^2 - x_2^2 = 0$ — две действительные прямые;
4) $x_1^2 + x_2^2 = 0$ — две мнимые прямые;
5) $x_1^2 = 0$ — две совпадающие прямые.

Множество всех линий второго порядка на проективной плоскости можно разбить на классы следующим образом: две линии второго порядка относятся к одному проективному классу, если существует проективное преобразование, переводящее одну из этих линий в другую.

Две линии второго порядка относятся к различным проективным классам, если не существует проективного преобразования, переводящего одну из этих линий в другую.

Такое разбиение множества всех линий на классы называется проективной классификацией линий второго порядка.

*) Возможно, что придется еще умножить обе части уравнения на -1.

Множество всех линий второго порядка распадается на пять проективных классов:

1) мнимые линии;
2) действительные не распадающиеся линии второго порядка;
3) пары мнимых прямых;
4) пары действительных прямых;
5) совпадающие прямые.

Действительная нераспадающаяся линия второго порядка на проективной плоскости есть либо эллипс, либо парабола, дополненная несобственной точкой ее диаметров, либо гипербола, дополненная несобственными точками ее асимптот.

Необходимым и достаточным условием распадения линии второго порядка на две прямые является соотношение

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Полярой точки $P(x_1^0:x_2^0:x_3^0)$ относительно линии второго порядка (1) называется геометрическое место точек $M(x_1:x_2:x_3)$, гармонически сопряженных точке P относительно точек пересечения M' и M'' линии второго порядка с прямыми, проходящими через точку P, называемую полюсом.

Поляра — прямая линия; ее уравнение имеет вид:

$$(a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0)\,x_1 + (a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}x_3^0)\,x_2 + \\ + (a_{31}x_1^0 + a_{32}x_2^0 + a_{33}x_3^0)\,x_3 = 0,$$

или

$$F_{x_1^0}x_1 + F_{x_2^0}x_2 + F_{x_3^0}x_3 = 0,$$

где $F_{x_1^0}$, $F_{x_2^0}$, $F_{x_3^0}$ — половины частных производных от левой части уравнения (1) соответственно по x_1, x_2, x_3, вычисленные для значений x_1^0, x_2^0, x_3^0.

Две точки $M(y_1:y_2:y_3)$ и $N(z_1:z_2:z_3)$ называются полярно сопряженными относительно линии второго порядка, если каждая из них лежит на поляре другой относительно этой линии.

Условие сопряженности имеет вид:

$$z_1F_{y_1} + z_2F_{y_2} + z_3F_{y_3} = 0, \tag{3}$$

или

$$y_1F_{z_1} + y_2F_{z_2} + y_3F_{z_3} = 0.$$

Две прямые $m(v_1:v_2:v_3)$ и $n(w_1:w_2:w_3)$ полярно сопряжены относительно линии второго порядка, если каждая из них проходит через полюс другой.

Касательная к линии второго порядка (1) в точке $P(x_1^0:x_2^0:x_3^0)$ определяется уравнением

$$(a_{11}x_1^0+a_{12}x_2^0+a_{13}x_3^0)\,x_1+(a_{21}x_1^0+a_{22}x_2^0+a_{23}x_3^0)\,x_2+\\+(a_{31}x_1^0+a_{32}x_2^0+a_{33}x_3^0)\,x_3=0. \qquad (4)$$

Точка M называется внутренней точкой действительной нераспадающейся линии второго порядка, если любая прямая, проходящая через точку M, пересекает линию в двух различных точках.

Точка M называется внешней точкой линии второго порядка, если существует прямая, проходящая через эту точку, не имеющая ни одной общей точки с рассматриваемой линией второго порядка.

Для того чтобы точка M была внешней точкой действительной невырождающейся линии второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы из нее можно было провести к этой линии две различные действительные касательные.

Уравнение пары касательных, проведенных из точки $M(x_1^0:x_2^0:x_3^0)$ к линии (1), будет иметь вид:

$$2F_0\cdot 2F-P^2=0,$$

где

$$2F=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1,$$

$$2F_0=a_{11}x_1^{0^2}+a_{22}x_2^{0^2}+a_{33}x_3^{0^2}+2a_{12}x_1^0x_2^0+2a_{23}x_2^0x_3^0+2a_{31}x_3^0x_1^0,$$

$$P=(a_{11}x_1^0+a_{12}x_2^0+a_{13}x_3^0)\,x_1+(a_{21}x_1^0+a_{22}x_2^0+a_{23}x_3^0)\,x_2+\\+(a_{31}x_1^0+a_{32}x_2^0+a_{33}x_3^0)\,x_3.$$

Для того чтобы точка $M(x_1:x_2:x_3)$ была внутренней точкой действительной невырождающейся линии второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}(a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1)>0.$$

Диаметр линии второго порядка есть поляра несобственной точки сопряженных ему хорд, поэтому сопряженные диаметры являются полярно сопряженными прямыми.

Если линия центральная, то несобственная прямая есть поляра центра.

Асимптоты линии второго порядка являются касательными к этой линии в точках ее пересечения с несобственной прямой.

Общее уравнение линии второго класса в тангенциальных координатах имеет вид:

$$A_{11}u_1^2+2A_{12}u_1u_2+A_{22}u_2^2+2A_{23}u_2u_3+A_{33}u_3^2+2A_{31}u_3u_1=0. \qquad (5)$$

Если нераспадающаяся линия второго порядка задана уравнением (1), то координаты $u_1:u_2:u_3$ касательных к этой линии удовлетворяют уравнению

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

или уравнению (5), в котором A_{ik} суть алгебраические дополнения к элементам a_{ik} в определителе

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Если через 2Φ обозначить левую часть уравнения (5), то координаты $x_1:x_2:x_3$ точки прикосновения касательной с координатами $u_1:u_2:u_3$ определяются по формуле

$$x_1:x_2:x_3 = \Phi_{u_1}:\Phi_{u_2}:\Phi_{u_3}.$$

Уравнение $S-\lambda S'=0$ (пучок), где S и S' — левые части уравнений двух различных линий второго порядка, определяет линию второго порядка, проходящую через точки пересечения линий $S=0$ и $S'=0$.

Если каждая из двух линий состоит из двух прямых $S=uv$, $S'=wt$, то уравнение линии второго порядка, проходящей через точки пересечения прямых $A_1(u=0,\ w=0)$, $A_2(w=0,\ v=0)$, $A_3(v=0,\ t=0)$, $A_4(u=0,\ t=0)$, имеет вид $uv-\lambda wt=0$.

§ 1. Проективная прямая

912. На проективной прямой заданы точки: $O_1(1:0)$, $E(1:1)$ и $O_2(0:1)$. Построить точки: $A(2:3)$, $B(-2:3)$, $C(1:-1)$, $D(1:4)$, $K(-4:1)$.

913. Выбрав на прямой произвольно две различные собственные фундаментальные точки $O_1(1:0)$ и $E(1:1)$ и считая точку $O_2(0:1)$ несобственной, построить точки: $A(1:2)$, $B(-3:2)$, $C(-1:1)$, $D(2:1)$, $F(2:-1)$.

914. Выбрав на прямой произвольно две различные собственные фундаментальные точки $O_1(1:0)$ и $O_2(0:1)$ и считая фундаментальную точку $E(1:1)$ несобственной, построить точки $A(1:2)$, $B(-3:2)$, $C(-1:1)$, $D(1:4)$, $F(3:-4)$, $G(4:-1)$.

915. Доказать, что если фундаментальная точка $O_1(1:0)$ является несобственной точкой прямой, то, принимая за начало декартовой системы точку $O_2(0:1)$, а за единичную точку — точку $E(1:1)$, будем иметь: $x = \frac{x_1}{x_2}$.

916. Построить фундаментальную точку $E(1:1)$ прямой, если на ней даны две собственные фундаментальные точки O_1 и O_2 и собственная точка $(2:1)$.

917. Построить фундаментальную точку $E(1:1)$ прямой, если на ней даны две фундаментальные точки O_1 и O_2 и известно, что несобственная точка имеет координаты $(-2:3)$.

918. Точка $E(1:1)$ — несобственная точка прямой. Каковы координаты середины отрезка O_1O_2?

919. Точка $O_1(1:0)$ — несобственная точка прямой. Каковы координаты середины отрезка O_2E?

920. Точка $E(1:1)$ — несобственная точка прямой. Каковы проективные координаты точки M, делящей отрезок O_1O_2 в отношении λ?

921. Принимая точки $O_1(-4)$, $O_2(2)$, $E(3)$, заданные по отношению к декартовой системе координат, за фундаментальные точки проективной системы, найти связь между проективными координатами $x_1:x_2$ точки M и ее декартовой координатой x.

922. Точка $E(1:1)$ — середина отрезка прямой с концами $O_1(1:0)$ и $O_2(0:1)$. Каковы координаты несобственной точки этой прямой?

923. На прямой введена декартова система координат. Принимая начало координат O этой системы за фундаментальную точку $O_1(1:0)$, единичную точку $e(1)$ за фундаментальную точку $O_2(0:1)$ и несобственную точку за фундаментальную точку $E(1:1)$, найти связь между координатой x произвольной точки M и ее проективными координатами.

924. За фундаментальные точки проективной прямой принимаются точки $O_1(a_1:a_2)$, $E(b_1:b_2)$ и $O_2(c_1:c_2)$. Найти соотношения, определяющие преобразование координатной системы.

925. Доказать аналитически, что при проективном преобразовании прямой, оставляющем на месте несобственную точку, совокупность собственных точек прямой подвергается аффинному преобразованию.

926. Найти все проективные преобразования, оставляющие неподвижными фундаментальные точки O_1 и O_2, и доказать, что множество всех таких преобразований образует группу.

927. Доказать, что если проективное преобразование $\varrho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$, $\varrho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$ сохраняет на прямой три попарно различные точки, то оно сводится к единичному.

928. Как запишется проективное преобразование $\varrho x_1' = x_1 - 2x_2$, $\varrho x_2' = 3x_1 + x_2$, если за новые фундаментальные точки принять следующие: $O_1^*(2:3)$, $O_2^*(-1:1)$ и $E^*(5:1)$?

929*. Найти общий вид всех проективных преобразований, оставляющих на месте точку $O_1(1:0)$.

930. Найти неподвижные точки проективного преобразования $\varrho x_1' = x_1 + 2x_2$, $\varrho x_2' = 4x_1 + 3x_2$.

931*. Найти все проективные преобразования, при которых точки $(a:b)$ и $(c:d)$ неподвижны.

932. Доказать, что проективное преобразование $\varrho x_1' = 3x_1 - 5x_2$, $\varrho x_2' = x_1 + x_2$ не имеет неподвижных точек.

933. Найти все проективные преобразования, каждое из которых точки $(a_1:a_2)$ и $(b_1:b_2)$ переводит соответственно в точки $(a_1':a_2')$ и $(b_1':b_2')$.

934. Доказать, что следующие множества проективных преобразований образуют группу:

1) $\varrho x_1' = ax_1 - bx_2$, $\varrho x_2' = bx_1 + ax_2$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$;

2) $\varrho x_1' = x_1 + kx_2$, $\varrho x_2' = x_2$;

3) $\varrho x_1' = x_1$, $\varrho x_2' = kx_2$;

4) $\varrho x_1' = ax_1$, $\varrho x_2' = bx_2$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$.

935*. Найти все проективные преобразования прямой, квадрат каждого из которых равен единичному проективному преобразованию.

936. Собственная фундаментальная точка $E(1:1)$ прямой делит отрезок O_1O_2, ограниченный собственными фундаментальными точками $O_1(1:0)$ и $O_2(0:1)$, в отношении λ. Каковы координаты несобственной точки прямой?

937. На прямой даны три точки $A(2:1)$, $B(2:-1)$, $C(1:-1)$, причем точка B служит серединой отрезка. Построить фундаментальные точки.

938. Найти ангармоническое отношение $(ABCD)$ четырех точек A, B, C, D проективной прямой в каждом из следующих случаев:

1) $A(3:1)$, $B(2:5)$, $C(1:0)$, $D(-2:1)$;

2) $A(1:3)$, $B(5:-2)$, $C(1:-1)$, $D(2:3)$;

3) $A(-1:1)$, $B(2:3)$, $C(7:11)$, $D(1:-1)$.

939. Выбрав на прямой две произвольные различные точки $A(-1:1)$, $B(3:4)$ и приписав несобственной точке координаты $(2:1)$, построить фундаментальные точки.

940. Выбрав на прямой три произвольные и попарно различные точки $A(1:3)$, $B(2:1)$, $C(-1:4)$, построить точку $D(3:-1)$.

941*. На проективной прямой даны три точки: $A(1:2)$, $B(-1:1)$, $C(3:5)$. Кроме того, дано $(ABCD)=\frac{1}{2}$. Найти проективные координаты точки D.

942. Выбрав на прямой две произвольные различные точки $A(1:-1)$ и $B(2:1)$ и приписав несобственной точке этой прямой координаты $(6:1)$, построить точку $C(1:2)$.

943. В декартовой системе координат на прямой даны три точки $A(-2)$, $B(3)$, $C(-1)$. Принимая эти точки соответственно за фундаментальные точки O_1, O_2 и E проективной системы координат на прямой, найти проективные координаты точек $D(5)$, $F(-7)$, $G(4)$, $H(2)$, $O(0)$ и $E(1)$.

§ 2. Проективная плоскость

944. Сторонами базисного треугольника проективной системы координат служат прямые $x-4=0$, $y-3=0$, $3x+4y-12=0$, а единичной точкой — точка $E(3, 2)$. Найти: 1) проективные координаты точки M, декартовы координаты которой $(1, 1)$; 2) декартовы координаты точки N, проективные координаты которой $(4:3:-6)$; 3) проективные координаты несобственной точки оси абсцисс; 4) однородные координаты точки P, проективные координаты которой $(5:5:-7)$.

945. Сторонами O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 базисного треугольника системы проективных координат служат прямые $y=2$, ось Oy и ось Ox, а единичной точкой — точка $E(1, 1)$. Найти в этой системе координат центр пучка прямых, параллельных оси Oy.

946. Вершины базисного треугольника и единичная точка системы проективных координат O_1, O_2, O_3, E имеют следующие декартовы координаты $O_1(1, 1)$, $O_2(-1, 1)$, $O_3(0, 0)$, $E\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Найти в этой системе уравнения осей координат, а также уравнение несобственной прямой.

947. Даны две точки $A(3:0:-1)$, $B(-1:3:0)$ своими однородными координатами. 1) Написать уравнение прямой, проходящей через эти две точки; 2) составить параметрические уравнения этой прямой; 3) найти значения параметров, соответствующих несобственной точке этой прямой, и координаты этой несобственной точки.

948. Какая особенность в расположении двух прямых соответствует тому факту, что два коэффициента уравнения одной прямой пропорциональны соответствующим коэффициентам уравнения другой прямой?

949. Составить задачу, двойственную предыдущей. Дать решение этой задачи.

950. Относительно проективной системы координат даны две прямые $2x_1+3x_2-6x_3=0$, $x_1+3x_3=0$. Найти: 1) точку пересечения данных прямых; 2) уравнение пучка прямых, содержащего данные прямые; 3) прямую пучка, проходящую через точку $O_1(1:0:0)$.

951. Выбрав на плоскости произвольно систему точек O_1, O_2, O_3, E проективной системы координат, построить точки $A(1:2:0)$, $B(0:-3:1)$, $C(4:0:-1)$, $D(1:2:2)$, $F(1:2:3)$, $G(1:2:-3)$, $H(3:2:-4)$.

952. Выбрав на плоскости произвольно систему точек O_1, O_2, O_3, E проективной системы координат, построить прямые $a(1:2:0)$, $b(0:-3:1)$, $c(4:0:-1)$, $d(1:2:2)$, $f(1:2:3)$, $g(1:2:-3)$, $h(3:2:-4)$.

953. Точки O_1, O_2, O_3, E определяют проективную систему координат. Сколько из них могут быть несобственными?

954. Построить точку $A(1:2:3)$ плоскости, если три фундаментальные точки $O_1(1:0:0)$, $O_2(0:1:0)$, $O_3(0:0:1)$ собственные, а точка $E(1:1:1)$ несобственная (в остальном выбор этих точек произволен).

955. Построить прямую $a(9:-2:3)$ плоскости, если точки $O_1(1:0:0)$, $O_2(0:1:0)$ несобственные.

956. Построить точку $A(1:4:-1)$ плоскости, если точки $O_1(1:0:0)$ и $E(1:1:1)$ несобственные.

957. Построить прямую $e(1:1:1)$ плоскости, выбирая все точки O_1, O_2, O_3, E проективной системы собственными.

958. Фундаментальные точки $O_1(1:0:0)$, $O_2(0:1:0)$, $O_3(0:0:1)$ проективной системы координат в плоскости собственные. Единичная точка $E(1:1:1)$ служит пересечением медиан треугольника $O_1O_2O_3$. Найти координаты несобственных точек сторон треугольника и прямых O_1E, O_2E, O_3E.

959. Составить уравнение несобственной прямой плоскости, если за точку $E(1:1:1)$ принимается точка пересечения медиан треугольника $O_1O_2O_3$.

960*. Составить уравнение несобственной прямой плоскости, если за точку $E(1:1:1)$ принимается точка пересечения биссектрис внутренних углов треугольника $O_1O_2O_3$.

961*. Составить уравнение несобственной прямой плоскости, если за точку $E(1:1:1)$ принимается точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$.

962. Найти координаты и уравнение прямой, проходящей через точки $(1:2:-1)$, $(3:5:-2)$.

963. Найти координаты и уравнение точки пересечения прямых $(1:-1:2)$ и $(2:5:4)$.

964. Доказать, что точки $(5:1:3)$, $(-2:4:-3)$, $(8:6:3)$ лежат на одной прямой. Составить уравнение прямой, на которой они все расположены.

965. Доказать, что три прямые $(1:1:0)$, $(2:-1:3)$, $(5:2:3)$ принадлежат одному пучку. Найти координаты и уравнение центра этого пучка.

966. Даны четыре точки $A(1:2:3)$, $B(-1:2:2)$, $C(3:1:5)$, $D(2:0:1)$. Найти координаты и уравнение точки пересечения прямых AB и CD.

967. Даны четыре прямые $a(1:-1:3)$, $b(2:0:1)$, $c(-1:1:0)$, $d(1:1:1)$. Найти координаты и уравнение прямой, проходящей через точки пересечения пар прямых a, b и c, d.

968. Найти координаты точки встречи прямой, проходящей через две точки $A(3:1:5)$ и $B(-2:0:7)$, с прямой $7x_1-2x_2+4x_3=0$.

969. Найти координаты и уравнение прямой, проходящей через точки пересечения двух прямых $a(1:0:1)$, $b(3:1:-2)$ и точку $3u_1+5u_2-u_3=0$.

970. Найти точки встречи прямой $3x_1-2x_2+5x_3=0$ с фундаментальными прямыми O_1O_2, O_2O_3 и O_3O_1.

971. Составить уравнения и найти координаты прямых, соединяющих точку $A(3:-1:2)$ с точками O_1, O_2, O_3, E.

972. Найти уравнения и координаты прямых O_1E, O_2E, O_3E.

973. Пусть E_1 — точка встречи прямых O_1E и O_2O_3, E_2 — точка встречи прямых O_2E и O_3O_1. Найти точку встречи прямых O_1O_2 и E_1E_2.

974*. Даны три точки $A((1+\lambda):1:1)$, $B(1:(1+\mu):1)$, $C(1:1:(1+\nu))$ ($\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$). Доказать, что каждая тройка точек: 1) E, O_1, A; 2) E, O_2, B; 3) E, O_3, C, лежит на одной прямой. Найти точки встречи прямых O_1O_2 и AB, O_3O_2 и BC, O_3O_1 и CA и доказать, что эти три точки также лежат на прямой. Сделать чертеж.

975. Какой вид имеют координаты прямой, проходящей через одну из фундаментальных точек O_1, O_2 или O_3?

976. Доказать, что координаты любой точки прямой O_1E могут быть представлены в виде $(\lambda:t:t)$.

977*. Даны три точки A, B и C, такие, что точки пересечения пар прямых O_1O_2 и AB, O_2O_3 и BC, O_3O_1 и CA лежат на одной прямой. Доказать, что прямые O_1A, O_2B, O_3C принадлежат одному пучку. Верно ли обратное положение?

978*. На прямой O_1O_3 взяты две произвольные различные точки A и B, отличные от точек O_1 и O_3, на прямой O_1O_2 взяты две произвольные различные точки C и D, отличные от точек O_1 и O_2. Доказать, что точки пересечения пар прямых O_2O_3 и BC, O_2A и DB, O_3D и CA коллинеарны. Сделать чертеж.

979*. Через две различные точки P и Q проективной плоскости проведены прямые: через точку P — прямые *1*, *3*, *5*; через точку Q — прямые *2*, *4*, *6*. Будем через (i k) обозначать точку пересечения прямых i и k. Доказать, что прямые, проходящие через пары точек (*1* *2*) и (*4* *5*), (*2* *3*) и (*5* *6*), (*3* *4*) и (*6* *1*), принадлежат одному пучку. Сделать чертеж.

980. Сформулировать и доказать предложение, двойственное предложению предыдущей задачи.

981. Даны четыре точки $A(1:1:2)$, $B(3:-1:2)$, $C(11:-1:10)$, $D(3:7:10)$. Доказать, что они лежат на одной прямой. Найти ангармоническое отношение $(ABCD)$.

982. Доказать, что четыре прямые $a(0:1:-1)$, $b(1:2:-1)$, $c(1:1:0)$, $d(4:9:-5)$ принадлежат одному пучку, и найти ангармоническое отношение $(abcd)$.

983*. Пусть E_1 — точка встречи прямых O_1E и O_2O_3, E_3 — точка встречи прямых O_3E и O_1O_2, P — точка встречи прямых O_2E и E_1E_3, Q — точка встречи прямых E_1E_3 и O_1O_3. Найти координаты точек E_1, E_3, P, Q и ангармоническое отношение (E_1E_3PQ).

984. Даны три точки $A(1:2:3)$, $B(-3:2:4)$, $C(-2:4:7)$. Доказать, что они лежат на одной прямой, и найти к ним четвертую гармоническую $(ABCD)=-1$.

985. Даны три прямые $a(1:2:1)$, $b(3:-1:2)$, $c(5:3:4)$. Доказать, что они принадлежат одному пучку, и найти четвертую прямую d, принадлежащую тому же пучку, если известно, что $(abcd)=-1$.

986*. Пусть A — точка встречи прямых O_1O_2 и EO_3, B — точка встречи прямых O_2O_3 и O_1E, C — точка встречи прямых AB и O_1O_3, D — точка встречи прямых AB и O_2E. Найти координаты прямых O_2A, O_2B, O_2C, O_2D и их ангармоническое отношение $(O_2A,\ O_2B,\ O_2C,\ O_2D)$.

987*. В проективной плоскости дан треугольник ABC и точка S, не лежащая ни на одной из его сторон. Пусть P, Q и R — точки встречи прямых AS, BS и CS соответственно с прямыми BC, CA и AB, а L, M, N — точки, четвертые гармонические к тройкам BCP, CAQ и ABR, т. е. $(BCPL)=(CAQM)=(ABRN)=-1$. Доказать, что точки L, M, N находятся на одной прямой.

988. Сформулировать и доказать предложение, двойственное предложению предыдущей задачи.

989. Сформулировать и доказать предложение, обратное предложению задачи 987.

990. Сформулировать и доказать предложение, обратное предложению задачи 988.

991*. Найти прямую, четвертую гармоническую к боковым сторонам трапеции и прямой, соединяющей точку пересечения диагоналей с точкой пересечения боковых сторон.

992. Найти прямую, четвертую гармоническую к двум катетам и высоте, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу прямоугольного треугольника.

993. Найти четвертую гармоническую к двум сторонам угла и его биссектрисе.

994. Найти прямую, четвертую гармоническую к двум сторонам треугольника и медиане, проведенной к третьей стороне.

995. В проективной плоскости даны три коллинеарные точки $A(1:2:5)$, $B(1:0:3)$, $C(-1:2:-1)$. Известно ангармоническое отношение $(ABCD)=5$. Найти координаты точки D.

996. В проективной плоскости даны три коллинеарные точки

$$A(x_1:x_2:x_3),\quad B(y_1:y_2:y_3),$$
$$C((\alpha x_1+\beta y_1):(\alpha x_2+\beta y_2):(\alpha x_3+\beta y_3)).$$

Дано ангармоническое отношение $(ABCD)=\lambda$. Найти координаты точки D.

997. Доказать, что если фундаментальные точки O_1 и O_2 проективной системы координат плоскости несобственные, то точка $M(x_1:x_2:x_3)$ при $x_3 \neq 0$ может быть построена так: надо взять декартову аффинную систему с началом координат в точке O_3 и с единичной точкой E и построить в ней точку $\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$; это и будет точка M. Каково будет уравнение несобственной прямой в указанной системе?

998. Найти связь между проективными координатами $(x_1:x_2:x_3)$ точки M проективно аффинной плоскости и ее однородными (аффинными) координатами $(x:y:z)$, если за оси Ox и Oy аффинной системы принимаются соответственно прямые O_1O_2 и O_1O_3 (точка O_1 собственная), а за единичную точку декартовой аффинной системы координат принимается точка $E(1:1:1)$. Уравнение несобственной прямой в проективной системе координат: $x_1+x_2+2x_3=0$.

999. По отношению к аффинной системе координат Oxy дана точка $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$. Найти связь между аффинными (однородными) координатами $(x:y:z)$ точки M и ее проективными координатами $(x_1:x_2:x_3)$, если за фундаментальные точки O_1, O_2, O_3 и E проективной системы координат принимаются соответственно точки O, E_1, E_2, S.

1000. Вершины треугольника приняты за фундаментальные точки O_1, O_2, O_3 проективной системы координат проективно-аффинной плоскости. Точка пересечения медиан этого треугольника имеет координаты $S(1:2:3)$. Построить фундаментальную точку $E(1:1:1)$.

1001. Доказать, что точки $(1:2:1)$, $(3:-1:4)$, $(4:1:5)$ и $(7:0:9)$ коллинеарны. Выбрав в проективно аффинной плоскости произвольно три первых точки (коллинеарных и попарно различных), построить четвертую.

1002. В аффинной системе координат даны четыре точки $A(1, 2)$, $B(-1, 2)$, $C(2, 3)$, $D(-3, 4)$. Принимая их соответственно за фундаментальные точки O_1, O_2, O_3 и E проективной системы координат, найти проективные координаты точек $F(-2, 0)$ и $G(5, 3)$.

1003. Принимая начало координат проективно аффинной системы координат за фундаментальную точку $O_3(0:0:1)$ и приписывая точкам E_1, E_2 и E аффинной системы проективные координаты, соответственно равные $1:0:1$, $0:1:1$ и $1:1:1$, найти связь между декартовыми аффинными координатами x, y произвольной собственной точки и ее проективными координатами $x_1:x_2:x_3$.

1004. Составить уравнения прямых в аффинной системе координат, если их проективные координаты в проективной системе, определяемой точками $O_1(2, 3)$, $O_2(-3, 1)$, $O_3(1, 0)$, $E(2, 5)$, таковы: $(1:1:1)$, $(2:5:-1)$, $(0:1:-1)$.

1005. Относительно некоторой системы проективных координат O_1, O_2, O_3, E даны вершины базисного треугольника и единичная точка другой системы: $O_1'(4:1:1)$, $O_2'(4:4:1)$, $O_3'(0:4:1)$, $E'(2:1:1)$. Найти формулы, выражающие координаты произвольной точки относительно первой системы через ее координаты во второй системе.

1006. Найти связь между старыми и новыми координатами точки и прямой, если за новые фундаментальные точки O_1', O_2', O_3' и E' берутся соответственно точки O_3, E, O_1 и O_2.

1007. Найти связь между старыми и новыми координатами прямой, если за новые фундаментальные точки принимаются следующие: $O_1'(2:1:0)$, $O_2'(3:0:1)$, $O_3'(1:2:4)$, $E'(1:-1:4)$.

1008. Найти связь между новыми и старыми проективными координатами точки, если за новые фундаментальные точки O_1', O_2', O_3' и за новую единичную точку E' принимаются соответственно точки O_2, O_3, O_1 и E.

1009. Найти связь между старыми и новыми проективными координатами точки, если за новые фундаментальные точки принимаются следующие: $O_1^*(2:1:1)$, $O_2^*(-1:2:3)$, $O_3^*(3:4:-1)$, а за новую единичную точку — точка $E^*(1:4:5)$.

1010. В какие точки переходят точки $A(1:2:3)$, $B(2:-1:4)$, $C(-1:0:1)$ при проективном преобразовании

$$x_1':x_2':x_3'=$$
$$=(2x_1-3x_2+x_3):(3x_1-x_2+4x_3):(3x_1-2x_2+5x_3)?$$

1011. В какие точки переходят фундаментальные точки и единичная при проективном преобразовании

$$x_1':x_2':x_3'=(x_1+x_2-x_3):(x_1-4x_2):(x_1+x_3)?$$

1012. В какие прямые переходят прямые $a(1:3:2)$, $b(-1:2:5)$, $c(0:4:-3)$ при проективном преобразовании

$$x_1':x_2':x_3'=(x_1-2x_2+x_3):(4x_1-2x_2+3x_3):(x_1-x_2)?$$

1013. Как преобразуются координаты прямой в проективном преобразовании

$$x_1':x_2':x_3'=(x_1+x_2+x_3):x_3:x_2?$$

1014. В какие прямые переходят фундаментальные прямые в проективном преобразовании

$$x_1':x_2':x_3'=(x_1+2x_2-4x_3):(2x_1-3x_2+5x_3):(2x_1-2x_2+x_3)?$$

1015. В какие точки переходят точки $A(1:-2:3)$ и $B(2:-1:4)$ при проективном преобразовании

$$u_1':u_2':u_3'=(2u_1-u_2+u_3):(u_1-4u_2+u_3):(3u_1+2u_2-3u_3)?$$

1016. В какие прямые переходят прямые $a(1:-2:4)$ и $b(2:5:-1)$ при проективном преобразовании

$$u_1':u_2':u_3'=(3u_1-2u_2):(2u_1-u_3):(u_2+u_3)?$$

1017*. Дано преобразование координат

$$x_1':x_2':x_3'=(x_1+2x_2-x_3):(x_1-2x_2+4x_3):(3x_1+x_2-2x_3).$$

Найти выражения старых координат точки через новые. Найти выражения новых координат прямой через старые и старых координат прямой через новые в указанном преобразовании координат.

1018. Найти проективное преобразование, которое оставляет вершины базисного треугольника неподвижными, а единичную точку E переводит в точку $E'(c_1:c_2:c_3)$.

1019. Определить проективное преобразование, переводящее вершину O_1 базисного треугольника в вершину O_2, вершину O_2 — в вершину O_3 и вершину O_3 — в вершину O_1 и оставляющее на месте единичную точку.

1020. Определить проективное преобразование, оставляющее на месте начало координат и переводящее несобственную точку оси Ox в точку $A_1'(1, 0)$, несобственную точку оси Oy — в точку $A_2'(0, 1)$. Единичная точка по условию также остается на месте.

1021. Найти такое проективное преобразование, которое оставляет на месте вершину $O_1(1:0:0)$ и все точки стороны O_2O_3 базисного треугольника и переводит произвольную точку $M(x_1:x_2:x_3)$ в точку $M'(x_1':x_2':x_3')$, лежащую на прямой O_1M, и четвертую гармоническую к трем точкам O_1, B, M, где B — точка пересечения прямой O_1M со стороной O_2O_3.

1022. Найти общий вид тех проективных преобразований, которые переводят прямую $x_3=0$ в ту же прямую.

1023. Найти такое проективное преобразование, которое оставляет на месте все точки прямой $x_3=0$.

1024. Найти такое проективное преобразование, которое точку $O_3(0:0:1)$ оставляет на месте, а прямые O_3O_1 $(x_2=0)$ и O_3O_2 $(x_1=0)$ переводит в те же прямые.

1025*. Определить проективное преобразование, которое переводит прямые $x+y+2=0$, $x-y-4=0$, $x-4y+3=0$ соответственно в прямые $x'+3y'+2=0$, $x'-3y'+4=0$, $x'+2y'-3=0$ и точку $(0, 0)$ в точку $(0, 0)$.

1026. Определить проективное преобразование, которое прямые $u_1=0$, $u_2=0$, $u_3=0$ переводит в прямые $u_1'=0$, $u_2'=0$, $u_3'=0$ и точку M_0 в точку M_0'.

1027*. Определить проективное преобразование, которое точки $A_1(0, 1)$, $A_2(0, -1)$, $A_3(1, 0)$, $A_4(2, 0)$ переводит соответственно в точки $A_1'(0, 1)$, $A_2'(0, -1)$, $A_3'(a, 0)$, $A_4'(b, 0)$.

1028. Вершины базисного треугольника $O_1O_2O_3$ проективной системы координат являются вершинами треугольника, а единичная точка — точкой пересечения медиан. Определить такое проективное преобразование, которое вершины базисного треугольника переводит в середины противоположных сторон, а единичную точку переводит в себя же.

1029. Относительно системы однородных координат проективное преобразование задано соотношениями

$$\varrho x_1' = x_1 - 2x_2 + 3x_3, \quad \varrho x_2' = 2x_1 + x_2 + 2x_3,$$
$$\varrho x_3' = 4x_1 - 2x_2 + 5x_3.$$

Найти несобственные точки плоскости, которые переходят при этом преобразовании друг в друга.

1030. Дано преобразование координат

$$u_1:u_2:u_3 = (2u_1' - 3u_2' + 4u_3'):(3u_1' + u_2' - u_3'):(-u_1' + 2u_2' - u_3').$$

Найти выражения новых координат прямой через старые в этом преобразовании. Найти выражения старых координат точки через новые координаты и выражения для новых координат точки через старые (в данном преобразовании).

1031. Даны два проективных преобразования

$$\Pi_1:\quad x_1':x_2':x_3'=(x_1+x_2):(x_1-2x_2+3x_3):(2x_1-3x_2+4x_3),$$

$$\Pi_2:\quad x_1':x_2':x_3'=$$

$$=(x_1-2x_2+4x_3):(2x_1-3x_2+5x_3):(2x_1-x_2+x_3).$$

Найти проективные преобразования Π_1^{-1}, $\Pi_2\Pi_1$, $\Pi_1\Pi_2$.

1032. Найти проективное преобразование, переводящее точки $(1:0:1)$, $(2:1:1)$, $(3:-1:0)$, $(2:5:2)$ соответственно в точки $(-1:0:3)$, $(1:1:3)$, $(2:3:8)$, $(3:0:-4)$.

1033. Найти проективное преобразование, переводящее фундаментальные точки O_1, O_2, O_3 и E соответственно в точки $(2:3:8)$, $(3:-5:-9)$, $(-7:4:1)$, $(1:-1:0)$.

1034. Найти все проективные преобразования, оставляющие неподвижными фундаментальные точки $(1:0:0)$, $(0:1:0)$ и $(0:0:1)$.

1035. Дано коррелятивное соответствие

$$u_1:u_2:u_3=(3x_1-x_2+2x_3):(x_1-x_2+x_3):(x_1+2x_2-4x_3).$$

Какие прямые соответствуют точкам $A(1:2:-3)$ и $B(2:0:-5)$? Каким точкам в этом соответствии отвечают прямые $a(2:0:-7)$ и $b(0:1:-2)$? Выразить в этом соответствии $x_1:x_2:x_3$ через $u_1:u_2:u_3$.

1036. Найти линейную корреляцию, в которой точкам O_1, O_2, O_3 и E ставятся в соответствие прямые O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 и $e(1:1:1)$.

1037. Даны две линейные корреляции

$$\Lambda_1:\quad u_1:u_2:u_3=$$

$$=(3x_1-x_2+x_3):(3x_1-4x_2+5x_3):(2x_1-x_2+x_3),$$

$$\Lambda_2:\quad u_1:u_2:u_3=(4x_1-x_2):(x_1+x_2-x_3):(x_1+x_2+x_3).$$

Пусть M — произвольная точка проективной плоскости, а m — прямая (той же плоскости), соответствующая ей в линейной корреляции Λ_1; пусть M' — точка проективной плоскости, которая ставится в соответствие прямой m в линейной корреляции Λ_2. Доказать, что преобразование $M\to M'$ (множества всех точек проективной плоскости) проективно, и найти его.

1038. Найти линейную корреляцию, в которой точкам $(2:1:1)$, $(-1:0:1)$, $(3:2:5)$, $(7:1:4)$ ставятся в соответствие прямые $(4:1:2)$, $(-3:0:1)$, $(3:2:7)$, $(11:1:5)$.

1039. Найти линейную корреляцию, в которой точкам O_1, O_2, O_3, E соответствуют прямые $(1:0:1)$, $(0:1:-3)$, $(0:1:5)$, $(1:1:2)$.

1040. Найти линейную корреляцию, в которой фундаментальным прямым O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 и $e(1:1:1)$ соответствуют точки $(3:1:2)$, $(1:2:3)$, $(-1:-1:4)$, $(3:2:9)$.

1041. Дана линейная корреляция $u_1:u_2:u_3=2x_1:3x_2:-5x_3$. На прямой $x_1+x_2-2x_3=0$ найти точку, образ которой в данной корреляции (прямая) проходит через эту точку.

§ 3. Линии второго порядка в проективных координатах

1042. Определить проективный класс следующих кривых, пользуясь приведением квадратичной формы к сумме квадратов по способу Лагранжа:

1) $2x_1^2+3x_1x_2-5x_1x_3+4x_2^2+2x_2x_3-x_3^2=0$;
2) $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0$;
3) $4x_1^2+16x_1x_2-8x_1x_3+15x_2^2-22x_2x_3-5x_3^2=0$;
4) $2x_1^2-4x_1x_2+6x_1x_3+6x_2^2+4x_2x_3+7x_3^2=0$;
5) $4x_1^2+4x_1x_2-12x_1x_3+x_2^2-6x_2x_3+34x_3^2=0$.

1043*. Доказать, что каждая из линий $x^2+y^2=1$, $x^2-y^2=1$, $y^2=x$ может быть проективно преобразована одна в другую.

1044*. Найти такое проективное преобразование, которое переводит:

1) окружность $x^2+y^2=1$ в гиперболу $x^2-y^2=1$;
2) гиперболу $x^2-y^2=1$ в параболу $y=x^2$;
3) окружность $x^2+y^2=1$ в параболу $y=x^2$;
4) пару пересекающихся прямых $x^2-y^2=0$ в пару параллельных прямых $x^2-1=0$;
5) эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

1045. Найти такое проективное преобразование, которое кривую

$$a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 = 0,$$

где $a_{12} > 0$, $a_{13} > 0$, $a_{23} > 0$, приводит к виду:

$$x_1'x_2' + x_1'x_3' + x_2'x_3' = 0.$$

1046*. Найти уравнение окружности, описанной около квадрата, принимая три его вершины за вершины базисного треугольника, а четвертую — за единичную точку системы проективных координат.

1047*. Как преобразуется уравнение параболы $y^2 = 4x$, если от декартовых координат (x, y) перейти к проективным $(y_1 : y_2 : y_3)$, принимая за вершины базисного треугольника точки $(1, 0)$, $(-1, 2)$, $(-1, -2)$, а за единичную точку начало координат.

1048. Как преобразуется уравнение окружности $x^2 + y^2 = 1$, если от декартовых координат (x, y) перейти к проективным координатам $(y_1 : y_2 : y_3)$, принимая за стороны O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 базисного треугольника прямые $1 + y = 0$, $1 - y = 0$, $x = 0$, а за единичную точку — точку $E(1, 0)$?

1049. Определить такое проективное преобразование окружности $x^2 + y^2 - 25 = 0$ в ту же окружность, при котором точки $A(3, -4)$, $B(3, 4)$ и середина M хорды AB переходят в точки $A'(-4, 3)$, $B'(-4, -3)$ и середину M' хорды $A'B'$.

1050. Определить проективное преобразование, которое эллипс $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ преобразует в тот же эллипс и точки эллипса $A(0, 5)$, $B(-10, 0)$, $C(8, 3)$ соответственно в точки $A'(0, -5)$, $B'(0, 5)$, $C'(10, 0)$.

1051. Определить общий вид тех проективных преобразований, при которых гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ переходит в ту же гиперболу и касательные в вершинах к гиперболе переходят в ее асимптоты.

1052. Определить такое проективное преобразование, при котором парабола $y^2 = 4x$ переходит в ту же параболу и точки параболы $A(1, 2)$, $B(16, -8)$, $C(1, -2)$ переходят соответственно в точки $A'(1, 2)$, $B'(1, -2)$, $C'(0, 0)$.

1053. Определить такое проективное преобразование параболы $y^2 = 4x$ в окружность $x^2 + y^2 - 25 = 0$, при котором точки параболы $A(4, -4)$, $B(0, 0)$, $C(4, 4)$ переходят соответственно в точки $A'(0, -5)$, $B'(5, 0)$, $C'(0, 5)$ окружности.

1054*. Написать уравнение нераспадающейся линии второго порядка, касающейся двух сторон O_3O_1 и O_3O_2 базисного треугольника $O_1O_2O_3$ в вершинах O_1 $(1:0:0)$ и O_2 $(0:1:0)$.

1055*. Около треугольника $O_1O_2O_3$ описана линия второго порядка. В вершинах треугольника к этой линии проведены касательные. Показать, что три точки пересечения сторон треугольника с касательными в противоположных вершинах лежат на одной прямой.

1056*. Доказать, что три прямые, соединяющие вершины треугольника, описанного около линии второго порядка, с точками касания противоположных сторон, проходят через одну точку.

1057. Написать уравнение линии второго порядка, проходящей через начало координат и касающейся прямой $4x+3y+2=0$ в точке $O_1(1, -2)$, а прямой $x-y-1=0$ в точке $O_2(0, -1)$.

1058*. Написать уравнение параболы, касающейся оси Ox в точке $A(3, 0)$ и оси Oy в точке $B(0, 5)$.

1059*. Показать, что если кривая второго порядка касается двух сторон описанного около нее треугольника в серединах этих сторон, то она и третьей стороны касается в ее середине; в этом случае кривая является эллипсом и ее центр совпадает с центром тяжести треугольника.

1060*. Дан треугольник AOB: $O(0, 0)$, $A(8, 0)$, $B(0, 6)$. Написать уравнение линии второго порядка, касающейся сторон этого треугольника в их серединах.

1061*. Дан треугольник AOB: $O(0, 0)$, $A(9, 0)$, $B(0, 6)$. Написать уравнение кривой второго порядка, описанной около этого треугольника так, чтобы касательные к кривой в вершинах треугольника были параллельны его противоположным сторонам.

1062*. Найти геометрическое место центров кривых второго порядка, касающихся двух данных прямых в точках O_1 и O_2.

1063*. Показать, что если проективное преобразование, переводящее линию второго порядка в себя, оставляет неподвижными три ее точки, то и все точки этой линии остаются неподвижными.

1064*. Доказать, что если общее уравнение кривой второго порядка в проективных координатах определяет действительную невырождающуюся кривую второго порядка, то условие

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} 2F(x_1, x_2, x_3) > 0$$

необходимо и достаточно для того, чтобы точка $M(x_1:x_2:x_3)$ была внутренней.

1065*. Найти уравнение геометрического места точек, лежащих на своих образах (прямых) в линейной корреляции:

$$u_1:u_2:u_3 = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3):(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3):(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3).$$

Какой вид примет это уравнение в случае, если данная линейная корреляция является полярнтетом ($a_{ik} = a_{ki}$)?

1066. Найти поляру точки (1, 0) относительно кривой второго порядка $3x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 6y + 10 = 0$.

1067. Найти поляру точки относительно линии второго порядка в каждом из следующих случаев:

Точка	Кривая
1) $(-4,\ 2)$	$6x^2 - 5xy - 4y^2 + 3x + 2y - 1 = 0$;
2) $(6,\ 4)$	$2x^2 + 3y^2 + 6x - 2y = 0$;
3) $(2,\ 1)$	$4x^2 + 3xy - y^2 = 0$;
4) $(7,\ 5)$	$x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;
5) $(1,\ 1)$	$x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$.

1068. Определить поляру точки, принадлежащей асимптоте данной гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1069. Доказать, что если линия второго порядка распадается на пару прямых, то поляра любой точки относительно этой линии проходит через точку пересечения прямых, на которые распадается линия.

1070. Доказать, что директрисы линии второго порядка являются полярами соответствующих фокусов относительно данной линии.

1071. Доказать, что поляры любой точки плоскости относительно эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ симметричны относительно оси Ox.

1072. Если $(x_1' : x_2' : x_3')$ — полюс прямой $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ относительно линии второго порядка

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1=0,$$

то его координаты удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} \varrho u_1 &= a_{11}x_1'+a_{12}x_2'+a_{13}x_3', \\ \varrho u_2 &= a_{21}x_1'+a_{22}x_2'+a_{23}x_3', \\ \varrho u_3 &= a_{31}x_1'+a_{32}x_2'+a_{33}x_3'. \end{aligned}$$

Когда эта система оказывается неопределенной и когда несовместной?

1073. Найти полюс прямой относительно линии второго порядка в каждом из следующих случаев:

	Прямая	Кривая
1)	$3x-y+6=0$	$x^2-2xy+y^2+2x-6y=0$;
2)	$x-3=0$	$2x^2-4xy+y^2-2x+6y-3=0$;
3)	$y=0$	$4x^2+2xy-6x-10y+15=0$;
4)	$x+3y+1=0$	$3x^2+7xy+5y^2+4x+5y+1=0$;
5)	$x-y+3=0$	$2x^2+5xy-3y^2+3x+16y-5=0$.

1074. Найти полюс прямой $x+3y+1=0$ относительно кривой $x^2+6xy+y^2+6x+2y-1=0$.

1075. Через точку (2, 1) провести прямую, полярно сопряженную прямой $4x-y+30=0$ относительно линии второго порядка $x^2-6xy+9y^2-12x+14y-7=0$.

1076. На прямой $x+5y+18=0$ найти точку, полярно сопряженную с точкой $(-5, 4)$ относительно линии второго порядка $2xy-6x+4y-1=0$.

1077*. Даны две линии второго порядка: парабола $Ax^2-2y=0$ и гипербола $2xy=A$. Найти точку, полярой которой относительно обеих кривых служила бы одна и та же прямая.

1078*. Показать, что если из каждой точки прямой, перпендикулярной к оси кривой второго порядка, опустить перпендикуляр на поляру этой точки, то все такие перпендикуляры проходят через одну и ту же точку, лежащую на оси кривой.

1079*. Показать, что если две прямые проходят через фокус кривой второго порядка, то, для того чтобы они были полярно сопряженными, необходимо и достаточно, чтобы они были взаимно перпендикулярны.

1080*. Показать, что если в линию второго порядка вписать треугольник и в его вершинах провести касательные к этой линии, то точка пересечения прямых, соединяющих вершины описанного треугольника с точками касания противоположных сторон, есть полюс прямой, на которой лежат три точки пересечения сторон вписанного треугольника с касательными в противоположных вершинах его.

1081*. Дана линия второго порядка $x^2-2xy+y^2+2x-$ $-6y=0$. Из точки $(-3,\ 1)$ к этой линии проведены касательные. Найти поляру середины хорды прикосновения.

1082*. Найти кривую второго порядка, для которой ось Oy служит полярой точки $A(5,\ 0)$, а ось Ox — полярой точки $B(0,\ 3)$, зная, что она проходит через точки $M_1(1,\ 2)$, $M_2\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$.

1083. Написать уравнение линии второго порядка, описанной около треугольника AOB: $A(1,\ 1)$, $B(1,\ -1)$, $O(0,\ 0)$, при условии, что точка $P(3,\ 1)$ служит полюсом стороны AB.

1084. Определить геометрическое место полюсов данной прямой $y=kx+b$ относительно семейства софокусных линий второго порядка $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$, где $A-B=c^2$.

1085. Определить геометрическое место полюсов касательных к окружности $(x-1)^2+(y-2)^2=16$ относительно окружности $x^2+y^2=25$.

1086*. Доказать, что если фокус линии второго порядка является центром окружности, то при полярном преобразовании относительно этой окружности линия второго порядка переходит в окружность.

1087. Определить геометрическое место точек M, гармонически сопряженных основаниям перпендикуляров N, опущенных из начала координат на прямую пучка $S(-3,\ 0)$, относительно точки S и точки A пересечения прямой пучка с осью Oy.

1088. На каждой касательной к линии второго порядка $x^2-2xy-y^2-6x=0$ определить точку, гармонически сопряженную точке касания относительно точек пересечения касательной с сопряженными диаметрами, если один из диаметров параллелен оси Ox.

1089. На каждой прямой, проходящей через начало координат, берется точка, гармонически сопряженная началу системы координат относительно оснований перпендикуляров, опущенных из данных точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на эту прямую. Найти геометрическое место этих точек.

1090. Точка M перемещается по окружности $x^2+y^2-1=0$. Какую линию описывает точка пересечения касательной к окружности в этой точке с полярой той же точки относительно гиперболы $x^2-y^2=1$.

1091. На каждой прямой, проходящей через точку $S(-1, 0)$ окружности $x^2+y^2-1=0$, определить точку, гармонически сопряженную точке пересечения этой прямой с прямой $x=2$ относительно точек пересечения прямой с окружностью.

1092. Две линии второго порядка заданы уравнениями $2F=0$, $2\Phi=0$. На каждой прямой, параллельной данной $Ax+By=0$, определяются две точки, гармонически сопряженные относительно точек пересечения прямой как с первой, так и со второй кривой. Что представляет геометрическое место этих точек?

1093. Определить геометрическое место точек M, гармонически сопряженных точкам $\overline{M}(\overline{x}, \overline{y})$, лежащим на данной прямой $Ax+By+C=0$ и прямой пучка $S(x_0, y_0)$, относительно точек пересечения этих прямых пучка с линией второго порядка $2F=0$.

1094. На каждой касательной к линии второго порядка $2F=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0$ определяется точка, гармонически сопряженная точке касания относительно точек пересечения этой касательной с другой линией второго порядка $2\Phi=0$. Что представляет геометрическое место этих точек?

1095. Через точки прямой $Ax+By+C=0$ проведены параллельные прямые с угловым коэффициентом k до пересечения с линией второго порядка $2F=0$. Определить геометрическое место точек M, гармонически сопряженных точкам данной прямой относительно точек пересечения этих прямых с линией второго порядка.

1096*. Общее уравнение кривой второго порядка в проективных координатах определяет действительную невырождающуюся кривую второго порядка. При каком условии (необходимом и достаточном) прямая $Ax_1+Bx_2+Cx_3=0$ будет пересекать данную кривую?

1097*. Применить признак, приведенный в предыдущей задаче, к уравнениям:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0,\ \frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1,\ y^2-2px=0\ (p>0).$$

1098. Две вершины автополярного треугольника линии

$$ax^2+by^2+cz^2=0$$

перемещаются соответственно по двум прямым

$$u'x+v'y+w'z=0,$$
$$u''x+v''y+w''z=0;$$

найти геометрическое место третьей вершины.

1099. Точка M_0 перемещается по прямой $A_1x_1+A_2x_2+$ $+A_3x_3=0$. Какую линию описывает точка M' пересечения поляр точки M_0 относительно данных линий второго порядка $2F=0$, $2\Phi=0$.

1100. Определить геометрическое место точек пересечения поляр точек M линии второго порядка $2F=0$ относительно линий второго порядка $2\Phi=0$, $2\Psi=0$.

1101*. Показать, что если из внешней точки провести касательные к кривой второго порядка, то прямая, соединяющая эту точку с серединой хорды прикосновения, будет диаметром кривой, сопряженным направлению хорды.

1102. Относительно системы проективных координат $(O_1,\ O_2,\ O_3,\ E)$ линия второго порядка определяется уравнением $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0$. Найти проективное преобразование, которое каждой точке пересечения прямой, проходящей через точку O_1, с данной кривой ставит в соответствие другую точку пересечения прямой и кривой.

1103. Дана окружность $x^2+y^2=1$ и точка $(1,\ 1)$. Из этой точки проводятся всевозможные секущие. Требуется определить такое проективное преобразование, которое переводит точку пересечения каждой секущей пучка с окружностью в другую точку пересечения той же секущей с окружностью.

§ 4. Пучок линий второго порядка и тангенциальные координаты

1104. Составить уравнение пучка линий второго порядка, проходящих через точки пересечения прямых:

$$A(u=0,\ v=0),\ B(v=0,\ w=0),$$
$$C(w=0,\ t=0),\ D(t=0,\ u=0).$$

1105. Составить уравнение линии второго порядка, проходящей через точки пересечения прямых $A(u=0,\ v=0)$, $B(u=0,\ w=0)$, $C(w=0,\ t=0)$, $D(t=0,\ u=0)$ и через точку S.

1106. Составить уравнение линии второго порядка, проходящей через точки пересечения прямых $x+y-4=0$, $16x+31y-48=0$ с прямыми $y-2=0$, $y+2=0$ и касающейся оси Ox.

1107. Составить уравнение линии второго порядка, проходящей через пять точек $A(0, 3)$, $B(4, 4)$, $C(5, 0)$, $D(0, -2)$, $E(-4, 0)$.

1108*. Доказать, что четыре точки пересечения двух линий второго порядка, оси которых параллельны, лежат на одной окружности.

1109*. Показать, что гипотенузы всех прямоугольных треугольников, вписанных в кривую второго порядка и имеющих общую вершину (прямого угла) в точке на кривой, проходят через одну общую точку, лежащую на нормали к кривой, проведенной из общей вершины этих треугольников.

1110*. Доказать, что всякая линия второго порядка, проходящая через четыре точки пересечения двух равносторонних гипербол, есть равносторонняя гипербола или пара взаимно перпендикулярных прямых.

1111*. Доказать, что если две линии второго порядка, оси которых параллельны, пересекаются в четырех различных точках, то общие (противоположные) хорды этих линий одинаково наклонены к их осям.

1112. Составить уравнение линии второго порядка, которая проходит через точку M_0 и касается данной линии $2F=0$ в точках пересечения ее с прямой $w=0$.

1113. Составить уравнение линии второго порядка, состоящей из двух касательных к линии второго порядка

$2F=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0$, в точках пересечения ее с прямой $w=Ax+By+C=0$.

1114. Составить уравнение такой линии второго порядка, которая касается прямых $u=0$, $v=0$ соответственно в точках A, B и касается прямой $w=0$.

1115*. Составить уравнение такой линии второго порядка, которая касается прямых $x=0$, $y=0$ в точках $A(0, 3)$, $B(4, 0)$ и касается прямой $x+y-1=0$. Определить точку прикосновения с последней прямой.

1116*. Составить уравнение линии второго порядка, состоящей из двух касательных, проведенных к линии второго порядка $2F=0$ из точки $S_0(x_0, y_0)$.

1117*. Составить уравнение линии второго порядка, состоящей из двух параллельных касательных данного направления (k) к линии второго порядка $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+$ $+2a_1x+2a_2y+a=0$.

1118. Составить уравнения касательных к линии второго порядка $4x^2+9y^2-36=0$, параллельных биссектрисе координатного угла Oxy.

1119. Написать уравнение точки $S_0(x_0, y_0)$ в тангенциальных координатах.

1120. Определить в тангенциальных координатах уравнение точки, делящей пополам отрезок, определяемый точками $x_1u+y_1v+w=0$, $x_2u+y_2v+w=0$.

1121. Определить расстояние от точки $x_0u+y_0v+w=0$ до прямой $l(u_1:v_1:w_1)$.

1122. Дано уравнение линии второго порядка в точечных проективных координатах $3x_1^2+4x_2^2-5x_3^2=0$. Составить уравнение той же линии в тангенциальных координатах $u_1:u_2:u_3$.

1123. Написать уравнение линии второго порядка $x^2+4xy+4y^2+6x=0$ в тангенциальных координатах.

1124. Составить уравнение окружности $x^2+y^2-R^2=0$ в тангенциальных координатах.

1125. Пользуясь общим тангенциальным уравнением линии второго порядка, вывести условия соприкосновения:

1) эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и прямой $ux+vy+w=0$;

2) гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и прямой $ux+vy+w=0$;

3) параболы $y^2=2px$ и прямой $y=kx+b$.

1126. Линия второго порядка задана уравнением в тангенциальных координатах $p_{23}u_1^2+p_{31}u_2^2+p_{12}u_3^2=0$. Составить уравнение этой линии в точечных координатах.

1127. Определить точку прикосновения прямой $x+y-1=0$ и линии второго порядка $9u^2+16v^2-25w^2=0$.

1128. Определить общие касательные линий второго порядка $x^2+10x+4y-3=0$, $4xy+y^2-16x-4y=0$.

1129*. Составить уравнение в тангенциальных координатах линии второго порядка, касающейся сторон четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ и прямой $x+y+1=0$, если даны координаты вершин $A_1(0, 0)$, $A_2(2, 0)$, $A_3(4, 5)$, $A_4(0, 3)$.

1130. Составить уравнение линии второго порядка, которая касается прямой $x+y+1=0$ и прямых P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 и P_4P_1, проходящих через точки $P_1(1, 2)$, $P_2(5, 0)$, $P_3(3, -1)$, $P_4(-4, 0)$.

1131*. Составить в тангенциальных координатах уравнение линии второго порядка, касающейся сторон треугольника $A_1A_2A_3$, если $A_i(x_i, y_i)$.

1132. Даны четыре точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$ и прямая $u_0x+v_0y+w_0=0$. Составить уравнение в тангенциальных координатах такой линии второго порядка, которая касается прямых A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 и данной прямой.

1133. Как геометрически истолковать уравнение в тангенциальных координатах $(ux_1+vy_1+w)(ux_3+vy_3+w)-\lambda(ux_2+vy_2+w)^2=0$, где (x_i, y_i) — координаты точки M_i?

1134. Линия второго порядка задана уравнением в тангенциальных координатах $b_{11}u^2+b_{22}v^2+b_{33}w^2+2b_{12}uv+2b_{23}vw+2b_{31}wu=0$.

Определить

$$I_2^{(a)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad I_3^{(a)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

где a_{ik} — коэффициенты уравнения той же линии в точечных координатах.

1135. Определить центр линии второго порядка, заданной уравнением в тангенциальных координатах

$$b_{11}u^2+b_{22}v^2+b_{33}w^2+2b_{12}uv+2b_{23}vw+2b_{31}wu=0.$$

1136. Линия второго порядка задана уравнением в тангенциальных координатах

$$b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{12}uv + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu = 0.$$

Доказать, что

$$I_3^{(b)} b_{33} > 0 \text{ для эллипса;}$$
$$I_3^{(b)} b_{33} < 0 \text{ для гиперболы;}$$
$$I_3^{(b)} \neq 0, \; b_{33} = 0 \text{ для параболы.}$$

1137. Написать уравнение линии параболического типа в тангенциальных координатах.

1138. При каких условиях уравнение в тангенциальных координатах

$$b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{12}uv + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu = 0$$

определяет окружность (действительную, нулевую или мнимую)?

1139. Составить уравнение параболы, касающейся сторон четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$, если $A_1(0, 0)$, $A_2(6, 0)$, $A_3(5, 3)$, $A_4(0, 2)$.

1140. Определить площадь эллипса, заданного уравнением в тангенциальных координатах

$$b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{12}uv + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu = 0.$$

1141*. Определить геометрическое место центров линий второго порядка, касающихся сторон четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$, если даны координаты вершин $A_1(4, 0)$, $A_2(0, 2)$, $A_3(-3, 0)$, $A_4(0, -1)$.

1142*. Составить уравнение линии второго порядка, касающейся сторон треугольника ABC и имеющей центр в точке $S(2, 1)$, если $A(0, 0)$, $B(5, 0)$, $C(0, 4)$.

1143*. Определить эллипс наибольшей площади, вписанный в четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$, если $A_1(0, 0)$, $A_2(6, 0)$, $A_3(4, 4)$, $A_4(0, 4)$.

1144*. Определить геометрическое место центров эллипсов постоянной площади S_0, касающихся сторон треугольника ABC, если $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 0)$.

1145. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на касательные к линии второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$$

1146. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки $C(a, b)$ на касательные к линии второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$$

1147*. Найти геометрическое место центров эллипсов, касающихся сторон данного треугольника.

1148. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса эллипса на касательные к нему.

1149*. Найти огибающую семейства прямых (т. е. линию, которой касаются все прямые семейства), произведение расстояний которых от двух постоянных точек $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ есть постоянная величина b^2.

1150*. Найти огибающую семейства прямых, образующих вместе с двумя данными прямыми треугольник постоянной площади.

1151. Найти огибающую хорд эллипса, соединяющих концы взаимно перпендикулярных диаметров.

1152*. Вершины прямых углов прямоугольных треугольников находятся в точке O, а вершины их острых углов — на двух взаимно перпендикулярных прямых. Найти огибающую гипотенуз этих треугольников.

1153*. Найти огибающую диагоналей параллелограммов, вписанных в треугольник AOB так, что две стороны параллелограмма идут по сторонам треугольника, а вершина, противоположная точке O, лежит на стороне AB.

1154*. Найти огибающую гипотенуз прямоугольных треугольников, у которых вершины прямых углов находятся в точке O, а вершины острых углов — на двух параллельных прямых.

1155*. Дан треугольник AOB; из каждой точки его стороны AB опущены перпендикуляры на стороны OA и OB. Найти огибающую прямых, соединяющих основания этих перпендикуляров.

1156*. Найти огибающую тех хорд окружности, которые из внутренней ее точки видны под прямым углом.

1157*. Прямая вращается вокруг точки A, лежащей на этой прямой. Точки P и Q, в которых эта прямая пересекает стороны данного угла, соединяем соответственно с двумя данными точками B и C. Найти геометрическое место точек пересечения прямых PB и QC. Рассмотреть случай, когда точки B и C лежат на одной прямой с вершиной угла или с точкой A.

1158*. Доказать, что если три линии второго порядка имеют одну и ту же общую хорду, то три другие общие хорды этих линий, взятых попарно, проходят через одну точку.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

ГЛАВА X

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Вектором называется упорядоченная пара точек, т. е. пара точек, взятых в определенном порядке. Первая точка называется началом вектора, вторая — его концом. Если обе точки совпадают, то вектор называется нулевым. Ненулевой вектор изображают направленным отрезком (со стрелкой у конца).

Векторы обозначаются так: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{r}$,... или $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и т. д.

Два ненулевых вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются коллинеарными, если прямые AB и CD параллельны или совпадают. Нуль-вектор считается коллинеарным любому вектору.

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$, не равного нулю, называется длина отрезка AB. Модуль нуль-вектора равен нулю по определению. Если модуль вектора равен 1, то вектор называется единичным.

Обозначения модуля: $|\boldsymbol{a}|$, a, $|\overrightarrow{AB}|$, AB.

Два ненулевых вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются равными, если они коллинеарны, направлены в одну сторону и их модули равны.

Отложить вектор $\overrightarrow{AB}$ от точки C это значит построить вектор $\overrightarrow{CD}$, равный вектору $\overrightarrow{AB}$.

Суммой $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\ldots+\boldsymbol{k}$ векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ..., $\boldsymbol{k}$ называется вектор, который строится так: от произвольной точки O откладывают вектор $\boldsymbol{a}$, от конца отложенного вектора $\boldsymbol{a}$ откладывают вектор $\boldsymbol{b}$, от конца отложенного вектора $\boldsymbol{b}$ откладывают вектор $\boldsymbol{c}$ и т. д. Точка O будет началом вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\ldots+\boldsymbol{k}$, а конец последнего отложенного вектора будет концом суммы. Сумма векторов не зависит от выбора точки O.

Сумма двух неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ может быть построена и так (правило параллелограмма): от одной и той же точки O откладывают векторы $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ (рис. 24); строят параллелограмм $OBCA$ со сторонами OA и OB; тогда $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

Разностью $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ называется такой вектор $\boldsymbol{x}$, что

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}.$$

Для построения разности $a-b$ векторов a и b можно поступить так: отложить векторы a и b от одной и той же точки O

$$\overrightarrow{OA}=a, \qquad \overrightarrow{OB}=b.$$

Тогда

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=a-b.$$

Вектором $-a$, противоположным вектору $a\neq 0$, называется вектор, коллинеарный вектору a, имеющий тот же модуль и направленный в сторону, противоположную a. Если $a=0$, то и $-a=0$. Очевидно, что $b-a=b+(-a)$.

Свойства сложения:

$a+(b+c)=(a+b)+c$ (ассоциативность);

$a+0=a$;

$a+(-a)=0$;

$a+b=b+a$ (коммутативность).

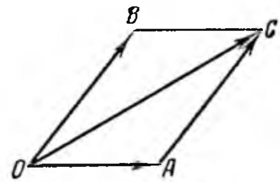

Рис. 24.

Произведением λa **числа** $\lambda\neq 0$ **на вектор** $a\neq 0$ называется вектор, коллинеарный вектору a, модуль которого равен $|\lambda||a|$ и который направлен в ту же сторону, что и вектор a, если $\lambda>0$, и в противоположную сторону, если $\lambda<0$. Если $\lambda=0$ или $a=0$, то $\lambda a=0$.

Свойства умножения вектора на число:

$$1\cdot a=a,$$
$$\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a,$$
$$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b,$$
$$(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a.$$

Если вектор $a\neq 0$, то вектор

$$\frac{a}{|a|}=a^0$$

есть единичный вектор, одинаково направленный с вектором a; отсюда

$$a=|a|a^0.$$

Если векторы a и b коллинеарны и $b\neq 0$, то **отношением** $\frac{a}{b}$ называется число λ, такое, что $a=\lambda b$.

Векторы $a, b, c, \ldots, k$ называются **линейно зависимыми**, если существуют такие числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa$, не равные нулю одновременно, и такие, что

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\ldots+\varkappa k=0.$$

Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является их линейная зависимость.

Три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ называются **компланарными**, если, будучи отложены от одной и той же точки, они лежат в одной плоскости. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является их линейная зависимость.

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, а векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны, то вектор $\boldsymbol{c}$ может быть представлен, и притом единственным образом, как линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}.$$

В этом случае говорят, что вектор $\boldsymbol{c}$ **разложен по векторам** $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Если три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ не компланарны, то всякий вектор $\boldsymbol{d}$ может быть представлен, и притом единственным образом, как их линейная комбинация:

$$\boldsymbol{d}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}.$$

В этом случае также говорят, что вектор $\boldsymbol{d}$ разложен по векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. **Радиусом-вектором** $\boldsymbol{r}$ точки M называется вектор $\overrightarrow{OM}$, где O — фиксированная точка.

Если точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, то радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки M выражается через радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ точек M_1 и M_2 следующим образом:

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{r}_2}{1+\lambda}.$$

В частности, если M — середина отрезка M_1M_2, то

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{2}.$$

Упорядоченная тройка $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ некомпланарных векторов называется **базисом** (в пространстве). Если векторы базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ единичные и попарно ортогональные, то базис называется **ортонормированным**. Векторы ортонормированного базиса часто обозначаются так: $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Координатами вектора $\boldsymbol{a}$ по отношению к базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ называются числа X, Y, Z, такие, что

$$\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{e}_1+Y\boldsymbol{e}_2+Z\boldsymbol{e}_3.$$

Если вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координаты X, Y, Z, то пишут:

$$\boldsymbol{a}=\{X,\ Y,\ Z\}.$$

Два вектора

$$\boldsymbol{a}=\{X,\ Y,\ Z\},\qquad \boldsymbol{b}=\{X',\ Y',\ Z'\}$$

равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты:

$$X=X',\qquad Y=Y',\qquad Z=Z'.$$

Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов

$$\boldsymbol{a}=\{X,\ Y,\ Z\}\neq 0, \qquad \boldsymbol{b}=\{X',\ Y',\ Z'\}\neq 0$$

является пропорциональность их соответствующих координат:

$$X'=\lambda X, \qquad Y'=\lambda Y, \qquad Z'=\lambda Z,$$

где λ есть отношение вектора $\boldsymbol{b}$ к вектору $\boldsymbol{a}$.

Если $\boldsymbol{a}=\{X,\ Y,\ Z\}$, $\quad \boldsymbol{b}=\{X',\ Y',\ Z'\}$, то

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{X+X',\ Y+Y',\ Z+Z'\},$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{X-X',\ Y-Y',\ Z-Z'\},$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda X,\ \lambda Y,\ \lambda Z\}.$$

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов

$$\boldsymbol{a}=\{X,\ Y,\ Z\}, \qquad \boldsymbol{b}=\{X',\ Y',\ Z'\}, \qquad \boldsymbol{c}=\{X'',\ Y'',\ Z''\}$$

является равенство

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix}=0.$$

Скалярным произведением $\boldsymbol{ab}$ двух векторов $\boldsymbol{a}\neq 0$ и $\boldsymbol{b}\neq 0$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\boldsymbol{ab}=ab\cos\varphi.$$

Если $\boldsymbol{a}=0$ или $\boldsymbol{b}=0$, то $\boldsymbol{ab}=0$ по определению.

Скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$ равно нулю тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ или $\boldsymbol{a}=0$ или $\boldsymbol{b}=0$.

Свойства скалярного умножения:

$$\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ba} \quad \text{(коммутативность)},$$
$$\lambda(\boldsymbol{ab})=(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b};$$
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bc} \quad \text{(дистрибутивность)},$$
$$\boldsymbol{aa}=a^2\geqslant 0,$$

причем $\boldsymbol{aa}=0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}=0$.

Если в ортонормированном базисе

$$\boldsymbol{a}=\{X,\ Y,\ Z\}, \qquad \boldsymbol{b}=\{X',\ Y',\ Z'\},$$

то

$$\boldsymbol{ab}=XX'+YY'+ZZ', \qquad |\boldsymbol{a}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Если $\boldsymbol{a}\neq 0$, $\boldsymbol{b}\neq 0$, то косинус угла φ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{XX'+YY'+ZZ'}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\,\sqrt{X'^2+Y'^2+Z'^2}}.$$

Необходимое и достаточное условие ортогональности двух векторов $\boldsymbol{a}=\{X, Y, Z\}$ и $\boldsymbol{b}=\{X', Y', Z'\}$ имеет вид:

$$XX'+YY'+ZZ'=0$$

(в ортонормированном базисе).

Векторным произведением $[\boldsymbol{ab}]$ (или $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$) вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ (в случае, если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны) называется вектор, модуль которого равен площади параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, отложенные от одной и той же точки, ортогональный векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и направленный так, что упорядоченная тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $[\boldsymbol{ab}]$ одинаково ориентирована с тройкой векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ некоторого ортонормированного базиса. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то $[\boldsymbol{ab}]=0$ по определению.

Свойства векторного умножения:

$$\begin{gathered}
[\boldsymbol{ab}]=-[\boldsymbol{ba}],\\
[(\lambda\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b}]=\lambda\,[\boldsymbol{ab}],\\
[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{ac}]+[\boldsymbol{bc}],\\
[\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}]]=\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{ac})-\boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{ab}),\\
[[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{ac})-\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{bc}),\\
[\boldsymbol{ab}]\,[\boldsymbol{cd}]=(\boldsymbol{ac})\,(\boldsymbol{bd})-(\boldsymbol{ad})\,(\boldsymbol{bc}).
\end{gathered}$$

Если в ортонормированном базисе

$$\boldsymbol{a}=\{X, Y, Z\}, \qquad \boldsymbol{b}=\{X', Y', Z'\},$$

то

$$[\boldsymbol{ab}]=\left\{\begin{vmatrix} Y & Z \\ Y' & Z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} Z & X \\ Z' & X' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix}\right\}.$$

Смешанным произведением $\boldsymbol{abc}$ трех некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ называется число, абсолютная величина которого равна объему параллелепипеда, ребрами которого являются эти векторы, отложенные от одной и той же точки; это число положительное, если упорядоченная тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ одинаково ориентирована с ортонормированным базисом $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, и отрицательное в противном случае. Если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны, то $\boldsymbol{abc}=0$ по определению.

Свойства смешанного произведения:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{abc}=\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}]=[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c},\\
\boldsymbol{abc}=\boldsymbol{bca}=\boldsymbol{cab}=-\boldsymbol{bac}.
\end{gathered}$$

Если в ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{a}=\{X, Y, Z\}, \qquad \boldsymbol{b}=\{X', Y', Z'\}, \qquad \boldsymbol{c}=\{X'', Y'', Z''\},$$

то

$$\boldsymbol{abc}=\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix}.$$

Пример 1. *Вычислить длину d диагонали параллелепипеда, зная длины*

$$OA=a, \qquad OB=b, \qquad OC=c$$

трех его ребер, выходящих из одной точки O, и углы

$$\angle BOC=\alpha, \qquad \angle COA=\beta, \qquad \angle AOB=\gamma$$

между ними.

Решение. Пусть OD—диагональ параллелепипеда, выходящая из точки O, а d—ее длина. Тогда

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},$$

откуда

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD}^2&=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2=\\&=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OC}\,\overrightarrow{OA}=\\&=a^2+b^2+c^2+2ab\cos\gamma+2bc\cos\alpha+2ca\cos\beta\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\alpha+2ca\cos\beta+2ab\cos\gamma}.$$

Пример 2. *Вычислить объем параллелепипеда, зная длины*

$$OA=a, \qquad OB=b, \qquad OC=c$$

трех его ребер, выходящих из одной точки O, и углы

$$\angle BOC=\alpha, \qquad \angle COA=\beta, \qquad \angle AOB=\gamma$$

между ними.

Решение. Рассмотрим векторы

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \qquad \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}, \qquad \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$$

и обозначим их координаты в каком-нибудь ортонормированном базисе так:

$$\boldsymbol{a}=\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}, \qquad \boldsymbol{b}=\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}, \qquad \boldsymbol{c}=\{X_3,\ Y_3,\ Z_3\}.$$

Тогда, обозначая через V объем параллелепипеда, будем иметь

$$V=|\boldsymbol{abc}|=\operatorname{mod}\begin{vmatrix}X_1&Y_1&Z_1\\X_2&Y_2&Z_2\\X_3&Y_3&Z_3\end{vmatrix}=\sqrt{\begin{vmatrix}X_1&Y_1&Z_1\\X_2&Y_2&Z_2\\X_3&Y_3&Z_3\end{vmatrix}^2}=\sqrt{R},$$

где

$$R=\begin{vmatrix}X_1^2+Y_1^2+Z_1^2 & X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2 & X_1X_3+Y_1Y_3+Z_1Z_3\\ X_2X_1+Y_2Y_1+Z_2Z_1 & X_2^2+Y_2^2+Z_2^2 & X_2X_3+Y_2Y_3+Z_2Z_3\\ X_3X_1+Y_3Y_1+Z_3Z_1 & X_3X_2+Y_3Y_2+Z_3Z_2 & X_3^2+Y_3^2+Z_3^2\end{vmatrix},$$

или

$$\sqrt{R}=\sqrt{\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix}}=$$

$$=\sqrt{\begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta \\ ab\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha \\ ac\cos\beta & bc\cos\alpha & c^2 \end{vmatrix}}=abc\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}}=$$

$$=abc\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}.$$

Пример 3. Пусть дан тетраэдр $ABCD$. Возьмем на какой-нибудь его грани, например на грани ABC, произвольную точку S и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{SS'}=\boldsymbol{d}$, равный по модулю площади грани ABC, перпендикулярный к этой грани и направленный так, что точки S' и D лежат по разные стороны от плоскости грани ABC. Аналогично построим векторы $\overrightarrow{PP'}=\boldsymbol{a}$ для грани BCD, $\overrightarrow{QQ'}=\boldsymbol{b}$ для грани ACD и $\overrightarrow{RR'}=\boldsymbol{c}$ для грани ABD. Доказать, что

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=0.$$

Доказательство. Положим $\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{y}$, $\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{z}$. Тогда $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}$, $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}$, и следовательно (при надлежащем выборе ориентации пространства), будем иметь:

$$\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{yz}],\quad \boldsymbol{b}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{zx}],$$

$$\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{xy}],\quad \boldsymbol{d}=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})].$$

Отсюда

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{yz}]+\frac{1}{2}[\boldsymbol{zx}]+\frac{1}{2}[\boldsymbol{xy}]+\frac{1}{2}[(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})]=$$

$$=\frac{1}{2}[\boldsymbol{yz}]+\frac{1}{2}[\boldsymbol{zx}]+\frac{1}{2}[\boldsymbol{xy}]+\frac{1}{2}[\boldsymbol{yx}]-\frac{1}{2}[\boldsymbol{yz}]-\frac{1}{2}[\boldsymbol{zx}]+\frac{1}{2}[\boldsymbol{zz}]=0.$$

Доказанное утверждение обобщается на случай любого выпуклого многогранника.

Пример 4. *Определить двугранные углы трехгранного угла, плоские углы которого* α, β, γ.

Решение. Отложим от вершины S на ребрах этого угла единичные векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Пусть λ — двугранный угол, к которому примыкают плоские углы β и γ. Тогда

$$\cos\lambda=\frac{[\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{ac}]}{|[\boldsymbol{ab}]|\,|[\boldsymbol{ac}]|}=\frac{\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{bc})-(\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{ba})}{\sin\gamma\sin\beta}=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

§ 1. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число

1159. Векторы $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$. Выразить через векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$, являющиеся сторонами этого параллелограмма.

1160. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Полагая $\overrightarrow{AK}=\boldsymbol{k}$ и $\overrightarrow{AL}=\boldsymbol{l}$, выразить через векторы $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{l}$ векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$.

1161. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Выразить вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

1162. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Найти сумму векторов $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$.

1163. Точки E и F служат серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overrightarrow{EF}=\dfrac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}}{2}$. Вывести отсюда теорему о средней линии трапеции.

1164. Векторы $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{p}$ и $\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{q}$ служат двумя смежными сторонами правильного шестиугольника $ABCDEF$. Выразить через $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, идущие по сторонам этого шестиугольника.

1165*. Доказать, что сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника к его вершинам, равна **0**.

1166. Доказать, что вектор, идущий из произвольной точки плоскости в центр правильного многоугольника, есть среднее арифметическое векторов, идущих из этой точки к вершинам многоугольника.

1167. В треугольнике найти такую точку, чтобы сумма векторов, идущих из этой точки к вершинам треугольника, была равна **0**.

1168. Тот же вопрос для параллелограмма.

1169. Из точки O выходят два вектора $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. Найти какой-нибудь вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий по биссектрисе угла AOB.

1170. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла A. Выразить вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

1171. На трех некомпланарных векторах $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{p}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{q}$ и $\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{r}$ построен параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Выразить через $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ векторы, совпадающие с ребрами, диагональю параллелепипеда и диагоналями граней этого параллелепипеда, для которых вершина A' служит началом.

1172. В тетраэдре $ABCD$ даны ребра, выходящие из вершины A: $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ и $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{d}$. Выразить через эти векторы остальные ребра тетраэдра, медиану $\overrightarrow{DM}$ грани BCD и вектор $\overrightarrow{AQ}$, где Q — центр тяжести грани BCD.

1173. Дан тетраэдр $OABC$. Полагая $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$, выразить через $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{RS}$, где M, P и R — середины ребер OA, OB и OC, а N, Q и S — середины соответственно противоположных ребер.

1174. В четырехугольнике $ABCD$ (плоском или пространственном) положим $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{m}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{n}$, $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{p}$, $\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{q}$. Найти вектор $\overrightarrow{EF}$, соединяющий середины диагоналей AC и BD.

§ 2. Радиус-вектор

1175. Даны радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ трех последовательных вершин A, B и C параллелограмма. Найти радиус-вектор четвертой вершины D.

1176. Даны радиусы-векторы $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{r}_1$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{r}_2$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{r}_3$; дано, что векторы $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$ не коллинеарны. Из точки A опущен перпендикуляр AM на плоскость OBC. Найти радиус-вектор $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{x}$ точки M.

1177. В точках $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, $M_2(\boldsymbol{r}_2)$, ..., $M_n(\boldsymbol{r}_n)$ помещены массы m_1, m_2, ..., m_n. Найти радиус-вектор центра тяжести этой системы материальных точек.

1178. Показать, что сумма векторов, направленных из центра тяжести системы n материальных точек во все эти точки, равна нулю, если во всех n точках сосредоточены равные массы.

1179. Зная радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ вершин треугольника, найти радиус-вектор точки пересечения его медиан.

1180. Зная радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ трех последовательных вершин параллелограмма, найти радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки пересечения диагоналей параллелограмма.

1181. Даны три последовательные вершины трапеции $A(\boldsymbol{r}_1)$, $B(\boldsymbol{r}_2)$ и $C(\boldsymbol{r}_3)$. Найти радиусы-векторы: $\boldsymbol{r}_4$ четвертой вершины D, $\boldsymbol{r}'$ точки пересечения диагоналей и $\boldsymbol{r}''$ точки пересечения боковых сторон, зная, что основание AD в λ раз больше основания BC.

1182. Зная радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_A$, $\boldsymbol{r}_B$, $\boldsymbol{r}_D$ и $\boldsymbol{r}_A'$ четырех вершин параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, найти радиусы-векторы четырех остальных его вершин.

1183. Радиусы-векторы $OA=\boldsymbol{r}_1$, $OB=\boldsymbol{r}_2$ и $OC=\boldsymbol{r}_3$ служат ребрами параллелепипеда.

Найти радиус-вектор точки пересечения диагонали параллелепипеда, выходящей из вершины O, с плоскостью, проходящей через вершины A, B и C.

§ 3. Задание вектора координатами

1184. Даны три вектора $\boldsymbol{a}=\{2,\ 4\}$, $\boldsymbol{b}=\{-3,\ 1\}$, $\boldsymbol{c}=\{5,\ -2\}$.

Найти векторы 1) $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c}$; 2) $\boldsymbol{a}+24\boldsymbol{b}+14\boldsymbol{c}$.

1185. Даны три вектора $\boldsymbol{a}=\{5,\ 3\}$, $\boldsymbol{b}=\{2,\ 0\}$, $\boldsymbol{c}=\{4,\ 2\}$. Подобрать числа α и γ так, чтобы три вектора $\alpha\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\gamma\boldsymbol{c}$ составили треугольник, если начало вектора $\boldsymbol{b}$ совместить с концом вектора $\alpha\boldsymbol{a}$, а начало вектора $\gamma\boldsymbol{c}$ с концом вектора $\boldsymbol{b}$.

1186. Представить вектор $\boldsymbol{c}$ как линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в каждом из нижеследующих случаев:

1) $\boldsymbol{a}=\{4,\ -2\}$, $\boldsymbol{b}=\{3,\ 5\}$, $\boldsymbol{c}=\{1,\ -7\}$;
2) $\boldsymbol{a}=\{5,\ 4\}$, $\boldsymbol{b}=\{-3,\ 0\}$, $\boldsymbol{c}=\{19,\ 8\}$;
3) $\boldsymbol{a}=\{-6,\ 2\}$, $\boldsymbol{b}=\{4,\ 7\}$, $\boldsymbol{c}=\{9,\ -3\}$.

1187. Дан вектор $\boldsymbol{a}=\{6,\ -8\}$. Найти координаты единичного вектора, коллинеарного с $\boldsymbol{a}$ и направленного: 1) в ту же сторону; 2) в противоположную сторону.

1188. Из одной точки проведены векторы $\boldsymbol{a}=\{-12,\ 16\}$, $\boldsymbol{b}=\{12,\ 5\}$. Найти координаты единичного вектора, который, будучи проведен из той же точки, делил бы угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ пополам.

1189. Дан вектор $\boldsymbol{a}=\{-5,\ 2\}$. Найти вектор $\boldsymbol{b}$, перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{a}$, равный ему по длине и направленный так, что, будучи отложены от одной и той же точки, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют пару, имеющую ту же ориентацию, какую имеет пара единичных векторов осей Ox и Oy.

1190. Даны три вектора: $\boldsymbol{a}=\{5, 7, 2\}$, $\boldsymbol{b}=\{3, 0, 4\}$, $\boldsymbol{c}=\{-6, 1, -1\}$. Найти векторы 1) $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$; 2) $5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$.

1191. Представить вектор $\boldsymbol{d}$ как линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в каждом из следующих случаев:

1) $\boldsymbol{a}=\{2, 3, 1\}$, $\boldsymbol{b}=\{5, 7, 0\}$, $\boldsymbol{c}=\{3, -2, 4\}$, $\boldsymbol{d}=\{4, 12, -3\}$;
2) $\boldsymbol{a}=\{5, -2, 0\}$, $\boldsymbol{b}=\{0, -3, 4\}$, $\boldsymbol{c}=\{-6, 0, 1\}$, $\boldsymbol{d}=\{25, -22, 16\}$;
3) $\boldsymbol{a}=\{3, 5, 6\}$, $\boldsymbol{b}=\{2, -7, 1\}$, $\boldsymbol{c}=\{12, 0, 6\}$, $\boldsymbol{d}=\{0, 20, 18\}$.

1192. Установить, в каких из нижеследующих случаев тройки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ будут линейно зависимы, и в том случае, когда это возможно, представить вектор $\boldsymbol{c}$ как линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

1) $\boldsymbol{a}=\{5, 2, 1\}$, $\boldsymbol{b}=\{-1, 4, 2\}$, $\boldsymbol{c}=\{-1, -1, 6\}$;
2) $\boldsymbol{a}=\{6, 4, 2\}$, $\boldsymbol{b}=\{-9, 6, 3\}$, $\boldsymbol{c}=\{-3, 6, 3\}$;
3) $\boldsymbol{a}=\{6, -18, 12\}$, $\boldsymbol{b}=\{-8, 24, -16\}$, $\boldsymbol{c}=\{8, 7, 3\}$.

1193. Показать, что каковы бы ни были три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ и три числа λ, μ, ν, векторы $\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}$, $\nu\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{c}$, $\mu\boldsymbol{c}-\nu\boldsymbol{a}$ компланарны.

1194. Даны четыре вектора $\boldsymbol{a}=\{1, 5, 3\}$, $\boldsymbol{b}=\{6, -4, -2\}$, $\boldsymbol{c}=\{0, -5, 7\}$, $\boldsymbol{d}=\{-20, 27, -35\}$.

Подобрать числа α, β и γ так, чтобы векторы $\alpha\boldsymbol{a}$, $\beta\boldsymbol{b}$, $\gamma\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ образовывали замкнутую ломаную линию, если начало каждого последующего вектора совместить с концом предыдущего.

1195. Относительно ортонормированного базиса дан вектор $\boldsymbol{a}=\{-8, 4, 1\}$. Найти единичный вектор, имеющий то же направление, что и вектор $\boldsymbol{a}$.

1196. Из одной точки проведены векторы $\boldsymbol{a}=\{-3, 0, 4\}$ и $\boldsymbol{b}=\{5, -2, -14\}$. Найти единичный вектор, который, будучи отложен от той же точки, делит пополам угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

1197. К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, проходящим через эту вершину. Найти величину равнодействующей этих трех сил.

§ 4. Скалярное произведение

1198. Найти скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в каждом из нижеследующих случаев:

1) $|\boldsymbol{a}|=8, \quad |\boldsymbol{b}|=5, \quad (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})=60^\circ$;
2) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1, \quad (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})=135^\circ$;
3) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$;
4) $|\boldsymbol{a}|=3, \quad |\boldsymbol{b}|=6, \quad \boldsymbol{a} \downdownarrows \boldsymbol{b}$;
5) $|\boldsymbol{a}|=3, \quad |\boldsymbol{b}|=1, \quad \boldsymbol{a} \downarrow\uparrow \boldsymbol{b}$.

1199. В треугольнике ABC даны длины его сторон $BC=5$, $CA=6$, $AB=7$. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

1200. Найти угол α при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы, проведенные из концов основания этого треугольника, взаимно перпендикулярны.

1201. Доказать, что векторы $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c})$ и $\boldsymbol{c}$ перпендикулярны друг к другу.

1202. Какой угол образуют единичные векторы $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{t}$, если известно, что векторы $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{s}+2\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{q}=5\boldsymbol{s}-4\boldsymbol{t}$ взаимно перпендикулярны?

1203. Дан равносторонний треугольник ABC, у которого длины сторон равны 1. Полагая $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$, вычислить выражение $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}$.

1204. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Вычислить $\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CF}$.

1205. В прямоугольном треугольнике ABC опущен перпендикуляр CH на гипотенузу AB. Выразить вектор $\overrightarrow{CH}$ через векторы $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{CB}$ и $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CA}$.

1206. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка M (которая может лежать как в плоскости прямоугольника, так и вне ее). Показать, что:

1) скалярное произведение векторов, идущих от точки M к двум несмежным вершинам прямоугольника, равно

скалярному произведению векторов, идущих от той же точки к двум другим вершинам $\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\,\overrightarrow{MD}$;

2) сумма квадратов векторов одной пары равна сумме квадратов другой пары $(\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MC}^2=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MD}^2)$.

1207. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB в отношении $\overrightarrow{AD}:\overrightarrow{DB}=\lambda$. Выразить длину отрезка CD через три стороны треугольника и число λ.

1208. Доказать, что при любом расположении точек $ABCD$ на плоскости или в пространстве имеет место равенство $\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD}=0$.

1209*. Доказать, что если в тетраэдре $ABCD$ два ребра соответственно перпендикулярны своим противоположным, то и остальные два ребра взаимно перпендикулярны.

1210. Вычислить скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, заданных своими координатами в каждом из нижеследующих случаев:

1) $\boldsymbol{a}=\{5,\ 2\}$, $\boldsymbol{b}=\{-3,\ 6\}$;
2) $\boldsymbol{a}=\{6,\ -8\}$, $\boldsymbol{b}=\{12,\ 9\}$;
3) $\boldsymbol{a}=\{3,\ -5\}$, $\boldsymbol{b}=\{7,\ 4\}$.

1211. Определить угол α между двумя векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, заданными своими координатами в каждом из нижеследующих случаев:

1) $\boldsymbol{a}=\{4,\ 3\}$, $\boldsymbol{b}=\{1,\ 7\}$;
2) $\boldsymbol{a}=\{6,\ -8\}$, $\boldsymbol{b}=\{12,\ 9\}$;
3) $\boldsymbol{a}=\{2,\ 5\}$, $\boldsymbol{b}=\{3,\ -7\}$;
4) $\boldsymbol{a}=\{2,\ -6\}$, $\boldsymbol{b}=\{-3,\ 9\}$.

1212. Даны два вектора $\boldsymbol{a}=\{5,\ 2\}$, $\boldsymbol{b}=\{7,\ -3\}$. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий одновременно двум уравнениям $\boldsymbol{ax}=38$ и $\boldsymbol{bx}=30$.

1213. Даны три вектора $\boldsymbol{a}=\{3,\ -2\}$, $\boldsymbol{b}=\{-5,\ 1\}$, $\boldsymbol{c}=\{0,\ 4\}$. Найти:

1) $3\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{ab}+5\boldsymbol{b}^2-6\boldsymbol{bc}-2\boldsymbol{c}^2$;
2) $2(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}-3\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{ac})\boldsymbol{b}$.

1214. Найти численную величину проекции вектора $\{7,\ -4\}$ на ось, параллельную вектору $\{-8,\ 6\}$.

1215. Вычислить скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, заданных своими координатами в каждом из нижеследующих случаев:

1) $\boldsymbol{a}=\{3,\ 5,\ 7\}$, $\quad\boldsymbol{b}=\{-2,\ 6,\ 1\}$;
2) $\boldsymbol{a}=\{3,\ 0,\ -6\}$, $\quad\boldsymbol{b}=\{2,\ -4,\ 0\}$;
3) $\boldsymbol{a}=\{2,\ 5,\ 1\}$, $\quad\boldsymbol{b}=\{3,\ -2,\ 4\}$.

1216. Определить угол α между двумя векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, заданными своими координатами в каждом из нижеследующих случаев:

1) $\boldsymbol{a}=\{8,\ 4,\ 1\}$ $\quad\boldsymbol{b}=\{2,\ -2,\ 1\}$;
2) $\boldsymbol{a}=\{2,\ 5,\ 4\}$, $\quad\boldsymbol{b}=\{6,\ 0,\ -3\}$.

1217. Даны три вектора: $\boldsymbol{a}=\{5,\ -6,\ 1\}$, $\boldsymbol{b}=\{-4,\ 3,\ 0\}$, $\boldsymbol{c}=\{5,\ -8,\ 10\}$. Вычислить выражения: 1) $3\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{ab}+2\boldsymbol{c}^2$; 2) $2\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2-5\boldsymbol{c}^2$; 3) $3\boldsymbol{ab}-4\boldsymbol{bc}-5\boldsymbol{ac}$.

1218. Даны три вектора: $\boldsymbol{a}=\{3,\ 1,\ 2\}$, $\boldsymbol{b}=\{2,\ 7,\ 4\}$, $\boldsymbol{c}=\{1,\ 2,\ 1\}$. Найти: 1) $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}$; 2) $\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{bc})$, 3) $\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^2\boldsymbol{a}$.

1219. Найти численную величину проекции вектора $\{8,\ 4,\ 1\}$ на ось, параллельную вектору $\{2,\ -2,\ 1\}$.

1220. Даны два вектора $\boldsymbol{a}=\{11,\ 10,\ 2\}$ и $\boldsymbol{b}=\{4,\ 0,\ 3\}$. Найти вектор $\boldsymbol{c}$, перпендикулярный к векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, равный по длине 1 и направленный так, чтобы тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ была ориентирована так же, как и тройка единичных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ ортонормированного базиса.

1221. Даны два вектора $\boldsymbol{a}=\{1,\ 1,\ 1\}$ и $\boldsymbol{b}=\{1,\ 0,\ 0\}$. Найти единичный вектор $\boldsymbol{c}$, перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{a}$, образующий с вектором $\boldsymbol{b}$ угол в $60°$ и направленный так, чтобы тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ имела ту же ориентацию, как и единичные векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ ортонормированного базиса.

1222. Даны два вектора $\boldsymbol{a}=\{8,\ 4,\ 1\}$, $\boldsymbol{b}=\{2,\ -2,\ 1\}$, выходящих из одной и той же точки. Найти вектор $\boldsymbol{c}$, исходящий из этой же точки, перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{a}$, равный ему по длине, компланарный с векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, образующий с вектором $\boldsymbol{b}$ острый угол.

1223. Даны три вектора $\boldsymbol{a}=\{3,\ -2,\ 4\}$, $\boldsymbol{b}=\{5,\ 1,\ 6\}$, $\boldsymbol{c}=\{-3,\ 0,\ 2\}$. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий одновременно трем уравнениям: $\boldsymbol{ax}=4$, $\boldsymbol{bx}=35$, $\boldsymbol{cx}=0$.

§ 5. Векторное произведение; смешанное произведение

1224. Зная два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, найти:

$$1)\ [(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})];\quad 2)\ [\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})];\quad 3)\ \left[\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\left(\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right)\right].$$

1225. Показать, что $[\boldsymbol{ab}]^2+(\boldsymbol{ab})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$.

1226. Показать, что если три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ не коллинеарны, то из равенств $[\boldsymbol{ab}]=[\boldsymbol{bc}]=[\boldsymbol{ca}]$ вытекает соотношение $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$, и обратно.

1227. Показать, что $[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{a})]=[(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{ab}]$.

1228. Показать, что если $[\boldsymbol{ab}]+[\boldsymbol{bc}]+[\boldsymbol{ca}]=0$, то векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны.

1229. Из одной точки проведены три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Показать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна к вектору $[\boldsymbol{ab}]+[\boldsymbol{bc}]+[\boldsymbol{ca}]$.

1230. Показать, что если векторы $[\boldsymbol{ab}]$, $[\boldsymbol{bc}]$, $[\boldsymbol{ca}]$ компланарны, то они коллинеарны.

1231. В ориентированном пространстве даны два взаимно перпендикулярных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, выходящих из одной точки. Найти вектор $\boldsymbol{c}$, получающийся из векторов $\boldsymbol{b}$ поворотом на 90° около вектора $\boldsymbol{a}$ так, чтобы ориентация тройки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ совпадала с ориентацией единичных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ ортонормированного базиса.

1232. Найти векторное произведение $[\boldsymbol{ab}]$ в каждом из нижеследующих случаев:

1) $\boldsymbol{a}=\{2,\ 3,\ 1\}$, $\quad\boldsymbol{b}=\{5,\ 6,\ 4\}$;
2) $\boldsymbol{a}=\{5,\ -2,\ 1\}$, $\quad\boldsymbol{b}=\{4,\ 0,\ 6\}$;
3) $\boldsymbol{a}=\{-2,\ 6,\ -4\}$, $\quad\boldsymbol{b}=\{3,\ -9,\ 6\}$.

1233. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}=\{8,\ 4,\ 1\}$, $\boldsymbol{b}=\{2,\ -2,\ 1\}$.

1234. Даны векторы $\boldsymbol{a}=\{3,\ 1,\ 2\}$, $\boldsymbol{b}=\{2,\ 7,\ 4\}$, $\boldsymbol{c}=\{1,\ 2,\ 1\}$. Найти: 1) $\boldsymbol{abc}$; 2) $[[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}]$; 3) $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]$.

1235*. Доказать тождества

$$1)\ [\boldsymbol{ab}]\,[\boldsymbol{cd}]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{ac} & \boldsymbol{ad}\\ \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{bd}\end{vmatrix};$$

$$2)\ [[\boldsymbol{ab}]\,[\boldsymbol{cd}]]=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{abd})-\boldsymbol{d}(\boldsymbol{abc})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{acd})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bcd});$$

3) $(abc)\,d = (dbc)\,a + (dca)\,b + (dab)\,c$;

4) $(abc)(xyz) = \begin{vmatrix} xa & xb & xc \\ ya & yb & yc \\ za & zb & zc \end{vmatrix}$; 5) $(abc)^2 = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{vmatrix}$.

1236. При каких условиях $[[ab]\,c] = [a\,[bc]]$?

1237. Даны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий системе уравнений

$$\boldsymbol{ax} = \alpha, \quad \boldsymbol{bx} = \beta, \quad \boldsymbol{cx} = \gamma.$$

1238*. Две тройки векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ называются взаимными, если векторы этих троек связаны соотношениями:

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_k = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k; \\ 1, & \text{если } i = k; \end{cases}$$

пользуясь операциями скалярного и векторного умножения, найти векторы $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ тройки, взаимной тройке векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$.

1239. Для тройки векторов $\boldsymbol{a}_1 = \{2,\ 1,\ -1\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{-3,\ 0,\ 2\}$, $\boldsymbol{a}_3 = \{5,\ 1,\ -2\}$ найти взаимную тройку (см. предыдущую задачу).

ГЛАВА XI

КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть на трех прямых Ox, Oy, Oz, проходящих через одну и ту же точку O и не лежащих в одной плоскости, от точки O отложены векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ (рис. 25).

Эти прямые Ox, Oy, Oz вместе с отложенными на них от точки O векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ образуют общую декартову или аффинную систему координат. Точка O называется началом координат.

Прямые Ox, Oy, Oz вместе с отложенными на них векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ называются осями координат: Ox — ось абсцисс, Oy — ось ординат, Oz — ось аппликат. Плоскости Oyz, Ozx и Oxy называются координатными плоскостями. Векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ называются масштабными

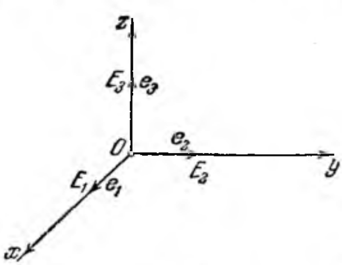

Рис. 25.

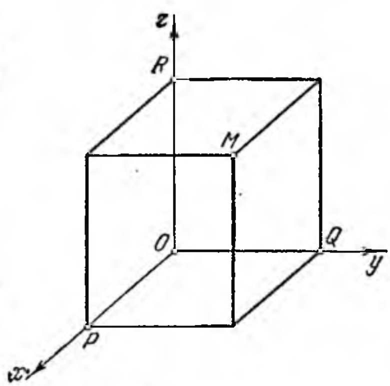

Рис. 26.

векторами соответственно осей Ox, Oy, Oz. Концы E_1, E_2, E_3 масштабных векторов, отложенных от начала координат O, называются единичными точками осей координат.

Если масштабные векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ попарно ортогональны, а модули их равны 1, то система координат называется прямоугольной. В этом случае векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ обычно обозначаются так: $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Пусть M — произвольная точка пространства. Проведем через эту точку плоскости параллельные координатным плоскостям Ozy, Oxz и Oxy.

Точки пересечения этих плоскостей с осями Ox, Oy, Oz обозначим соответственно через P, Q, R (рис. 26). Пусть x — координата точки P на оси Ox с началом в точке O и масштабным вектором $\boldsymbol{e}_1$, y — координата точки Q на оси Oy с началом в точке O и масштабным вектором $\boldsymbol{e}_2$, z — координата точки R на оси Oz с началом в точке O и масштабным вектором $\boldsymbol{e}_3$.

Числа x, y, z называются декартовыми координатами точки M в системе $Oxyz$.

Если точка M лежит в плоскости Oxy, то $z=0$, если точка M лежит в плоскости Oyz, то $x=0$, если точка M лежит в плоскости Ozx, то $y=0$ (и обратно). Начало координат O и единичные точки E_1, E_2, E_3 осей координат имеют соответственно координаты:

$$O(0,\ 0,\ 0),\quad E_1(1,\ 0,\ 0),\quad E_2(0,\ 1,\ 0),\quad E_3(0,\ 0,\ 1).$$

Точка $E(1,\ 1,\ 1)$ называется **единичной точкой**.

Если в пространстве введена общая декартова система координат с началом в точке O и масштабными векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, то координаты точки M являются координатами радиуса-вектора $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ этой точки относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

Координаты точки $M(x,\ y,\ z)$, делящей отрезок M_1M_2 с концами $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ в отношении

$$\lambda=\frac{\overrightarrow{M_1M}}{\overrightarrow{MM_2}},$$

определяются соотношениями

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\qquad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Если $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ — радиусы-векторы точек M, M_1 и M_2 и точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, то

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{r}_2}{1+\lambda}.$$

В частности, координаты середины отрезка равны полусуммам соответствующих координат его концов:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2},\qquad z=\frac{z_1+z_2}{2},$$

или в векторной форме

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{2}.$$

Если система координат прямоугольная, то расстояние точки $M(x,\ y,\ z)$ или $M(\boldsymbol{r})$ до начала координат определяется формулой

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Косинусы углов α, β, γ вектора $\overrightarrow{OM}$ с осями координат называются направляющими косинусами этого вектора.

Если $\overrightarrow{OM}=\{x, y, z\}$, то

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

отсюда

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Расстояние d между двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ или $M_1(\mathbf{r}_1)$ и $M_2(\mathbf{r}_2)$ вычисляется по формуле

$$d=|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ с началом в точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и с концом $M_2(x_2, y_2, z_2)$ вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{d}, \qquad \cos\beta=\frac{y_2-y_1}{d}, \qquad \cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{d}.$$

Объем ориентированного тетраэдра с вершинами

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2), \quad M_3(x_3, y_3, z_3), \quad M_4(x_4, y_4, z_4)$$

или $M_1(\mathbf{r}_1)$, $M_2(\mathbf{r}_2)$, $M_3(\mathbf{r}_3)$, $M_4(\mathbf{r}_4)$ определяется соотношением

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

или

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix},$$

или

$$V=\frac{1}{6}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_4)(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_4),$$

причем $V>0$, если тройка векторов $\overrightarrow{M_4M_1}$, $\overrightarrow{M_4M_2}$, $\overrightarrow{M_4M_3}$ одинаково ориентирована с координатной, и $V<0$ в противном случае.

Координаты X, Y, Z вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ с концами $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ определяются соотношениями:

$$X=x_2-x_1, \qquad Y=y_2-y_1, \qquad Z=z_2-z_1.$$

Площадь треугольника, заданного относительно прямоугольной системы координат своими вершинами $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}$$

или

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_3 & x_1-x_3 \\ z_2-z_3 & x_2-x_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}^2},$$

или

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{[(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3)]^2},$$

где $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ — радиусы-векторы точек M_1, M_2, M_3.

Если нам даны две системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$, причем

$$\overrightarrow{O'E'_1}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\},\ \overrightarrow{O'E'_2}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\},\ \overrightarrow{O'E'_3}=\{c_1,\ c_2,\ c_3\},\ O'\ (d_1,\ d_2,\ d_3),$$

то координаты x, y, z точки M относительно системы $Oxyz$ через координаты x', y', z' той же точки относительно системы $O'x'y'z'$ выражаются формулами:

$$\begin{aligned} x&=a_1x'+b_1y'+c_1z'+d_1,\\ y&=a_2x'+b_2y'+c_2z'+d_2,\\ z&=a_3x'+b_3y'+c_3z'+d_3. \end{aligned}$$

В частности, если обе системы координат прямоугольные, то матрица

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

ортогональная, т. е. сумма квадратов элементов одного ряда равна 1, а сумма произведений соответствующих элементов двух параллельных рядов равна 0. В этом случае a_1, a_2, a_3 являются косинусами углов α_1, α_2, α_3 масштабного вектора $\boldsymbol{e}'_1=\overrightarrow{O'E'_1}$ в системе $Oxyz$; b_1, b_2, b_3 — косинусы углов β_1, β_2, β_3 масштабного вектора $\boldsymbol{e}'_2=\overrightarrow{O'E'_2}$ в системе $Oxyz$; c_1, c_2, c_3 — косинусы углов γ_1, γ_2, γ_3 масштабного вектора $\boldsymbol{e}'_3=\overrightarrow{O'E'_3}$ в системе $Oxyz$, так что формулы преобразования принимают вид:

$$\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3+d_1,\\ y&=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3+d_2,\\ z&=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3+d_3. \end{aligned}$$

В частности, если производится только поворот, то

$$\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3,\\ y&=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3,\\ z&=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} x'&=x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1,\\ y'&=x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2,\\ z'&=x\cos\alpha_3+y\cos\beta_3+z\cos\gamma_3. \end{aligned}$$

Введем в пространстве декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$. Пусть M — произвольная точка пространства, не лежащая на оси Oz. Проведем через точку M прямую, перпендикулярную к плоскости Oxy, и точку пересечения этого перпендикуляра с плоскостью Oxy обозначим через Q.

Точку Q соединим с точкой O. Сферическими координатами точки M называются следующие числа:

1) расстояние r (полярный радиус) от точки M до начала координат O;

2) угол φ (долгота) от положительного направления оси Ox до луча OQ в системе координат Oxy (на этой координатной плоскости; см. стр. 20—21);

3) угол θ (широта) между лучами OM и OQ; при этом мы считаем $\theta > 0$, если аппликата z точки M положительна, и $\theta < 0$, если $z < 0$; если же $z = 0$, то $\theta = 0$.

Из определения сферических координат точки следует, что

$$0 < r < +\infty, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Выражения декартовых координат через сферические:

$$x = r\cos\varphi\cos\theta, \qquad y = r\sin\varphi\cos\theta, \qquad z = r\sin\theta;$$

обратно:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Цилиндрическими координатами точки M называются следующие числа:

полярные координаты ρ, φ, проекции Q точки M на плоскость Oxy относительно системы Oxy в этой координатной плоскости, и аппликата z точки M.

§ 1. Расстояние между двумя точками; направляющие косинусы вектора

1240. Построить точки $A(3,\ 1, -2)$, $B(-2,\ 1,\ 4)$, $C(-3,\ -2,\ 1)$, $D(1,\ 0,\ -4)$ в произвольной декартовой системе координат.

1241. Три ребра параллелепипеда, выходящих из одной вершины, приняты за единичные векторы осей координат. Найти в этой системе координаты всех его вершин.

1242. Дана точка $M(x,\ y,\ z)$. Найти координаты точки, симметричной с точкой M: 1) относительно начала координат; 2) относительно плоскости Oxy; 3) относительно оси Oz.

1243. Дана точка $M(x, y, z)$. Найти ее проекцию: 1) на ось Ox; 2) на плоскость Oyz.

1244. Определить расстояния точки $M(x, y, z)$ от осей координат.

1245. В третьем октанте найти точку, зная ее расстояния от трех осей координат: $d_x=5$; $d_y=3\sqrt{5}$; $d_z=2\sqrt{13}$.

1246. Найти направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{OP}=\{3, 2, 6\}$.

1247. Луч образует с двумя осями координат углы в $60°$. Под каким углом наклонен он к третьей оси?

1248. Вычислить координаты точки M, зная, что вектор $\overrightarrow{OM}$ наклонен к оси Ox под углом $45°$, а к оси Oz — под углом $60°$ и что длина его равна 8.

1249. Найти углы φ_1, φ_2, φ_3, образуемые вектором $\overrightarrow{OB}=\{6, 2, 9\}$ с плоскостями координат Oyz, Ozx, Oxy.

1250. Луч, выходящий из начала координат, образует с осями координат углы α, β, γ. Найти направляющие косинусы проекции этого луча на плоскость Oxy.

1251*. Два луча, выходящие из начала координат, образуют с осями координат углы α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2. Найти направляющие косинусы биссектрисы угла между этими лучами.

1252. Из начала координат выходят два луча OM_1 и OM_2, образующие с осями координат углы α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2. Найти направляющие косинусы луча OM, выходящего из начала координат и перпендикулярного к обоим данным лучам при условии, что тройка лучей OM_1, OM_2, OM имеет ту же ориентацию, как и тройка осей координат Ox, Oy, Oz.

1253. Доказать, что если плоскость отсекает на осях координат отрезки, соответственно равные a, b и c, то длина перпендикуляра (p), опущенного на эту плоскость из начала координат, удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}.$$

1254. Найти расстояние d между двумя точками A и B в каждом из следующих случаев:

1) $A(3, 5, 1)$, $B(7, 8, 4)$;

2) $A(-3, 0, 4)$, $B(-2, -4, 6)$.

1255. На оси Oy найти точку, равноудаленную от двух точек $A(3, 1, 0)$ и $B(-2, 4, 1)$.

1256. Найти в плоскости Oxz точку, равноудаленную от трех точек $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(3, 1, -1)$.

1257. Даны четыре точки $A(1, 2, 3)$, $B(5, 2, 3)$, $C(2, 5, 3)$, $D(1, 2, -1)$. Найти центр и радиус сферы, проходящей через эти точки.

1258. На плоскостях координат найти точки, которые вместе с началом координат служили бы вершинами правильного тетраэдра с ребрами, равными единице.

1259. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$, если его начало находится в точке $A(-2, 1, 3)$, а конец в точке $B(0, -1, 2)$.

1260. Начало вектора находится в точке $A(3, 2, 7)$. Найти его конец, зная, что длина вектора AB равна 15, а углы между этим вектором и осями координат удовлетворяют соотношению $\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=3:4:5$.

1261. Начало вектора находится в точке $A(2, -1, 5)$. Длина вектора равна 11. Найти конец этого вектора, зная, что первые две его координаты равны соответственно $x=7$, $y=6$.

1262. Найти координаты точки M, зная, что она находится от точки $A(0, 0, 12)$ на расстоянии, равном 7, и что вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет направляющие косинусы $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{6}{7}$.

1263. Найти угол между лучом, лежащим в плоскости Oxy и образующим с осью Ox угол 30°, и лучом, лежащим в плоскости Oxz и образующим с осью Ox угол 60°.

1264. Вершины треугольника находятся в точках $A(2, -1, 3)$, $B(4, 0, 1)$, $C(-10, 5, 3)$. Найти направляющие косинусы биссектрисы угла B.

1265. Определить внутренние углы треугольника, вершины которого находятся в точках $A(1, 2, -4)$, $B(4, 0, -10)$, $C(-2, 6, 8)$.

1266. Найти угол между биссектрисами углов xOz и yOz.

1267. Найти направление прямой, одновременно перпендикулярной к оси Oz и к прямой, проходящей через две точки $A(1, -1, 4)$, $B(-3, 2, 4)$.

1268. На осях координат отложены от начала координат отрезки, соответственно равные 1, 2, 3; концы этих отрезков соединены прямыми. Определить площадь полученного таким образом треугольника.

1269. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(-1, 0, -1)$, $B(0, 2, -3)$ и $C(4, 4, 1)$.

1270. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(3, 0, 4)$, $B(1, 2, 3)$, $C(9, 6, 4)$. Найти:

1) четвертую вершину;
2) точку пересечения диагоналей;
3) угол при вершине B;
4) длину диагонали AC;
5) площадь параллелограмма.

1271. Вычислить объем параллелепипеда, зная, что одна из его вершин находится в начале координат, а концы ребер, выходящих из этой вершины, в точках $(2, 3, 6)$, $(8, 4, 1)$ и $(2, -2, 1)$.

§ 2. Деление отрезка в данном отношении

1272. Найти точку, делящую отрезок M_1M_2, концы которого $M_1(-3, 2, 4)$ и $M_2(6, 0, 1)$, в отношении: 1) $\lambda = 2$; 2) $\lambda = -\frac{3}{4}$. Система координат аффинная.

1273. На прямой, проходящей через точки $M_1(1, 2, 4)$ и $M_2(-1, 4, 3)$, найти точку, лежащую в плоскости Oxz. Система координат аффинная.

1274. Отрезок AB разделен на пять равных частей; известна первая точка деления $C(3, -5, 7)$ и последняя $F(-2, 4, -8)$. Определить координаты концов отрезка и остальных точек деления.

1275. Даны две вершины треугольника: $A(-4, -1, 2)$ и $B(3, 5, -16)$. Найти третью вершину C, зная, что середина стороны AC лежит на оси Oy, а середина стороны BC — на плоскости Oxz.

1276. Найти отношение, в котором каждая из плоскостей координат делит отрезок AB: $A(2, -1, 7)$ и $B(4, 5, -2)$.

1277. Даны две прямые: одна из них проходит через точки $A(-3, 5, 15)$ и $B(0, 0, 7)$, а другая через точки $C(2, -1, 4)$ и $D(4, -3, 0)$. Узнать, пересекаются ли эти прямые, и если пересекаются, то найти точку пересечения.

1278. Даны две точки $A(8, -6, 7)$ и $B(-20, 15, 10)$. Установить, пересекает ли прямая AB какую-нибудь из осей координат.

1279.* Доказать, что прямые, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам. Доказать, что в этой же точке пересекаются прямые, соединяющие вершины тетраэдра с центрами тяжести противоположных граней. Найти отношение, в котором эта точка делит отрезки указанных прямых.

1280.* В каком отношении плоскость, проведенная через концы трех ребер параллелепипеда, исходящих из одной точки, делит диагональ, исходящую из этой же точки?

1281.* Вершины тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ соединены с произвольно взятой точкой K. Пусть прямые A_1K, A_2K, A_3K, A_4K пересекаются с плоскостями противолежащих граней $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ соответственно в точках A_1', A_2', A_3', A_4'. Показать, что

$$\frac{\overrightarrow{KA_1'}}{\overrightarrow{A_1A_1'}}+\frac{\overrightarrow{KA_2'}}{\overrightarrow{A_2A_2'}}+\frac{\overrightarrow{KA_3'}}{\overrightarrow{A_3A_3'}}+\frac{\overrightarrow{KA_4'}}{\overrightarrow{A_4A_4'}}=1.$$

§ 3. Сферические и цилиндрические координаты

1282. Найти сферические координаты точек $A(8, 4, 1)$, $B(-2, -2, -1)$, $C(0, -4, 3)$, $D(1, -1, -1)$, $E(0, 1, 0)$.

1283. Найти сферические координаты точки M, зная, что луч OM образует с осями Ox и Oy углы, соответственно равные $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$, и что третья координата точки $z=-1$.

1284. Найти декартовы координаты точки, лежащей на шаре радиуса 1, зная ее широту $\theta=+45°$ и долготу $\varphi=330°$.

1285. Найти расстояние между двумя точками, лежащими на поверхности шара радиуса r, зная широту и долготу каждой из этих точек (расстояние измеряется по дуге большого круга, соединяющей данные точки).

1286. Найти цилиндрические координаты точек по их декартовым координатам $A(3, 4, 5)$, $B(1, -1, -1)$, $C(-6, 0, 8)$.

1287. Найти цилиндрические координаты точки M, зная, что луч OM составляет с осями координат углы 60°, 60° и 135° и что длина отрезка $OM=1$.

1288. Найти угол вектора $\overrightarrow{OM}$ с осью Ox, зная цилиндрические координаты ρ, φ и h точки M.

§ 4. Преобразование координат

1289. Написать формулы перехода от одной системы координат к другой, если единичными векторами первой системы являются три ребра параллелепипеда, выходящие из одной вершины, а единичными векторами другой системы соответственно параллельные им ребра параллелепипеда, выходящие из противоположной вершины.

1290. Написать формулы перехода от одной системы координат к другой, если единичными векторами первой системы являются три ребра параллелепипеда, выходящие из одной вершины, а единичными векторами второй системы отрезки, соединяющие центр параллелепипеда с центрами граней, проходящих через концы ребер, служащих единичными векторами первой системы.

1291. Даны две системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$. По отношению к первой системе начало второй находится в точке $O'(2, 1, 3)$, а единичные векторы второй системы суть

$$\mathbf{e}_1'\{2, 4, 1\},\ \mathbf{e}_2'\{0, 4, 4\},\ \mathbf{e}_3'\{1, 1, 0\};$$

1) написать выражения координат точек относительно первой системы через их координаты во второй системе;

2) выразить координаты точек относительно второй системы через их координаты в первой системе;

3) найти координаты начала O и единичных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ первой системы относительно второй.

1292. Координаты x, y, z точек в системе $Oxyz$ выражаются через координаты x', y', z' этих точек в системе $O'x'y'z'$ соотношениями

$$x = -2x' - y' - z' - 1,\ y = -y' - z',\ z = x' + 3y' + z' + 1;$$

1) выразить координаты x', y', z' через координаты x, y, z;

2) найти координаты начала O' и единичных векторов $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ второй системы относительно первой;

3) найти координаты начала O и единичных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ первой системы относительно второй.

1293. За единичные векторы первой системы координат приняты три ребра OA, OB, OC тетраэдра $OABC$, выходящие из одной точки O, а за единичные векторы второй системы медианы OD, OE, OF граней BOC, COA, AOB этого тетраэдра. Найти координаты вершин тетраэдра во второй системе.

1294. За единичные векторы e_1, e_2, e_3 системы координат приняты три ребра OA, OB, OC параллелепипеда, выходящие из одной точки O, за единичные векторы e_1', e_2', e_3' второй системы — соответственно диагонали граней BOC, COA, AOB, выходящие из точки O. Найти координаты центров граней параллелепипеда в обеих системах.

1295. Три ребра OA, OB, OC параллелепипеда, выходящие из одной точки, приняты за единичные векторы e_1, e_2, e_3 первой системы, а векторы, соединяющие точку O с центрами граней параллелепипеда, не содержащих точку O и содержащих соответственно точки A, B, C, за единичные векторы e_1', e_2', e_3' второй системы. Найти координаты вершин параллелепипеда в старой и новой системах.

1296*. Две тройки векторов e_1, e_2, e_3 и $\overset{*}{e}_1$, $\overset{*}{e}_2$, $\overset{*}{e}_3$ называются взаимными, если

$$e_i\overset{*}{e}_k = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k; \\ 1, & \text{если } i = k. \end{cases}$$

Найти координаты $\overset{*}{x}_1$, $\overset{*}{x}_2$, $\overset{*}{x}_3$ вектора a в системе $\overset{*}{e}_1$, $\overset{*}{e}_2$, $\overset{*}{e}_3$, зная его координаты x_1, x_2, x_3 во взаимной системе e_1, e_2, e_3.

1297. Даны две системы координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ с общим началом O. Система $Oxyz$ является прямоугольной. За положительное направление оси Ox' второй системы принимается биссектриса угла xOz между положительными направлениями осей Ox и Oz; за положительное направление оси Oy' принимается биссектриса угла yOz между положительными направлениями осей Oy и Oz. Ось Oz' перпендикулярна к осям Ox' и Oy', и ее положительное направление выбрано так, чтобы обе системы $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ были одинаково ориентированы. Единица масштаба для всех осей Ox', Oy', Oz' одинакова и совпадает с единичным отрезком системы $Oxyz$. Найти выражения для координат точек в первой системе через их координаты во второй системе.

1298. Даны две системы координат: $Oxyz$ с углами между осями по $60°$ и $Ox'y'z'$ с углами между осями по $90°$ с общим началом O и одинаковыми по длине единичными векторами по всем осям обеих систем. Написать формулы перехода от косоугольной системы координат $Oxyz$ к прямоугольной $Ox'y'z'$, если оси Ox и Ox' обеих систем совпадают, ось Oy' лежит в плоскости Oxy и образует с осью Oy' угол 30°, а лучи, определяющие положительные направления осей Oz и Oz', лежат по одну сторону от плоскости Oxy.

1299. Даны две системы координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ с общим началом O и одинаковыми по длине единичными векторами по всем осям обеих систем. Первая система прямоугольная; положительное направление оси Ox' второй системы есть биссектриса угла xOz, положительное направление оси Oy' — биссектриса угла yOz; ось Oz' направлена вдоль оси Ox и ее положительное направление выбрано так, чтобы системы были одинаково ориентированы. Выразить координаты точек в первой системе через их координаты во второй.

1300. Даны две системы координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ с общим началом O и одинаковыми по длине единичными векторами по всем осям обеих систем. Первая система прямоугольная; ось Oz' второй системы совпадает с осью Oz первой, а оси Ox' и Oy' суть соответственно биссектрисы углов xOz и yOz. Найти формулы перехода от первой системы ко второй.

1301. Даны две системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $Ox_1'x_2'x_3'$ с общим началом O и одинаковыми по длине масштабными векторами по всем осям обеих систем. Косинусы углов между осями первой системы суть соответственно

$$\cos(x_1Ox_2)=\omega_{12},\quad \cos(x_2Ox_3)=\omega_{23},\quad \cos(x_3Ox_1)=\omega_{31}.$$

Косинусы углов между осями первой и второй систем даны таблицей:

	Ox_1'	Ox_2'	Ox_3'
Ox_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
Ox_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
Ox_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}.

Написать формулы, связывающие координаты x_1, x_2, x_3 и x_1', x_2', x_3' одной и той же точки M в обеих системах.

1302. Косинусы углов между старыми осями Ox, Oy, Oz и новыми Ox', Oy', Oz' двух прямоугольных систем координат с общим началом O даны таблицей:

$$\begin{array}{cccc} & Ox' & Oy' & Oz' \\ Ox & -\frac{11}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{2}{3} \\ Oy & -\frac{2}{15} & -\frac{14}{15} & -\frac{1}{3} \\ Oz & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}. \end{array}$$

Написать формулы перехода от одной системы к другой.

1303. Даны две прямоугольные системы координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ с общим началом O. Ось Ox' второй системы проходит в первом октанте и образует с осями Ox и Oy углы по 60°; ось Oy' лежит в плоскости Oxy и образует с осью Oy острый угол; ось Oz' направлена так, что обе системы одинаково ориентированы. Выразить координаты x, y, z произвольной точки относительно первой системы через ее координаты x', y', z' во второй.

1304. Найти формулы перехода от одной прямоугольной системы координат $Oxyz$ к другой $O'x'y'z'$, если начало второй системы находится в точке $O'(1, 2, 3)$ и $(\widehat{Ox, O'x'}) = \arccos\frac{1}{3}$, $(\widehat{Ox, O'y'}) = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$, $(\widehat{Ox, O'z'}) < \frac{\pi}{2}$, $(\widehat{Oy, O'x'}) = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$, $(\widehat{Oy, O'y'}) > \frac{\pi}{2}$.

1305. Даны две прямоугольные системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$. Начало второй системы находится в точке $O'(2, 1, 2)$; ось $O'x'$ проходит через точку O, а ось $O'y'$ пересекает ось Oy в точке A. За положительное направление оси $O'x'$ принято направление вектора $\overrightarrow{O'O}$, за положительное направление оси $O'y'$ — направление вектора $\overrightarrow{O'A}$; положительное направление оси $O'z'$ выбрано так, чтобы обе системы были одинаково ориентированы. Выразить координаты x, y, z произвольной точки относительно первой системы через ее координаты x', y', z' во второй.

1306*. Найти формулы перехода от одной прямоугольной системы координат $Oxyz$ к другой $O'x'y'z'$ при условии, что начала этих систем различны, а концы единичных векторов соответствующих осей совпадают.

ГЛАВА XII

ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ

Всякая плоскость относительно общей декартовой системы координат определяется уравнением первой степени относительно координат x, y, z, т. е. уравнением вида

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

где A, B, C не равны нулю одновременно. Обратно, всякое такое уравнение определяет плоскость. Это уравнение называется общим уравнением плоскости.

Если плоскость задана своим общим уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

то для координат всех точек, лежащих по одну сторону от нее,

$$Ax+By+Cz+D>0,$$

а для координат всех точек, лежащих по другую сторону,

$$Ax+By+Cz+D<0.$$

Соответствующие полупространства будем называть «положительным» и «отрицательным» полупространствами. При умножении левой части общего уравнения плоскости на отрицательное число положительное полупространство становится отрицательным, и наоборот.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ параллельно двум неколлинеарным векторам $\boldsymbol{a}=\{l_1, m_1, n_1\}$ и $\boldsymbol{b}=\{l_2, m_2, n_2\}$, записывается так:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

или

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=0,$$

где $\boldsymbol{r}_1$ — радиус-вектор точки M_1.

В параметрической форме:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b},$$

или в координатах

$$\begin{aligned} x &= x_1 + ul_1 + vl_2, \\ y &= y_1 + um_1 + vm_2, \\ z &= z_1 + un_1 + vn_2. \end{aligned}$$

Здесь u и v — общие декартовы координаты точки M плоскости относительно системы координат с началом в точке M_1 и масштабными векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a} = \{l, m, n\}$, неколлинеарному вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, пишется в виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a} = 0,$$

где $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ — соответственно радиусы-векторы точек M_1 и M_2. В параметрической форме:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + u\boldsymbol{a} + v(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1),$$

или в координатах

$$\begin{aligned} x &= x_1 + ul + v(x_2 - x_1), \\ y &= y_1 + um + v(y_2 - y_1), \\ z &= z_1 + un + v(z_2 - z_1). \end{aligned}$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, записывается так:

$$\begin{vmatrix} x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3) = 0,$$

где $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ — соответственно радиусы-векторы точек M_1, M_2, M_3.

В параметрической форме:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_3 + u(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3) + v(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3),$$

или в координатах

$$\begin{aligned} x &= x_3 + u(x_1 - x_3) + v(x_2 - x_3), \\ y &= y_3 + u(y_1 - y_3) + v(y_2 - y_3), \\ z &= z_3 + u(z_1 - z_3) + v(z_2 - z_3). \end{aligned}$$

Уравнение плоскости в отрезках таково:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

где a, b, c—отрезки, отсекаемые плоскостью соответственно на осях Ox, Oy, Oz.

Необходимым и достаточным условием того, что две плоскости, заданные общими уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

пересекаются, параллельны или совпадают, приведены в следующей таблице:

Расположение плоскостей	Условие
Пересекаются	Ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ равен 2
Параллельны	Ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ равен 1 Ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$ равен 2
Совпадают	Ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$ равен 1

Необходимым и достаточным условием совпадения двух плоскостей является пропорциональность всех соответствующих коэффициентов их общих уравнений, т. е.

$$A_1=\lambda A_2,\quad B_1=\lambda B_2,\quad C_1=\lambda C_2,\quad D_1=\lambda D_2,$$

где $\lambda\neq 0$, или

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2),$$

где $\lambda\neq 0$ (тождество относительно x, y, z).

Необходимым и достаточным условием параллельности двух плоскостей является пропорциональность соответствующих коэффициентов при x, y и z:

$$A_1=\lambda A_2,\quad B_1=\lambda B_2,\quad C_1=\lambda C_2,\ \text{причем}\ D_1\neq\lambda D_2.$$

Необходимым и достаточным условием того, что три плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

имеют только одну общую точку, является условие

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пучком плоскостей называется множество всех плоскостей, проходящих через одну прямую (собственный пучок), или множество всех параллельных между собой плоскостей (несобственный пучок).

Если

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

— две пересекающиеся плоскости, то уравнение

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

где α и β не равны нулю одновременно, определяет плоскость пучка, заданного двумя начальными плоскостями. Обратно, любая плоскость этого пучка может быть определена таким уравнением.

Если

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

— две параллельные плоскости, то уравнение

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

где α и β не равны нулю одновременно, определяет плоскость, параллельную двум данным, если только в этом уравнении числа $\alpha A_1+\beta A_2$, $\alpha B_1+\beta B_2$, $\alpha C_1+\beta C_2$ одновременно не обращаются в нуль. Обратно, любая плоскость, параллельная двум данным, может быть определена уравнением указанного вида.

Связкой плоскостей называется множество всех плоскостей, проходящих через одну точку (собственная связка), или множество всех плоскостей, параллельных одной прямой (несобственная связка).

Если

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

— три плоскости, имеющие только одну общую точку, то уравнение

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+$$
$$+\gamma(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)=0,$$

где α, β, γ не равны нулю одновременно, определяет плоскость связки, заданной тремя начальными плоскостями. Обратно, любая плоскость связки может быть задана уравнением указанного вида.

Если начальные плоскости параллельны одной прямой, но не принадлежат одному пучку, то линейная комбинация их уравнений определяет плоскость связки, к которой принадлежат три данные плоскости, если только в указанном уравнении коэффициенты при x, y, z одновременно в нуль не обращаются. Обратно, всякая плоскость указанной несобственной связки может быть определена линейной комбинацией уравнений плоскостей, определяющих эту связку.

Необходимым и достаточным условием принадлежности четырех плоскостей

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,$$
$$A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0$$

к одной связке является равенство

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0.$$

В случае прямоугольной системы координат вектор $\{A, B, C\}$ является вектором, перпендикулярным к плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Косинусы углов между плоскостями, заданными в прямоугольной системе координат уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

определяются соотношениями

$$\cos\varphi_{1,2}=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Равенство

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

есть необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух плоскостей, заданных общими уравнениями относительно декартовой прямоугольной системы координат.

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax+By+$ $+Cz+D=0$ в прямоугольной системе координат определяется соотношением

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Уравнение

$$Ax+By+Cz+D=0$$

плоскости в прямоугольной системе координат называется нормальным, если

$$A^2+B^2+C^2=1;$$

в этом случае A, B, C — косинусы углов единичного вектора $\{A, B, C\}$, перпендикулярного к плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, с осями координат, а $|D|$ — расстояние от начала координат до этой плоскости.

Если плоскость не проходит через начало координат и α, β, γ — углы луча с осями Ox, Oy, Oz, который выходит из начала координат, перпендикулярен к плоскости и пересекает эту плоскость, то нормальное уравнение плоскости имеет вид:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.$$

Нормальное уравнение в векторной форме имеет вид:

$$\boldsymbol{n}^0\boldsymbol{r}+D=0,$$

где $\boldsymbol{n}^0$ — единичный вектор нормали к плоскости, а $|D|$ — расстояние от начала координат до плоскости.

Общее уравнение плоскости в векторной форме имеет вид:

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}+D=0,$$

где $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$ — вектор, нормальный к этой плоскости.

Расстояние d от точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ до плоскости $\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}+D=0$ определяется соотношением

$$d=\frac{|\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_0+D|}{|\boldsymbol{n}|};$$

если же плоскость задана нормальным уравнением

$$\boldsymbol{n}^0\boldsymbol{r}+D=0,$$

то

$$d=|\boldsymbol{n}^0\boldsymbol{r}_0+D|.$$

Косинусы углов между плоскостями

$$\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{r}+D_1=0, \qquad \boldsymbol{n}_2\boldsymbol{r}+D_2=0$$

определяются формулой

$$\cos\varphi_{1,2}=\pm\frac{\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|}.$$

П р я м а я, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, параллельно вектору $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$ (направляющий вектор прямой), определяется уравнениями:

$$x=x_0+lt, \qquad y=y_0+mt, \qquad z=z_0+nt$$

(параметрические уравнения прямой), или

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

(канонические уравнения прямой), или в векторной форме:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t,$$

где r_0 — радиус-вектор точки M_0. Параметр t в уравнениях прямой есть отношение $\frac{\overrightarrow{M_0M}}{a}$, т. е. координата точки M на оси координат, где началом служит точка M_0, а a — масштабным вектором.

Если прямая задана двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то параметрические уравнения прямой пишутся так:

$$\begin{aligned} x-x_1&=t(x_2-x_1),\\ y-y_1&=t(y_2-y_1),\\ z-z_1&=t(z_2-z_1); \end{aligned}$$

канонические:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

или в векторной форме:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+t(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1),$$

где $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ — соответственно радиусы-векторы точек M_1 и M_2.

Необходимое и достаточное условие того, что две прямые

$$\left.\begin{aligned} x&=x_1+l_1t,\\ y&=y_1+m_1t,\\ z&=z_1+n_1t; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x&=x_2+l_2t,\\ y&=y_2+m_2t,\\ z&=z_2+n_2t \end{aligned}\right\}$$

лежат в одной плоскости, пишется в виде:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

или в векторной форме:

$$(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=0,$$

где $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ — радиусы-векторы каких-либо точек, лежащих соответственно на первой и второй прямых, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — векторы, соответственно параллельные этим прямым.

Условие параллельности (или совпадения) двух прямых

$$\begin{aligned} x&=x_1+l_1t, \qquad & x&=x_2+l_2t,\\ y&=y_1+m_1t, & y&=y_2+m_2t,\\ z&=z_1+n_1t; & z&=z_2+n_2t \end{aligned}$$

имеет вид:

$$l_1=\lambda l_2, \quad m_1=\lambda m_2, \quad n_1=\lambda n_2, \quad \lambda\neq 0.$$

Условие перпендикулярности в прямоугольной системе координат:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

Углы между двумя прямыми в прямоугольной системе координат определяются соотношениями:

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{ab}{|a|\,|b|} = \pm\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ до прямой

$$x=x_1+lt,\qquad y=y_1+mt,\qquad z=z_1+nt$$

определяется в прямоугольной системе координат соотношением

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ n & l\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ l & m\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

или в векторной форме:

$$d=\frac{\sqrt{[(r_1-r_0)\,a]^2}}{\sqrt{a^2}},$$

где r_0 и r_1 — соответственно радиусы-векторы точек M_0 и M_1.

Кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

$$\begin{aligned} x&=x_1+l_1t, & x&=x_2+l_2t,\\ y&=y_1+m_1t, & y&=y_2+m_2t,\\ z&=z_1+n_1t; & z&=z_2+n_2t \end{aligned}$$

определяется в прямоугольной системе координат соотношением:

$$d=\frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & l_1\\ n_2 & l_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l_1 & m_1\\ l_2 & m_2\end{vmatrix}^2}},$$

или в векторной форме:

$$d=\frac{|(r_2-r_1)\,ab|}{\sqrt{[ab]^2}},$$

если прямые заданы уравнениями

$$r=r_1+at,\quad r=r_2+bt.$$

Прямая может быть также задана уравнениями

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0 \end{aligned}$$

двух плоскостей, пересекающихся по этой прямой. В этом случае вектором, коллинеарным данной прямой, будет вектор

$$a=\left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\right\}.$$

Для составления параметрических уравнений прямой, заданных уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

двух плоскостей, пересекающихся по этой прямой, надо найти на этой прямой какую-нибудь точку; для этого надо найти какое-нибудь одно решение указанной системы; если, например,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то, придавая z произвольное значение $z=z_0$ (например, $z=0$) из системы

$$A_1x+B_1y+C_1z_0+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z_0+D_2=0,$$

найдем значения двух других координат: $x=x_0$, $y=y_0$. После этого параметрические уравнения прямой запишутся в виде:

$$x-x_0=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} t,$$
$$y-y_0=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} t,$$
$$z-z_0=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} t,$$

а канонические

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Необходимым и достаточным условием того, что плоскость

$$Ax+By+Cz+D=0$$

и прямая

$$x=x_0+lt, \qquad y=y_0+mt, \qquad z=z_0+nt$$

пересекаются, параллельны или прямая лежит на плоскости, приведены в следующей таблице:

Взаимное расположение прямой и плоскости	Условие
Пересекаются	$Al+Bm+Cn\neq 0$
Параллельны	$Al+Bm+Cn=0$ $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$
Прямая лежит на плоскости	$Al+Bm+Cn=0,$ $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$

Угол между прямой

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt$$

и плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

в прямоугольной системе координат определяется из соотношения

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямой и плоскости в прямоугольной системе координат имеет вид:

$$A = \lambda l, \quad B = \lambda m, \quad C = \lambda n,$$

где $\lambda \neq 0$.

Если три плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$$

имеющие только одну общую точку, принять за координатные плоскости $O'y'z'$, $O'z'x'$, $O'x'y'$ новой системы координат, а точку $E'(x_0, y_0, z_0)$ за новую единичную точку этой системы, то координаты x', y', z' любой точки M относительно этой (новой) системы через координаты x, y, z той же точки в старой системе выражаются соотношениями:

$$x' = \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1},$$
$$y' = \frac{A_2x + By + C_2z + D_2}{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2},$$
$$z' = \frac{A_3x + B_3y + C_3z + D_3}{A_3x_0 + B_3y_0 + C_3z_0 + D_3}.$$

Если в пространстве заданы четыре точки $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$, образующие тетраэдр, и задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то числа

$$\alpha = \frac{[0\ 2\ 3\ 4]}{[1\ 2\ 3\ 4]}, \quad \beta = \frac{[0\ 1\ 4\ 3]}{[1\ 2\ 3\ 4]}, \quad \gamma = \frac{[0\ 1\ 2\ 4]}{[1\ 2\ 3\ 4]}, \quad \delta = \frac{[0\ 1\ 3\ 2]}{[1\ 2\ 3\ 4]},$$

где

$$[0\ 2\ 3\ 4] = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, \quad [1\ 2\ 3\ 4] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

и т. д., называются **барицентрическими координатами** точки M_0 относительно тетраэдра $M_1M_2M_3M_4$.

§ 1. Составление уравнения плоскости по различным ее заданиям. Расположение точек относительно плоскости. Условие параллельности плоскостей

1307. Выбрав в пространстве произвольную аффинную систему координат, построить плоскости:

1) $x-2y+4z-12=0$;	6) $2y-3z=0$;
2) $3x-5z+4=0$;	7) $x+z-3=0$;
3) $2x-2y+3z=0$;	8) $6x-1=0$;
4) $x+2y-7=0$;	9) $y+4=0$.
5) $3x+5y=0$;	

1308. В тетраэдр, ограниченный плоскостями координат и плоскостью $2x-3y+4z+18=0$, вписан куб так, что одна из его вершин лежит в начале координат, три ребра, выходящих из этой вершины, направлены по осям координат, а вершина, противоположная началу координат, лежит в данной плоскости. Определить длину ребра куба.

1309. Найти векторы, параллельные линиям пересечения плоскости $2x+y-7z+4=0$ с координатными плоскостями. Система координат аффинная.

1310. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки:

1) $M_1(2, 3, 1)$, $M_2(3, 1, 4)$, $M_3(2, 1, 5)$;

2) $M_1(2, 0, -1)$, $M_2(-2, 4, 1)$, $M_3(0, 2, -1)$.

Система координат аффинная.

1311. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через точки $M_1(2, 1, 1)$ и $M_2(-3, 0, 4)$. Система координат аффинная.

1312. Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $(2, 6, -3)$ параллельно плоскостям координат. Система координат аффинная.

1313. Составить уравнение плоскости, отсекающей на осях Ox и Oy отрезки, соответственно равные 5 и -7, и проходящей через точку $(1, 1, 2)$.

1314. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(3, 5, -7)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки.

1315. Определить объем тетраэдра, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $2x+3y+6z-18=0$.

1316. Написать уравнение плоскости, проходящей через две точки $A(3, 5, 1)$ и $B(7, 7, 8)$ и отсекающей на осях Ox и Oy равные отрезки.

1317. Составить уравнение плоскости, отсекающей на осях аффинной системы координат отрезки, соответственно равные 3, 5 и -7.

1318. Определить отрезки, отсекаемые на осях координат плоскостью $x-y+7z-4=0$. Система координат аффинная.

1319. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $(2, -5, 1)$. Система координат аффинная.

1320. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(3, 7, 2)$ и параллельной двум векторам $\{4, 1, 2\}$ и $\{5, 3, 1\}$. Система координат аффинная.

1321. Составить уравнения плоскостей, проходящих через оси координат и параллельных вектору $\{2, 1, -4\}$.

1322. Написать уравнения плоскостей, проходящих через оси координат и через точку $(3, -5, 1)$.

1323. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и равноудаленной от точек $(2, 7, 3)$ и $(-1, 1, 0)$.

1324. Даны вершины тетраэдра $A(2, 1, 0)$, $B(1, 3, 5)$, $C(6, 3, 4)$, $D(0, -7, 8)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AB и через середину ребра CD.

1325. Даны вершины тетраэдра $A(5, 1, 3)$, $B(1, 6, 2)$, $C(5, 0, 4)$, $D(4, 0, 6)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AB параллельно ребру CD.

1326. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $(4, 5, 2)$ и $(6, 2, 4)$ и параллельной вектору $\{1, 2, 1\}$. Система координат аффинная.

1327. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $(1, 7, 8)$, $(2, -6, -6)$ и параллельной оси Oz. Система координат аффинная.

1328. Даны четыре вершины тетраэдра $A(3, 5, -1)$, $B(7, 5, 3)$, $C(9, -1, 5)$, $D(5, 3, -3)$. Написать уравнения плоскостей, равноудаленных от всех вершин тетраэдра.

1329. Составить параметрические уравнения плоскости, проходящей через точку $(2, 3, -5)$ и параллельной векторам $\{-5, 6, 4\}$ и $\{4, -2, 0\}$.

1330. В плоскости, проходящей через три точки $A(2, 1, 3)$, $B(2, 4, 0)$, $C(-3, 0, 4)$, выбрана аффинная система координат с началом в точке A и единичными векторами $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1$ и $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{e}_2$. Найти:

1) пространственные координаты точки M, имеющей в плоскостной системе координаты $u=5$, $v=3$;

2) плоскостные координаты u и v точки пересечения данной плоскости с осью Oz.

1331. В плоскости $2x+3y-4z+12=0$ выбрана аффинная система координат, начало которой находится в точке C пересечения этой плоскости с осью Oz, а концы единичных векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ соответственно в точках A и B пересечения плоскости с осями Ox и Oy.

1) Найти пространственные координаты x, y, z точки E этой плоскости, плоскостные координаты которой $u=1$, $v=1$.

2) Написать в плоскостной системе координат уравнения прямых AB, BC и CA пересечения данной плоскости с координатными плоскостями пространственной системы.

3) Написать в плоскостной системе уравнение линии пересечения данной плоскости с плоскостью $5x+3z-8=0$.

1332. Написать общее уравнение плоскости по ее параметрическим уравнениям в каждом из следующих случаев:

1) $x=2+3u-4v,\quad y=4-v,\quad z=2+3u;$

2) $x=u+v,\quad y=u-v,\quad z=5+6u-4v.$

1333. Установить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают:

1) $2x+3y+4z-12=0,\qquad 3x-6y+1=0;$

2) $3x-4y+6z+9=0,\qquad 6x-8y-10z+15=0;$

3) $3x-2y-3z+5=0,\qquad 9x-6y-9z-5=0;$

4) $x+y+z-1=0,\qquad 2x+2y-2z+3=0;$

5) $2x-y-z-3=0,\qquad 10x-5y-5z-15=0.$

1334. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(3,\ -5,\ 1)$ и параллельной плоскости $x-2y+4z=0$. Система координат аффинная.

1335. Даны уравнения трех граней параллелепипеда $2x+3y+4z-12=0$, $x+3y-6=0$, $z+5=0$ и одна из его вершин $(6,\ -5,\ 1)$. Составить уравнения трех других граней параллелепипеда.

1336. Определить положение точек $A(-3,\ 3,\ 5)$, $B(0,\ -7,\ -4)$, $C(6,\ 5,\ 1)$, $D(-3,\ -5,\ 2)$, $E(4,\ -7,\ 10)$, $F(2,\ 6,\ 1)$ относительно плоскости $2x-3y+4z-5=0$.

1337. Даны две точки $A(3,\ 5,\ 1)$, $B(2,\ -6,\ 3)$. Найти отношение, в котором делит отрезок AB точка C пересечения прямой AB с плоскостью $2x-3y+6z-1=0$.

1338*. Три плоскости $A_kx+B_ky+C_kz+D_k=0$, $k=1,\ 2,\ 3$, образуют призму. При каком необходимом и достаточном условии точка $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ лежит внутри этой призмы?

1339*. При каком необходимом и достаточном условии точка $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ лежит между двумя параллельными плоскостями

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad Ax+By+Cz+E=0?$$

Система координат аффинная.

1340. При каком необходимом и достаточном условии плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ проходит между двумя параллельными ей плоскостями $Ax+By+Cz+E=0$, $Ax+By+Cz+F=0$? Система координат аффинная.

1341*. Даны пять точек: $A(3,\ 5,\ 1)$, $B(2,\ 7,\ 4)$, $C(1,\ 0,\ -2)$, $D(5,\ 10,\ 10)$, $E(0,\ 0,\ -5)$. Какие две из данных пяти точек нужно соединить отрезком, чтобы он пересек треугольник, имеющий своими вершинами остальные три точки?

§ 2. Угол двух плоскостей в пространстве; условие перпендикулярности плоскостей

1342. Найти косинусы углов между двумя плоскостями

1) $2x-y+3z=0,\quad x+4y-6z=0;$

2) $x+3y-4z+5=0,\quad 2x+2y+2z-7=0.$

1343. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $5x-2y+5z-10=0$ и образующую с плоскостью $x-4y-8z+12=0$ угол $45°$.

1344. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой пересечения плоскости $x-2y+4z-3=0$ с плоскостью Oxz.

1345. Найти основание перпендикуляра, опущенного из точки $(1,\ 3,\ 5)$ на прямую, по которой пересекаются плоскости $2x+y+z-1=0$, $3x+y+2z-3=0$.

1346. Составить уравнение плоскости, зная, что точка $P(2, 6, -4)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

1347. Даны две точки $A(3, -2, 1)$, $B(6, 0, 5)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку B и перпендикулярной к прямой AB.

1348. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, через точку $(1, 2, 3)$ и перпендикулярной к плоскости $x-y+2z-4=0$.

1349. Вычислить косинусы внутренних двугранных углов тетраэдра, образованного плоскостями координат и плоскостью $2x+3y+6z-12=0$.

1350*. Найти косинус того угла между двумя плоскостями $3x+y-2z+4=0$, $x-7y+2z=0$, в котором лежит точка $(1, 1, 1)$.

1351*. При каком необходимом и достаточном условии точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит в остром угле, образуемом двумя пересекающимися и не взаимно перпендикулярными плоскостями $A_kx+B_ky+C_kz+D_k=0$, $k=1, 2$?

1352*. Грани тетраэдра заданы уравнениями:

1) $2x-2y+z+2=0$, 3) $8x+4y+z-16=0$,

2) $x+y+z-5=0$, 4) $4x+3y=0$.

Вычислить косинус внутреннего двугранного угла тетраэдра, ребром которого служит линия пересечения первых двух плоскостей.

1353*. Проверить, что три плоскости $11x+10y+2z=0$, $3x+4y=0$, $x-y+z-1=0$ образуют призму, и вычислить косинус ее внутреннего двугранного угла, образованного первыми двумя плоскостями.

1354*. Три плоскости $A_kx+B_ky+C_kz+D_k=0$, $k=1, 2, 3$, образуют призму. При каком необходимом и достаточном условии все внутренние двугранные углы этой призмы будут острые? Система координат прямоугольная.

§ 3. Взаимное расположение трех плоскостей; пучок плоскостей; связка плоскостей

1355. Определить взаимное расположение плоскостей в каждой из нижеследующих троек плоскостей:

1) $2x-4y+5z-21=0$, $x-3z+18=0$,
$6x+y+z-30=0$;

2) $x+2y-3z=0,\quad 3x+6y-9z+10=0,$
$2x+4y-6z-1=0;$

3) $3x-y+2z+1=0,\quad 7x+2y+z=0,$
$15x+8y-z-2=0;$

4) $5x-2y+4=0,\ 3x+z-5=0,\quad 8x-2y+z+7=0;$

5) $6x+2y+12z-3=0,\quad 5y-7z-10=0,$
$3x+y+6z+12=0.$

1356. Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы три плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0:$$

1) имели одну общую точку;

2) проходили через одну прямую;

3) были попарно параллельны друг другу;

4) образовывали «призму», т. е. чтобы линия пересечения двух плоскостей была параллельна третьей плоскости;

5) две плоскости были параллельны, а третья их пересекала.

1357. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через линию пересечения плоскостей $2x+5y-6z+4=0$, $3y+2z+6=0$.

1358. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(-3,\ 1,\ 0)$ и через прямую $x+2y-z+4=0$, $3x-y+2z-1=0$. Система координат аффинная.

1359. Через линию пересечения плоскостей $6x-y+z=0$, $5x+3z-10=0$ провести плоскость, параллельную оси Ox.

1360. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+2y+3z-4=0$, $3x+z-5=0$ и отсекающей на осях Oy и Oz равные отрезки.

1361. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения двух плоскостей $2x-z=0$, $x+y-z+5=0$ и перпендикулярной к плоскости $7x-y+4z-3=0$.

1362. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $x+3y+5z-10=0$ и проходящей через линию пересечения данной плоскости с плоскостью Oxy.

1363. В пучке, определяемом плоскостями $2x+y-3z+2=0$ и $5x+5y-4z+3=0$, найти две перпендикулярные друг к другу плоскости, из которых одна проходит через точку $(4,\ -3,\ 1)$.

1364. В пучке, определяемом плоскостями $3x+y-2z-6=0$ и $x-2y+5z-1=0$, найти плоскости, перпендикулярные к этим плоскостям.

1365. Через линию пересечения плоскостей $x+5y+z=0$ и $x-z+4=0$ провести плоскость, образующую угол $\frac{\pi}{4}$ с плоскостью $x-4y-8z+12=0$.

1366. Через ось Oz провести плоскость, образующую с плоскостью $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ угол $\frac{\pi}{3}$.

1367. Даны уравнения граней тетраэдра

1) $x+2y+z+2=0$, 2) $x+y-1=0$,
3) $x-y-z=0$, 4) $3x+z+1=0$.

Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро, определяемое двумя первыми гранями, и через середину ребра, определяемого двумя последними гранями.

1368. Показать, что три плоскости $x+2y-z-4=0$, $3x-2y+3z-6=0$, $4y-3z+3=0$ образуют призму, и написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения первых двух граней призмы и параллельной ее третьей грани.

1369. Даны три плоскости: $2x+3y-4z+5=0$, $2x-z+3=0$, $x+y-z=0$. Через линию пересечения двух плоскостей провести плоскость так, чтобы линия ее пересечения с третьей плоскостью была перпендикулярна к линии пересечения первой и второй плоскостей.

1370. Даны уравнения граней тетраэдра:

1) $x+2y-3z-6=0$, 2) $2y+5z-4=0$,
3) $3x+z+1=0$, 4) $x+2y=0$.

Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро, определяемое первыми двумя гранями и параллельной противоположному ребру тетраэдра.

1371. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения трех плоскостей $x-y=0$, $x+y-2z+1=0$, $2x+z-4=0$ и

1) проходящей через ось Oy;
2) параллельной плоскости Oxz;
3) проходящей через начало координат и точку $(2, 1, 7)$.

1372. При каком необходимом и достаточном условии четыре плоскости $A_kx+B_ky+C_kz+D_k=0$, $k=1, 2, 3, 4$, принадлежат к одной связке? При каком условии эта связка будет собственной? Несобственной?

1373. При каком необходимом и достаточном условии четыре плоскости $A_kx+B_ky+C_kz+D_k=0$, $k=1, 2, 3, 4$, образуют тетраэдр? Система координат аффинная.

§ 4. Расстояние от точки до плоскости

1374. Определить расстояния точек $A(3, 5, 1)$, $B(7, -1, 2)$, $C(2, 0, 4)$ до плоскости $x+2y-2z+5=0$.

1375. Составить уравнения биссекторных плоскостей углов между двумя плоскостями $7x+y-6=0$, $3x+5y-4z+1=0$.

1376*. Составить уравнение биссекторной плоскости того угла между двумя плоскостями $3x+5y-4z+1=0$, $x-z-5=0$, в котором лежит начало координат.

1377. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ и отстоящих от нее на расстоянии d.

1378. Найти расстояние d между двумя плоскостями $Ax+By+Cz+D_1=0$ и $Ax+By+Cz+D_2=0$.

1379. Даны вершины тетраэдра $A(0, 0, 2)$, $B(3, 0, 5)$, $C(1, 1, 0)$ и $D(4, 1, 2)$. Вычислить длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

1380. Даны три плоскости $A_kx+B_ky+C_kz+D_k=0$, $k=1, 2, 3$. Найти расстояние от точки их пересечения до плоскости $A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0$.

1381. Составить уравнение плоскости, отстоящей от начала координат на расстоянии $\sqrt{29}$ и перпендикулярной к прямой, по которой пересекаются плоскости $2x-y+z=0$, $6x-y+7z-4=0$.

1382. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точки $(2, 3, 4)$ и от плоскости $2x+3y+z-17=0$.

1383. На оси Oy найти точки, равноудаленные от двух плоскостей $x+y-z+1=0$, $x-y+z-5=0$.

1384. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x+y-4z+5=0$ и отстоящей от точки $(1, 2, 0)$ на расстоянии $\sqrt{21}$.

1385. На линии пересечения двух плоскостей $2x-y+z-8=0$, $4x+3y-z+14=0$ найти точки, отстоящие от плоскости $2x+3y-6z-10=0$ на расстоянии 7.

1386. На прямой, по которой пересекается плоскость $2x-3y+4z-5=0$ с плоскостью Oxz, найти точки, отстоящие от плоскости $2x+y-z+3=0$ на расстоянии $\sqrt{6}$.

1387*. Составить уравнение плоскости, делящей пополам острый двугранный угол, образованный плоскостью $3x-4y+6z-2=0$ с плоскостью Oyz.

1388. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к вектору $\{l, m, n\}$ и отстоящей от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на расстоянии d.

1389. Написать уравнение плоскости, отсекающей на осях координат отрезки, пропорциональные числам 1, 2, 3, и отстоящей от точки (3, 5, 7) на расстоянии 4.

1390*. Внутри треугольника, отсекаемого от плоскости Oxy плоскостями $3x+2y+4z-7=0$, $2x-5y+1=0$, $5x+y-\sqrt{3}z+6=0$, найти точку, равноудаленную от этих плоскостей.

1391*. Найти центр и радиус шара, вписанного в тетраэдр, ограниченный плоскостями координат и плоскостью $11x-10y-2z-57=0$.

1392. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(5, 2, 0)$ и удаленной от точки $B(6, 1, -1)$ на расстояние 1 и от точки $C(0, 5, 4)$ на расстояние 3.

1393. Через линию пересечения плоскостей $x+28y-2z+17=0$, $5x+8y-z+1=0$ провести плоскости, отстоящие от начала координат на расстоянии 1.

1394. По отношению к системе координат $Oxyz$ координатные плоскости новой системы $O'x'y'z'$ заданы уравнениями

$$\begin{aligned} O'y'z'&: \quad x+1=0,\\ O'x'z'&: \quad 2x-y=0,\\ O'x'y'&: \quad x+2y+3z-6=0, \end{aligned}$$

а единичная точка E' новой системы имеет в старой системе координаты $E'(1, 3, 5)$. Выразить новые координаты произвольной точки M через ее старые координаты.

1395. Относительно системы координат $Oxyz$ плоскость $O'x'y'$ задана уравнением $2x+3y-6z+6=0$, а плоскости $O'y'z'$ и $O'x'z'$ совпадают соответственно с плоскостями Oyz

и Oxz. Написать выражения новых координат произвольной точки M через ее старые координаты, зная, что точка A в обеих системах имеет одни и те же координаты 2, 4, 6.

1396. Относительно прямоугольной системы координат $Oxyz$ даны уравнения координатных плоскостей новой системы:

$$\begin{aligned} O'y'z'&: \quad x+2y+5z+1=0,\\ O'x'z'&: \quad 2x-y+1=0,\\ O'x'y'&: \quad x+2y-z-1=0. \end{aligned}$$

Проверить, что эти плоскости взаимно перпендикулярны, и написать выражения новых прямоугольных координат произвольной точки M через ее старые координаты при условии, что старое начало O имеет в новой системе положительные координаты.

1397. Относительно прямоугольной системы координат $Oxyz$ даны координатные плоскости

$$\begin{aligned} O'y'z'&: \quad x+y+z-1=0,\\ O'x'z'&: \quad 2x-y-z+1=0,\\ O'x'y'&: \quad y-z+2=0 \end{aligned}$$

новой системы $O'x'y'z'$. Проверить, что эти плоскости взаимно перпендикулярны, и написать выражения новых прямоугольных координат произвольной точки M через ее старые координаты при условии, что точка, имеющая в старой системе координаты -1, -1, -1, будет в новой системе иметь положительные координаты.

§ 5. Различные способы задания прямой. Взаимное расположение прямых и плоскостей

1398. Составить уравнения прямой M_1M_2 в каждом из следующих случаев:

1) $M_1(2, 3, 1)$, $M_2(4, 6, 9)$;
2) $M_1(7, -1, 2)$, $M_2(5, -1, 4)$;
3) $M_1(1, 5, 1)$, $M_2(1, -5, 1)$.

Система координат аффинная.

1399. Составить параметрические уравнения прямых

1) $x-2y+4z=0$, $3x-2y+5z=0$;
2) $x+y-z+5=0$, $2x-y+2z-2=0$.

Система координат аффинная.

1400. Представить каждую из следующих прямых как линию пересечения плоскостей, параллельных осям Ox и Oy:

1) $x=3+5t, \quad y=7-4t, \quad z=-6+t;$
2) $x=-1+t, \quad y=1-t, \quad z=5t.$

1401. Установить, какие из следующих точек лежат на одной прямой:

1) $(3, 0, 1), \quad (0, 2, 4), \quad (-3, 4, 7);$
2) $(1, 2, 3), \quad (10, 8, 4), \quad (3, 0, 2);$
3) $(2, 6, 4), \quad (5, 7, 1), \quad (5, 7, 1).$

1402. Установить, какие из следующих точек $A(5, 8, 15)$, $B(-1, -1, -3)$, $C(5, 7, 1)$, $D\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$, $E(0, 0, 1)$ лежат на прямой

$$x=1+2t, \quad y=2+3t, \quad z=3+6t.$$

1403. Написать уравнения прямой:

1) проходящей через точку $(3, 5, 1)$ параллельно прямой

$$x=2+4t, \quad y=-3t, \quad z=-3;$$

2) проходящей через точку $(0, -5, 4)$ параллельно прямой

$$x+2y+6=0, \quad z=5.$$

1404. Найти проекцию прямой на плоскость Oxy в каждом из следующих случаев:

1) $5x+8y-3z+9=0, \quad 2x-4y+z-1=0;$
2) $\frac{x-3}{-5}=\frac{y-4}{6}=\frac{z-6}{8}.$

1405. Найти точки пересечения с плоскостями координат каждой из следующих прямых:

1) $6x+2y-z-9=0, \quad 3x+2y+2z-12=0;$
2) $x=6+2t, \quad y=-2+4t, \quad z=-5t.$

1406. Даны точки пересечения прямой с двумя координатными плоскостями $(0, y_1, z_1)$ $(x_2, 0, z_2)$. Вычислить координаты точки пересечения этой же прямой с третьей координатной плоскостью.

Установить, какие из следующих пар прямых скрещиваются, параллельны, пересекаются или совпадают; если прямые параллельны, написать уравнение плоскости, через них проходящей; если прямые пересекаются, написать уравнение содержащей их плоскости и найти их общую точку.

1407. 1) $x=1+2t,\quad y=7+t,\quad z=3+4t$ и
$x=6+3t,\quad y=-1-2t,\quad z=-2+t;$

2) $x=1+2t,\quad y=2-2t,\quad z=-t$ и
$x=-2t,\quad y=-5+3t,\quad z=4;$

3) $x=2+4t,\quad y=-6t,\quad z=-1-8t$ и
$x=7-6t,\quad y=2+9t,\quad z=12t;$

4) $x=1+9t,\quad y=2+6t,\quad z=3+3t$ и
$x=7+6t,\quad y=6+4t,\quad z=5+2t.$

1408. 1) $x+z-1=0,\quad x-2y+3=0$ и $3x+y-z+13=0,\quad y+2z-8=0;$

2) $2x+3y=0,\quad z-4=0$ и $x+z-8=0,\quad 2x+3z-7=0;$

3) $x+y+z-1=0,\quad 2x+3y+6z-6=0$ и $y+4z=0,\quad 3x+4y+7z=0;$

4) $3x+y-2z-6=0,\quad x-2y+5z-1=0$ и $41x-19y+52z-68=0,\quad 33x+4y-5z-63=0.$

1409. 1) $x=9t,\quad y=5t,\quad z=-3+t$ и

$$\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0; \end{cases}$$

2) $x=t,\quad y=-8-4t,\quad z=-3-3t$ и

$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x-y+2z=0; \end{cases}$$

3) $x=3+t,\quad y=-1+2t,\quad z=4$ и

$$\begin{cases} x-3y+z=0, \\ x+y-z+4=0; \end{cases}$$

4) $x=-2+3t,\quad y=-1,\quad z=4-t$

и

$$\begin{cases} 2y-z+2=0, \\ x-7y+3z-17=0. \end{cases}$$

1410. При каком необходимом и достаточном условии две прямые $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

и $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$, $A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0$ лежат в одной плоскости?

Установить в каждом из следующих случаев, лежит ли данная прямая в данной плоскости, параллельна плоскости или пересекает ее; в последнем случае найти точку пересечения прямой и плоскости.

1411.

Прямая	Плоскость
1) $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$,	$3x+5y-z-2=0$;
2) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$,	$3x-3y+2z-5=0$;
3) $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$,	$x+2y-4z+1=0$;
4) $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$,	$3x-y+2z-5=0$.

1412.

Прямая	Плоскость
1) $3x+5y-7z+16=0$, $2x-y+z-6=0$,	$5x-z-4=0$;
2) $2x+3y+6z-10=0$, $x+y+z+5=0$,	$y+4z+17=0$;
3) $x+2y+3z+8=0$, $5x+3y+z-16=0$,	$2x-y-4z-24=0$.

1413. Найти точку встречи прямой $x=2t$, $y=1-t$, $z=3+t$ с плоскостью $x+y+z-10=0$. Система координат аффинная.

1414. Составить уравнение прямой, лежащей в плоскости $y+2z=0$ и пересекающей прямые $x=1-t$, $y=t$, $z=4t$ и $x=2-t$, $y=4+2t$, $z=1$. Система координат аффинная.

1415. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $(3, -1, -4)$, пересекающей ось Oy и коллинеарной плоскости $y+2z=0$. Система координат аффинная.

1416*. Составить уравнения прямой, коллинеарной прямой $x-3y+z=0$, $x+y-z+4=0$ и пересекающей две прямые $x=3+t$, $y=-1+2t$, $z=4t$ и $x=-2+3t$, $y=-1$, $z=4-t$. Система координат аффинная.

1417*. Составить уравнения прямой, проходящей через начало координат и пересекающей две прямые $x=t$, $y=1-t$, $z=3+t$ и $x=2+2t$, $y=3-t$, $z=4+3t$. Система координат аффинная.

1418. Составить уравнения прямой, проходящей через точку (2, 3, 1) и пересекающей прямые $x+y=0$, $x-y+z+4=0$ и $x+3y-1=0$, $y+z-2=0$. Система координат аффинная.

1419*. При каком необходимом и достаточном условии прямая $x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$, $z=z_0+nt$ пересекает треугольник, вершины которого $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $k=1$, 2, 3. Система координат аффинная.

1420. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через прямую $x=3-2t$, $y=1+t$, $z=t$. Система координат аффинная.

1421. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(-3, 1, 0)$ и через прямую $x+2y-z+4=0$, $3x-y+2z-1=0$.

1422. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x=2+3t$, $y=-1+6t$, $z=4t$ и коллинеарной прямой $x=-1+2t$, $y=3t$, $z=-t$.

1423. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(-2, 3, 0)$ и через прямую $x=1$, $y=2+t$, $z=2-t$.

1424. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и коллинеарной линии пересечения двух плоскостей

$$x+4y-2z+7=0, \quad 3x+7y-2z=0.$$

Система координат аффинная.

1425*. При каком необходимом и достаточном условии отрезок прямой $x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$, $z=z_0+nt$ между двумя пересекающимися плоскостями $A_kx+B_ky+C_kz+D_k=0$, $k=1$, 2, лежит в остром угле, образованном этими плоскостями?

1426*. Проверить, что две прямые $x=1+2t$, $y=2t$, $z=t$ и $x=11+8t$, $y=6+4t$, $z=2+t$ пересекаются, и написать уравнения биссектрисы тупого угла между ними.

1427*. Через прямую $2x=y=2z$ провести плоскость p так, чтобы данная прямая была биссектрисой угла, образуемого линиями пересечения плоскости p с плоскостями $y=0$ и $x+y=0$.

§ 6. Угол между двумя прямыми; угол прямой и плоскости; условие перпендикулярности двух прямых; условие перпендикулярности прямой и плоскости

1428. Определить направляющие косинусы прямых

1) $\frac{x-1}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{12}$; 2) $\frac{x}{12}=\frac{y-7}{9}=\frac{z+3}{20}$.

1429. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $A(1, -5, 3)$ и образует с осями координат углы, соответственно равные 60°, 45° и 120°.

1430. Определить угол, образованный прямыми

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x}{2}=\frac{y-3}{9}=\frac{z+1}{6}.$$

1431. Вычислить углы, образованные противоположными ребрами тетраэдра с вершинами $A(3, -1, 0)$, $B(0, -7, 3)$, $C(-2, 1, -1)$, $D(3, 2, 6)$.

1432. Вычислить направляющие косинусы прямой

$$5x-6y+2z+21=0, \quad x-z+3=0.$$

1433. Определить угол между двумя прямыми:

$$\left.\begin{aligned} 3x-4y-2z=0,\\ 2x+y-2z=0 \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} 4x+y-6z-2=0,\\ y-3z+2=0. \end{aligned}\right\}$$

1434. Найти косинусы углов между прямыми

1) $x=3+t, \quad y=7-2t, \quad z=4+3t;$
$x=2+5t, \quad y=1-t, \quad z=1;$

2) $\left.\begin{aligned} 3x+y-z+1=0,\\ 3x-y+z=0 \end{aligned}\right\}$ и $\left.\begin{aligned} x-y+1=0,\\ 2x+2y-5z+1=0. \end{aligned}\right\}$.

1435. Найти угол между прямой $x=5+6t$, $y=1-3t$, $z=2+t$ и плоскостью $7x+2y-3z+5=0$.

1436. Найти угол между прямой $x+y-z=0$, $2x-3y+z=0$ и плоскостью $3x+5y-4z+2=0$.

1437. Составить уравнения проекции прямой $2x+y-z+4=0$, $x+y=0$ на плоскость Oxz.

1438. Составить уравнения проекции прямой $x=3+5t$, $y=-1+t$, $z=4+t$ на плоскость $2x-2y+3z-5=0$.

1439. Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на плоскость $Ax+By+Cz+D=0$.

1440. Из точки (3, —2, 4) опустить перпендикуляр на плоскость $5x+3y-7z+1=0$.

1441. Найти проекцию точки (1, 2, —3) на плоскость $6x-y+3z-41=0$.

1442. Найти точку, симметричную точке (2, 7, 1) относительно плоскости $x-4y+z+7=0$.

1443. Составить уравнения прямой, перпендикулярной к плоскости Oxz и пересекающей две прямые $x=t$, $y=-4+t$, $z=3-t$ и $x=1-2t$, $y=-3+t$, $z=4-5t$.

1444. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную к прямой $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-2}$.

1445. Найти точку, симметричную данной (4, 3, 10) относительно прямой $x=1+2t$, $y=2+4t$, $z=3+5t$.

1446. Найти прямую, проходящую через точку $M(0, 1, 1)$, образующую прямой угол с прямой $y+1=0$, $x+2z-7=0$ и пересекающую прямую $x-1=0$, $z+1=0$.

1447. Составить уравнения прямой, пересекающей ортогонально ось Oy и прямую $x=3+4t$, $y=1-t$, $z=2+5t$.

1448. Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки (3, 2, 1) на ось Ox.

1449. Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки (—1, 0, 4) на прямую $x=1+t$, $y=2t$, $z=4-t$.

1450. Провести через точку пересечения плоскости $x+y+z-1=0$ с прямой $y=1$, $z+1=0$ прямую, лежащую в этой плоскости и перпендикулярную к данной прямой.

§ 7. Расстояние от точки до прямой. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми

1451. Найти расстояние от точки (1, 3, 5) до прямой, по которой пересекаются плоскости $2x+y+z-1=0$, $3x+y+2z-3=0$.

1452. Найти расстояние от точки (1, 2, 5) до каждой из следующих прямых:

1) $x=t$, $y=1-2t$, $z=3+t$;
2) $x+y-z+2=0$, $4x-3z+3=0$.

1453. Найти уравнение и длину высоты треугольника, образуемого пересечением плоскости $3x-y+4z-12=0$

с координатными плоскостями, при условии, что вершина треугольника лежит на оси Oz.

1454. Найти кратчайшее расстояние между двумя прямыми:

1) $x=3+t,\ y=1-t,\ z=2+2t$ и
$$x=-t,\ y=2+3t,\ z=3t;$$
2) $x+y-z+1=0,\ x+y=0$ и $x-2y+3z-6=0,$
$$2x-y+3z-6=0;$$
3) $x+2y-z+1=0,\ 2x-3y+z-4=0$ и
$$x+y+z-9=0,\ 2x-y-z=0.$$

1455. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}.$$

1456. Найти кратчайшее расстояние между диагональю куба и непересекающей ее диагональю грани, если ребро куба равно 1.

§ 8. Векторные уравнения прямой и плоскости

1457. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и прямую $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$.

1458. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и перпендикулярной к прямой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$.

1459. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ и перпендикулярной к прямой пересечения двух плоскостей $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1=D_1,\ \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_2=D_2$.

1460. Найти точку пересечения прямой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$ с плоскостью $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}=D$.

1461. Найти точку пересечения прямой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$ с плоскостью $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{b}u+\boldsymbol{c}v$.

1462. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ и пересекающей две прямые $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_k+\boldsymbol{a}_kt$, $k=1,\ 2$.

1463. Составить уравнения прямой, лежащей в плоскости $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}=D$ и пересекающей под прямым углом прямую $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$.

1464. Найти проекцию точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ на прямую $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}t$.

1465. Найти зеркальное отражение точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ относительно прямой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}t$.

1466. Найти проекцию точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ на плоскость $\boldsymbol{rn}=D$.

1467. Найти зеркальное отражение точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ от плоскости $\boldsymbol{rn}=D$.

1468. Найти проекцию точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ на плоскость $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$.

1469. Найти зеркальное отражение точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ относительно плоскости $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}u+\boldsymbol{b}v$.

1470. При каком необходимом и достаточном условии четыре плоскости $\boldsymbol{rn}_k=D_k$, $k=1, 2, 3, 4$, принадлежат одной связке?

1471. Через линию пересечения двух плоскостей $\boldsymbol{rn}_k=D_k$, $k=1, 2$, провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $\boldsymbol{rn}_3=D_3$.

1472. Найти точку пересечения трех плоскостей $\boldsymbol{rn}_k=D_k$, $k=1, 2, 3$.

1473. Написать уравнение прямой $[\boldsymbol{ra}]=\boldsymbol{M}$ $(\boldsymbol{a}\neq 0, \boldsymbol{aM}=0)$ в параметрической форме.

1474. Найти точку встречи прямой $[\boldsymbol{ra}]=\boldsymbol{M}$ $(\boldsymbol{a}\neq 0, \boldsymbol{M}=0)$ с плоскостью $\boldsymbol{rn}=D$.

1475. На прямой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$ найти точку, отстоящую от плоскости $\boldsymbol{rn}=D$ на расстоянии d.

1476. Дана прямая $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$ и плоскость $\boldsymbol{rn}=D$. При каком необходимом и достаточном условии они: 1) пересекаются? 2) коллинеарны? 3) параллельны? 4) прямая лежит на плоскости?

1477. Даны две прямые $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_k+\boldsymbol{a}_k t$, $k=1, 2$. При каком необходимом и достаточном условии они: 1) скрещиваются? 2) пересекаются? 3) коллинеарны? 4) параллельны? 5) совпадают?

1478. Через прямую $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $\boldsymbol{rn}=D$.

1479. Через прямую $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$ провести плоскость, коллинеарную плоскости $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$.

1480. Через прямую $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$ провести плоскость, коллинеарную прямой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{b}t$.

1481. Через прямую $[\boldsymbol{ra}]=\boldsymbol{M}$ $(\boldsymbol{a}\neq 0, \boldsymbol{aM}=0)$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $\boldsymbol{rn}=D$.

1482. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ и прямую $[\boldsymbol{ra}]=\boldsymbol{M}$.

1483. Составить уравнение прямой, пересекающей ортогонально прямые $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_k+\boldsymbol{a}_k t$, $k=1, 2$.

1484. Составить уравнения прямой, пересекающей ортогонально прямые $[\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_k]=\boldsymbol{M}_k$, $k=1, 2$.

1485. Записать уравнения $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_k=D_k$, $k=1, 2$, прямой в форме $[\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{M}$ и в параметрической форме.

1486. Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ на прямую $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}t$.

1487. Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ на прямую $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_k=D_k$, $k=1, 2$.

1488. Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ на прямую $[\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{M}$ ($\boldsymbol{a}\neq 0$, $\boldsymbol{a}\boldsymbol{M}=0$).

1489. Найти расстояние от точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ до прямой $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_k=D_k$, $k=1, 2$.

1490. При каком необходимом и достаточном условии плоскости $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_k=D_k$, $k=1, 2, 3$, имеют общую точку и притом только одну?

1491. При каком необходимом и достаточном условии три плоскости $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_k=D_k$, $k=1, 2, 3$, образуют призму?

1492. При каком необходимом и достаточном условии три плоскости $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_k=D_k$, $k=1, 2, 3$, имеют и притом только одну общую прямую?

1493. При каком необходимом и достаточном условии четыре плоскости $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_k=D_k$, $k=1, 2, 3, 4$, образуют тетраэдр?

1494. Через прямую $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_k=D_k$, $k=1, 2$, провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_3=D_3$.

1495. Найти проекцию точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ на прямую $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_k=D_k$, $k=1, 2$.

1496. Найти проекцию точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на прямую $[\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{M}$ ($\boldsymbol{a}\neq 0$, $\boldsymbol{a}\boldsymbol{M}=0$).

1497. Вершины треугольника $M_k(\boldsymbol{r}_k)$, $k=1, 2, 3$. При каком необходимом и достаточном условии прямая $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$ пересекает его площадь?

1498. Найти точку встречи прямой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$ с плоскостью, проходящей через три точки $M_k(\boldsymbol{r}_k)$, $k=1, 2, 3$.

1499. Даны две плоскости $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_k=D_k$, $k=1, 2$. При каком необходимом и достаточном условии они: 1) пересекаются? 2) параллельны? 3) совпадают?

1500. При каком необходимом и достаточном условии плоскость $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}=D$ и прямая $[\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{M}$ ($\boldsymbol{a}\neq 0$, $\boldsymbol{a}\boldsymbol{M}=0$): 1) пересекаются? 2) коллинеарны? 3) параллельны? 4) прямая лежит в плоскости?

ГЛАВА XIII

ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Поверхность в пространстве может быть задана одним из следующих способов:

I. Уравнением $z=f(x, y)$.

II. Уравнением $F(x, y, z)=0$ или $F(\boldsymbol{r})=0$.

III. Уравнениями $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$, т. е. тремя уравнениями, называемыми параметрическими уравнениями поверхности, определяющими координаты x, y, z любой точки поверхности в функциях двух параметров u и v. Эти параметры называются криволинейными координатами точки M поверхности. Для того чтобы указать, что точка M имеет криволинейные координаты u и v, мы будем писать: $M(u, v)$.

Вместо трех уравнений

$$x=x(u, v), \qquad y=y(u, v), \qquad z=z(u, v)$$

можно задать одно векторное:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v),$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор любой точки поверхности.

Уравнение цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz, пишется так:

$$F(x, y)=0,$$

где уравнение $F(x, y)=0$ в плоскости Oxy определяет направляющую кривую.

Аналогично могут быть записаны уравнения цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными осям Ox и Oy.

Линия в пространстве может быть задана одним из следующих способов:

I. Двумя уравнениями

$$F(x, y, z)=0, \qquad \Phi(x, y, z)=0$$

или

$$F(\boldsymbol{r})=0, \qquad \Phi(\boldsymbol{r})=0$$

двух поверхностей, через нее проходящих.

II. Уравнениями

$$x=x(t), \qquad y=y(t), \qquad z=z(t),$$

т. е. тремя уравнениями, называемыми параметрическими уравнениями линии, которые определяют координаты x, y, z любой точки линии в функциях одного параметра t. Этот параметр называется криволинейной координатой точки M линии. Для того чтобы указать, что точка M имеет криволинейную координату t, пишут $M(t)$.

Вместо трех уравнений $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ можно задать одно векторное:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор любой точки линии.

Если в уравнениях

$$x=x(u,\ v),\qquad y=y(u,\ v),\qquad z=z(u,\ v)$$

или

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v)$$

положить $v=C=\text{const}$, то мы получим уравнения линии

$$x=x(u,\ C),\qquad y=y(u,\ C),\qquad z=z(u,\ C)$$

или

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ C),$$

лежащей на поверхности и называемой координатной линией $v=\text{const}$.

Точно так же, фиксируя $u=C=\text{const}$, получим координатную линию

$$x=x(C,\ v),\qquad y=y(C,\ v),\qquad z=z(C,\ v)$$

или

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(C,\ v),$$

называемую линией $u=\text{const}$.

Семейства линий $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$ образуют на поверхности сеть, называемую координатной.

Поверхность, определяемая уравнением $F(x,\ y,\ z)=0$, где $F(x,\ y,\ z)$ есть многочлен, называется алгебраической.

Если многочлен $F(x,\ y,\ z)$ распадается на два множителя $\varphi(x,\ y,\ z)$ и $\psi(x,\ y,\ z)$ (также многочлены относительно x, y, z), то говорят, что поверхность $F(x,\ y,\ z)=0$ распадается на две поверхности:

$$\varphi(x,\ y,\ z)=0,\qquad \psi(x,\ y,\ z)=0.$$

Пример 1. Уравнение

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

определяет сферу радиуса r с центром в начале координат, так как это уравнение удовлетворяется координатами любой точки этой сферы, для точек же $M(x,\ y,\ z)$ пространства, лежащих вне сферы, мы будем иметь:

$$x^2+y^2+z^2>r^2,$$

и для точек $M(x,\ y,\ z)$, лежащих внутри сферы:

$$x^2+y^2+z^2<r^2.$$

Пример 2. Уравнение

$$x^2+y^2=r^2$$

в пространстве определяет поверхность круглого цилиндра с образующими, параллельными оси Oz, направляющей которого является окружность, лежащая в плоскости Oxy радиуса r с центром в начале координат. В самом деле, пусть точка $M(x, y, z)$ лежит на поверхности этого цилиндра; рассмотрим ее проекцию $M'(x, y, 0)$ на плоскость Oxy; точка M' лежит на указанной выше направляющей окружности C цилиндра, а потому $x^2+y^2=r^2$. Если точка $M(x, y, z)$ лежит вне цилиндра, то ее проекция $M'(x, y, 0)$ лежит вне окружности C, а потому $x^2+y^2>r^2$.

Наконец, если точка $M(x, y, z)$ лежит внутри цилиндра, то ее проекция $M'(x, y, 0)$ в плоскость Oxy лежит внутри направляющей окружности C, а потому $x^2+y^2<r^2$. Мы видим, что уравнению $x^2+y^2=r^2$ удовлетворяют координаты всех точек, лежащих на поверхности цилиндра, и не удовлетворяют координаты никаких других точек.

Следовательно, уравнение

$$x^2+y^2=r^2$$

есть уравнение указанного цилиндра.

Замечание. Вообще, если уравнение

$$F(x, y)=0$$

в плоскости Oxy определяет какую-нибудь линию, то это же уравнение в пространстве определяет поверхность цилиндра, направляющей которого служит эта линия, а образующие параллельны оси Oz.

Пример 3. Уравнение

$$x^2+y^2-k^2z^2=0, \quad \text{где} \quad k\neq 0,$$

определяет поверхность круглого конуса, вершина которого находится в начале координат, а образующие составляют с осью Oz острый угол φ, такой, что $\operatorname{tg}\varphi=k$.

В самом деле, пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка этого конуса; тогда расстояние MQ от этой точки M до оси Oz равно расстоянию $M'O$ от проекции $M'(x, y, 0)$ точки $M(x, y, z)$ на плоскость Oxy до начала координат, т. е.

$$MQ=M'O=\sqrt{x^2+y^2},$$

с другой стороны, $MQ=OQ\operatorname{tg}\varphi$. Но $OQ=|z|$, следовательно,

$$\sqrt{x^2+y^2}=|z|\operatorname{tg}\varphi,$$

или

$$x^2+y^2-z^2\operatorname{tg}^2\varphi=0.$$

Обратно, если координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют последнему уравнению, то

$$\sqrt{x^2+y^2}=|z|\operatorname{tg}\varphi,$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|z|},$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{MQ}{OQ},$$

и следовательно, точка M лежит на прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью Oz острый угол φ, т. е. точка M лежит на поверхности указанного конуса.

Замечание. Пусть относительно декартовой прямоугольной системы координат OXY на плоскости линия C задана уравнением

$$F(X,\ Y)=0.$$

Тогда уравнение поверхности, образованной вращением линии вокруг оси OX, имеет вид:

$$F(x,\ \pm\sqrt{y^2+z^2})=0,$$

где x, y, z — координаты в пространственной системе $Oxyz$, в которой ось Ox совпадает с осью OX, а ось Oy совпадает с осью OY.

Пример 4. Рассмотрим окружность $X^2+Y^2=r^2$. При вращении этой окружности вокруг оси OX мы получим сферу радиуса r с центром в начале координат. Уравнение этой сферы на основании предыдущей теоремы будет иметь вид:

$$x^2+(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=r^2,$$

или

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Пример 5. Рассмотрим прямую

$$Y=kX.$$

На основании предыдущей теоремы уравнение поверхности вращения, полученной при вращении этой прямой вокруг оси OX, т. е. уравнение прямого кругового конуса с вершиной в начале координат, имеющего осью ось OX, будет иметь вид:

$$\pm\sqrt{y^2+z^2}=kx,$$

или

$$y^2+z^2=k^2x^2.$$

Тангенс угла φ между осью и образующей этого конуса равен

$$|k|=\operatorname{tg}\varphi.$$

Пример 6. Рассмотрим окружность

$$X^2+(Y-b)^2=a^2$$

радиуса a с центром в точке $(0,\ b)$, лежащей на оси OY.

Поверхность вращения, полученная при вращении этой окружности вокруг оси OX, выразится уравнением

$$x^2+(\pm\sqrt{y^2+z^2}-b)^2=a^2,$$

или

$$x^2+y^2+z^2+b^2-a^2=\pm 2b\sqrt{y^2+z^2},$$

или

$$(x^2+y^2+z^2+b^2-a^2)^2=4b^2(y^2+z^2).$$

Если $b>a>0$, то эта поверхность называется тором.

Теперь рассмотрим задачу на составление параметрических уравнений поверхности.

Пример 7. Рассмотрим тор, полученный вращением окружности $(x-a)^2+z^2=b^2$, $y=0$ вокруг оси Oz. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка тора. Пусть C — центр меридиональной окружности, на которой лежит точка M. Опустим из точки M перпендикуляр MQ на плоскость Oxy, а из точки Q перпендикуляр QP на ось Ox. Обозначим через u угол от оси Ox до луча OQ в плоскости Oxy, а через v угол от луча OC до луча CM в плоскости COz. Тогда

$$\begin{aligned}
x&=OP=OQ\cos u=(OC+CQ)\cos u=(a+b\cos v)\cos u,\\
y&=PQ=OQ\sin u=(OC+CQ)\sin u=(a+b\cos v)\sin u,\\
z&=MQ=MC\sin v=b\sin v.
\end{aligned}$$

Мы получили параметрические уравнения тора:

$$\begin{aligned}
x&=(a+b\cos v)\cos u,\\
y&=(a+b\cos v)\sin u,\\
z&=b\sin v.
\end{aligned}$$

Для тора широта и долгота изменяются в следующих пределах:

$$0\leqslant u<2\pi,\quad 0\leqslant v<2\pi.$$

Пример 8. Пусть точка M движется равномерно по окружности радиуса r так, что радиус OM этой окружности вращается с постоянной угловой скоростью ω, а плоскость этой окружности движется равномерно и поступательно в пространстве так, что ее центр перемещается по прямой, перпендикулярной к плоскости окружности с постоянной скоростью v.

Тогда точка M описывает линию, называемую обыкновенной винтовой линией.

Примем центр окружности в начальном ее положении за начало координат, плоскость, в которой она расположена, за плоскость Oxy, а прямую, проходящую через центр окружности перпендикулярно к ее плоскости, за ось Oz.

Пусть $M_0(r, 0, 0)$ — начальное положение движущейся точки. За время t точка M_0 пройдет по окружности дугу, равную ωt, а в направлении оси Oz пройдет путь vt.

Следовательно, ее координаты в момент t будут:

$$x=r\cos\omega t,\qquad y=r\sin\omega t,\qquad z=vt.$$

Эти уравнения и являются параметрическими уравнениями винтовой линии; они выражают закон движения точки по этой винтовой линии.

Если заменить на противоположное направление вращения радиуса OM или же изменить на противоположное направление перемещения плоскости окружности, то получим винтовую линию противоположной нарезки. Различают правую и левую винтовые линии; винтовая линия называется правой, если при вращении по часовой стрелке винта, имеющего своей нарезкой эту винтовую линию, он ввинчивается; в противном случае винтовая линия называется левой. Математически имеет смысл говорить лишь о противоположных нарезках винтовых линий, понятие же правой и левой нарезок имеет лишь физический смысл.

1501. Какую поверхность определяет уравнение $z^2 = 2xy$? Как эта поверхность расположена относительно системы координат?

1502*. Составить уравнение круглого конуса, вершина которого находится в точке $S(a, b, c)$, ось составляет с осями координат углы α, β, γ, а угол между образующей и осью конуса равен φ.

1503. Основанием круглого конуса служит круг радиуса r; высота конуса равна h. Составить уравнение этого конуса, принимая за плоскость Oxy плоскость его основания, а за ось Oz его высоту.

1504*. Составить уравнение поверхности круглого конуса при условии, что все три оси координат служат образующими конуса, а ось конуса проходит в первом и седьмом октантах.

1505*. Составить уравнение поверхности круглого конуса, касающегося трех плоскостей координат, зная, что ось его проходит в первом и седьмом октантах.

1506. Составить уравнение поверхности конуса, описанного около сферы с центром в точке $C(0, 4, 1)$ и радиусом $r = 6$, при условии, что вершина конуса находится в точке $S(8, 0, 0)$.

1507. Составить уравнение поверхности круглого цилиндра, осью которого служит биссектриса угла yOz, а радиус равен 1.

1508. Эллипс с полуосями a и b $(a > b)$ вращается вокруг своей большей оси, совпадающей с осью Oz, центр эллипса совпадает с началом координат. Составить уравнение поверхности, описываемой эллипсом при его вращении (вытянутый эллипсоид вращения).

1509. Эллипс с полуосями a и b $(a > b)$ вращается вокруг своей малой оси, совпадающей с осью Oz, центр эллипса совпадает с началом координат. Составить уравнение поверхности, описываемой эллипсом при его вращении (сжатый эллипсоид вращения).

1510. Гипербола с полуосями a и b вращается вокруг своей действительной оси, совпадающей с осью Oz, причем центр гиперболы совпадает с началом координат. Составить уравнение поверхности, описываемой гиперболой при ее вращении (двуполостный гиперболоид вращения).

1511. Гипербола с полуосями a и b вращается вокруг своей мнимой оси, совпадающей с осью Oz. Центр гиперболы совпадает с началом координат. Составить уравнение поверхности, получающейся при вращении гиперболы (однополостный гиперболоид вращения).

1512. Парабола с параметром p вращается вокруг своей оси, совпадающей с осью Oz. Вершина параболы совпадает с началом координат. Составить уравнение поверхности, описываемой параболой (параболоид вращения).

1513*. В плоскости Oxz дана парабола $x^2=2pz$, $y=0$. По ней перемещается вершина другой параболы с параметром q, плоскость которой остается все время параллельной плоскости Oyz, а ось — параллельной оси Oz. Составить уравнение поверхности, описываемой подвижной параболой.

1514*. Вокруг оси Oz вращается скрещивающаяся с ней прямая. Угол этой прямой с осью Oz остается постоянным и равным γ; общий перпендикуляр к оси Oz и к этой прямой также сохраняет постоянную величину r и находится все время в плоскости Oxy. Составить уравнение поверхности, описываемой вращающейся прямой (однополостный гиперболоид вращения).

1515*. Составить уравнение поверхности круглого цилиндра радиуса r, ось которого проходит через точку (x_0, y_0, z_0) и составляет с осями координат углы α, β, γ.

1516*. В плоскости Oxy дана окружность радиуса r с центром в начале координат. Вокруг оси Oz вращается плоскость, пересекающая эту окружность в точке A. В этой плоскости вокруг точки A в свою очередь вращается прямая так, что угол, образуемый этой прямой с продолжением линии OA, остается все время вдвое меньше двугранного угла, образуемого вращающейся плоскостью с плоскостью Oxz. Написать уравнение поверхности, описываемой вращающейся прямой.

1517. Около оси Ox вращается кривая $y=f(x)$. Составить уравнение поверхности вращения.

1518*. Составить уравнение поверхности вращения около оси Oz линии, заданной уравнениями $x=f(z)$, $y=g(z)$.

1519*. Исходя из параметрических уравнений сферы $x=r\cos u\cos v$, $y=r\sin u\cos v$, $z=r\sin v$, найти параметрические уравнения линии, по которой эта сфера пересекается с цилиндром $x^2+y^2-rx=0$ (линия Вивиани).

1520*. Определить вид и расположение поверхности по ее параметрическим уравнениям: $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=f(u)$.

1521. Составить параметрические уравнения цилиндрической поверхности вращения с осью вращения Oz и радиусом, равным a.

1522. Составить параметрические уравнения поверхности вращения, проходящей через линию $x=\operatorname{ch} z$, $y=0$, если ось Oz — ось вращения.

1523*. Определить вид и расположение поверхности по ее параметрическим уравнениям:

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=v.$$

Какое геометрическое значение имеют параметры u и v?

1524. Определить вид поверхности и ее расположение по параметрическим уравнениям:

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=u.$$

Какое геометрическое значение имеют параметры u и v?

1525. Плоскость, первоначально совпадающая с плоскостью Oxz и содержащая прямую, выходящую из начала координат под углом α к оси Oz, вращается около оси Oz с постоянной угловой скоростью ω; одновременно точка, выходящая из начала координат, движется по указанной прямой с постоянной скоростью v.

Составить уравнение траектории (коническая спираль), описываемой движущейся точкой.

1526. Цилиндроидом называется поверхность, образованная движением прямой, остающейся параллельной некоторой заданной плоскости. Цилиндроид может быть определен заданием двух направляющих линий (по которым должна скользить образующая) и направляющей плоскостью (которой образующая параллельна). Составить уравнение цилиндроида, направляющими линиями которого являются окружности

$$x^2+z^2-2ax=0,\ y=0$$

и

$$y^2+z^2-2ay=0,\ x=0,$$

а направляющей плоскостью служит плоскость Oxy.

1527. Составить уравнение цилиндроида (см. задачу 1526), образующие которого параллельны плоскости $z=0$, если его направляющими линиями служат два эллипса:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad x=a$$

и

$$\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,\ x=-a.$$

1528. Коноидом называется поверхность, образуемая движением прямой параллельно заданной плоскости так, что образующая пересекает данную прямую. Коноид определяется заданием направляющей прямой l, направляющей плоскости π и направляющей кривой C, лежащей на поверхности (если C — плоская кривая, то она не должна лежать в плоскости, параллельной направляющей плоскости).

Составить уравнение коноида, образующие которого параллельны плоскости $x=0$, если направляющая прямая лежит в плоскости Oxz и отстоит от оси Ox на положительном расстоянии h, а направляющей кривой служит эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0.$$

1529. Составить уравнение коноида, образующие которого параллельны плоскости $z=0$, если его направляющими являются прямая $x=a$, $y=0$ и парабола $y^2=2pz$, $x=0$.

1530*. Даны две параболы

$$y^2=2px, \quad z=0$$

и

$$z^2=-2px,\ y=0.$$

Прямая движется так, что пересекает обе параболы и параллельна плоскости $y-z=0$. Составить уравнение поверхности, описанной движущейся прямой.

1531. Составить уравнение поверхности, являющейся геометрическим местом прямых, параллельных плоскости Oxy, пересекающих ось Oz и линию

$$xyz = a^3,\quad x^2 + y^2 = b^2.$$

1532. Составить в векторной форме уравнение круглого цилиндра радиуса R, ось которого проходит через полюс O и коллинеарна вектору $\boldsymbol{a}$.

1533. Составить в векторной форме уравнение круглого конуса с вершиной в полюсе O, зная угол γ его образующей с осью и зная вектор $\boldsymbol{a}$, определяющий направление оси.

1534. Составить уравнение конуса с вершиной в полюсе O, зная уравнение $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$ направляющей кривой.

1535. Составить уравнение цилиндра, образующие которого параллельны вектору $\boldsymbol{a}$ и для которого задана направляющая кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$.

1536. Составить уравнение конуса с вершиной в точке $M_0(\boldsymbol{r}_0)$, зная уравнение $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$ направляющей кривой.

1537. Через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ в направлении вектора $\boldsymbol{a}$ проведена прямая. Вокруг этой прямой вращается кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$. Составить уравнение поверхности, описанной вращающейся кривой.

1538. Через каждую точку $M(u)$ кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$ в направлении вектора $\boldsymbol{a}(u)$ проведена прямая. Составить уравнение геометрического места этих прямых (линейчатая поверхность).

1539*. Через точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, $M_2(\boldsymbol{r}_2)$, $M_3(\boldsymbol{r}_3)$ соответственно в направлении векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ проведены три попарно скрещивающиеся прямые. Составить уравнение геометрического места прямых, пересекающих три указанных.

ГЛАВА XIV

СФЕРА. ЦИЛИНДРЫ И КОНУСЫ. ЭЛЛИПСОИДЫ. ГИПЕРБОЛОИДЫ. ПАРАБОЛОИДЫ

Сфера. Уравнение сферы с центром в точке $C(a, b, c)$ и радиусом r (рис. 27) имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

Это уравнение называется нормальным уравнением сферы. Если центр сферы совпадает с началом координат, то нормальное уравнение сферы будет:

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Уравнение

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+2Bx+2Cy+2Dz+E=0$$

при условии

$$A\neq 0,\ B^2+C^2+D^2-AE>0$$

определяет сферу с центром в точке $\left(-\frac{B}{A},\ -\frac{C}{A},\ -\frac{D}{A}\right)$ и радиусом

$$r=\sqrt{\frac{B^2+C^2+D^2-AE}{A^2}}.$$

Степенью точки M относительно сферы с центром в точке C и радиусом r называется число

$$\sigma=d^2-r^2,$$

где $d=MC$ — расстояние от точки M до центра C сферы.

Если точка M лежит вне сферы, то ее степень относительно сферы есть положительное число, равное квадрату длины отрезка касательной, проведенной к сфере из этой точки. Если точка M лежит внутри сферы, то степень ее относительно сферы отрицательна, а по абсолютной величине равна произведению $MP\cdot MQ$ длин отрезков произвольной хорды PQ сферы, проходящей через точку M.

Если точка M лежит на сфере, то ее степень относительно этой сферы равна нулю. Степень точки $M(x, y, z)$ относительно сферы с центром в точке $C(a, b, c)$ и радиусом r определяется по формуле

$$\sigma=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2.$$

Геометрическое место точек, степени каждой из которых относительно двух неконцентрических сфер равны, является плоскостью, называемой **радикальной плоскостью** этих двух сфер. Если сферы пересекаются, то радикальная плоскость проходит через их общую окружность.

Рассмотрим уравнения двух сфер

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2-r_1^2=0,$$

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2-r_2^2=0$$

и обозначим левые части этих уравнений соответственно через u_1 и u_2.

Уравнение $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2=0$, где λ_1 и λ_2 не равны нулю одновременно, определяет сферу или плоскость, которая в случае, если данные сферы пересекаются, проходит через их общую окружность. Уравнение $u_1=u_2$ определяет радикальную плоскость.

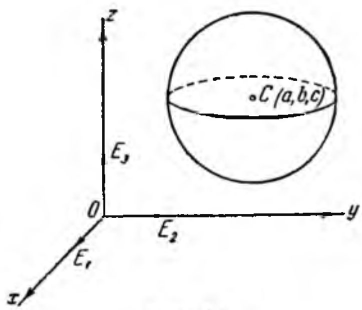

Рис. 27.

Уравнение $\lambda u+\mu v=0$, где $u=0$ — уравнение сферы, а $v=0$ — уравнение плоскости, определяет при $\lambda\neq 0$ сферу (или плоскость при $\lambda=0$, $\mu\neq 0$); эта сфера проходит через линию пересечения плоскости $v=0$ со сферой $u=0$ (если, конечно, они пересекаются).

Конусы и цилиндры второго порядка. Пусть L — действительная нераспадающаяся линия второго порядка, а S — точка, не лежащая в плоскости этой линии; совокупность прямых, соединяющих точку S со всеми точками линии L, называется **конусом второго порядка**; точка S называется **вершиной конуса**, а прямые, соединяющие точку S с точками линии, — **образующими конуса**.

Конус называется **круглым** (или прямым круговым), если его направляющая L — окружность, а прямая, соединяющая вершину S с центром окружности L, перпендикулярна к ее плоскости.

Каноническое уравнение конуса второго порядка имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Если L — действительная нераспадающаяся линия второго порядка и a — вектор, не параллельный плоскости этой линии, то совокупность прямых, проходящих через все точки линии L

параллельно вектору a, называется цилиндром второго порядка; линия L называется направляющей цилиндра, а прямые, проходящие через точки линии L параллельно вектору a, называются образующими цилиндра.

Если направляющая кривая L является эллипсом, то цилиндр называется эллиптическим; если направляющая кривая L является гиперболой, то цилиндр называется гиперболическим, наконец, если направляющая кривая L является параболой, то цилиндр называется параболическим.

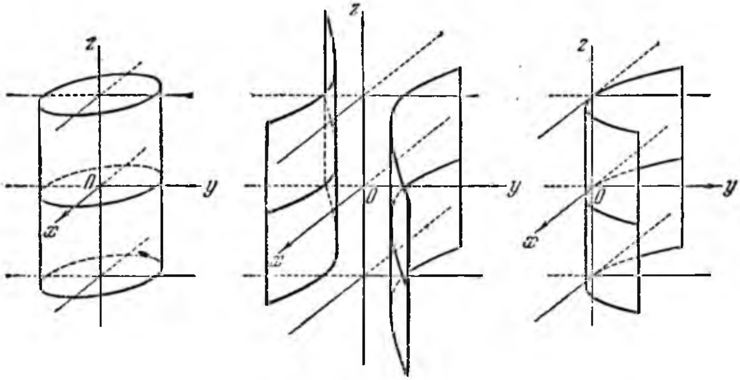

Рис. 28.

Уравнения эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров с образующими, параллельными оси Oz (рис. 28), могут быть записаны так:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad x^2=2py.$$

Аналогично записываются уравнения цилиндров второго порядка с образующими, параллельными другим осям координат (Ox и Oy).

Эллипсоиды. Каноническое уравнение эллипсоида (рис. 29) имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где обычно $a \geqslant b \geqslant c$; a, b, c называются полуосями эллипсоида. Если a, b, c попарно различны, то эллипсоид называется трехосным. Если $a=b>c$, то эллипсоид называется сжатым эллипсоидом вращения. Если $a>b=c$, то эллипсоид называется вытянутым эллипсоидом вращения.

В каноническом уравнении эллипсоида координатные плоскости являются плоскостями симметрии, координатные оси — осями симметрии (главные оси) и начало координат — центром симметрии (центр).

Точки $A_1(a,\ 0,\ 0)$, $A_2(-a,\ 0,\ 0)$, $B_1(0,\ b,\ 0)$, $B_2(0,\ -b,\ 0)$, $C_1(0,\ 0,\ c)$, $C_2(0,\ 0,\ -c)$ пересечения осей симметрии трехосного эллипсоида с его поверхностью называются вершинами эллипсоида. В случае эллипсоида вращения вершинами эллипсоида называются две точки пересечения его поверхности с осью вращения.

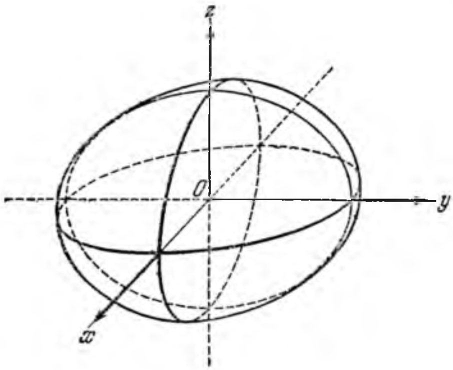

Рис. 29.

Касательная плоскость к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

в его точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ определяется следующим уравнением:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1.$$

Плоскость, в которой расположены середины параллельных хорд эллипсоида, называется диаметральной плоскостью, сопряженной этим хордам. Если $a=\{l,\ m,\ n\}$ — вектор, определяющий направление хорд, то уравнение сопряженной им диаметральной плоскости будет:

$$\frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}+\frac{nz}{c^2}=0.$$

Прямая, на которой расположены центры параллельных сечений эллипсоида, называется диаметром, сопряженным плоскостям этих сечений. Если $Ax+By+Cz+D=0$ — уравнение плоскости одного из сечений, то уравнения сопряженного диаметра будут:

$$x=a^2At,\quad y=b^2Bt,\quad z=c^2Ct.$$

Все диаметральные плоскости и диаметры эллипсоида проходят через его центр.

Если $a>b>c$, то плоскости

$$c\sqrt{a^2-b^2}\,x \pm a\sqrt{b^2-c^2}\,z+\lambda ac\sqrt{a^2-c^2}=0,$$

где $|\lambda|<1$ пересекают эллипсоид по окружностям; при этом этими уравнениями определяются плоскости всех круговых сечений эллипсоида (если λ принимает все значения от -1 до $+1$).

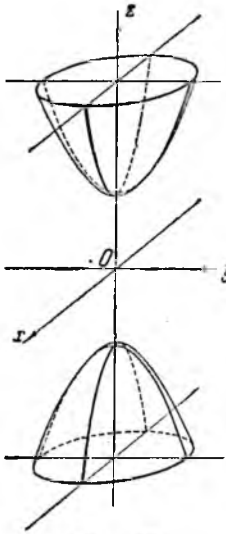

Рис. 30.

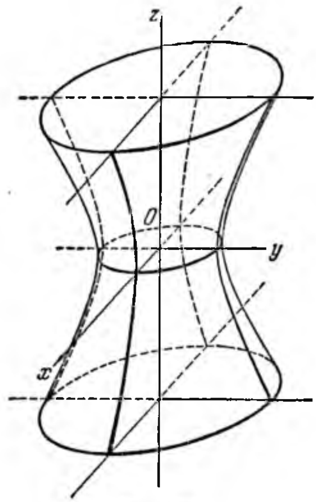

Рис. 31.

Плоскости, касательные к эллипсоиду и параллельные плоскостям круговых сечений, касаются эллипсоида в точках, называемых омбилическими (четыре точки):

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\quad 0,\quad \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\right).$$

Гиперболоиды. Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида (рис. 30) имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

где обычно $a\geqslant b$.

Каноническое уравнение однополостного гиперболоида (рис. 31) имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где обычно $a\geqslant b$.

Если $a=b$, то гиперболоид будет **гиперболоидом вращения**.

Если гиперболоид задан каноническим уравнением, то координатные плоскости являются плоскостями симметрии, оси координат — осями симметрии (главные оси) и начало координат — центром симметрии (центр). Точки пересечения двуполостного гиперболоида с его осью симметрии Oz, т. е. точки $C_1(0, 0, c)$ и $C_2(0, 0, -c)$ называются его вершинами.

В случае $a \neq b$ точки $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(-a, 0, 0)$, $B_1(0, b, 0)$, $B_2(0, -b, 0)$ пересечения однополостного гиперболоида с его осями симметрии Ox и Oy называются его вершинами.

Конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

называется **асимптотическим конусом** гиперболоидов

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1.$$

Касательная плоскость к гиперболоидам в точке (x_0, y_0, z_0) определяется уравнением

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}=\pm 1.$$

Плоскость, в которой расположены середины параллельных хорд гиперболоида, называется диаметральной плоскостью, сопряженной этим хордам.

Если $a=\{l, m, n\}$ — вектор, определяющий направление хорд, то уравнение сопряженной им диаметральной плоскости имеет вид:

$$\frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}-\frac{nz}{c^2}=0.$$

Хорды гиперболоида могут иметь любое направление, кроме направлений образующих асимптотического конуса.

Прямая, на которой расположены центры параллельных сечений гиперболоида, называется **диаметром**, сопряженным плоскостям этих сечений. Если $Ax+By+Cz+D=0$ — уравнение плоскости этих сечений, то уравнения сопряженного диаметра будут:

$$x=a^2At,\ y=b^2Bt,\ z=-c^2Ct.$$

Для того чтобы плоскость пересекала гиперболоид по центральной линии (действительной или мнимой), необходимо и достаточно, чтобы эта плоскость не была параллельна ни одной из плоскостей, касающихся асимптотического конуса (вдоль образующей) этого гиперболоида.

Все диаметральные плоскости и диаметры гиперболоида проходят через его центр симметрии.

Плоскости

$$c\sqrt{a^2-b^2}\,y \pm b\sqrt{a^2+c^2}\,z \pm cb\sqrt{b^2+c^2}\,\lambda=0$$

пересекают однополостный гиперболоид по кругу при любом λ, а двуполостный при $|\lambda|>1$.

Плоскости

$$c\sqrt{a^2-b^2}\,y \pm b\sqrt{a^2+c^2}\,z \pm cb\sqrt{b^2+c^2}=0$$

касаются двуполостного гиперболоида в одной из четырех его омбилических точек:

$$\left(0,\ \pm b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}},\qquad \pm c\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}\right).$$

Круговые сечения конуса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

расположены в плоскостях

$$c\sqrt{a^2-b^2}\,y \pm b\sqrt{a^2+c^2}\,z + D=0,$$

где D принимает все действительные значения, кроме $D=0$.

Прямолинейной образующей поверхности второго порядка называется прямая, все точки которой принадлежат поверхности.

Однополостный гиперболоид имеет два однопараметрических семейства *прямолинейных образующих*:

$$\left.\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right);\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\beta\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\alpha\left(1+\frac{y}{b}\right),\end{aligned}\right\}$$

где α и β не равны нулю одновременно.

Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две различные прямолинейные образующие, принадлежащие разным семействам.

Касательная плоскость пересекает однополостный гиперболоид по двум прямолинейным образующим, проходящим через точку касания этой плоскости с поверхностью.

Параболоиды. Каноническое уравнение *эллиптического параболоида* (рис. 32) имеет вид:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z.$$

где $p>0$, $q>0$ и обычно $p \geqslant q$. Если $p=q$, то эллиптический параболоид — параболоид вращения.

Каноническое уравнение гиперболического параболоида (рис. 33)

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,$$

где $p>0$, $q>0$.

Если параболоид задан каноническим уравнением, то координатные плоскости Oxz и Oyz являются его плоскостями симметрии, а ось Oz — осью симметрии (ось параболоида); точка

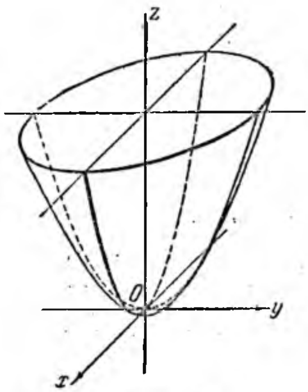

Рис. 32.

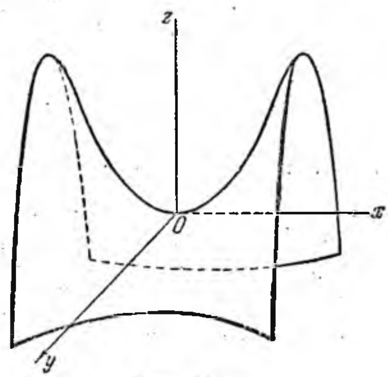

Рис. 33.

$O\ (0,\ 0,\ 0)$ пересечения параболоида с его осью называется вершиной. Плоскость Oxy служит касательной плоскостью к параболоиду в его вершине.

Касательная плоскость к параболоиду в данной на нем точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ определяется уравнением

$$\frac{x_0x}{p}+\frac{y_0y}{q}=z+z_0$$

для эллиптического параболоида и

$$\frac{x_0x}{p}-\frac{y_0y}{q}=z+z_0$$

для гиперболического параболоида.

Плоскость, в которой расположены середины параллельных хорд параболоида, называется диаметральной плоскостью, сопряженной направлению этих хорд.

Если $a=\{l, m, n\}$ — вектор, определяющий направление хорд, то уравнение сопряженной им диаметральной плоскости будет:

$$\frac{lx}{p}+\frac{my}{q}=n$$

для эллиптического параболоида и

$$\frac{lx}{p}-\frac{my}{q}=n$$

для гиперболического параболоида.

Хорды эллиптического параболоида могут иметь любое направление, кроме направления его оси (Oz), а диаметральные плоскости эллиптического параболоида параллельны его оси (Oz).

Хорды гиперболического параболоида не могут быть параллельны плоскостям

$$\frac{x}{\sqrt{p}}\pm\frac{y}{\sqrt{q}}=0;$$

все диаметральные плоскости гиперболического параболоида также параллельны его оси (Oz).

Прямая, на которой расположены центры параллельных сечений параболоида, называется диаметром, сопряженным плоскостям этих сечений. Если $Ax+By+Cz+D=0$ — уравнение плоскости одного из сечений, то уравнения сопряженного диаметра будут:

$$x=-\frac{Ap}{C}, \qquad y=-\frac{Bq}{C}$$

для эллиптического параболоида и

$$x=-\frac{Ap}{C}, \qquad y=\frac{Bq}{C}$$

для гиперболического параболоида.

Для того чтобы плоскость пересекала параболоид по центральной линии (действительной или мнимой), необходимо и достаточно, чтобы эта плоскость пересекала ось (Oz) параболоида.

Эллиптический параболоид имеет два семейства круговых сечений, плоскости которых определяются уравнениями:

$$\pm\sqrt{p-q}\,y+\sqrt{q}\,z+D\sqrt{p}=0,$$

где D принимает все действительные значения, меньшие чем $\frac{p-q}{2}$:

$$D<\frac{p-q}{2}.$$

Плоскости

$$\sqrt{p-q}\,y\pm\sqrt{q}\,z+\frac{p-q}{2}\sqrt{q}=0$$

касаются эллиптического параболоида в двух его омбилических точках

$$\left(0, \ \pm\sqrt{q(p-q)}, \ \frac{p-q}{2}\right).$$

Гиперболический параболоид имеет два однопараметрических семейства прямолинейных образующих:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}&=2u,\\ u\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)&=z;\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}&=2v,\\ v\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)&=z.\end{aligned}\right\}$$

Через каждую точку гиперболического параболоида проходят две прямолинейные образующие, параллельные плоскостям

$$\frac{x}{\sqrt{p}}\pm\frac{y}{\sqrt{q}}=0$$

и принадлежащие разным семействам.

Касательная плоскость к гиперболическому параболоиду пересекает его по двум прямолинейным образующим, проходящим через точку касания.

§ 1. Сфера

1540. Определить координаты центра и радиус каждой из следующих сфер:

1) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$;
2) $x^2+y^2+z^2+8x=0$;
3) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0$;
4) $x^2+y^2+z^2-6z-7=0$.

1541. Определить координаты центра и радиус окружности

$$x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0, \quad 2x+2y+z+1=0.$$

1542. Определить координаты центра окружности

$$x^2+y^2+z^2=R^2, \ Ax+By+Cz+D=0.$$

1543. Определить расположение точек $A(3,\ 0,\ 4)$, $B(3,\ 5,\ 0)$, $C(3,\ 4,\ 4)$, $D(5,\ 4,\ 6)$ относительно сферы

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=49.$$

1544. Определить расположение плоскостей

1) $2x+2y+z+\ 2=0$,
2) $2x+2y+z+\ 5=0$,
3) $2x+2y+z+11=0$

относительно сферы $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2-25=0$.

1545. Найти уравнение диаметральной плоскости сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, сопряженной прямой $x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$, $z=z_0+nt$.

1546. Определить геометрическое место хорд сферы $(x-1)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=25$, делящихся точкой $M(3, 5, 1)$ пополам.

1547. Определить геометрическое место середин хорд сферы $x^2+y^2+z^2-R^2=0$, проходящих через точку $S(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

1548. Определить геометрическое место середин хорд сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, проходящих через точку $(-R, 0, 0)$.

1549. Через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ проведены хорды сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Определить геометрическое место середин этих хорд.

1550. Определить геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки $S(x_0,\ y_0,\ z_0)$ на касательные плоскости к шаровой поверхности $x^2+y^2+z^2=R^2$.

1551. Составить уравнение касательной плоскости к сфере $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=49$ в точке $M(7,\ -1,\ 5)$.

1552. Составить уравнение касательной плоскости к сфере $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

1553. Составить уравнение касательной плоскости к сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$ в точке $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

1554*. Составить уравнение сферы, проходящей через окружности $x^2+y^2=9$, $z=0$ и $x^2+y^2=25$, $z=2$.

1555*. Составить уравнение сферы, проходящей через окружность $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=49$, $2x+2y-z+4=0$ и начало координат.

1556. Составить уравнение сферы, проходящей через окружность $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=49$, $2x+2y-z+4=0$ и через точку $(1,\ -2,\ 0)$.

1557. Определить геометрическое место точек пересечения прямых одной связки (S_1) с перпендикулярными к ним плоскостями другой связки (S_2). Доказать, что то же самое геометрическое место получим, если будем рассматривать точки пересечения плоскостей связки S_1 с перпендикулярными к ним прямыми связки S_2.

1558*. При каком необходимом и достаточном условии плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ касается сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$. Предполагая это условие выполненным, найти координаты точки прикосновения.

1559*. Составить уравнение сферы, проходящей через окружность $x^2+y^2+z^2-3x+6y+2z-5=0$, $x-2y-2z+1=0$ и касающейся плоскости $2x+2y+z-7=0$.

1560. Составить уравнение сферы, проходящей через окружность $x^2+y^2-11=0$, $z=0$ и касающейся плоскости $x+y+z-5=0$.

1561. Определить геометрическое место центров окружностей, получаемых в пересечении сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ плоскостями пучка $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

1562. Определить геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки $A(3,\ 2,\ 2)$ на плоскости, касающиеся сферы $x^2+y^2+z^2=1$ вдоль окружности, по которой эта сфера пересекается с плоскостью $2x+2y+z-1=0$.

1563. Определить геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на касательные плоскости к сфере $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2-9=0$ вдоль окружности, по которой эту сферу пересекает плоскость $x+y+z-2=0$.

1564*. Инверсией, или преобразованием обратными радиусами относительно сферы $x^2+y^2+z^2-R^2=0$, называется такое преобразование, при котором каждой точке $M(x,\ y,\ z)$ пространства ставится в соответствие точка $M'(x',\ y',\ z')$, принадлежащая лучу OM, так что отрезки OM и OM' удовлетворяют условию $OM\cdot OM'=R^2$. Установить зависимость между координатами соответствующих точек.

1565*. Составить уравнение поверхности, в которую переходит сфера $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz=0$ при инверсии (см. задачу 1564) относительно сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

1566*. Составить уравнение поверхности, в которую переходит плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ при инверсии ее (см. задачу 1564) относительно сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

1567. В каком отношении делит площадь поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ линия, по которой эта сфера касается с конусом, описанным около сферы, если вершина конуса находится в точке (x_0, y_0, z_0).

1568. Составить уравнение радикальной плоскости сфер $x^2+y^2+z^2-2x=0$ и $x^2+y^2+z^2-2x+4y-5z=0$.

1569. На прямой, проходящей через начало координат и точку $(1, 1, 1)$, найти такую точку, касательные из которой к данным сферам $(x-2)^2+(y-5)^2+z^2=1$, $(x-4)^2+$ $+(y-3)^2+(z-6)^2=2$ равны.

1570. Доказать, что радикальные плоскости трех сфер, взятых попарно, принадлежат одному пучку (ось этого пучка называется радикальной осью трех сфер).

1571. Доказать, что шесть радикальных плоскостей четырех сфер, взятых попарно, принадлежат одной связке (центр этой связки называется радикальным центром четырех сфер).

1572. При каком необходимом и достаточном условии сфера $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ касается прямой $x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$, $z=z_0+nt$?

1573*. Составить уравнение геометрического места центров сфер, касающихся двух скрещивающихся прямых $x=x_1+l_1t$, $y=y_1+m_1t$, $z=z_1+n_1t$ и $x=x_2+l_2t$, $y=y_2+m_2t$, $z=z_2+n_2t$, если $l_1^2+m_1^2+n_1^2=1$, $l_2^2+m_2^2+n_2^2=1$.

1574. Доказать, что геометрическое место центров сфер, касающихся трех попарно скрещивающихся прямых, есть линия пересечения двух поверхностей второго порядка.

1575. Доказать, что существует, вообще говоря, восемь сфер, каждая из которых касается четырех попарно скрещивающихся прямых.

1576. От скольких параметров зависит множество сфер, каждая из которых:

1) проходит через данную точку?
2) проходит через две данные точки?
3) проходит через три данные точки?
4) касается данной прямой?
5) касается данной плоскости?
6) касается данной плоскости и имеет данный радиус?

7) имеет центр на данной плоскости?
8) имеет центр на данной окружности?
9) проходит через данную окружность?

1577. Дана плоскость $\boldsymbol{rn}=D$ и сфера $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)^2=R^2$. При каком необходимом и достаточном условии данная плоскость и данная сфера:

1) не имеет ни одной общей точки?
2) касаются?
3) пересекаются?

1578. Найти геометрическое место центров сфер, касающихся трех данных плоскостей.

1579*. Известно, что плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ пересекает сферу $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. При каком необходимом и достаточном условии точка (x_0, y_0, z_0) лежит внутри меньшего сегмента, отсекаемого данной плоскостью от данного шара?

1580. Через прямую $x=x_1+lt$, $y=y_1+mt$, $z=z_1+nt$ провести плоскости, касательные к сфере $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

1581. При каком необходимом и достаточном условии прямая $x=x_1+lt$, $y=y_1+mt$, $z=z_1+nt$ и сфера $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$: 1) не имеют общих точек? 2) пересекаются?

1582. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ и параллельных плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

1583*. Составить уравнение сферы, ортогональной четырем данным сферам:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=9,\\ (x+5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2&=53,\\ (x+1)^2+y^2+(z+3)^2&=39,\\ x^2+(y+1)^2+(z-2)^2&=10. \end{aligned}$$

1584. Составить уравнение радикальной плоскости двух сфер $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)^2=R_1^2$, $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)^2=R_2^2$.

1585. Составить уравнение радикальной оси (см. задачу 1570) трех сфер $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)^2=R_i^2$, $i=1, 2, 3$.

1586. Найти радикальный центр (см. задачу 1571) четырех сфер $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)^2=R_i^2$, $i=1, 2, 3, 4$.

1587. Найти точки встречи прямой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}t$ со сферой $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)^2=R^2$.

1588. Составить уравнение сферы радиуса R, центр которой находится на прямой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}t$ и которая касается плоскости $\boldsymbol{rn}=D$.

1589. Плоскость $\boldsymbol{rn}=D$ пересекает сферу $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)^2=R^2$. Найти радиус окружности сечения.

1590. При каком условии уравнение $\boldsymbol{r}^2+2\boldsymbol{rn}+D=0$ определяет сферу? Найти ее центр и радиус.

1591. Во что переходит плоскость $\boldsymbol{rn}=D$ при инверсии ее относительно сферы $\boldsymbol{r}^2=R^2$ (см. задачу 1564)?

1592. Во что переходит сфера $\boldsymbol{r}^2-2\boldsymbol{nr}=0$ при инверсии ее относительно сферы $\boldsymbol{r}^2=R^2$ (см. задачу 1564)?

1593. Во что переходит сфера $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)^2=a^2$ при инверсии ее относительно сферы $\boldsymbol{r}^2=R^2$ (см. задачу 1564)?

1594. Составить уравнение плоскости, касательной к сфере $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)^2=R^2$ в точке $M_0(\boldsymbol{\varrho}_0)$, принадлежащей сфере.

§ 2. Конусы и цилиндры второго порядка

1595. Составить уравнение поверхности круглого цилиндра, если даны уравнения его оси $x=t$, $y=1+2t$, $z=-3-2t$ и точка $S(1, -2, 1)$ на его поверхности.

1596. Составить уравнение конуса с вершиной в точке $S(1, 2, 4)$, образующие которого составляют с плоскостью $2x+2y+z=0$ углы 45°.

1597. Составить уравнение поверхности кругового конуса, вершина которого находится в точке $S(1, 2, 3)$, ось перпендикулярна к плоскости $2x+2y-z+1=0$, а угол, образующей с осью, равен 30°.

1598. Составить уравнение конуса, описанного около сферы $x^2+y^2+z^2=1$, если вершина конуса находится в точке $M(5, 0, 0)$.

1599. Составить уравнение цилиндра, образующие которого касаются сферы $x^2+y^2+z^2-1=0$ и составляют равные углы с осями координат.

1600. Составить уравнение круглого цилиндра, описанного около двух сфер $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=36$, $x^2+y^2+z^2=36$.

1601. Составить уравнения конусов, описанных около сфер $x^2+y^2+z^2-4=0$, $x^2+y^2+(z-3)^2-1=0$.

1602*. Составить уравнение круглого цилиндра, если известны три его образующие: $x=y=z$, $x+1=y=z-1$, $x-1=y+1=z-2$.

1603. От скольких параметров зависит множество всех круглых цилиндров пространства?

1604. От скольких параметров зависит множество всех круглых конусов пространства?

1605. От скольких параметров зависит множество всех круглых цилиндров:

1) описанных около данной сферы?
2) имеющих данный радиус?
3) имеющих данную ось?
4) проходящих через данную прямую?

1606. Направляющая конуса задана уравнениями $\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1$, $x=0$, вершина конуса находится в точке $(4, 0, -3)$; составить уравнение конуса.

1607. Составить уравнение оси круглого конуса, вершина которого находится в точке $M_0(\boldsymbol{r}_0)$, если известны направляющие векторы трех образующих $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, лежащих на его поверхности. Составить также уравнение самого конуса.

1608*. Составить уравнение цилиндра второго порядка, описанного около эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, если известен вектор $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$, определяющий направление образующих.

1609. Даны круглый цилиндр $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}]^2=c^2$ и прямая $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{b}t$. При каком необходимом и достаточном условии прямая:

1) не имеет общих точек с цилиндром?
2) пересекает цилиндр?
3) касается данного цилиндра?
4) является образующей данного цилиндра?

1610. Дан круглый конус $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})^2=a^2r^2\cos^2\lambda$ ($\lambda=\text{const}$). При каком необходимом и достаточном условии прямая $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{b}t$:

1) не имеет общих точек с этим конусом?
2) проходит через его вершину?
3) является образующей конуса?
4) пересекает поверхность конуса?
5) касается поверхности конуса?

1611. При каком необходимом и достаточном условии точка лежит внутри круглого конуса $(\mathbf{ar})^2 = a^2r^2\cos^2\lambda$ $(\lambda = \mathrm{const})$.

1612. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки (x_0, y_0, z_0) на образующие круглого конуса $x^2+y^2-z^2=0$.

§ 3. Эллипсоиды; гиперболоиды; параболоиды

1613. Составить уравнение эллипсоида, пересекающего координатные плоскости Oxz и Oyz соответственно по линиям $y=0$, $\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$ и $x=0$, $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$, если его оси совпадают с осями координат.

1614. Составить уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат, если он проходит через эллипс $z=0$, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ и через точку $M(1,\ 2,\ \sqrt{23})$.

1615*. Составить уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат, если известно, что он проходит через окружность $x^2+y^2+z^2=9$, $z=x$ и точку $M(3,\ 1,\ 1)$.

1616. Составить уравнение касательной плоскости к эллипсоиду $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{75}=1$ в точке $M(3,\ 2,\ 5)$.

1617*. Найти необходимое и достаточное условие того, что плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ касается эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

1618*. При каком необходимом и достаточном условии плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$?

1619. Определить геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из центра эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ на касательные плоскости к нему.

1620*. Определить центр сечения эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$.

1621. Составить уравнение геометрического места хорд эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, которые точкой $M(x_1, y_1, z_1)$ делятся пополам.

1622. Составить уравнение диаметральной плоскости эллипсоида $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$, делящей пополам хорды, параллельные вектору $\boldsymbol{a}=\{2, 1, 2\}$.

1623. Определить геометрическое место середин хорд эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, проходящих через точку $P(x_0, y_0, z_0)$.

1624. Определить геометрическое место центров эллипсов, получаемых в пересечении эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ с касательными плоскостями к сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$.

1625. Показать, что $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1-\lambda(Ax+By+Cz+$ $+D)=0$ есть уравнение эллипсоида, проходящего через линию пересечения эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ с плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$, оси которого параллельны осям координат.

1626. Найти геометрическое место центров эллипсоидов, определяемых уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1-\lambda(Ax+By+Cz+$ $+D)=0$, где λ принимает любые значения.

1627. По какой линии пересекаются два эллипсоида

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где $a>b$?

1628. Составить уравнение в с е х плоскостей, пересекающих эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c)$ по окружностям.

1629*. Найти на эллипсоиде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что расстояние от центра эллипсоида до касательных плоскостей к эллипсоиду во всех точках этого геометрического места имеет одно и то же значение, равное d.

1630. Решить задачу 1629 для эллипсоида $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}-1=0$.

1631. Составить уравнение геометрического места точек, являющихся центрами круговых сечений эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $a>b>c$.

1632. Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $a>b>c$ пересечен пучком плоскостей, параллельных плоскости $Ax+By+Cz=0$.

1) Составить уравнения плоскостей, в которых будут расположены оси симметрии эллипсов, полученных в сечениях, считая, что данная плоскость не пересекает данный эллипсоид по окружности.

2) Рассмотреть числовой пример: $x^2+2y^2+3z^2=1$, $x+y+z=0$.

1633. Составить уравнение плоскости, пересекающей эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, по эллипсу, центр которого находится в точке (x_0, y_0, z_0).

1634. Доказать, что все плоскости, проходящие через концы трех попарно сопряженных диаметров эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, касаются эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}$, причем точки касания плоскостей ко второму эллипсоиду являются центрами сечения первого.

1635*. Доказать, что всякие два круга, получаемых при пересечении эллипсоида двумя непараллельными плоскостями, лежат на одном шаре.

1636*. Доказать, что если у двух поверхностей второго порядка коэффициенты при квадратах координат их канонических уравнений отличаются на одно и то же число, то плоскости круговых сечений этих поверхностей параллельны.

1637*. Доказать, что сумма чисел, обратных квадратам длин трех любых попарно перпендикулярных радиусов эллипсоида, постоянна для данного эллипсоида.

1638*. Доказать, что все плоскости, проходящие через концы трех попарно перпендикулярных радиусов эллипсоида, касаются шара, вписанного в куб; этот куб вписан в эллипсоид.

1639. Прямая $x=1+2t$, $y=-3+3t$, $z=t$ вращается вокруг оси Oz. Составить уравнение поверхности вращения.

1640. Найти геометрическое место центров сфер, касающихся плоскости Oxy и сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

1641. Найти поверхность, образованную движением прямой, которая пересекает параболы $y^2=2x$, $z=0$ и $z^2=-2x$, $y=0$, оставаясь параллельной плоскости $y-z=0$.

1642. Составить уравнение геометрического места прямых, касающихся сферы $x^2+y^2+z^2=1$ и пересекающих две прямые $x=1$, $y=0$ и $x=-1$, $z=0$.

1643. Составить уравнение поверхности, образованной движением окружности, плоскость которой параллельна плоскости $x+y=0$, причем эта окружность пересекает ось Ox, ось Oy и прямую $y=x$, $z=a$.

1644. Определить угол между прямолинейными образующими однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$, проходящими через произвольную точку.

1645. Определить угол прямолинейной образующей однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$ с касательной к окружности горлового сечения в той точке, в которой эта окружность пересекается с рассматриваемой образующей.

1646. Даны параметрические уравнения $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=\pm\sqrt{u^2-1}$ однополостного гиперболоида. Найти зависимость между u, v для прямолинейной образующей.

1647. Найти прямолинейные образующие поверхности $x^2+y^2=2(z^2+1)$, проходящие через точку $(1, 1, 0)$.

1648. Определить геометрическое место середин хорд гиперболоида $x^2+y^2-z^2=C$, если прямые, содержащие эти хорды, проходят через точку $S(x_0, y_0, z_0)$.

1649. Определить геометрическое место диаметров поверхности $x^2+y^2-z^2=1$, сопряженных плоскостям, касающимся сферы $x^2+y^2+z^2=1$ вдоль линии ее пересечения с плоскостью $x+y+z-1=0$.

1650. Определить геометрическое место диаметров сферы $x^2+y^2+z^2=1$, сопряженных касательным плоскостям к поверхности $x^2+y^2-z^2=1$ вдоль линии $x^2+y^2-z^2=1$, $x+y+z=1$.

1651. Составить уравнение поверхности второго порядка, проходящей через линию пересечения поверхностей $x^2+y^2-z^2-1=0$, $x^2-y^2-2z=0$ и через точку $S(0, 0, 2)$.

1652. Определить геометрическое место центров плоских сечений сферы $x^2+y^2+z^2-1=0$, полученных в результате пересечения ее касательными плоскостями к поверхности $x^2+y^2=2z$.

1653. Доказать, что проекции прямолинейных образующих поверхности $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ $(p>0,\ q>0)$ на плоскость Oxz касаются параболы $x^2=2pz$.

1654*. На гиперболическом параболоиде $x^2-y^2=2z$ найти геометрическое место точек пересечения двух взаимно перпендикулярных образующих.

1655. Найти геометрическое место середин хорд конуса $x^2+y^2-z^2=0$, если прямые, содержащие эти хорды, проходят через данную точку $S(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

1656*. Доказать, что проекции на плоскость горлового эллипса линий, по которым поверхность однополостного гиперболоида рассекается касательными плоскостями к его асимптотическому конусу, касаются этого эллипса.

1657*. Прямолинейная образующая однополостного гиперболоида проектируется в плоскость горлового сечения. Как будет расположена проекция относительно горлового сечения?

1658. Найти проекции прямолинейных образующих гиперболического параболоида на плоскость, касательную в его вершине.

1659*. Составить уравнения прямой, на которой расположены центры сечений эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ плоскостями, параллельными плоскости $Ax+By+Cz=0$.

1660*. Эллипсоид перемещается так, что касается трех взаимно перпендикулярных плоскостей. Найти геометрическое место центров движущегося эллипсоида.

1661*. Эллипсоид вращается вокруг своего центра так, что все время касается некоторой плоскости. Найти геометрическое место точек касания на самом эллипсоиде (полодия). (Этот вопрос имеет приложение в механике твердого тела: движение по инерции твердого тела, вокруг неподвижной точки.)

1662. Составить уравнения прямой, на которой расположены центры сечений эллипсоида $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$ плоскостями, параллельными плоскости $x-z=0$.

1663. При каком необходимом и достаточном условии точка (x_0, y_0, z_0) лежит внутри эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$?

1664. Пусть (x_0, y_0, z_0) — внутренняя точка эллипсоида. Составить уравнение плоскости, проходящей через эту точку и пересекающей эллипсоид по эллипсу, центр которого находится в этой точке.

1665*. Пусть (x_0, y_0, z_0) — внешняя точка эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Составить уравнение конуса с вершиной в данной точке, описанного около этого эллипсоида.

1666. Составить уравнение конуса с вершиной в данной точке $S_0(6, 0, 0)$, описанного около данного эллипсоида $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$.

1667. Доказать, что около трехосного эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ нельзя описать круглый цилиндр.

1668*. Найти геометрическое место точек пересечения трех взаимно перпендикулярных плоскостей, каждая из которых касается данного эллипсоида.

1669*. Доказать, что для трехосного эллипсоида, заданного своим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c)$ относительно декартовой прямоугольной системы координат, c является минимальным радиусом*), a — максимальным, а b — «минимаксом», т. е. минимальным радиусом из всех максимальных радиусов плоских сечений этого эллипсоида.

1670. Доказать, что уравнения $x=a\cos u\cos v$, $y=b\sin u\cos v$, $z=c\sin v$ — параметрические уравнения эллипсоида. Каков геометрический смысл параметров u и v? Какие линии определяются уравнениями $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$?

1671. Какой вид примет уравнение эллипсоида, если за плоскость Oxy принять плоскость кругового сечения, проходящего через центр поверхности, а за ось Oz — диаметр, сопряженный этой плоскости?

---

*) Радиусом эллипсоида называется отрезок, граничными точками которого служат центр эллипсоида и его произвольная точка.

1672*. Исследовать, какие линии второго порядка могут получиться в сечении однополостного гиперболоида произвольной плоскостью.

1673*. Доказать, что плоскость, касательная к однополостному гиперболоиду, пересекает его по двум прямолинейным образующим.

1674*. Доказать, что любая плоскость, проходящая через прямолинейную образующую однополостного гиперболоида, пересекает его еще по прямолинейной образующей другой серии.

1675. Найти геометрическое место точек, для каждой из которых отношение расстояний до двух скрещивающихся прямых пространства равно данному числу p.

1676. Определить геометрическое место точек пересечения трех взаимно перпендикулярных касательных плоскостей к параболоиду $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=2z$.

1677*. Доказать, что геометрическое место вершин трехгранного угла, все плоские углы которого прямые, а грани касаются данного однополостного гиперболоида, есть сфера, центр которой совпадает с центром данного однополостного гиперболоида.

1678*. Исследовать, какие линии второго порядка могут получиться в сечении двуполостного гиперболоида произвольными плоскостями.

1679*. Доказать, что геометрическое место вершин трехгранного угла, все плоские углы которого прямые, а грани касаются двуполостного гиперболоида, есть сфера, центр которой совпадает с центром рассматриваемого двуполостного гиперболоида.

1680. Составить уравнение конуса с вершиной в точке (x_0, y_0, z_0), описанного около однополостного или двуполостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$.

1681. Составить уравнение цилиндра с образующими, параллельными вектору $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$, описанного около однополостного или двуполостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1.$$

1682. При каком необходимом и достаточном условии точка (x_0, y_0, z_0) будет внутренней точкой двуполостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$?

1683*. Как запишется уравнение однополостного гиперболоида, если за начало координат принять точку O этой поверхности, за оси Ox и Oy — прямолинейные образующие, проходящие через эту точку, а за ось Oz — диаметр, сопряженный плоскостям, параллельным плоскости Oxy?

1684*. Как запишется уравнение двуполостного гиперболоида, если за начало координат принять произвольную точку O этой поверхности, за оси Ox и Oy — две прямые, лежащие в касательной плоскости в точке O, имеющие сопряженные направления относительно любого сечения плоскостью, параллельной касательной, а за ось Oz — диаметр, проходящий через точку O?

1685*. Доказать, что плоскость, параллельная любой плоскости, касательной к двуполостному гиперболоиду, либо не пересекает этот гиперболоид, либо имеет с ним одну общую точку, либо пересекает по эллипсу.

1686*. Рассмотрим семейство поверхностей второго порядка $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$. Исследовать аффинный сорт поверхности семейства в зависимости от значений λ, считая $a>b>c>0$. Доказать, что через каждую точку пространства проходят три поверхности из этого семейства: эллипсоид, однополостный гиперболоид и двуполостный гиперболоид. Доказать, что эти поверхности пересекаются ортогонально.

1687*. Доказать, что плоскость, касательная к асимптотическому конусу однополостного гиперболоида, пересекающего ортогонально данный эллипсоид, пересекает этот эллипсоид по эллипсу, имеющему постоянную площадь.

1688. Составить параметрические уравнения однополостного гиперболоида и двуполостного гиперболоида.

1689*. Какой вид примет уравнение однополостного гиперболоида, если за плоскость Oxy принять плоскость, проходящую через центр поверхности, параллельно плоскости кругового сечения, а за ось Oz принять:

1) диаметр, сопряженный плоскости Oxy?

2) нормаль к плоскости Oxy, проходящую через центр поверхности?

1690*. Какой вид примет уравнение двуполостного гиперболоида, если принять за плоскость Oxy плоскость, проходящую через центр поверхности, параллельную плоскости круговых сечений, а за ось Oz принять:

1) диаметр, сопряженный плоскости?

2) нормаль к плоскости Oxy, проходящую через центр поверхности?

1691. Доказать, что геометрическое место точек, для каждой из которых отношение расстояния от данной точки F к расстоянию до данной плоскости p равно данному числу $k \neq 1$, есть поверхность вращения второго порядка. Доказать, что конус с вершиной в точке F, направляющей которого служит какое угодно плоское сечение указанной поверхности, есть конус вращения.

1692. Доказать, что проекция любого плоского сечения параболоида вращения плоскостью, пересекающей его ось, на плоскость, перпендикулярную к его оси, есть окружность.

1693*. Какие аффинные сорта линий второго порядка получаются при сечении эллиптического параболоида произвольной плоскостью?

1694. Составить уравнения прямой, на которой лежат центры сечений эллиптического параболоида $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ $p > 0,\ q > 0)$ плоскостями, параллельными плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

1695. При каком необходимом и достаточном условии точка (x_0, y_0, z_0) лежит внутри эллиптического параболоида $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0,\ q > 0)$?

1696. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная внутренняя точка эллиптического параболоида $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z\ (p > 0,\ q > 0)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через эту точку и пересекающей данную поверхность по эллипсу с центром в точке M_0.

1697. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — внешняя точка эллиптического параболоида $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0,\ q > 0)$. Составить уравнение конуса второго порядка с вершиной в точке M_0, описанного около этой поверхности. Составить уравнение плоскости, в которой лежит линия прикосновения конуса с поверхностью.

1698. Составить уравнение цилиндра с образующими, параллельными вектору $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$, описанного около эллиптического параболоида $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$.

1699*. Доказать, что геометрическое место вершин трехгранных углов, все плоские углы которого прямые, грани которого касаются данного эллиптического параболоида, есть плоскость, перпендикулярная к оси параболоида.

1700*. Доказать, что если p' и q' — параметры парабол, получаемых в сечении эллиптического параболоида $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ $(p>0,\ q>0)$ двумя сопряженными диаметральными плоскостями, то $p'+q'=p+q$.

1701. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки и от данной плоскости, не проходящей через данную точку.

1702*. Доказать, что конус второго порядка с вершиной в фокусе меридионального сечения параболоида вращения (т. е. сечения, проходящего через ось вращения), направляющей которого служит любое плоское сечение этого параболоида, есть конус вращения.

1703*. Доказать, что плоскости, параллельные любой касательной плоскости к эллиптическому параболоиду, либо не пересекают эту поверхность, либо касаются ее, либо пересекают по эллипсу.

1704*. Доказать, что гиперболический параболоид не имеет плоских эллиптических сечений.

1705*. Какие аффинные сорта линий второго порядка могут быть получены в сечении гиперболического параболоида различными плоскостями?

1706. Составить уравнения прямой, на которой лежат центры сечений гиперболического параболоида $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ $(p>0,\ q>0)$ плоскостями, параллельными плоскости $Ax+$ $+By+Cz=0$ $(C\neq 0)$.

1707. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка. Составить уравнение плоскости, проходящей через эту точку и рассекающую гиперболический параболоид $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ по центральной линии второго порядка с центром в точке M_0.

1708*. Какой вид примет уравнение гиперболического параболоида, если за начало координат принять произвольную точку O поверхности, за оси Ox и Oy — две прямолинейные образующие, проходящие через точку O, а за ось Oz — прямую, параллельную оси параболоида?

1709*. Доказать, что геометрическое место вершин трехгранных углов, все плоские углы которого прямые, а грани касаются гиперболического параболоида, есть плоскость, перпендикулярная к оси этого гиперболического параболоида.

1710*. Доказать, что если p' и q' — параметры парабол, получаемых в сечении гиперболического параболоида $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ $(p>0,\ q>0)$ двумя его взаимно перпендикулярными диаметральными плоскостями, то $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$.

1711*. Доказать, что если p' и q' — параметры парабол, получаемых в сечении гиперболического параболоида $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ двумя сопряженными диаметральными плоскостями, то $p'+q'=p-q$.

1712*. Доказать, что касательная плоскость в вершине гиперболического параболоида делит пополам отрезок прямолинейной образующей, заключенный между двумя главными плоскостями этой поверхности.

1713. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных скрещивающихся прямых в пространстве.

1714. Доказать, что любая плоскость, проходящая через прямолинейную образующую гиперболического параболоида в случае, если она не параллельна оси этой поверхности, проходит еще через одну прямолинейную образующую этого гиперболического параболоида, причем эта плоскость будет касательной к поверхности в точке пересечения указанных прямолинейных образующих.

1715. Доказать, что параметрические уравнения $x=\sqrt{p}(u+v)$, $y=\sqrt{q}(u-v)$, $z=2uv$, где $p>0$, $q>0$, суть уравнения гиперболического параболоида. Какие линии определяют уравнения $u=\text{const}$, $v=\text{const}$?

1716. Найти геометрическое место точек на поверхности гиперболического параболоида $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$, через каждую из которых проходят две взаимно перпендикулярные прямолинейные образующие этой поверхности.

1717*. Доказать, что проекции прямолинейных образующих гиперболического параболоида на плоскость, касательную к этому параболоиду в его вершине, параллельны тем прямолинейным образующим, которые лежат в указанной касательной плоскости.

1718. Доказать, что проекции прямолинейных образующих гиперболического параболоида на какую-либо главную плоскость огибают сечение поверхности этой главной плоскостью.

1719*. На двух скрещивающихся прямых пространства на равных расстояниях друг от друга взяты точки:

на прямой l точки 1, 2, 3, 4, ...;

на прямой l' точки $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, ...

Доказать, что прямые $11'$, $22'$, $33'$, $44'$, ... лежат на поверхности одного и того же гиперболического параболоида (на этом свойстве основано построение нитяных моделей гиперболического параболоида).

ГЛАВА XV

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+$$
$$+2a_{31}zx+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0. \qquad (1)$$

В случае, если уравнение (1) задано относительно декартовой прямоугольной системы координат, следующие выражения являются инвариантами поворота и переноса декартовой прямоугольной системы координат:

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33}$$

$$K_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}.$$

Следующие два выражения, называемых семиинвариантами, являются инвариантами поворота декартовой прямоугольной системы координат:

$$K_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{31} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a \end{vmatrix},$$

$$K_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a \end{vmatrix}.$$

В случае, если $I_3=0$, $K_4=0$, семиинвариант K_3 будет также и инвариантом переноса; в случае же $I_3=0$, $K_4=0$, $I_2=0$, $K_3=0$ семиинвариант K_2 будет также и инвариантом переноса.

I. Если $I_3\neq 0$, то уравнение поверхности второго порядка при помощи поворота и переноса прямоугольной системы координат может быть приведено к следующему виду:

$$\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2+\lambda_3 Z^2+\frac{K_4}{I_3}=0, \tag{I}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{2}$$

или

$$\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0.$$

1°. Если λ_1, λ_2, λ_3 одного знака, а $\frac{K_4}{I_3}$ имеет знак, им противоположный, то уравнение (I) определяет эллипсоид.

Считая, что

$$|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant|\lambda_3|,$$

перепишем уравнение (I) в виде:

$$\frac{X^2}{-\frac{K_4}{\lambda_1 I_3}}+\frac{Y^2}{-\frac{K_4}{\lambda_2 I_3}}+\frac{Z^2}{-\frac{K_4}{\lambda_3 I_3}}=1.$$

Тогда полуоси эллипсоида будут:

$$a=\sqrt{-\frac{K_4}{\lambda_1 I_3}},\quad b=\sqrt{-\frac{K_4}{\lambda_2 I_3}},\quad c=\sqrt{-\frac{K_4}{\lambda_3 I_3}},$$

причем в силу условия $|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant|\lambda_3|$ будем иметь $a\geqslant b\geqslant c$.

2°. Если λ_1, λ_2, λ_3, $\frac{K_4}{I_3}$ одного знака, то уравнение определяет мнимый эллипсоид: считая $|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant|\lambda_3|$, приведем его к виду:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=-1,$$

где

$$a=\sqrt{\frac{K_4}{\lambda_1 I_3}},\quad b=\sqrt{\frac{K_4}{\lambda_2 I_3}},\quad c=\sqrt{\frac{K_1}{\lambda_3 I_3}},$$

причем в силу условия $|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant|\lambda_3|$ будем иметь $a\geqslant b\geqslant c$.

3°. Если λ_1, λ_2, λ_3 одного знака, а $K_4=0$, то уравнение (I) определяет мнимый конус. Считая $|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant|\lambda_3|$, мы приведем его к виду:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0,$$

где

$$a=\sqrt{\frac{1}{|\lambda_1|}},\quad b=\sqrt{\frac{1}{|\lambda_2|}},\quad c=\sqrt{\frac{1}{|\lambda_3|}},$$

причем $a\geqslant b\geqslant c$.

4°. Если два корня характеристического уравнения (2) одного знака, а третий корень и $\frac{K_4}{I_3}$ имеют знак, им противоположный, то уравнение (I) определяет **однополостный гиперболоид**. Обозначая в этом случае через λ_1 и λ_2 корни характеристического уравнения, имеющие один знак, и полагая $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, уравнение (I) перепишем в виде:

$$\frac{X^2}{-\frac{K_4}{\lambda_1 I_3}} + \frac{Y^2}{-\frac{K_4}{\lambda_2 I_3}} + \frac{Z^2}{-\frac{K_4}{\lambda_3 I_3}} = 1$$

или

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1,$$

где

$$a = \sqrt{-\frac{K_4}{\lambda_1 I_3}}, \quad b = \sqrt{-\frac{K_4}{\lambda_2 I_3}}, \quad c = \sqrt{\frac{K_4}{\lambda_3 I_3}},$$

причем $a \geqslant b$.

5°. Если два корня характеристического уравнения и свободный член $\frac{K_4}{I_3}$ уравнения (I) имеют один и тот же знак, а третий корень характеристического уравнения имеет знак, им противоположный, то уравнение (I) определяет **двуполостный гиперболоид**. Обозначая в этом случае через λ_1 и λ_2 корни одного знака и считая $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2|$, перепишем уравнение (2) в виде

$$\frac{X^2}{\frac{K_4}{\lambda_1 I_3}} + \frac{Y^2}{\frac{K_4}{\lambda_2 I_3}} - \frac{Z^2}{-\frac{K_4}{\lambda_3 I_3}} = -1$$

или

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1,$$

где $a \geqslant b$.

6°. Если два корня характеристического уравнения одного знака, третий корень имеет знак, им противоположный, и $K_4 = 0$, то уравнение (I) определяет **конус**. Считая, что одинаковый знак имеют корни λ_1 и λ_2, и полагая $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2|$, приведем уравнение (I) к виду:

$$\frac{X^2}{\frac{1}{|\lambda_1|}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{|\lambda_2|}} - \frac{Z^2}{\frac{1}{|\lambda_3|}} = 0$$

или

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0,$$

где

$$a=\sqrt{\frac{1}{|\lambda_1|}}, \quad b=\sqrt{\frac{1}{|\lambda_2|}}, \quad c=\sqrt{\frac{1}{|\lambda_3|}},$$

причем $a \geqslant b$.

Число положительных корней характеристического уравнения (2) равно числу перемен знаков в ряде его коэффициентов (правило Декарта).

II. Если $I_3=0$, $K_4 \neq 0$, то уравнение поверхности второго порядка при помощи поворота и переноса прямоугольной системы координат может быть приведено к следующему виду:

$$\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}\,Z=0, \tag{II}$$

где λ_1 и λ_2 — отличные от нуля корни характеристического уравнения.

7°. Если λ_1 и λ_2 одного знака, то уравнение (II) определяет эллиптический параболоид.

Будем считать

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2|.$$

Переписывая уравнение (II) в виде:

$$\frac{X^2}{\pm\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}}+\frac{Y^2}{\pm\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}}=2Z,$$

выбирая перед радикалом знак, противоположный знаку λ_1 и λ_2, и полагая

$$\pm\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}=p, \quad \pm\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}=q,$$

получим:

$$\frac{X^2}{p}+\frac{Y^2}{q}=2Z,$$

где $p \geqslant q > 0$.

8°. Если λ_1 и λ_2 разных знаков, то уравнение (II) определяет гиперболический параболоид.

Обозначая через λ_1 положительный корень, через λ_2 отрицательный и беря перед радикалом $\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}$ знак минус, перепишем уравнение (II) в виде:

$$\frac{X^2}{\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}}-\frac{Y^2}{-\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}}=2Z$$

или

$$\frac{X^2}{p}-\frac{Y^2}{q}=2Z,$$

где

$$p=\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{\frac{K_4}{I_2}},\quad q=-\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}.$$

III. Если $I_3=0$, $K_4=0$, $I_2\neq 0$, то уравнение поверхности второго порядка при помощи поворота и переноса прямоугольной системы координат может быть приведено к следующему виду:

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\frac{K_3}{I_2}=0, \tag{III}$$

где λ_1 и λ_2 — отличные от нуля корни характеристического уравнения.

9°. Если λ_1 и λ_2 одного знака, а $\frac{K_3}{I_2}$ имеет знак, им противоположный, то уравнение (III) определяет **эллиптический цилиндр**.

Считая, что $|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|$, перепишем уравнение (III) так:

$$\frac{X^2}{-\frac{K_3}{\lambda_1I_2}}+\frac{Y^2}{-\frac{K_3}{\lambda_2I_2}}=1$$

или

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1,$$

где

$$a=\sqrt{-\frac{K_3}{\lambda_1I_2}},\quad b=\sqrt{-\frac{K_3}{\lambda_2I_2}},$$

причем $a\geqslant b$.

10°. Если λ_1, λ_2 и $\frac{K_3}{I_2}$ одного знака, то уравнение (III) определяет **мнимый эллиптический цилиндр**.

Считая $|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|$, перепишем уравнение (III) в виде:

$$\frac{X^2}{\frac{K_3}{\lambda_1I_2}}+\frac{Y^2}{\frac{K_3}{\lambda_2I_2}}=-1$$

или

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1;$$

здесь $a\geqslant b$.

11°. Если λ_1 и λ_2 одного знака, а $K_3=0$, то уравнение (III) определяет **две мнимые пересекающиеся плоскости**.

Перепишем в этом случае уравнение (III) в виде:

$$\frac{X^2}{\frac{1}{|\lambda_1|}}+\frac{Y^2}{\frac{1}{|\lambda_2|}}=0$$

или

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0,$$

где $a \geqslant b$,

$$a=\sqrt{\frac{1}{|\lambda_1|}}, \qquad b=\sqrt{\frac{1}{|\lambda_2|}}.$$

12°. Если λ_1 и λ_2 разных знаков и $K_3 \neq 0$, то уравнение (III) определяет гиперболический цилиндр. Обозначая через λ_1 тот корень характеристического уравнения, который имеет знак, противоположный знаку $\frac{K_3}{I_2}$, перепишем уравнение (III) в виде:

$$\frac{X^2}{-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}}-\frac{Y^2}{\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}}=1$$

или

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1,$$

где

$$a=\sqrt{-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}}, \qquad b=\sqrt{\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}}.$$

13°. Если λ_1 и λ_2 разных знаков и $K_3=0$, то уравнение (III) определяет две пересекающиеся плоскости. Обозначая через λ_1 положительный корень характеристического уравнения, перепишем уравнение (III) в виде:

$$\frac{X^2}{\frac{1}{\lambda_1}}-\frac{Y^2}{-\frac{1}{\lambda_2}}=0$$

или

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0,$$

где

$$a=\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}, \qquad b=\sqrt{-\frac{1}{\lambda_2}}.$$

IV. Если $I_3=0$, $K_4=0$, $I_2=0$, $K_3 \neq 0$, то уравнение поверхности второго порядка при помощи поворота и переноса прямоугольной системы координат может быть приведено к следующему виду:

$$\lambda_1 X^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}\,Y=0, \tag{IV}$$

где $\lambda_1=I_1$ — отличный от нуля корень характеристического уравнения.

14°. Уравнение (IV) можно переписать и так:

$$X^2 = 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1^3}}\,Y.$$

Это уравнение определяет **параболический цилиндр**. Параметр параболы, полученной в сечении этого цилиндра плоскостью, перпендикулярной к его образующим, определяется формулой

$$p = \sqrt{-\frac{K_3}{I_1^3}}.$$

V. Если $I_3 = 0$, $K_4 = 0$, $I_2 = 0$, $K_3 = 0$, то уравнение поверхности второго порядка при помощи поворота и переноса прямоугольной системы координат может быть приведено к следующему виду:

$$\lambda_1 X^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0 \quad \text{или} \quad I_1 X^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0,$$

или

$$X^2 + \frac{K_2}{I_1^2} = 0. \qquad \text{(V)}$$

15°. Если $K_2 < 0$, то уравнение (V) определяет две **параллельные плоскости**.

Полагая в этом случае

$$\frac{K_2}{I_1^2} = -a^2,$$

перепишем его в виде:

$$X^2 - a^2 = 0.$$

16°. Если $K_2 > 0$, то уравнение (V) определяет две **мнимые параллельные плоскости**. Полагая

$$\frac{K_2}{I_1^2} = a^2,$$

перепишем его в виде:

$$X^2 + a^2 = 0.$$

17°. Наконец, если $K_2 = 0$, то уравнение (V) определяет две **совпадающие плоскости**:

$$X^2 = 0.$$

Для того чтобы поверхность второго порядка была поверхностью вращения, необходимо и достаточно, чтобы ее характеристическое уравнение имело кратный корень.

Для определения расположения поверхности, каноническое уравнение которой уже известно, нужно знать координаты нового начала O' канонической системы координат, т. е. той системы координат, в которой поверхность имеет каноническое уравнение и координаты направляющих векторов осей этой системы.

Координаты направляющих векторов осей канонической системы координат определяются из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)\,l+a_{12}m+a_{13}n=0,\\ a_{21}l+(a_{22}-\lambda)\,m+a_{23}n=0,\\ a_{31}l+a_{32}m+(a_{33}-\lambda)\,n=0,\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

где λ — корень характеристического уравнения. В случае поверхности вращения для определения ее расположения надо знать положение нового начала O' канонической системы координат и координаты направляющего вектора оси вращения, которые определяются из системы (3), где λ — простой корень характеристического уравнения.

В случае, если поверхность имеет центр (не обязательно единственный), за начало координат O' канонической системы берется центр поверхности. Координаты центра поверхности определяются из системы уравнений:

$$\begin{aligned}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1=0,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2=0,\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_3=0.\end{aligned}\qquad(4)$$

I. 1°. Трехосный эллипсоид

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1,\qquad a>b>c.$$

Координаты центра трехосного эллипсоида определяются из системы (4). Координаты направляющего вектора бóльшей оси ($O'X$) определяются из системы (3), где λ — наименьший по абсолютной величине корень характеристического уравнения; координаты направляющего вектора средней оси ($O'Y$) определяются из системы (3), где λ — средний по величине корень характеристического уравнения, а координаты направляющего вектора меньшей оси ($O'Z$) определяются из системы (3), где λ — наибольший по абсолютной величине корень характеристического уравнения.

2°. Если уравнение (1) определяет точку (мнимый конус), то координаты этой точки определяются из системы (4).

3°. Однополостный гиперболоид

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1,\qquad a>b.$$

Координаты центра однополостного гиперболоида определяются из системы (4).

Пусть λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения, имеющие один и тот же знак, причем $|\lambda_1|<|\lambda_2|$ и λ_3 — третий корень характеристического уравнения, знак которого противоположен знаку корней λ_1 и λ_2. Координаты направляющего вектора оси гиперболоида ($O'Z$) определяются из системы (3), где $\lambda=\lambda_3$; координаты направляющего вектора бóльшей оси горлового сечения однополостного гиперболоида ($O'X$) определяются из системы (3), где $\lambda=\lambda_1$, а координаты направляющего вектора меньшей оси ($O'Y$) горлового сечения однополостного гиперболоида определяются из системы (3), где $\lambda=\lambda_2$.

4°. Двуполостный гиперболоид:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=-1, \qquad a>b.$$

Координаты центра двуполостного гиперболоида определяются из системы (4).

Пусть λ_1 и λ_2—корни характеристического уравнения, имеющие один и тот же знак, причем $|\lambda_1|<|\lambda_2|$, а λ_3—третий корень характеристического уравнения, знак которого противоположен знаку корней λ_1 и λ_2. Тогда координаты направляющего вектора оси $(O'Z)$ гиперболоида определяются из системы (3), где $\lambda=\lambda_3$; координаты направляющего вектора оси $O'X$ (т. е. бо́льшей оси эллипса, получающегося в сечении, перпендикулярном к оси гиперболоида) определяются из системы (3), где $\lambda=\lambda_1$; координаты направляющего вектора оси $O'Y$ определяются из системы (3), где $\lambda=\lambda_2$.

5°. Конус:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0 \qquad a>b.$$

Координаты вершины конуса определяются из системы (4). Пусть λ_1 и λ_2—корни характеристического уравнения, имеющие один и тот же знак, причем $|\lambda_1|<|\lambda_2|$, а λ_3—третий корень характеристического уравнения, знак которого противоположен знаку λ_1 и λ_3.

Тогда координаты направляющего вектора оси конуса $(O'Z)$ определяются из системы (3), где $\lambda=\lambda_3$. Координаты направляющего вектора оси $O'X$ (большей оси эллипса, получающегося в сечении, перпендикулярном к его оси) определяются из системы (3), где $\lambda=\lambda_1$; координаты направляющего вектора оси $O'Y$ определяются из системы (3), где $\lambda=\lambda_2$.

II. 6°. Эллиптический параболоид

$$\frac{X^2}{p}+\frac{Y^2}{q}=2Z.$$

Началом координат канонической системы в этом случае является вершина параболоида. Вектор эллиптического параболоида, направленный в сторону вогнутости поверхности, определяется соотношением

$$p=\{I_1A_1, \quad I_1A_2, \quad I_1A_3\},$$

где

$$A_1=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{32} & a_{33} & a_3 \end{vmatrix}, \qquad A_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{33} & a_3 \end{vmatrix},$$

$$A-_3-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{vmatrix}$$

—алгебраические дополнения элементов a_1, a_2, a_3 определителя K_4.

Пусть λ_1 и λ_2 — отличные от нуля корни характеристического уравнения, причем $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Тогда координаты направляющего вектора оси $O'X$ (большей оси эллипса, получающегося в сечении эллиптического параболоида, плоскостью перпендикулярной к его оси) определяются из системы (3), где $\lambda = \lambda_1$; координаты направляющего вектора оси $O'Y$ определяются из системы (3), где $\lambda = \lambda_2$.

Вершина эллиптического параболоида определяется из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1}{A_1} = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2}{A_2} = \\ &\qquad\qquad = \frac{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3}{A_3}, \\ &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + \\ &\qquad + 2a_{31}zx + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

7°. Гиперболический параболоид:

$$\frac{X^2}{p} - \frac{Y^2}{q} = 2Z.$$

Началом координат канонической системы в этом случае является вершина параболоида. Направляющий вектор оси гиперболического параболоида, направленный в сторону вогнутости главного сечения параболоида плоскостью $(O'XZ)$ с бо́льшим параметром (p), будет:

$$\{I_1A_1, \quad I_1A_2, \quad I_1A_3\},$$

где A_1, A_2, A_3 — алгебраические дополнения элементов a_1, a_2, a_3 определителя K_4.

Пусть λ_1 и λ_2 — отличные от нуля корни характеристического уравнения, причем $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Тогда координаты направляющего вектора оси $O'X$ (биссектрисы острого угла между прямолинейными образующими, проходящими через вершину) определяются из системы (3), где $\lambda = \lambda_1$; координаты направляющего вектора оси $O'Y$ определяются из системы (3), где $\lambda = \lambda_2$.

Вершина гиперболического параболоида определяется из системы (5).

Если в случае гиперболического параболоида $\lambda_1 = -\lambda_2$, то каноническое уравнение гиперболического параболоида будет иметь вид:

$$X^2 - Y^2 = 2pZ.$$

В этом случае параболы, получающиеся в сечении параболоида плоскостями $O'XZ$ и $O'YZ$, имеют один и тот же параметр. Направление оси параболоида в этом случае определяется вектором $\{A_1, A_2, A_3\}$.

III. 8°. Эллиптический цилиндр:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Для определения расположения эллиптического цилиндра в случае $a \neq b$ надо знать его ось и направляющие векторы большей и меньшей осей сечения, перпендикулярного к оси цилиндра.

Ось цилиндра определяется уравнениями (4) (из которых нужно в данном случае взять лишь два линейно независимых).

Пусть λ_1 и λ_2 — отличные от нуля корни характеристического уравнения, причем $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.

Тогда координаты направляющего вектора оси $O'X$ (большей оси сечения, перпендикулярного к оси цилиндра) определяются из системы (3), где $\lambda = \lambda_1$; координаты направляющего вектора оси $O'Y$ определяются из системы (3), где $\lambda = \lambda_2$.

В случае $\lambda_1 = \lambda_2$ мы имеем круговой цилиндр

$$X^2 + Y^2 = a^2,$$

и для определения его расположения достаточно знать только его ось (см. выше).

9°. Гиперболический цилиндр:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Для определения расположения гиперболического цилиндра надо знать его ось и направляющие векторы действительной и мнимой осей сечения, перпендикулярного к оси цилиндра.

Ось цилиндра определяется уравнениями (4). Пусть λ_1 и λ_2 — отличные от нуля корни характеристического уравнения, причем λ_1 тот из них, знак которого противоположен знаку $\frac{K_2}{I_2}$. Тогда координаты направляющего вектора оси $O'X$ (действительной оси сечения цилиндра плоскостью, перпендикулярной к его оси) определяются из системы (3), где $\lambda = \lambda_1$, а координаты направляющего вектора оси $O'Y$ (мнимой оси) определяются из системы (3), где $\lambda = \lambda_2$.

IV. 10°. Параболический цилиндр. Чтобы определить расположение параболического цилиндра, достаточно знать:

1) плоскость симметрии, параллельную образующим цилиндра;

2) касательную плоскость к цилиндру, перпендикулярную к этой плоскости симметрии;

3) вектор, перпендикулярный к этой касательной плоскости и направленный в сторону вогнутости цилиндра.

В случае, если общее уравнение определяет параболический цилиндр, оно может быть переписано в виде:

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + 2b_3 z + b = 0$$

или

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z + m)^2 - [2(m\alpha - b_1)x + 2(m\beta - b_2)y + \\ + (m\gamma - b_3)z + m^2 - b] = 0.$$

Подберем m так, чтобы плоскости

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + m = 0,$$
$$2(m\alpha - b_1)x + 2(m\beta - b_2)y + (m\gamma - b_3)z + m^2 - b = 0$$

были бы взаимно перпендикулярными:

$$\alpha(m\alpha-b_1)+\beta(m\beta-b_2)+\gamma(m\gamma-b_3)=0,$$

откуда

$$m=\frac{b_1\alpha+b_2\beta+b_3\gamma}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

При этом значении m плоскость

$$2(m\alpha-b_1)x+2(m\beta-b_2)y+(m\gamma-b_3)z+m^2-b=0$$

будет плоскостью симметрии, параллельной образующим цилиндра; плоскость

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+m=0$$

будет касательной плоскостью к цилиндру, перпендикулярной к указанной плоскости симметрии, а вектор

$$\{\alpha m-b_1,\quad \beta m-b_2,\quad \gamma m-b_3\}$$

будет перпендикулярен к найденной касательной плоскости и направлен в сторону вогнутости цилиндра.

Если уравнение (1) определяет поверхность, распадающуюся на пару плоскостей, то для определения ее расположения надо знать уравнения каждой из этих плоскостей. Эти уравнения получим, разлагая левую часть уравнения (1) каким-либо способом на линейные относительно x, y, z множители и приравнивая каждое из них нулю.

Для того чтобы поверхность второго порядка, определяемая уравнением (1), распадалась на пару плоскостей, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{pmatrix}$$

был бы равен 2 или 1.

Если начало координат служит центром поверхности, то в уравнении поверхности отсутствуют члены с первыми степенями координат, т. е. оно имеет вид:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+a=0.$$

Обратно, уравнение такого вида определяет центральную поверхность, для которой начало координат является центром.

Если перенести оси координат так, чтобы новое начало координат стало центром поверхности, то общее уравнение поверхности примет вид:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+a=0,$$

где

$$a=\frac{K_4}{I_3},\quad \text{если } I_3\neq 0;$$
$$a=\frac{K_3}{I_2},\quad \text{если } I_3=0,\ K_4=0,\ I_2\neq 0;$$
$$a=\frac{K_2}{I_1},\quad \text{если } I_3=0,\ K_4=0,\ I_2=0,\ K_3=0,\ I_1\neq 0.$$

В частности, уравнение конуса с вершиной в начале координат имеет вид:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx=0.$$

Обратно, всякое уравнение такого вида определяет конус (действительный или мнимый) с вершиной в начале координат или пару плоскостей, проходящих через начало координат (действительных и различных или пару мнимых, или пару совпадающих).

Уравнения, связывающие старые координаты с новыми, имеют вид:

$$\begin{aligned} x&=l_1X+l_2Y+l_3Z+x_0,\\ y&=m_1X+m_2Y+m_3Z+y_0,\\ z&=n_1X+n_2Y+n_3Z+z_0, \end{aligned}$$

где $e_1'=\{l_1,\ m_1,\ n_1\}$, $e_2'=\{l_2,\ m_2,\ n_2\}$, $e_3'=\{l_3,\ m_3,\ n_3\}$ — единичные векторы осей $O'X$, $O'Y$, $O'Z$ канонической системы, определяемые из системы (4), а x_0, y_0, z_0 — координаты нового начала (центра поверхности, если поверхность центральная, и координаты вершины, если она не центральная) по отношению к старой системе.

Касательная плоскость к поверхности

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_1x+\\ +2a_2y+2a_3z+a=0$$

в точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ определяется уравнением

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_1)\,x+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_2)\,y+\\ +(a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_3)\,z+a_1x_0+a_2y_0+a_3z_0+a=0.$$

Конус с вершиной в точке $S(x_0,\ y_0,\ z_0)$, описанный около поверхности второго порядка, заданной общим уравнением (1), имеет уравнение

$$\begin{aligned}&(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+\\ &\quad+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a)\,(a_{11}x_0^2+a_{22}y_0^2+a_{33}z_0^2+2a_{12}x_0y_0+\\ &\quad+2a_{23}y_0z_0+2a_{31}z_0x_0+2a_1x_0+2a_2y_0+2a_3z_0+a)-\\ &\quad-[(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_1)\,x+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_2)\,y+\\ &\quad+(a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_3)\,z+a_1x_0+a_2y_0+a_3z_0+a]^2=0.\end{aligned}$$

Цилиндр, описанный около поверхности второго порядка, заданной общим уравнением (1), образующие которого параллельны вектору $\{l, m, n\}$, определяется уравнением

$$(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_1x+2a_2y+ \\ +2a_3z+a)(a_{11}l^2+a_{22}m^2+a_{33}n^2+2a_{12}lm+2a_{23}mn+2a_{31}nl)- \\ -[(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1)\,l+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2)\,m+ \\ +(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_3)\,n]^2=0.$$

Координаты l, m, n векторов, параллельных образующим асимптотического конуса поверхности второго порядка, определяются уравнением

$$a_{11}l^2+a_{22}m^2+a_{33}n^2+2a_{12}lm+2a_{23}mn+2a_{31}nl=0.$$

Диаметральная плоскость, сопряженная направлению вектора $\{l, m, n\}$, определяется уравнением

$$l(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1)+m(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2)+ \\ +n(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_3)=0.$$

Диаметр поверхности второго порядка, сопряженный плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

определяется уравнениями:

$$\frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1}{A}=\frac{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2}{B}=\frac{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_3}{C}.$$

Главные плоскости поверхности второго порядка определяются как диаметральные плоскости, сопряженные главным направлениям, соответствующим корням характеристического уравнения, отличным от нуля.

Координаты векторов $\{l, m, n\}$ и $\{l', m', n'\}$, имеющих взаимно сопряженные направления относительно поверхности второго порядка, т. е. векторов, один из которых параллелен диаметральной плоскости, сопряженной другому, связаны соотношением

$$(a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n)\,l'+(a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n)\,m'+ \\ +(a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n)\,n'=0.$$

Если оси Ox и Oy имеют сопряженные (относительно поверхности) направления, то уравнение поверхности не содержит члена xy и обратно.

Если направление оси Oz сопряжено плоскости Oxy, то уравнение поверхности не содержит членов с произведениями xz и yz и обратно.

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат заданы:

1) поверхность

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_1x+ \\ +2a_2y+2a_3z+a=0;$$

2) плоскость

$$Ax+By+Cz+D=0, \text{ где } A^2+B^2+C^2=1;$$

тогда система инвариантов кривой второго порядка, по которой данная плоскость пересекает данную поверхность, определяется соотношениями:

$$\overset{*}{I}_2=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix},$$

$$\overset{*}{K}_3=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 & C \\ a_1 & a_2 & a_3 & a & D \\ A & B & C & D & 0 \end{vmatrix},$$

$$\overset{*}{I}_1=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A \\ a_{21} & a_{22} & B \\ A & B & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & A \\ a_{31} & a_{33} & C \\ A & C & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & B \\ a_{32} & a_{33} & C \\ B & C & 0 \end{vmatrix},$$

$$\overset{*}{K}_2=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 & A \\ a_{21} & a_{22} & a_2 & B \\ a_1 & a_2 & a & D \\ A & B & D & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 & A \\ a_{31} & a_{33} & a_3 & C \\ a_1 & a_3 & a & D \\ A & C & D & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 & B \\ a_{32} & a_{33} & a_3 & C \\ a_2 & a_3 & a & D \\ B & C & D & 0 \end{vmatrix},$$

причем определение вида линии и составление канонического уравнения проводится по тем же формулам, как и в случае исследования линий второго порядка на плоскости, если под I_2, K_3, I_1 и K_2 теперь понимать соответственно $\overset{*}{I}_2$, $\overset{*}{K}_3$, $\overset{*}{I}_1$, $\overset{*}{K}_2$.

Так, например, характеристическое уравнение линии сечения запишется так:

$$\lambda^2-\overset{*}{I}_1\lambda+\overset{*}{I}_2=0;$$

условие того, что линия сечения имеет единственный центр, запишется так:

$$\overset{*}{I}_2=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}\neq 0;$$

простейшее уравнение линии, имеющей единственный центр, будет иметь вид:

$$\overset{*}{\lambda}_1X^2+\overset{*}{\lambda}_2Y^2+\frac{\overset{*}{K}_3}{\overset{*}{I}_2}=0,$$

где $\overset{*}{\lambda}_1$ и $\overset{*}{\lambda}_2$ — корни характеристического уравнения, и т. д.

Если в сечении получается центральная кривая, то координаты ее центра определяются системой:

$$\begin{aligned}
a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1&=At,\\
a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2&=Bt,\\
a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_3&=Ct,\\
Ax+By+Cz+D&=0.
\end{aligned}$$

Координаты l, m, n векторов, имеющих направления осей кривой сечения, определяются из уравнений:

$$\begin{aligned}
(a_{11}-\lambda)\,l+a_{12}m+a_{13}n-A\beta&=0,\\
a_{21}l+(a_{22}-\lambda)\,m+a_{23}n-B\beta&=0,\\
a_{31}l+a_{32}m+(a_{33}-\lambda)\,n-C\beta&=0,\\
Al+Bm+Cn&=0,
\end{aligned}$$

где λ — корень характеристического уравнения кривой сечения

$$\lambda^2-\overset{*}{I}_1\lambda+\overset{*}{I}_2=0$$

или

$$\begin{vmatrix}
a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & A\\
a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & B\\
a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & C\\
A & B & C & 0
\end{vmatrix}=0.$$

Если в сечении получается парабола, то вектор

$$a=\left\{\begin{vmatrix}
a_1 & a_{12} & a_{13} & A\\
a_2 & a_{22} & a_{23} & B\\
a_3 & a_{32} & a_{33} & C\\
D & B & C & 0
\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}
a_{11} & a_1 & a_{13} & A\\
a_{21} & a_2 & a_{23} & B\\
a_{31} & a_3 & a_{33} & C\\
A & D & C & 0
\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_1 & A\\
a_{21} & a_{22} & a_2 & B\\
a_{31} & a_{32} & a_3 & C\\
A & B & D & 0
\end{vmatrix}\right\}$$

параллелен оси параболы и направлен в сторону ее вогнутости.

Ось параболы определяется уравнениями:

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

$$l\,(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1)+m\,(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2)+\\
+n\,(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_3)=0,$$

где l, m, n определяются системой:

$$\begin{aligned}
(a_{11}-\lambda)\,l+a_{12}m+a_{13}n-A\beta&=0,\\
a_{21}l+(a_{22}-\lambda)\,m+a_{23}n-B\beta&=0,\\
a_{31}l+a_{32}m+(a_{33}-\lambda)\,n-C\beta&=0,\\
Al+Bm+Cn&=0,
\end{aligned}$$

$$\lambda_1=\overset{*}{I}_1=-\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & A\\
a_{21} & a_{22} & B\\
A & B & 0
\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{13} & A\\
a_{31} & a_{33} & C\\
A & C & 0
\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}
a_{22} & a_{23} & B\\
a_{32} & a_{33} & C\\
B & C & 0
\end{vmatrix}.$$

Вершину параболы мы определим как точку пересечения ее оси с поверхностью.

Пример 1. *Определить вид и расположение поверхности, заданной относительно прямоугольной системы координат уравнением*

$$x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0.$$

Решение.

$$I_3=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{vmatrix}=-36\neq 0$$

— поверхность имеет единственный центр симметрии. Далее,

$$K_4=\begin{vmatrix}1&1&3&-1\\1&5&1&3\\3&1&1&1\\-1&3&1&0\end{vmatrix}=36>0,$$

$I_1=1+5+1=7$, $I_1I_3<0$. Следовательно, данная поверхность — однополостный гиперболоид. Находим I_2:

$$I_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&1\\1&1\end{vmatrix}=0.$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^3-7\lambda^2+36=0;$$

$\lambda_1=3$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=-2$. Простейшее уравнение

$$3X^2+6Y^2-2Z^2+\frac{36}{-36}=0$$

или

$$3X^2+6Y^2-2Z^2-1=0,$$

или

$$\frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}-\frac{Z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1,$$

$$a=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad b=\frac{1}{\sqrt{6}},\quad c=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Центр поверхности находим, разрешая систему:

$$\begin{aligned}x+y+3z-1&=0,\\x+5y+z+3&=0,\\3x+y+z+1&=0,\end{aligned}$$

откуда $C\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$. Координаты вектора

$$e_1'=\{l_1,\ m_1,\ n_1\},$$

параллельного новой оси $O'X$, определяются системой:

$$\begin{aligned} (1-3)\, l_1 + m_1 + 3n_1 &= 0, \\ l_1 + (5-3)\, m_1 + n_1 &= 0, \\ 3l_1 + m_1 + (1-3)\, n_1 &= 0, \end{aligned}$$

откуда находим $e_1' = \{1, -1, 1\}$. Точно так же находим векторы $e_2' = \{1, 2, 1\}$ и $e_3' = \{1, 0, -1\}$, параллельные новым осям $O'Y$ и $O'Z$.

Пример 2. *Определить вид и расположение поверхности, заданной относительно прямоугольной системы координат уравнением*

$$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0.$$

Решение.

$$I_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$K_4 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -125,$$

— уравнение определяет эллиптический параболоид.

Находим:

$$I_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10,$$

$$I_1 = 2 + 2 + 3 = 7.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 10\lambda = 0;$$

его корни:

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 5, \qquad \lambda_3 = 0.$$

Простейшее уравнение:

$$2X^2 + 5Y^2 - 2\sqrt{-\frac{-125}{10}}\, Z = 0$$

или

$$\frac{X^2}{\frac{5}{2\sqrt{2}}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2Z, \qquad p = \frac{5}{2\sqrt{2}}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Направляющий вектор оси параболоида, направленный в сторону вогнутости:

$$7\left\{-\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= 7\{25, -25, 0\} \uparrow\uparrow \{1, -1, 0\}.$$

Координаты l_1, m_1, n_1 направляющего вектора новой оси $O'X$ определяются из системы уравнений:

$$(2-2)\,l_1+2m_1+n_1=0,$$
$$2l_1+(2-2)\,m_1+n_1=0,$$
$$l_1+m_1+(3-2)\,n_1=0$$

откуда $l_1=1$, $m_1=1$, $n_1=-2$, и следовательно, направляющий вектор оси $O'X$ будет $\{1,\ 1,\ -2\}$.

Аналогично из системы

$$(2-5)\,l_2+2m_2+n_2=0,$$
$$2l_2+(2-5)\,m_2+n_2=0,$$
$$l_2+m_2+(3-5)\,n_2=0$$

находим направляющий вектор $\{1,\ 1,\ 1\}$ оси $O'Y$.

Координаты вершины определяются из системы уравнений:

$$\frac{2x+2y+z-2}{25}=\frac{2x+2y+z+3}{-25}=\frac{x+y+3z-1}{0},$$

$$2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x+6y-2z+3=0$$

или

$$2x+2y+z-2=-(2x+2y+z+3),$$
$$x+y+3z-1=0,$$
$$2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x+6y-2z+3=0,$$

откуда находим вершину

$$O'\left(-\frac{1}{40},\ -\frac{19}{40},\ \frac{1}{2}\right).$$

Пример 3. *Определить вид и расположение поверхности, заданной относительно прямоугольной системы координат уравнением*

$$5x^2+2y^2+5z^2-4xy-2xz-4yz+10x-4y-2z+4=0.$$

Решение.

$$I_3=\begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}=0,$$

$$K_4=\begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 & -1 \\ 5 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

$$I_2=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=36,$$

$$K_3=\begin{vmatrix} 5 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 5 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=-36,$$

$$I_1=5+2+5=12.$$

Так как $I_3=K_4=0$, $I_2>0$, $I_1K_3<0$, то данное уравнение определяет эллиптический цилиндр.

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3-12\lambda^2+36\lambda=0$$

имеет корни:

$$\lambda_1=\lambda_2=6,\quad \lambda_3=0.$$

Простейшее уравнение:

$$6X^2+6Y^2-\frac{36}{36}=0$$

или

$$X^2+Y^2=\frac{1}{6}.$$

Это уравнение определяет круглый цилиндр, радиус которого равен $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Ось цилиндра определяется системой уравнений:

$$\begin{aligned} 5x-2y-z+5&=0,\\ -2x+2y-2z-2&=0,\\ -x-2y+5z-1&=0, \end{aligned}$$

из которой достаточно взять хотя бы два первых.

Пример 4. *Определить вид и расположение поверхности, заданной относительно прямоугольной системы координат уравнением*

$$x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-6z+1=0.$$

Решение.

$$I_3=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&4\end{vmatrix}=0,$$

$$K_4=\begin{vmatrix}1&1&2&0\\1&1&2&0\\2&2&4&-3\\0&0&-3&1\end{vmatrix}=0,$$

$$I_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=0,$$

$$K_3=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&0\\2&4&-3\\0&-3&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&0\\2&4&-3\\0&-3&1\end{vmatrix}=-18,$$

$$I_1=1+1+4=6$$

— уравнение определяет параболический цилиндр.

Простейшее уравнение:

$$6X^2-2\sqrt{-\frac{-18}{6}}\,Y=0$$

или

$$X^2=\frac{Y}{\sqrt{3}}.$$

Параметр сечения цилиндра плоскостью, перпендикулярной к образующим:

$$p=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Для определения расположения перепишем уравнение цилиндра в виде:

$$(x+y+2z+m)^2-[2mx+2my+2(2m+3)z+1]=0.$$

Определяем m из условия перпендикулярности двух плоскостей:

$$\begin{aligned} x+y+2z+m&=0,\\ 2mx+2my+2(2m+3)z+1&=0,\\ 1\cdot m+1\cdot m+2(2m+3)&=0, \end{aligned}$$

откуда

$$m=-1.$$

Таким образом, уравнение плоскости симметрии, параллельной образующим:

$$x+y+2z-1=0;$$

уравнение касательной плоскости, перпендикулярной к этой плоскости симметрии:

$$-2x-2y+2z+1=0,$$

откуда находим вектор

$$\{-2,\ -2,\ 2\}\downarrow\downarrow\{-1,\ -1,\ 1\},$$

перпендикулярный к этой касательной плоскости и направленный в сторону вогнутости цилиндра.

Пример 5. *Определить вид и расположение поверхности, заданной относительно прямоугольной системы координат уравнением*

$$y^2+2xy+4xz+2yz-4x-2y=0.$$

Решение.

$$I_3=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$K_4=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$I_2=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-6,$$

$$K_3=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$I_1=0+1+0=1;$$

так как $I_3=K_4=0$, $I_2<0$, $K_3=0$, то данное уравнение определяет пару пересекающихся плоскостей.

Чтобы найти уравнения этих плоскостей, разложим левую часть данного уравнения на линейные относительно x, y, z множители:

$$\begin{aligned} y^2+2xy+4xz+2yz-4x-2y&=y^2+2(x+z-1)y+4xz-4x=\\ &=y^2+2(x+z-1)y+(x+z-1)^2+4xz-4x-(x+z-1)^2=\\ &=(x+y+z-1)^2+4xz-4x-x^2-2xz-z^2-1+2x+2z=\\ &=(x+y+z-1)^2-x^2+2xz-2x-z^2+2z-1=\\ &=(x+y+z-1)^2-(x^2-2xz+2x+z^2-2z+1)=\\ &=(x+y+z-1)^2-[x^2+2(1-z)x+(1-z)^2]=\\ &=(x+y+z-1)^2-(x-z+1)^2=(2x+y)(y+2z-2). \end{aligned}$$

Отсюда находим уравнения плоскостей, которые определяются данным уравнением:

$$2x+y=0, \quad y+2z-2=0.$$

§ 1. Центр поверхности, диаметральная плоскость, касательная плоскость, прямолинейные образующие, круговые сечения

1720. Найти центр поверхности $x^2+y^2+z^2+2xy-2yz+6xz+2x-6y-2z=0$. Какой вид примет это уравнение, если, не меняя направления осей, перенести начало координат в центр поверхности?

1721. Решить вопрос предыдущей задачи относительно поверхности $4xy+4xz-4y-4z-1=0$.

1722. Составить общее уравнение поверхности второго порядка, имеющей центр в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

1723. Найти диаметральную плоскость поверхности $x^2+2y^2-z^2-2xy-2yz-2xz-4x-1=0$, параллельную плоскости $x+y+z=0$.

1724. Составить уравнение диаметральной плоскости поверхности $x^2+2y^2-z^2-2xy-2yz+2xz-4x-1=0$, проходящей через точки $O(0, 0, 0)$ и $M(1, 1, 0)$, и найти вектор, параллельный сопряженным ей хордам.

1725. Составить уравнение диаметральной плоскости поверхности $x^2-xy+2yz+x-z=0$, проходящей через точку $(1, 1, 1)$ и сопряженной к прямой, параллельной плоскости Oxy.

1726. Найти вектор, параллельный хордам, которым сопряжена плоскость $x=0$ относительно поверхности $z=xy$.

1727. Составить уравнение плоскостей, сопряженных диаметру $x=1$, $y=z$ поверхности $x^2+y^2+z^2-2yz-2x-y+1=0$.

1728. Составить уравнения диаметра поверхности $4x^2+6y^2+4z^2+4xz+8y-4z+3=0$, параллельного оси Oy.

1729. Найти уравнения диаметра поверхности $x^2+2y^2-z^2-2xy-2yz+2xz-4x-1=0$, сопряженного плоскости $x+y+z+1=0$.

1730. Найти диаметральную плоскость поверхности $2x^2+5y^2+8z^2+2xy+6xz+12yz+8x+14y+18z=0$, сопряженную хордам, параллельным вектору $\{3, 2, -5\}$.

1731*. Доказать, что если две плоскости касаются конуса второго порядка вдоль его образующих, то хорды, параллельные линии пересечения этих плоскостей, делятся пополам плоскостью, проходящей через указанные образующие.

1732*. Доказать, что геометрическое место центров поверхностей второго порядка, проходящих через две пары противоположных ребер тетраэдра, есть прямая, соединяющая середины ребер третьей пары.

1733*. Найти плоскость, пересекающую поверхность $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-2x+8y-4z-2=0$ по линии, центр которой находится в начале координат.

1734*. Найти центр линии пересечения поверхности $x^2+5y^2+z^2+2xy+2xz+2yz+2x+6y+2z=0$ с плоскостью $x+2y+z-1=0$.

1735. Найти наибольший угол между образующими конуса $z^2+2xy+2xz+2yz=0$, а также углы, которые составляет его ось с осями координат.

1736. Доказать, что плоскость $x+y+2z+5=0$ пересекает поверхность $z^2-2xy-4x-2y+2z-3=0$ по паре прямых, и найти уравнения этих прямых.

1737. Найти общий вид прямолинейных образующих поверхности $x^2+3y^2+3z^2-2xy-2xz-2yz-6=0$.

1738. Найти прямолинейные образующие поверхности $xy+xz+x+y+1=0$.

1739. Найти прямолинейные образующие поверхности $y^2-2xy-4xz+2yz-4x+2y-1=0$.

1740. Найти прямолинейные образующие поверхности $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-yz+4x+3y-5z+4=0$, проходящие через точку $(-1, -1, 1)$ поверхности.

1741. Найти касательную плоскость к поверхности $4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0$, параллельную плоскости $x+2y+2=0$.

1742*. Через прямую $4x-5y=0$, $z-1=0$ провести плоскость, касательную к поверхности $2x^2+5y^2+2z^2-2xy+6yz-4x-y-2z=0$.

1743*. Составить уравнение цилиндра, описанного около поверхности $x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$, зная, что его образующие параллельны оси Oz.

1744. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, описанного около поверхности $x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$, и найти плоскость, в которой лежит линия касания конуса и поверхности.

1745*. Доказать, что уравнение поверхности второго порядка, распадающееся на пару плоскостей центральных круговых сечений эллипсоида $F(x, y, z)=0$, имеет вид:

$$F(x, y, z)-\left\{\lambda_2\left[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right]+\frac{K_4}{I_3}\right\}=0,$$

где λ_2 — средний корень характеристического уравнения эллипсоида; (a, b, c) — его центр; I_3 и K_4 — его инварианты.

1746*. Найти круговые сечения поверхности $2x^2+y^2+z^2+xy-xz-2x=0$.

1747. Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $(0, -1, 3)$ и рассекающих эллипсоид $x^2+3y^2+12z^2-2x-12y-72z+109=0$ по окружностям.

1748*. Найти круговые сечения поверхности $z^2+6xy=1$.

1749. Найти геометрическое место центров круговых сечений эллипсоида $x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y+4z+2=0$.

1750. Через точку $M(-1, -1, -1)$ провести плоскости, рассекающие поверхность $x^2+y^2+z^2+2xy+x+2y+2z=0$ по кругам.

§ 2. Определение вида поверхности и ее расположения

1751. Пользуясь методом Лагранжа, показать, что нижеследующие уравнения определяют поверхности, распадающиеся на пару плоскостей, и найти эти плоскости:

1) $y^2+2xy+4xz+2yz-4x-2y=0$;
2) $x^2+4y^2+9z^2-4xy+6xz-12yz-x+2y-3z-6=0$;
3) $3x^2-4y^2+3z^2+4xy+10xz-4yz+6x-20y-14z-24=0$;
4) $5x^2+4y^2+3z^2+9xy+8xz+7yz+7x+6y+5z+2=0$;
5) $4x^2+49y^2+z^2-28xy+4xz-14yz+8x-28y+4z+3=0$;
6) $16x^2+9y^2+100z^2+24xy+80xz+60yz+56x+42y+140z+49=0$.

1752. Определить вид поверхности, пользуясь приведением левой части ее уравнения к сумме квадратов по способу Лагранжа:

1) $4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0$;
2) $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y-10z=0$;
3) $x^2+y^2-3z^2-2xy-6xz-6yz+2x+2y+4z=0$;
4) $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0$;
5) $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+x-4y-3z+2=0$;
6) $x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz+x+y-z=0$;
7) $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+4x-2y=0$;
8) $x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz+2x+4y-10z-1=0$;
9) $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-6z+1=0$;

10) $4xy+2x+4y-6z-3=0$;
11) $xy+xz+yz+2x+2y-2z=0$.

1753. Определить вид и расположение поверхности, пользуясь преобразованиями поворота и переноса или группировкой членов в уравнении поверхности:

1) $z=2x^2-4y^2-6x+8y+1$;
2) $z=x^2+3y^2-6y+1$;
3) $x^2+2y^2-3z^2+2x+4y-6z=0$;
4) $x^2+2xy+y^2-z^2=0$;
5) $z^2=3x+4y+5$;
6) $z=x^2+2xy+y^2+1$;
7) $z^2=x^2+2xy+y^2+1$;
8) $x^2+4y^2+9z^2-6x+8y-18z-14=0$;
9) $2xy+z^2-2z+1=0$;
10) $x^2+y^2-z^2-2xy+2z-1=0$;
11) $x^2+4y^2-z^2-10x-16y+6z+16=0$;
12) $2xy+2x+2y+2z-1=0$;
13) $3x^2+6x-8y+6z-7=0$;
14) $x^2+y^2+2z^2+2xy+4z=0$;
15) $3x^2+3y^2+3z^2-6x+4y-1=0$;
16) $3x^2+3y^2-6x+4y-1=0$;
17) $3x^2+3y^2-3z^2-6x+4y+4z+3=0$;
18) $4x^2-y^2-4x+4y-3=0$.

Определить каноническое уравнение и расположение следующих поверхностей:

1754. $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0$.

1755. $2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x-2y=0$.

1756. $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-6z+1=0$.

1757. $4x^2+9y^2+z^2-12xy-6yz+4zx+4x-6y+2z-5=0$.

1758. $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0$.

1759. $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$.

1760. $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0$.

1761. $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x+6y-2z+3=0$.

1762. $2x^2+5y^2+2z^2-2xy+2yz-4xz+2x-10y-2z-1=0$.

1763. 1) $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0$;

2) $5x^2+2y^2+5z^2-4xy-2xz-4yz+10x-4y-2z+4=0$;

3) $x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz+2x+4y-10z-1=0$.

1764. $5x^2-y^2+z^2+4xy+6xz+2x+4y+6z-8=0$.

1765. $2x^2+10y^2-2z^2+12xy+8yz+12x+4y+8z-1=0$.

§ 3. Различные задачи на поверхности второго порядка, решаемые при помощи инвариантов

1766. Общее уравнение поверхности второго порядка определяет эллиптический цилиндр. Что будет происходить с поверхностью, если:

1) изменять свободный член?

2) изменять коэффициенты при первых степенях координат?

1767. Решить вопрос предыдущей задачи для того случая, когда общее уравнение поверхности второго порядка определяет параболический цилиндр.

1768. Доказать, что если уравнение $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0$ определяет гиперболоид, то уравнение $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=\frac{K_4}{I_3}$ определяет его асимптотический конус.

1769*. Определить λ и μ так, чтобы уравнение $x^2-y^2+3z^2+(\lambda x+\mu y)^2-1=0$ определяло круглый цилиндр.

1770*. Найти условие, при котором поверхность $a(x^2+2yz)+b(y^2+2xz)+c(z^2+2xy)=1$ будет поверхностью вращения.

1771*. Доказать, что уравнение $y^2+(z^2-2z)(1-\lambda^2)+2\lambda xz-2x=0$ определяет поверхность вращения. Составить уравнения оси вращения.

1772*. Определить k так, чтобы конус $x^2-2xy+kz^2=0$ был конусом вращения, и найти ось вращения.

1773. Исследовать характер поверхности

$$x^2+(2m^2+1)(y^2+z^2)-2xy-2xz-2yz-2m^2+3m-1=0$$

при изменении m от $-\infty$ до $+\infty$.

1774*. При каком соотношении между параметрами λ и μ уравнение $x^2+y^2-z^2+2\lambda xz+2\mu yz-2x-4y+2z=0$ определяет коническую поверхность?

1775*. Какой вид примет общее уравнение $\varphi=0$ невырождающейся действительной поверхности второго порядка, если за плоскость Oxy принять касательную плоскость, точку прикосновения принять за начало координат, а оси Ox и Oy направить по главным направлениям кривой, по которой данная поверхность рассекается плоскостью, параллельной касательной?

1776*. Доказать, что всякая действительная поверхность второго порядка может быть задана уравнением $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+$ $+\lambda_3z^2+2bz=0$, при этом некоторые из чисел λ_1, λ_2, λ_3, b могут быть равны нулю. Выразить величину b через инварианты поверхности в случае, если поверхность имеет один определенный центр.

1777*. Доказать, что, для того чтобы в конус второго порядка можно было вписать трехгранный угол, ребра которого попарно перпендикулярны (прямоугольный триэдр), необходимо и достаточно, чтобы $I_1=0$.

1778*. При каком необходимом и достаточном условии точка $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ лежит на оси эллиптического или гиперболического цилиндра, заданных общими уравнениями?

1779*. Общее уравнение $\varphi=0$ поверхности второго порядка определяет гиперболический цилиндр. Что определяет уравнение $\varphi-\frac{K_3}{I_2}=0$?

1780*. При каком необходимом и достаточном условии два гиперболоида имеют общий асимптотический конус?

1781*. Пусть уравнение $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+$ $+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0$ определяет однополостный гиперболоид. Какую поверхность будет определять уравнение, полученное из данного заменой числа a на b?

1782*. Пусть общее уравнение поверхности второго порядка определяет гиперболоид. При каком необходимом и достаточном условии точка $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ лежит между поверхностью этого гиперболоида и поверхностью его асимптотического конуса?

1783*. При каком условии общее уравнение поверхности второго порядка определяет две взаимно перпендикулярные плоскости?

1784*. При каком необходимом и достаточном условии общее уравнение поверхности второго порядка определяет:

1) круглый цилиндр?
2) круглый конус?
3) сферу?

1785. Определить объем эллипсоида, заданного общим уравнением.

1786. Пусть общее уравнение $\varphi=0$ поверхности второго порядка определяет эллипсоид. Координаты каких точек удовлетворяют уравнению $\varphi-\frac{K_4}{I_3}=0$?

1787*. Пусть общее уравнение поверхности второго порядка определяет эллипсоид. Что будет происходить с этим эллипсоидом, если непрерывно изменять свободный член его общего уравнения?

1788. Найти нормирующий множитель уравнения l_1F_x+ $+m_1F_y+n_1F_z=0$ главной плоскости поверхности второго порядка, соответствующей корню $\lambda=\lambda_1$ характеристического уравнения; l_1, m_1, n_1 — координаты единичного вектора, соответствующего корню $\lambda=\lambda_1$ характеристического уравнения.

1789. Общее уравнение $\varphi=0$ поверхности второго порядка определяет две параллельные плоскости; при каком необходимом и достаточном условии точка $M(x_0, y_0, z_0)$ лежит между этими плоскостями?

1790. Общее уравнение $\varphi=0$ поверхности второго порядка определяет две пересекающиеся и не взаимно перпендикулярные плоскости. При каком необходимом и достаточном условии точка $M(x_0, y_0, z_0)$ лежит в остром угле, образованном этими плоскостями?

1791*. Общее уравнение $\varphi=0$ поверхности второго порядка определяет две пересекающиеся плоскости. Найти тангенс угла между этими плоскостями.

1792*. Общее уравнение $\varphi=0$ поверхности второго порядка определяет эллиптический цилиндр. При каком необходимом и достаточном условии точка $M(x_0, y_0, z_0)$ лежит внутри цилиндра?

1793. Общее уравнение $\varphi=0$ поверхности второго порядка определяет две параллельные плоскости. Найти расстояние между ними.

1794*. При каком необходимом и достаточном условии общее уравнение $\varphi=0$ поверхности второго порядка определяет параболоид вращения?

§ 4. Составление уравнений поверхностей второго порядка

1795*. Как запишется уравнение круглого конуса, касающегося плоскостей Oxz и Oyz по прямым Ox и Oy?

1796*. Составить уравнение поверхности второго порядка пересекающей плоскости координат по гиперболам $x=0$, $yz=a$; $y=0$, $xz=b$; $z=0$, $xy=c$.

1797*. Составить уравнение конуса второго порядка, пересекающего плоскость Oyz по окружности $x=0$, $y^2+z^2=2ry$, а плоскость Oxz по параболе $y=0$, $z^2-2px=0$.

1798*. Составить уравнение конуса второго порядка, на котором лежат окружности $x=0$, $y^2+z^2-2by=0$; $y=0$, $x^2+z^2-2ax=0$.

1799*. Составить уравнение поверхности второго порядка, пересекающей плоскость Oxy по паре прямых, а плоскости Oxz и Oyz по окружностям радиуса r, касающимся оси Oz в начале координат и расположенных в положительных полуплоскостях.

1800*. Составить уравнение поверхности второго порядка, зная, что она пересекает плоскость Oxy по окружности $x^2+y^2-12x-18y+32=0$, $z=0$, а плоскости Oxz и Oyz — по параболам, оси которых параллельны положительному направлению оси Oz, причем параметр параболы, лежащей в плоскости Oxz, равен 1.

1801*. Составить уравнение параболоида вращения, проходящего через окружность $x-z=0$, $x^2+y^2+z^2-2x-2z=0$ и точку $(1, 1, 0)$.

1802*. Составить уравнение поверхности второго порядка, проходящей через ось Oz и пересекающей координатные плоскости: плоскость Oxy — по окружности радиуса r, касающейся оси Oy в начале координат; плоскость Oxz — по прямой, отсекающей на осях равные положительные отрезки, а плоскость Oyz — по прямой, образующей с положительными полуосями Oy и Oz равные углы.

1803*. Составить уравнение параболоида, проходящего через две прямые $x=0$, $z=2$ и $y=0$, $z=-2$ и через две точки $(0, 1, -1)$ и $(1, -1, 0)$.

1804. Составить уравнение поверхности второго порядка, проходящей через три окружности:

$$x^2+y^2=1, \qquad z=0;$$
$$x^2+y^2=3, \qquad z=1;$$
$$x^2+y^2=5, \qquad z=2.$$

1805*. Составить уравнение поверхности второго порядка, зная, что она проходит через точку $(2, 0, -1)$, имеет центр в точке $(0, 0, -1)$ и пересекает плоскость Oxy по линии $z=0$, $x^2-4xy-1=0$.

1806*. Составить уравнение:

1) однополостного гиперболоида;

2) гиперболического параболоида, принимая за начало координат какую-нибудь точку поверхности, за оси Ox и Oy прямолинейные образующие, проходящие через эту точку, а за ось Oz проходящий через эту точку диаметр.

1807*. Составить уравнение эллипсоида, для которого плоскости $x+y+z-1=0$, $x+y-2z=0$, $x-y+1=0$ служат плоскостями симметрии, причем большая ось эллипсоида лежит на линии пересечения первой и второй плоскостей и по длине равна 8; средняя ось лежит на линии пересечения первой и третьей плоскостей и длина ее равна 4; малая ось лежит на линии пересечения второй и третьей плоскостей и длина ее равна 2.

1808. Составить уравнение поверхности второго порядка, для которой плоскости $x+y+z=0$, $2x-y-z-2=0$, $y-z+1=0$ являются плоскостями симметрии и которая проходит через точки $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(1, 1, -1)$.

1809. Составить уравнение поверхности второго порядка, проходящей через точки $(0, 0, 0)$, $(1, 1, -1)$, $(0, 0, 1)$, для которой плоскости $x+y+z=0$, $2x-y-z=0$, $y-z+1=0$ являются плоскостями симметрии.

1810*. Найти общий вид уравнения параболоидов, проходящих через окружность $x^2+y^2=r^2$, $z=0$, оси которых параллельны вектору $\{l, m, n\}$.

1811. Найти геометрическое место центров поверхностей второго порядка, проходящих через данный эллипс и две точки, расположенные симметрично относительно плоскости этого эллипса.

1812. Определить геометрическое место точек пересечения прямых связки, имеющей центр $S(a, b, c)$ с сопряженными им диаметральными плоскостями поверхности второго порядка, заданной общим уравнением.

1813*. Составить уравнение геометрического места прямых, пересекающих три данные прямые:

$$\left.\begin{array}{l}2x+y-z-1=0,\\ 2x-y+z-1=0;\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}2x-z=0,\\ 1+y=0;\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}2x+z=0,\\ 1-y=0.\end{array}\right\}$$

1814. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на плоскости, касающейся поверхности второго порядка, заданной общим уравнением.

1815*. Найти геометрическое место прямых, по которым пересекаются взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие соответственно через прямые $y=kx$, $z=c$ и $y=-kx$, $z=-c$.

1816. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух прямых $y=kx$, $z=c$ и $y=-kx$, $z=-c$.

1817*. Найти геометрическое место вершин конусов, имеющих своей направляющей окружность, в которые можно было бы вписать прямоугольный триэдр.

1818*. Найти геометрическое место точек пересечения трех взаимно перпендикулярных прямых, которые пересекают параболу $z=0$, $y^2=2px$.

§ 5. Плоские сечения поверхностей второго порядка

1819*. Найти главные направления линии пересечения поверхности второго порядка, заданной общим уравнением $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0$, с плоскостью, заданной нормальным уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, $A^2+B^2+C^2=1$.

1820*. Через точки $(0, -2, 2)$, $(-1, 0, 0)$ провести плоскость, пересекающую конус $x^2+y^2-z^2=0$ по параболе.

1821*. Найти все плоскости, проходящие через точки $(0, -2, 2)$ и $(-1, 0, 0)$ и пересекающие конус $x^2+y^2-z^2=0$ по эллипсу.

1822*. Через прямую $2x=2y=z$ провести плоскость, пересекающую поверхность $4x^2-y^2+z=0$ по равносторонней гиперболе.

1823*. Найти каноническое уравнение и расположение параболы, получаемой в сечении цилиндра $y^2=2x$ плоскостью $x+y+z-1=0$.

1824*. Найти каноническое уравнение и расположение эллипса, получаемого в сечении эллипсоида $x^2+2y^2+3z^2-1=0$ плоскостью $2x+y+z=0$. Составить уравнения главных осей сечения.

1825*. Составить уравнения оси параболы $x^2+y^2-2z^2-1=0$, $x+y-2z-1=0$.

1826*. Найти плоскость, в которой лежат оси симметрии парабол, получаемых от сечения поверхности $y^2+2z^2-2x=0$ плоскостями, параллельными плоскости $y-z=0$.

1827*. Найти геометрическое место центров сфер постоянного радиуса, пересекающих эллиптический параболоид по окружностям.

1828*. Составить уравнение цилиндра, проходящего через точку (0, 1, 1) и имеющего круговые сечения, расположенные во взаимно перпендикулярных плоскостях, одно из которых определяется уравнениями $x^2+y^2-1=0$, $z=0$.

1829*. Найти длины полуосей эллипса, полученного от сечения эллипсоида $x^2+y^2+4z^2-1=0$ плоскостью $x+y+z=0$.

1830*. Доказать, что плоскость $x-y=0$ рассекает эллиптический параболоид $2y^2+z^2-2x=0$ по окружности и найти радиус этой окружности.

1831*. Найти параметр параболы $x^2+2y^2+z^2+4xy-2xz-4yz+2x-6z=0$, $x-z=0$.

1832*. Определить аффинный сорт кривой, по которой плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2=1)$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

1833*. Определить аффинный сорт кривой, по которой плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2=1)$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

1834*. По какой кривой рассекает касательная плоскость к однополостному гиперболоиду его асимптотический конус?

1835*. По какой кривой рассекает касательная плоскость к двуполостному гиперболоиду его асимптотический конус?

1836*. Определить аффинный сорт кривой, по которой плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2=1)$ пересекает двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

1837*. Определить аффинный сорт кривой, по которой плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2=1)$ пересекает эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z.$$

1838*. Определить аффинный сорт кривой, по которой плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2=1)$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$.

1839*. Определить аффинный сорт кривой, по которой плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2=1)$ пересекает конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

Найти плоскости, пересекающие по окружностям следующие поверхности второго порядка:

1840*. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

1841*. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$.

1842*. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

1843*. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

1844*. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

1845*. По какой кривой рассекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ касательную плоскость к его асимптотическому конусу?

1846*. Доказать, что любая плоскость рассекает гиперболический параболоид по кривой, не являющейся кривой эллиптического типа.

1847*. При каком условии плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ рассекает поверхность второго порядка, заданную общим уравнением, по двум прямым?

1848*. Можно ли рассечь гиперболической цилиндр $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ по равносторонней гиперболе?

1849*. Найти радиусы тех кругов, по которым рассекается эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ плоскостью, проходящей через его центр симметрии.

1850*. Решить вопрос предыдущей задачи для однополостного гиперболоида.

1851*. Найти плоскости, пересекающие гиперболический параболоид $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ по равносторонним гиперболам.

1852*. Найти плоскости, рассекающие конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ по равносторонним гиперболам.

1853*. Доказать, что если пересечение двух поверхностей второго порядка содержит линию второго порядка, то множество остальных точек, общих этим поверхностям (если оно не пустое), есть также линия второго порядка.

1854*. Доказать, что, для того чтобы через две линии второго порядка можно было провести поверхность второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы эти две линии имели две общие точки (собственные или несобственные, действительные или мнимые, различные или совпадающие).

1855*. Доказать, что через три линии второго порядка, плоскости которых не проходят через общую прямую и которые попарно имеют по две общие точки, причем ни одна из этих точек не принадлежит сразу всем трем линиям, можно провести поверхность второго порядка и притом только одну.

1856*. Доказать, что, для того чтобы главные оси двух поверхностей второго порядка были соответственно параллельны, необходимо и достаточно, чтобы матрицы квадратичных форм, входящих в состав левых частей уравнений поверхностей, были перестановочны.

1857*. Доказать, что сумма чисел, обратных параметрам двух перпендикулярных диаметральных сечений эллиптического параболоида, постоянна для данного параболоида.

1858*. Найти на однополостном гиперболоиде геометрическое место точек, через каждую из которых проходят две взаимно перпендикулярные образующие. По какой кривой будут рассекать поверхность однополостного гиперболоида плоскости, параллельные касательным плоскостям к однополостному гиперболоиду в точках указанного геометрического места?

§ 6. Смешанные задачи на поверхности второго порядка

1859*. Пусть общее уравнение $\varphi=0$ поверхности второго порядка определяет эллиптический или гиперболический параболоид. Доказать, что уравнение плоскости, касательной к этому параболоиду в его вершине, может быть записано в виде:

$$2rb_3+a-\frac{(be_1)^2}{\lambda_1}-\frac{(be_2)^2}{\lambda_2}=0,$$

где $b=\{a_1, a_2, a_3\}$; e_1, e_2, e_3 — единичные векторы главных направлений (e_3 — единичный вектор оси), а b_3 — составляющая вектора b по оси (e_3).

1860*. Конус второго порядка пересечен плоскостью α. Через его вершину проведена плоскость β, параллельная α. Доказать, что:

1) если плоскость β не имеет с конусом никаких других общих точек, кроме вершины, то плоскость α пересекает конус по эллипсу;

2) если плоскость β пересекает конус по двум образующим, то плоскость α пересекает его по гиперболе;

3) если плоскость β имеет с конусом только одну общую образующую (касается конуса), то линия пересечения конуса плоскостью α будет парабола.

1861*. Доказать, что нормали к линейчатой поверхности второго порядка, проведенные в точках прямолинейной образующей, составляют гиперболический параболоид.

1862*. Найти углы между непараллельными плоскостями круговых сечений трехосного эллипсоида. При каком условии эти плоскости будут взаимно перпендикулярны?

1863*. Найти углы между прямыми, соединяющими центр симметрии двухполостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ с его омбилическими точками. При каком условии эти прямые будут взаимно перпендикулярны?

1864. Найти вершину параболоида $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z)^2+\mu(A_2x+B_2y+C_2z)^2=A_3x+B_3y+C_3z+D_3$; функции $A_1x+B_1y+C_1z$, $A_2x+B_2y+C_2z$, $A_3x+B_3y+C_3z+D_3$ линейно независимы.

1865. Найти геометрическое место центров сфер радиуса R, пересекающих эллипсоид $x^2+2y^2+3z^2-1=0$ по окружностям.

1866*. Пусть L — линия пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ с эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Рассмотрим аффинное преобразование данной сферы в данный эллипсоид. При этом преобразовании линия L перейдет в линию C, лежащую на начальном эллипсоиде и называемую полодией. Доказать, что расстояние от центра эллипсоида до касательных плоскостей к нему в точках полодии неизменно для всех точек полодии.

ГЛАВА XVI

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ И АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Ортогональным преобразованием пространства называется такое преобразование, при котором каждой точке $M(x, y, z)$ пространства, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат, ставится в соответствие точка $M'(x', y', z')$, координаты которой (относительно той же системы координат) являются линейными функциями координат точки M:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{2}$$

— ортогональная матрица, т. е. такая, что

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1, \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0, \\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} &= 0, \\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Система соотношений (3) эквивалентна следующей:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\ a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, \\ a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Ортогональная матрица может быть определена как такая, для которой обратная матрица совпадает с транспонированной:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

или, что то же самое,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Параметры, входящие в соотношения (1), имеют следующий геометрический смысл: вектор $e_1' = \{a_{11}, a_{21}, a_{31}\}$ единичный и является образом вектора $e_1 = \{1, 0, 0\}$; вектор $e_2' = \{a_{12}, a_{22}, a_{32}\}$ единичный, ортогонален вектору e_1' и является образом вектора $e_2 = \{0, 1, 0\}$; вектор $e_3' = \{a_{13}, a_{23}, a_{33}\}$ единичный, ортогонален векторам e_1' и e_2' и является образом вектора $e_3 = \{0, 0, 1\}$ в рассматриваемом ортогональном преобразовании (1). Точка O' (a_1, a_2, a_3)— образ начала координат O.

Ортогональное преобразование взаимно однозначно, сохраняет расстояние между двумя точками, углы между прямыми, сохраняет коллинеарность трех точек (т. е. принадлежность трех точек одной прямой), параллельность прямых, параллельность плоскостей, параллельность прямой и плоскости.

Всякое преобразование, сохраняющее расстояние между точками, будет ортогональным, т. е. аналитически будет выражаться соотношениями (1), где матрица (2) ортогональная.

Множество всех ортогональных преобразований пространства образует *группу*.

Ортогональное преобразование называется ортогональным преобразованием *первого рода*, если это преобразование сохраняет ориентацию пространства, и ортогональным преобразованием *второго рода*, если оно меняет ориентацию пространства.

В случае ортогонального преобразования первого рода определитель матрицы (2) равен 1:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1;$$

в случае ортогонального преобразования второго рода этот определитель равен -1:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -1.$$

Ортогональное преобразование

$$x' = x + x_0,$$
$$y' = y + y_0,$$
$$z' = z + z_0$$

называется переносом.

Ортогональное преобразование

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z,$$
$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$$

называется поворотом около неподвижной точки O (начала координат).

Аффинным преобразованием пространства называется такое преобразование, при котором каждой точке $M(x, y, z)$ пространства ставится в соответствие точка $M'(x', y', z')$, координаты которой являются линейными функциями координат точки M:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3, \end{aligned} \tag{4}$$

причем определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

Параметры, входящие в соотношения (4), имеют следующий геометрический смысл: точка $O'(a_1, a_2, a_3)$ — образ начала координат. Вектор $e_1' = \{a_{11}, a_{21}, a_{31}\}$ — образ масштабного вектора $e_1 = \{1, 0, 0\}$ оси Ox; $e_2' = \{a_{12}, a_{22}, a_{32}\}$ — образ масштабного вектора $e_2 = \{0, 1, 0\}$ оси Oy; вектор $e_3' = \{a_{13}, a_{23}, a_{33}\}$ — образ масштабного вектора $e_3 = \{0, 0, 1\}$ оси Oz.

Аффинное преобразование взаимно однозначно.

При аффинном преобразовании прямая переходит в прямую, плоскость — в плоскость.

При аффинном преобразовании сохраняется параллельность прямых, параллельность плоскостей, параллельность прямой и плоскости.

При аффинном преобразовании сохраняется простое отношение трех точек, лежащих на одной прямой, отношение площадей фигур, лежащих в одной плоскости, и отношение объемов тел.

Всякое взаимно однозначное преобразование множества всех точек пространства, сохраняющее коллинеарность трех точек, лежащих на одной прямой, будет аффинным преобразованием, т. е. аналитически оно будет выражаться соотношениями (4), причем будет выполнено неравенство (5). Множество всех аффинных преобразований пространства образует группу.

Двойные точки аффинного преобразования, т. е. точки, сами себе соответствующие, определяются соотношениями (4), где вместо x', y', z' подставлены соответственно x, y, z.

Двойной прямой аффинного преобразования называется такая прямая, которая при этом аффинном преобразовании переходит в себя.

Двойной плоскостью аффинного преобразования называется такая плоскость, которая при этом аффинном преобразовании переходит в себя.

Аффинное преобразование

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = kz, \quad k > 0,$$

заданное по отношению к декартовой прямоугольной системе координат, называется *сжатием* (к плоскости Oxy). Число k называется *коэффициентом сжатия*.

Каково бы ни было аффинное преобразование, существуют три попарно ортогональных направления, которым соответствуют также три попарно ортогональных направления.

Три попарно ортогональных направления, которым в аффинном преобразовании соответствуют также три попарно ортогональных направления, называются *главными направлениями* данного аффинного преобразования.

Всякое аффинное преобразование есть произведение ортогонального преобразования и сжатий к трем попарно ортогональным плоскостям.

Если в аффинном преобразовании имеется хотя бы одна неподвижная точка, то оно называется *центроаффинным*; если принять неподвижную точку за начало координат, то формулы аффинного преобразования будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned}$$

Если при аффинном преобразовании сохраняются объемы тел, то оно называется *эквиаффинным*.

Для того чтобы аффинное преобразование (4) было эквиаффинным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \pm 1.$$

В случае

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +1$$

сохраняется не только объем, но и ориентация пространства; такое аффинное преобразование называется *унимодулярным*.

Собственным вектором аффинного преобразования называется такой ненулевой вектор, который при этом преобразовании переходит в вектор, ему коллинеарный.

Если e — собственный вектор аффинного преобразования, а $e' = \lambda e$ — его образ в этом преобразовании, то число λ называется собственным значением, соответствующим собственному вектору e.

Координаты l, m, n собственного вектора аффинного преобразования (4) определяются из системы уравнений:

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)\, l + a_{12}m + a_{13}n &= 0,\\ a_{21}l + (a_{22}-\lambda)\, m + a_{23}n &= 0,\\ a_{31}l + a_{32}m + (a_{33}-\lambda)\, n &= 0,\end{aligned}$$

где λ — корень уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение называется характеристическим. Собственное значение собственного вектора e есть корень этого уравнения.

Центроаффинное преобразование

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,\\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z,\\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,\end{aligned}$$

заданное относительно декартовой прямоугольной системы координат, называется симметрическим, если матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

этого преобразования является симметрической, т. е.

$$a_{12} = a_{21}, \qquad a_{13} = a_{31}, \qquad a_{23} = a_{32}.$$

Всякое симметрическое центроаффинное преобразование имеет три попарно ортогональных собственных вектора, и обратно, если некоторое центроаффинное преобразование имеет три попарно ортогональных собственных вектора, то оно симметрическое.

Множество всех поверхностей второго порядка может быть разделено на 17 аффинных классов. Две поверхности второго порядка относятся к одному и тому же аффинному классу тогда и только тогда, когда одна из них может быть переведена в другую некоторым аффинным преобразованием.

При аффинном преобразовании диаметр, диаметральная плоскость, центр, асимптотический конус, касательная плоскость к поверхности Π второго порядка переходят в диаметр, диаметральную плоскость, центр, асимптотический конус и касательную плоскость поверхности Π', являющейся образом поверхности Π. При аффинном преобразовании сохраняются отношения сопряженности: если плоскость π сопряжена хордам поверхности Π, параллельным вектору a, то плоскость π' будет сопряжена хордам поверхности Π', параллельным вектору a', где плоскость π' — образ плоскости π, поверхность Π' — образ поверхности Π, а a' — образ вектора a в рассматриваемом аффинном преобразовании.

Если диаметр p сопряжен сечениям поверхности Π, параллельным плоскости π, то образ p' прямой p будет диаметром поверхности Π', являющейся образом поверхности Π, сопряженным сечениям поверхности Π, параллельным плоскости π', где π' — образ плоскости π.

1867. Найти аффинное преобразование, при котором точки $O(0, 0, 0)$, $E_1(1, 0, 0)$ и $E_2(0, 1, 0)$ остаются неподвижными, а точка $E_3(0, 0, 1)$ переходит в точку $E(1, 1, 1)$.

1868. Найти неподвижные точки аффинного преобразования, заданного соотношениями

$$x' = 2x + y + z - 1, \quad y' = x + z - 1, \quad z' = -z - 2.$$

1869. Найти аффинные преобразования, при которых оси координат преобразуются сами в себя (являются инвариантными прямыми).

1870. Найти общий вид аффинных преобразований, оставляющих на месте все точки плоскости Oxy.

1871. Найти общий вид аффинных преобразований, оставляющих на месте все точки оси Oz.

1872. Найти аффинное преобразование, оставляющее на месте концы $E_1(1, 0, 0)$, $E_2(0, 1, 0)$, $E_3(0, 0, 1)$ единичных векторов осей координат и переводящее начало координат в точку O', симметричную с точкой O относительно плоскости $E_1E_2E_3$.

Система координат прямоугольная.

1873. Найти аффинное преобразование, при котором являются инвариантными ось Oz и биссектрисы углов xOz и yOz, причем векторы, лежащие на оси Oz, не меняют своей длины, а векторы, лежащие на биссектрисах, увеличиваются в два раза.

1874. Дано аффинное преобразование

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned}$$

оставляющее на месте начало координат. Найти геометрическое место прямых, проходящих через начало координат, которые при этом преобразовании переходят в прямые, к ним ортогональные.

1875.* Дано аффинное преобразование

$$x' = 2x + y, \ \ y' = x + 2y, \ \ z' = 3x + 4y - 5z.$$

1) Найти векторы, которые при этом преобразовании переходят в векторы, им коллинеарные.

2) Как запишется данное аффинное преобразование, если за оси координат принять прямые, параллельные этим векторам?

1876*. Дано аффинное преобразование

$$x' = x + y + 3z, \ \ y' = x + 5y + z, \ \ z' = 3x + y + z.$$

Найти такие три попарно ортогональные вектора, которые при этом преобразовании переходят в три также попарно ортогональных вектора; представить данное аффинное преобразование как произведение ортогонального преобразования и трех взаимно перпендикулярных растяжений.

1877*. Дано не тождественное ортогональное преобразование первого рода

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z, \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z, \\ z' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z, \end{aligned}$$

оставляющее на месте начало координат.

Найти направляющий вектор такой прямой, все точки которой при данном преобразовании остаются неподвижными.

1878*. Дано ортогональное преобразование первого рода

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z, \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z, \\ z' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z. \end{aligned}$$

Это преобразование может быть осуществлено поворотом на некоторый угол φ около неподвижной прямой. Найти этот угол.

1879*. Пусть $c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ — ортогональное преобразование первого рода; $\boldsymbol{r}$ — произвольный вектор, перпендикулярный к неподвижной прямой (см. предыдущую задачу); $\boldsymbol{r}'$ — его образ в данном преобразовании; $\boldsymbol{e}$ — направляющий вектор неподвижной прямой. Какому условию должны удовлетворять координаты вектора $\boldsymbol{e}=\{a, b, c\}$, чтобы тройка векторов $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$, $\boldsymbol{e}$ имела ту же ориентацию, как и тройка положительных направлений осей координат?

1880*. Дано ортогональное преобразование

$$x'=\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}y+\frac{2}{3}z,$$
$$y'=\frac{2}{15}x+\frac{14}{15}y-\frac{1}{3}z,$$
$$z'=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z.$$

Найти направляющий вектор неподвижной прямой, определяющий направление вращения и угол поворота.

1881*. Дано ортогональное преобразование первого рода

$$x'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{2}z,$$
$$y'=\frac{1}{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{2}z,$$
$$z'=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}z.$$

Найти такое ортогональное преобразование, которое осуществляет поворот вокруг той же оси и на тот же угол, что и данное преобразование, но в противоположном направлении.

1882*. Найти ортогональное преобразование, зная направляющий вектор $\boldsymbol{e}=\{a, b, c\}$ неподвижной прямой, определяющий направление вращения и угол φ поворота.

ГЛАВА XVII

ЭЛЕМЕНТЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Присоединим к множеству всех точек прямой евклидова пространства еще один элемент, который будем называть *несобственной* или *бесконечно удаленной точкой* этой прямой в отличие от остальных точек, называемых собственными точками.

Полученное, таким образом, множество мы будем называть *собственной прямой*. Ко всем параллельным между собою прямым будем присоединять одну и ту же несобственную точку. К двум непараллельным прямым (пересекающимся или скрещивающимся) мы присоединяем различные несобственные точки.

Трехмерное евклидово пространство, дополненное указанным образом несобственными точками, называется *трехмерным проективным пространством*.

Собственной плоскостью проективного пространства называется множество всех точек плоскости евклидова пространства, дополненное теми несобственными точками, которые присоединены ко всем прямым, лежащим в этой плоскости. Совокупность этих несобственных точек называется *несобственной прямой* данной плоскости. Совокупность всех несобственных точек мы будем называть *несобственной плоскостью*.

Введем общую декартову систему координат $Oxyz$. Пусть M собственная точка проективного пространства, имеющая в системе $Oxyz$ координаты x, y, z. Числа x, y, z, 1 и любую четверку чисел

$$x_1 = kx,\quad x_2 = ky,\quad x_3 = kz,\quad x_4 = k\cdot 1,\ \text{где}\ k \neq 0,$$

будем называть *однородными координатами точки* M. Отсюда получаем выражения для декартовых координат собственной точки через ее однородные координаты: $x = \dfrac{x_1}{x_4}$, $y = \dfrac{x_2}{x_4}$, $z = \dfrac{x_3}{x_4}$.

Пусть M — несобственная точка, присоединенная к прямым, параллельным вектору $a = \{x_1, x_2, x_3\}$. Однородными координатами точки M будем называть числа x_1, x_2, x_3, 0, а также любую четверку чисел, им пропорциональную. Точку M с однородными координатами x_1, x_2, x_3, x_4 будем обозначать так: $M(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$. В частности, несобственная точка оси Ox: $O_1(1:0:0:0)$, несобственная точка оси Oy: $O_2(0:1:0:0)$, несобственная точка оси Oz: $O_3(0:0:1:0)$; начало координат: $O_4(0:0:0:1)$, а единичная точка:

$E\ (1:1:1:1)$. Всякая плоскость проективного пространства определяется линейным однородным уравнением первой степени: $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0$, и обратно. В частности, несобственная плоскость определяется уравнением $x_4=0$.

Система проективных координат в проективном пространстве определяется пятью точками O_1, O_2, O_3, O_4 и E, из которых никакие четыре не лежат в одной плоскости. Точки O_1, O_2, O_3, O_4 называются ф у н д а м е н т а л ь н ы м и или б а з и с н ы м и. Тетраэдр $O_1O_2O_3O_4$ называется б а з и с н ы м или к о о р д и н а т н ы м. Точка E называется е д и н и ч н о й т о ч к о й системы проективных координат.

Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 и E имеют следующие однородные координаты: $O_1\ (a_{11}:a_{21}:a_{31}:a_{41})$, $O_2\ (a_{12}:a_{22}:a_{32}:a_{42})$, $O_3\ (a_{13}:a_{23}:a_{33}:a_{43})$, $O_4\ (a_{14}:a_{24}:a_{34}:a_{44})$, $E\ (e_1:e_2:e_3:e_4)$, а произвольная точка M — однородные координаты $M\ (x_1:x_2:x_3:x_4)$.

Тогда проективными координатами точки M относительно системы проективных координат $O_1O_2O_3O_4E$ будут числа $y_1:y_2:y_3:y_4$, определяемые из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= a_{11}\varrho_1 y_1 + a_{12}\varrho_2 y_2 + a_{13}\varrho_3 y_3 + a_{14}\varrho_4 y_4,\\
\varrho x_2 &= a_{21}\varrho_1 y_1 + a_{22}\varrho_2 y_2 + a_{23}\varrho_3 y_3 + a_{24}\varrho_4 y_4,\\
\varrho x_3 &= a_{31}\varrho_1 y_1 + a_{32}\varrho_2 y_2 + a_{33}\varrho_3 y_3 + a_{34}\varrho_4 y_4,\\
\varrho x_4 &= a_{41}\varrho_1 y_1 + a_{42}\varrho_2 y_2 + a_{43}\varrho_3 y_3 + a_{44}\varrho_4 y_4,
\end{aligned}$$

где числа ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 определяются из системы уравнений:

$$\begin{aligned}
a_{11}\varrho_1 + a_{12}\varrho_2 + a_{13}\varrho_3 + a_{14}\varrho_4 &= e_1,\\
a_{21}\varrho_1 + a_{22}\varrho_2 + a_{23}\varrho_3 + a_{24}\varrho_4 &= e_2,\\
a_{31}\varrho_1 + a_{32}\varrho_2 + a_{33}\varrho_3 + a_{34}\varrho_4 &= e_3,\\
a_{41}\varrho_1 + a_{42}\varrho_2 + a_{43}\varrho_3 + a_{44}\varrho_4 &= e_4.
\end{aligned}$$

В системе $O_1O_2O_3O_4E$ проективных координат точки O_1, O_2, O_3, O_4, E имеют соответственно следующие проективные координаты:

$$O_1\ (1:0:0:0),\quad O_2\ (0:1:0:0),\quad O_3\ (0:0:1:0),\quad O_4\ (0:0:0:1),\quad E\ (1:1:1:1).$$

Если грани $O_2O_3O_4$, $O_1O_3O_4$, $O_1O_2O_4$ и $O_1O_2O_3$ определяются в системе однородных координат уравнениями:

$$\begin{aligned}
u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + u_{14}x_4 &= 0 \qquad (O_2O_3O_4),\\
u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + u_{24}x_4 &= 0 \qquad (O_1O_3O_4),\\
u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3 + u_{34}x_4 &= 0 \qquad (O_1O_2O_4),\\
u_{41}x_1 + u_{42}x_2 + u_{43}x_3 + u_{44}x_4 &= 0 \qquad (O_1O_2O_3)
\end{aligned}$$

и единичная точка E имеет однородные координаты $(e_1:e_2:e_3:e_4)$, то проективные координаты $y_1:y_2:y_3:y_4$ точки M с однородными координатами $x_1:x_2:x_3:x_4$ определяются по формулам:

$$\varrho y_1 = \frac{u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + u_{14}x_4}{u_{11}e_1 + u_{12}e_2 + u_{13}e_3 + u_{14}e_4},\qquad \varrho y_2 = \frac{u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + u_{24}x_4}{u_{21}e_1 + u_{22}e_2 + u_{23}e_3 + u_{24}e_4},$$

$$\varrho y_3 = \frac{u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3 + u_{34}x_4}{u_{31}e_1 + u_{32}e_2 + u_{33}e_3 + u_{34}e_4},\qquad \varrho y_4 = \frac{u_{41}x_1 + u_{42}x_2 + u_{43}x_3 + u_{44}x_4}{u_{41}e_1 + u_{42}e_2 + u_{43}e_3 + u_{44}e_4}.$$

Если грани базисного тетраэдра $O_1O_2O_3O_4$ заданы относительно некоторой общей декартовой системы координат уравнениями:

$$\begin{aligned}
O_2O_3O_4&:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\
O_3O_4O_1&:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\\
O_4O_1O_2&:\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,\\
O_1O_2O_3&:\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0,
\end{aligned}$$

а единичная точка — точка $E(x_0,\ y_0,\ z_0)$, то проективные координаты собственных точек определяются соотношениями:

$$\varrho x_1=\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1},\qquad \varrho x_2=\frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2},$$
$$\varrho x_3=\frac{A_3x+B_3y+C_3z+D_3}{A_3x_0+B_3y_0+C_3z_0+D_3},\qquad \varrho x_4=\frac{A_4x+B_4y+C_4z+D_4}{A_4x_0+B_4y_0+C_4z_0+D_4}.$$

Однородные координаты есть частный случай проективных координат, когда вершины O_1, O_2, O_3 координатного тетраэдра суть несобственные точки декартовых осей координат Ox, Oy, Oz, точка O_4 совпадает с началом координат O, а единичная точка декартовой системы координат принимается за единичную точку проективной системы координат.

Если спроектировать в точку $M^{IV}(x_1:x_2:x_3:0)$ точку $M(x_1:x_2:x_3:x_4)$, отличную от точки O_4, из этой точки O_4 в плоскость $O_1O_2O_3$, точку E — в точку $E^{IV}(1:1:1:0)$, то на плоскости $O_1O_2O_3$ в системе проективных координат $O_1O_2O_3E^{IV}$ точка M^{IV} имеет координаты $x_1:x_2:x_3$.

Если спроектировать точку $M(x_1:x_2:x_3:x_4)$, не лежащую на прямой O_3O_4, на прямую O_1O_2 плоскостью O_3O_4M в точку $M_{12}(x_1:x_2:0:0)$, а точку E — в точку $E_{12}(1:1:0:0)$ плоскостью O_3O_4E, то на прямой O_1O_2 в системе проективных координат $O_1O_2E_{12}$ точка M_{12} будет иметь координаты $x_1:x_2$.

Плоскость в проективной системе координат определяется линейным однородным уравнением $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0$.

Четыре числа $u_1:u_2:u_3:u_4$, а также всякие четыре числа, им пропорциональные, называются координатами этой плоскости.

Обратно, всякие четыре числа u_1, u_2, u_3, u_4, не равные нулю одновременно, определяют в указанном смысле плоскость.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$A(a_1:a_2:a_3:a_4),\qquad B(b_1:b_2:b_3:b_4),\qquad C(c_1:c_2:c_3:c_4),$$

не лежащие на одной прямой, пишется в виде:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{vmatrix}=0;\quad\text{или}\quad \begin{aligned} x_1&=\alpha a_1+\beta b_1+\gamma c_1,\\ x_2&=\alpha a_2+\beta b_2+\gamma c_2,\\ x_3&=\alpha a_3+\beta b_3+\gamma c_3,\\ x_4&=\alpha a_4+\beta b_4+\gamma c_4,\end{aligned}$$

где α, β, γ можно рассматривать как проективные координаты точки плоскости в некоторой системе проективных координат с базисными точками A, B, C.

Прямая проективного пространства, проходящая через две точки $A(a_1:a_2:a_3:a_4)$ и $B(b_1:b_2:b_3:b_4)$, определяется уравнениями:

$$x_1=\alpha a_1+\beta b_1, \quad x_2=\alpha a_2+\beta b_2, \quad x_3=\alpha a_3+\beta b_3, \quad x_4=\alpha a_4+\beta b_4,$$

где α и β можно рассматривать как проективные координаты точки прямой AB в некоторой системе проективных координат с базисными точками A и B.

Прямая, являющаяся пересечением двух плоскостей $(v_1:v_2:v_3:v_4)$ и $(w_1:w_2:w_3:w_4)$, определяется уравнениями:

$$u_1=\alpha v_1+\beta w_1, \quad u_2=\alpha v_2+\beta w_2, \quad u_3=\alpha v_3+\beta w_3, \quad u_4=\alpha v_4+\beta w_4$$

(пучок плоскостей, определяемый двумя данными плоскостями). Ангармоническое отношение четырех точек:

$$\begin{gathered}A(a_1:a_2:a_3:a_4), \quad B(b_1:b_2:b_3:b_4),\\ C[(\alpha a_1+\beta b_1):(\alpha a_2+\beta b_2):(\alpha a_3+\beta b_3):(\alpha a_4+\beta b_4)],\\ D[(\lambda a_1+\mu b_1):(\lambda a_2+\mu b_2):(\lambda a_3+\mu b_3):(\lambda a_4+\mu b_4)]\end{gathered}$$

равно $(ABCD)=\dfrac{\beta\lambda}{\alpha\mu}$.

Таким же образом определяется ангармоническое отношение четырех плоскостей пучка.

Если взять в качестве новых базисных точек $O_1'(a_{11}:a_{21}:a_{31}:a_{41})$, $O_2'(a_{12}:a_{22}:a_{32}:a_{42})$, $O_3'(a_{13}:a_{23}:a_{33}:a_{43})$, $O_4'(a_{14}:a_{24}:a_{34}:a_{44})$, а за новую единичную точку — точку $E'(e_1:e_2:e_3:e_4)$, то координаты $x_1:x_2:x_3:x_4$ точки M в системе $O_1O_2O_3O_4E$ через координаты $x_1':x_2':x_3':x_4'$ той же точки в системе $O_1'O_2'O_3'O_4'\ E'$ выражаются соотношениями:

$$\begin{aligned}\varrho x_1' &= a_{11}\varrho_1 x_1+a_{12}\varrho_2 x_2+a_{13}\varrho_3 x_3+a_{14}\varrho_4 x_4,\\ \varrho x_2' &= a_{21}\varrho_1 x_1+a_{22}\varrho_2 x_2+a_{23}\varrho_3 x_3+a_{24}\varrho_4 x_4,\\ \varrho x_3' &= a_{31}\varrho_1 x_1+a_{32}\varrho_2 x_2+a_{33}\varrho_3 x_3+a_{34}\varrho_4 x_4,\\ \varrho x_4' &= a_{41}\varrho_1 x_1+a_{42}\varrho_2 x_2+a_{43}\varrho_3 x_3+a_{44}\varrho_4 x_4,\end{aligned}$$

где $\varrho_1:\varrho_2:\varrho_3:\varrho_4$ определяются из соотношений:

$$\begin{aligned}&a_{11}\varrho_1+a_{12}\varrho_2+a_{13}\varrho_3+a_{14}\varrho_4=\varrho e_1, \quad a_{31}\varrho_1+a_{32}\varrho_2+a_{33}\varrho_3+a_{34}\varrho_4=\varrho e_3,\\ &a_{21}\varrho_1+a_{22}\varrho_2+a_{23}\varrho_3+a_{24}\varrho_4=\varrho e_2, \quad a_{41}\varrho_1+a_{42}\varrho_2+a_{43}\varrho_3+a_{44}\varrho_4=\varrho e_4.\end{aligned}$$

Проективным преобразованием называется такое точечное взаимно однозначное соответствие, при котором три любые коллинеарные точки переходят снова в коллинеарные. При этом плоскость переходит в плоскость, прямая — в прямую, сохраняется отношение инцидентности точек, прямых и плоскостей, ангармоническое отношение четырех точек одной прямой, четырех прямых одного пучка и четырех плоскостей одного пучка.

Множество всех проективных преобразований пространства образует группу.

Проективное преобразование определяется, и притом единственным образом, пятью парами соответственных точек, если никакие четыре прообраза и никакие четыре образа не лежат в одной плоскости.

В координатах проективное преобразование определяется соотношениями:

$$\varrho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \quad \varrho x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,$$
$$\varrho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \quad \varrho x_4' = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4,$$

где $M(x_1:x_2:x_3:x_4)$ — прообраз, а $M'(x_1':x_2':x_3':x_4')$ — образ. Обратно, этими соотношениями при условии

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0$$

определяется проективное преобразование.

В аффинных координатах для собственных точек пространства проективное преобразование определяется соотношениями:

$$x' = \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{A_4x + B_4y + C_4z + D_4}, \quad y' = \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{A_4x + B_4y + C_4z + D_4},$$
$$z' = \frac{A_3x + B_3y + C_3z + D_3}{A_4x + B_4y + C_4z + D_4},$$

где $M(x, y, z)$ — прообраз, а $M'(x', y', z')$ — образ. Обратно, при условии

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

эти соотношения определяют проективное преобразование собственных точек проективного пространства.

Коррелятивным преобразованием, или *корреляцией*, называется взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек проективного пространства и множеством всех плоскостей этого пространства.

Корреляция называется *линейной*, если трем любым точкам, лежащим на одной прямой, соответствуют три плоскости, проходящие через одну прямую. При линейной корреляции ангармоническое отношение четырех точек одной прямой равно ангармоническому отношению соответствующих им четырех плоскостей пучка.

Линейная корреляция называется *поляритетом*, если она удовлетворяет следующему условию: пусть M — любая точка, m — соответствующая ей плоскость, N — любая точка, лежащая на плоскости m; тогда плоскость n, соответствующая точке N, должна проходить через точку M. Если в поляритете точке M соответствует плоскость m, то точка M называется полюсом плоскости m, а плоскость m называется полярой точки M.

Две точки M и N, каждая из которых лежит на поляре другой (в некотором поляритете), называются полярно сопряженными (в этом поляритете).

Две плоскости m и n, каждая из которых проходит через полюс другой (в некотором поляритете), называются полярно сопряженными (в этом поляритете).

Если в некотором поляритете точка M описывает прямую l, то поляра m точки M вращается около некоторой прямой l'; эти прямые l и l' называются полярно сопряженными в этом поляритете.

В координатах линейная корреляция определяется соотношениями:

$$\varrho u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \qquad \varrho u_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,$$
$$\varrho u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \qquad \varrho u_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4,$$

где $M(x_1:x_2:x_3:x_4)$ — произвольная точка, а $m(u_1:u_2:u_3:u_4)$ — соответствующая ей плоскость. Обратно, этими соотношениями при условии

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0$$

определяется линейная корреляция.

Необходимым и достаточным условием того, что линейная корреляция есть поляритет, является условие $a_{ik} = a_{ki}$.

Условие полярной сопряженности двух точек $M(x_1:x_2:x_3:x_4)$ и $N(y_1:y_2:y_3:y_4)$ в данном поляритете записывается так:

$$y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) + y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4) +$$
$$+ y_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4) + y_4(a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4) = 0.$$

Условие полярной сопряженности двух плоскостей $m(u_1:u_2:u_3:u_4)$ и $n(v_1:v_2:v_3:v_4)$ в данном поляритете записывается так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 + A_{14}u_4)v_1 + (A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 + A_{24}u_4)v_2 +$$
$$+ (A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3 + A_{34}u_4)v_3 +$$
$$+ (A_{41}u_1 + A_{42}u_2 + A_{43}u_3 + A_{44}u_4)v_4 = 0,$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} в определителе

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Координаты $(a_1:a_2:a_3:a_4)$ полюса плоскости $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+$ $+u_4x_4=0$ определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \varrho a_1 &= A_{11}u_1+A_{12}u_2+A_{13}u_3+A_{14}u_4, \\ \varrho a_2 &= A_{21}u_1+A_{22}u_2+A_{23}u_3+A_{24}u_4, \\ \varrho a_3 &= A_{31}u_1+A_{32}u_2+A_{33}u_3+A_{34}u_4, \\ \varrho a_4 &= A_{41}u_1+A_{42}u_2+A_{43}u_3+A_{44}u_4. \end{aligned}$$

Поверхность второго порядка в проективном пространстве может быть определена как множество точек, инцидентных своим полярам в некотором поляритете.

Общее уравнение поверхности второго порядка в проективных координатах имеет вид:

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+$$
$$+2a_{14}x_1x_4+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4=0.$$

Обратно, каждой поверхности второго порядка, заданной в проективном пространстве своим общим уравнением, можно поставить в соответствие некоторый поляритет.

Уравнение поляры точки $M\,(a_1:a_2:a_3:a_4)$ относительно поверхности второго порядка пишется так:

$$(a_{11}a_1+a_{12}a_2+a_{13}a_3+a_{14}a_4)\,x_1+(a_{21}a_1+a_{22}a_2+a_{23}a_3+a_{24}a_4)\,x_2+$$
$$+(a_{31}a_1+a_{32}a_2+a_{33}a_3+a_{34}a_4)\,x_3+(a_{41}a_1+a_{42}a_2+a_{43}a_3+a_{44}a_4)\,x_4=0.$$

Если точка M лежит на поверхности, то ее поляра есть касательная плоскость к этой поверхности в точке M.

Если точка M не принадлежит поверхности, то ее поляра может быть определена как плоскость, в которой лежат четвертые гармонические к точке M и двум точкам A и B, получающимся в пересечении прямой, проходящей через точку M, с поверхностью.

Конус с вершиной в точке $M\,(\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3:\alpha_4)$, описанный около поверхности второго порядка, определяется уравнением

$$(a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{14}x_1x_4+$$
$$+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4)\,(a_{11}\alpha_1^2+a_{22}\alpha_2^2+a_{33}\alpha_3^2+a_{44}\alpha_4^2+$$
$$+2a_{12}\alpha_1\alpha_2+2a_{13}\alpha_1\alpha_3+2a_{14}\alpha_1\alpha_4+2a_{23}\alpha_2\alpha_3+2a_{24}\alpha_2\alpha_4+2a_{34}\alpha_3\alpha_4)-$$
$$-[(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+a_{13}\alpha_3+a_{14}\alpha_4)\,x_1+(a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+a_{23}\alpha_3+a_{24}\alpha_4)\,x_2+$$
$$+(a_{31}\alpha_1+a_{32}\alpha_2+a_{33}\alpha_3+a_{34}\alpha_4)\,x_3+(a_{41}\alpha_1+a_{42}\alpha_2+a_{43}\alpha_3+a_{44}\alpha_4)\,x_4]^2=0.$$

Условие, при котором плоскость $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0$ касается поверхности второго порядка, в случае, если эта поверхность не вырождается, записывается так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Это уравнение называется тангенциальным уравнением поверхности второго порядка (невырождающейся). При этом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = -(A_{11}u_1^2+A_{22}u_2^2+A_{33}u_3^2+A_{44}u_4^2+2A_{12}u_1u_2+ \\ +2A_{13}u_1u_3+2A_{14}u_1u_4+2A_{23}u_2u_3+2A_{24}u_2u_4+ \\ +2A_{34}u_3u_4),$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} в определителе

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Тетраэдр называется автополярным по отношению к поверхности второго порядка (или к некоторому поляритету), если каждая его вершина является полюсом противоположной грани.

Если за базисный тетраэдр принят автополярный, то уравнение поверхности второго порядка при надлежащем выборе единичной точки может быть записано в виде:

$$\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\lambda_3x_3^2+\lambda_4x_4^2=0, \quad \text{где } |\lambda_i|=1, \ i=1, 2, 3, 4.$$

Все поверхности второго порядка в проективном пространстве разделяются на восемь проективно различных классов.

При этом две поверхности второго порядка относятся к одному проективному классу тогда и только тогда, когда одна из них может быть получена проективным преобразованием другой.

Ниже приводятся простейшие уравнения восьми поверхностей второго порядка, относящихся к различным проективным классам (см. табл. на стр. 365).

В случае мнимой невырождающейся или гиперболической поверхности $\Delta>0$, а в случае эллиптической $\Delta<0$.

Для того чтобы поверхность второго порядка, заданная уравнением $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+$
$+2a_{14}x_1x_4+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4=0,$

распадалась на пару плоскостей, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

был равен 2 или 1.

Ранг A	Тип поверхности
4	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$ — мнимая поверхность $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$ — эллиптическая поверхность $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$ — гиперболическая поверхность
3	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ — мнимый конус $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ — действительный конус
2	$x_1^2+x_2^2=0$ — две мнимые плоскости $x_1^2-x_2^2=0$ — две плоскости
1	$x_1^2=0$ — две совпадающие плоскости

Точка M называется внутренней точкой действительной эллиптической невырождающейся поверхности второго порядка, если всякая прямая, проходящая через эту точку, пересекает поверхность в двух различных точках. Точка M, не лежащая на поверхности и не являющаяся внутренней точкой, называется внешней точкой.

1883. Найти несобственную точку прямой, заданной: 1) двумя точками $A(1:0:-1:2)$ и $B(1:-1:0:-2)$; 2) двумя плоскостями $u(2:-1:0:1)$ и $v(6:0:1:-3)$.

1884. Дана плоскость $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0$. Что можно сказать о ее расположении относительно координатного тетраэдра, если

1) $a_1=0$? 2) $a_1=a_2=0$? 3) $a_1=a_2=a_3=0$?

1885. Даны две плоскости

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0, \qquad b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=0.$$

Доказать, что:

1) если коэффициенты первого уравнения пропорциональны соответствующим коэффициентам второго уравнения $a_i = \lambda b_i$, $\lambda \neq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, то обе плоскости совпадают;

2) если три коэффициента первого уравнения пропорциональны соответствующим трем коэффициентам второго уравнения $a_i = \lambda b_i$, $\lambda \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, то линия пересечения плоскостей лежит в координатной плоскости $x_4 = 0$;

3) если два коэффициента одного уравнения пропорциональны соответствующим двум коэффициентам другого: $a_i = \lambda b_i$, $\lambda \neq 0$, $i = 1, 2$, то линия пересечения плоскостей пересекает ребро $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ координатного тетраэдра.

1886. Сформулировать теоремы, двойственные теоремам предыдущей задачи.

1887. Найти условие, при котором две прямые в пространстве имеют общую точку, если:

1) первая прямая проходит через две точки $A(a_1:a_2:a_3:a_4)$, $B(b_1:b_2:b_3:b_4)$, а вторая — через две точки $A'(a'_1:a'_2:a'_3:a'_4)$ и $B'(b'_1:b'_2:b'_3:b'_4)$;

2) первая прямая является линией пересечения плоскостей $u(u_1:u_2:u_3:u_4)$ и $v(v_1:v_2:v_3:v_4)$, а вторая — линией пересечения двух плоскостей $u'(u'_1:u'_2:u'_3:u'_4)$ и $v'(v'_1:v'_2:v'_3:v'_4)$;

3) одна прямая задана двумя точками $A(a_1:a_2:a_3:a_4)$ и $B(b_1:b_2:b_3:b_4)$, а другая — как линия пересечения плоскостей $u(u_1:u_2:u_3:u_4)$ и $v(v_1:v_2:v_3:v_4)$.

1888. Даны две прямые: одна — двумя точками $A(1:-1:0:4)$ и $B(-2:0:-4:3)$, а другая — двумя плоскостями $u(2:5:-3:0)$ и $v(3:-2:2:1)$. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M(2:0:1:-3)$ и пересекающей данные прямые.

1889. Составить уравнения прямой, лежащей в плоскости $x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 0$ и пересекающей две прямые, из которых одна задана двумя точками $A(2:3:0:-4)$ и $B(0:3:-4:0)$, а другая — двумя плоскостями $u(2:0:-3:0)$ и $v(1:5:4:3)$.

1890. Найти общий вид проективных преобразований, переводящих в самих себя ребра O_1O_2 и O_3O_4 координатного тетраэдра.

1891. Найти общий вид проективных преобразований, оставляющих на месте все точки двух противоположных ребер O_1O_2 и O_3O_4 координатного тетраэдра.

1892. Найти общий вид проективных преобразований, переводящих ребро O_1O_2 в ребро O_3O_4.

1893. Найти общий вид проективных преобразований, переводящих вершины координатного тетраэдра в точки, лежащие на противоположных гранях.

1894. Найти проективное преобразование, переводящее вершины координатного тетраэдра в точки, в которых прямые, соединяющие эти вершины с единичной точкой, пересекают противоположные грани.

1895. Найти общий вид уравнения поверхности второго порядка, касающейся граней $x_1=0$, $x_2=0$ координатного тетраэдра в точках их пересечения с ребром $x_3=0$, $x_4=0$.

1896. Найти геометрическое место точек, из которых данная точка и данная прямая проектируются в полюс и поляру относительно данной кривой второго порядка.

1897. Доказать, что два конуса, описанных около поверхности второго порядка, пересекаются по двум плоским линиям.

1898. Даны две поверхности второго порядка:

$$2F(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0,\quad 2\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0.$$

Каждой точке $M(x_1:x_2:x_3:x_4)$ пространства ставится в соответствие прямая пересечения полярных плоскостей этой точки относительно данных поверхностей второго порядка. Найти геометрическое место прямых, соответствующих точкам прямой, соединяющей точки $A(a_1:a_2:a_3:a_4)$ и $B(b_1:b_2:b_3:b_4)$.

1899. Даны три поверхности второго порядка:

$$2F(x,\ y,\ z)=0,\quad 2\Phi(x,\ y,\ z)=0,\quad 2\Psi(x,\ y,\ z)=0.$$

Определить общую точку трех полярных плоскостей точки $M(x_1,\ y_1,\ z_1)$ относительно трех данных поверхностей.

1900. Определить геометрическое место точек пересечения полярных плоскостей для точек плоскости $Ax+By+$ $+Cz+D=0$ относительно трех поверхностей второго порядка, заданных уравнениями:

$$2F(x,\ y,\ z)=0,\quad 2\Phi(x,\ y,\ z)=0,\quad 2\Psi(x,\ y,\ z)=0.$$

1901. Определить геометрическое место прямых, полярно сопряженных прямолинейным образующим каждого семейства поверхности второго порядка $x^2-y^2=2z$ относительно поверхности второго порядка $2F(x,\ y,\ z)=0$.

ОТВЕТЫ

2. 1) 3; 2) 6; 3) 1; 4) -9. **3.** 1) 8; 2) 5; 3) 4. **4.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) -1; 3) $-\frac{4}{3}$; 4) 0; 5) не определено. **5.** $(ABC)=-\frac{3}{5}$, $(ACB)=-\frac{2}{5}$, $(BCA)=\frac{2}{3}$, $(BAC)=-\frac{5}{3}$, $(CAB)=-\frac{5}{2}$, $(CBA)=\frac{3}{2}$. **6.** $(ACB)=$ $=-1-\lambda$, $(BAC)=\frac{1}{\lambda}$, $(BCA)=-\frac{1+\lambda}{\lambda}$, $(CAB)=-\frac{1}{1+\lambda}$, $(CBA)=-\frac{\lambda}{1+\lambda}$. **7.** 1) $\frac{21}{4}$; 2) $\frac{21}{5}$; 3) 0; 4) 3; 5) $\frac{9}{2}$. **8.** 1) 6; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) 0. **11.** $(PQA)=-\frac{\lambda(1+\mu)}{\mu(1+\lambda)}$, $(PQB)=-\frac{1+\mu}{1+\lambda}$. **12.** $\frac{(1+\nu)(\mu-\lambda)}{(1+\lambda)(\nu-\mu)}$. **13.** $(ABR)=\frac{\lambda+\mu+2\lambda\mu}{2+\lambda+\mu}$. **14.** 7. **15.** 1) 0; 2) $-\frac{11}{9}$; 3) не определено; 4) 1; 5) не определено; 6) 1.

16. Шесть различных значений ω, $1-\omega$, $\frac{\omega-1}{\omega}$, $\frac{1}{\omega}$, $\frac{1}{1-\omega}$ и $\frac{\omega}{\omega-1}$; 1) $-\operatorname{tg}^2\alpha$, $\sec^2\alpha$, $\operatorname{cosec}^2\alpha$, $-\operatorname{ctg}^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha$; 2) -1, 2 и $\frac{1}{2}$. **17.** $\frac{8}{5}$.

20. У к а з а н и е. Найти отношение, в котором середина отрезка A_3A_4 делит отрезок A_1A_2. **21.** $x'_A=-5$, $x'_B=-1$, $x'_C=3$. **22.** Старая координата нового начала координат $a=-4$. **23.** $O'(3)$. **24.** -1. **25.** 5. **26.** $x'=\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}$. **27.** $x'_A=\frac{5}{7}$, $x'_B=0$, $x'_C=\frac{9}{7}$, $x'_O=\frac{2}{7}$, $x_E=\frac{3}{7}$. **28.** $x_{O'}=\frac{3}{2}$, $x_{E'}=1$.

29. Рассматриваемое преобразование либо сохраняет начало координат, либо является переносом декартовой системы координат.

30. $x'=\frac{x}{a}$. **31.** 0, $\frac{1}{a}$. **32.** b, $a+b$, $-\frac{b}{a}$, $\frac{1-b}{a}$.

33. Нет; преобразование сводится к отражению от начала координат и последующему параллельному переносу, определяемому вектором с координатой a.

34. 1) образует; перенос.

2) образует; растяжение с коэффициентом a, если $a>0$, и растяжение с коэффициентом $|a|$ с последующим отражением около начала, если $a<0$.

35. $x'=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$.

36. 1) $x'=-2x+19$; 2) $x'=-2x+5$; 3) $x'=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$; 4) $B^{-1}A=BA$ (ибо $B^{-1}=B$); 5) $x'=-4x+41$.

37. $x=\frac{b}{1-a}$, если $a\neq 1$. **38.** $x^{*\prime}=ax^*+\frac{\alpha a+b-\alpha}{\beta-\alpha}$.

39. Нет. **40.** 1) Да. 2) Нет. 3) Да. **41.** 1) Да. 2) Нет. 3) Нет.

43. $x'=\frac{5}{2}x-7$. **44.** $x'=\frac{x_2'-x_1'}{x_2-x_1}x+\frac{x_1'x_2-x_1x_2'}{x_2-x_1}$.

45. 1) Преобразования переноса: $x'=x+a$, где a принимает все действительные значения; 2) $x'=\pm x+a$ — преобразования переноса и зеркального отражения от начала координат ($x'=-x+a$) или только переноса ($x'=x+a$).

49. $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, $C\left(\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $D(1,\ \sqrt{3})$, $E(0,\ \sqrt{3})$, $F\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

50. $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, $C\left(\frac{1}{3},\ 1\right)$, $D(0,\ 1)$, $O\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right)$, $S\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$.

51. $A(-4,\ 0)$, $B(4,\ 0)$, $C(1,\ 3)$, $D(-1,\ 3)$, $M\left(0,\ \frac{12}{5}\right)$, $S(0,\ 4)$.

52. $C(5,\ 3)$, $D(2,\ 7)$ или $C(-1,\ -5)$ и $D(-4,\ -1)$.

53. 1) $(-x,\ -y)$; 2) $(x,\ -y)$; 3) $(-x,\ y)$; 4) $(y,\ x)$; 5) $(-y,\ -x)$. **54.** $D(1,\ -2)$. **55.** 1) 5; 2) $\sqrt{34}$; 3) 13; 4) $\sqrt{2}$.

56. 1) $\sqrt{137}$; 2) 5; 3) 11; 4) 13. **57.** $(14,\ 0)$ и $\left(0,\ \frac{14}{3}\right)$.

58. $(0,\ -10)$. **59.** Треугольник ABC прямоугольный.

60. $(7,\ 0)$, $(-17,\ 0)$, $(0{,}9+10\sqrt{2})$ $(0{,}9-10\sqrt{2})$. **61.** 5.

62. $(2,\ 2)$, $(-12,\ -12)$, $(6,\ -6)$, $(-4,\ 4)$. **63.** $M(-5,\ 4)$.

64. Центр $(-1,\ -2)$, радиус $r=5$. **65.** $B(2,\ 5)$, $D(16,\ 3)$.

66. $M(2,\ 10)$. **67.** $M_1(1,\ -1)$, $r_1=1$; $M_2(5,\ -5)$, $r_2=5$.

68. 1) 1; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{4}$. **69.** 1) $\left(-\frac{8}{3},\ \frac{5}{3}\right)$; 2) $(9,\ 5)$; 3) $\left(-\frac{22}{3},\ \frac{1}{3}\right)$; 4) $\left(\frac{1}{4},\ \frac{5}{2}\right)$.

70. 1) $(-1, 5)$; 2) $(0, 0)$; 3) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. **71.** $\left(\frac{11}{5}, 0\right)$ и $(0, -11)$.

72. $x=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$, $y=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$.

73. $(-3, 3)$, $(7, 5)$, $(-3, -3)$. **74.** $B(0, -7)$. **75.** $C(10, 9)$, $D(4, -4)$. **76.** 4. **77.** $M(12, -11)$. **78.** $D(8, -18)$.

79. $C(0, -1)$, $D(4, -4)$. **80.** $A(3, -1)$, $B(0, 8)$.

81. $B\left(-3, \frac{16}{3}\right)$. **82.** $\lambda=-2$. **83.** $A(160, -131)$, $B(-225, 184)$.

84. $\overrightarrow{AK}:\overrightarrow{KM}=3$, $\overrightarrow{BK}:\overrightarrow{KN}=\frac{3}{5}$.

Указание. Принять векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$ за единичные векторы аффинной системы координат.

85. $AD=\frac{\sqrt{157}}{2}$. **86.** $(-8, -7)$ и $(0, -1)$. **87.** $\left(\frac{7}{13}, -\frac{4}{13}\right)$ и $\left(-\frac{33}{13}, -\frac{100}{13}\right)$. **88.** $\frac{10}{3}\sqrt{2}$. **89.** Центр $M(0, 5)$, радиус $r=3\sqrt{5}$.

90. $M(-2, 1)$. **91.** $D(11, 7)$. **92.** $\left(5\frac{1}{2}, 4\frac{3}{4}\right)$.

93. Если принять за начало координат точку O, а за положительные направления осей Ox и Oy соответственно направления OA и OB, то центр тяжести согнутого стержня будет иметь координаты $x=\frac{2}{7}$, $y=\frac{25}{14}$.

94. Если направить ось абсцисс по меньшему из катетов, а ось ординат по большему, то для координат центра тяжести треугольника получим числа $x=1$, $y=\frac{3}{2}$. **95.** $x=8{,}2$, $y=6{,}2$.

97. n^2r^2, где n — число сторон многоугольника, а r — радиус описанной окружности.

98. 7. **99.** 12,5. **100.** 1) 4; 2) $\frac{27}{2}$; 3) 13. **101.** $\frac{7}{5}$. **102.** $3\sqrt{2}$. **103.** $(32, 0)$; $(-8, 0)$. **104.** $(5, 2)$ или $(2, 2)$. **106.** $(a, 0)$, $\left(a\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(2a, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(a\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(a, \frac{2\pi}{3}\right)$. **107.** 1) $AB=\sqrt{3}$; 2) $CD=10$; 3) $EF=5$. **108.** $\left(1, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

109. 1) $B\left(5, \frac{5\pi}{3}\right)$; 2) $C\left(5, \frac{4\pi}{3}\right)$.

110. $A\left(2, \frac{17\pi}{12}\right)$, $B\left(3, \frac{7\pi}{12}\right)$, $C\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$, $D\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$, $E\left(5, \frac{5\pi}{4}\right)$.

111. $S=1$. **112.** $A(1, \sqrt{3})$, $B(-1, 1)$, $C(0, 5)$, $D\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

113. $A\left(\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{4}\right)$, $B\left(2,\ \frac{\pi}{2}\right)$, $C(5,\ 0)$. **114.** $\rho=10$, $\cos\varphi=\frac{4}{5}$, $\sin\varphi=-\frac{3}{5}$. **115.** $(2+5\sqrt{3},\ 8)$.

116. $M_1\left(6\sqrt{2},\ \frac{5\pi}{4}\right)$, $M_2\left(4,\ \frac{7\pi}{6}\right)$. **117.** $(-5,\ 4)$, $(-12,\ 5)$, $(-7,\ 3)$.

118. $O'(6,\ -2)$, $E_1'(7,\ -2)$, $E_2'(6,\ -1)$; $O(-6,\ 2)$, $E_1(-5,\ 2)$, $E_2(-6,\ 3)$.

119. 1) $x=2x'+7y'+3$, $y=5x'+9y'+1$; 2) $x=5x'+3$, $y=4y'+5$; 3) $x=-7y'$, $y=2x'+2$; 4) $x=ax'$, $y=by'$; 5) $x=by'$, $y=ax'$.

120. 1) $x=-3x'-8y'+5$, $y=x'+3y'+4$; 2) $x=-x'-y'+1$, $y=y'$; 3) $x=-ay'+a$, $y=-bx'+b$.

121. $x'=x+y-2$, $y'=2x-y+3$; $O'\left(-\frac{1}{3},\ \frac{7}{3}\right)$, $E_1'(0,\ 3)$, $E_2'(0,\ 2)$; $O(-2,\ 3)$, $E_1(-1,\ 5)$, $E_2(-1,\ 2)$.

122. $O'(3,\ -2)$, $e_1'=\{2,\ -1\}$, $e_2'=\{-5,\ 2\}$.

123. $x=6x'+4y'-4$, $y=-2x'+6y'+2$.

124. $O(0,\ 0)$, $A\left(\frac{4}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$, $C\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, $B\left(-\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right)$.

125. $x=\frac{2}{3}x'-\frac{1}{3}y'+\frac{1}{3}$, $y=-\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}$.

126. В первой системе: $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, $C(2,\ 1)$, $D(2,\ 2)$, $E(1,\ 2)$, $F(0,\ 1)$.

Во второй системе: $A\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, $B(1,\ 0)$, $C\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$, $D(0,\ 0)$, $E\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, $F(0,\ 1)$.

127. $x=\frac{1}{3}x'-\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}$, $y=-\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}$.

128. $x'=(x+y)\cos\frac{\omega}{2}$, $y'=(-x+y)\sin\frac{\omega}{2}$.

129. $x=\dfrac{-x'\cos\omega+y'}{\sin\omega}$, $y=\dfrac{x'-y'\cos\omega}{\sin\omega}$.

130. $x=-\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'-4$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y'+2$.

131. $x=-\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'-3$, $y=-\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y'-2$.

132. $A(2,\ 3)$. **133.** $A(3\sqrt{3},\ 1)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2}\right)$, $C(3,-\sqrt{3})$.

134. $M(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$, $N(-3\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$, $P(-\sqrt{2},-2\sqrt{2})$.

135. $x'=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y,\ y'=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y$ (если положительные направления осей Ox' и Oy' составляют соответственно 45° и 135° с положительным направлением Ox).

136. $x=\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'+2,\ y=-\frac{3}{5}x'-\frac{4}{5}y'+3.$

137. $x=\frac{x'-3y'}{\sqrt{10}}+\frac{3}{10},\ y=\frac{3x'+y'}{\sqrt{10}}+\frac{9}{10}.$

138. 1) $B(5,\ 0)$; 2) $B(-2,\ 3)$; 3) $B(4,\ 0)$.

139. 1) $\cos\varphi=0,\ \sin\varphi=-1,\ \varphi=270^\circ+360^\circ k$;

2) $\cos\varphi=-\frac{3}{\sqrt{58}},\ \sin\varphi=\frac{7}{\sqrt{58}},\ \varphi=\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{58}}\right)+2k\pi$;

3) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi=315^\circ+360^\circ k$;

4) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi=45^\circ+360^\circ k$;

5) $\cos\varphi=\frac{1}{2},\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \varphi=60^\circ+360^\circ k$;

6) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{145}},\ \sin\varphi=\frac{12}{\sqrt{145}},\ \varphi=\arcsin\frac{12}{\sqrt{145}}+2k\pi$;

k принимает все целые значения.

141. 1) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \operatorname{tg}\varphi=1,\ \varphi=45^\circ+360^\circ k$;

2) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \operatorname{tg}\varphi=-1,\ \varphi=315^\circ+360^\circ k$;

3) $\cos\varphi=-1,\ \sin\varphi=0,\ \operatorname{tg}\varphi=0,\ \varphi=180^\circ+360^\circ k$;

4) $\cos\varphi=0,\ \sin\varphi=-1,\ \operatorname{tg}\varphi$ не определен $\varphi=270^\circ+360^\circ k$;

5) то же, что и 1); 6) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{10}},\quad \sin\varphi=-\frac{3}{\sqrt{10}}$; $\operatorname{tg}\varphi=-3$.

142. 1) $d=13,\ \cos\varphi=\frac{5}{13},\ \sin\varphi=-\frac{12}{13}$; 2) $d=10,\ \cos\varphi=-\frac{3}{5},\ \sin\varphi=-\frac{4}{5}$; 3) $d=5,\ \cos\varphi=\frac{3}{5},\ \sin\varphi=\frac{4}{5}$.

143. 1) $\{4,\ 3\}$; 2) $\{-45,\ 24\}$; 3) $\{-15,\ -20\}$.

144. $x'=x\cos\varphi-y\sin\varphi,\ y'=x\sin\varphi+y\cos\varphi.$

145. $C\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \frac{5}{2}-2\sqrt{3}\right).$

146. $D(-5,\ 7),\ C(0,\ 9)$ или $D'(-1,\ -3),\ C'(4,\ -1)$.

147. $B_1\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{3}\right)$, $B_2\left(-\frac{5}{2}, -\frac{13}{3}\right)$. Указание. Вектор $\overrightarrow{AB}$ получается из вектора $\overrightarrow{AC}$ поворотом на угол $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{5}{6}$ и изменением длины в отношении $\frac{1}{2\cos\varphi}$. **148.** 2.

149. $C(4, 3)$, $D(-2, -5)$. Указание. Если M — середина диагонали AB, то вершины C и D мы получим, повернув вектор $\overrightarrow{MB}$ один раз на $\frac{\pi}{2}$, другой раз на $-\frac{\pi}{2}$.

150. $C_1(4-\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3})$, $C_2(4+\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3})$.

151. $$\left(x_0+(x_1-x_0)\cos\frac{2\pi(k-1)}{n}-(y_1-y_0)\sin\frac{2\pi(k-1)}{n},\right.$$
$$\left. y_0+(x_1-x_0)\sin\frac{2\pi(k-1)}{n}+(y_1-y_0)\cos\frac{2\pi(k-1)}{n}\right).$$

152. $\{a_1\cos\omega_1+a_2\cos\omega_2+a_3\cos\omega_3,\ a_1\sin\omega_1+a_2\sin\omega_2+a_3\sin\omega_3\}$.

153. $(x_0+d_1\cos\varphi_1+\ldots+d_n\cos\varphi_n,\ y_0+d_1\sin\varphi_1+\ldots+d_n\sin\varphi_n)$.

154. 1) $\omega=\frac{\pi}{2}$, $|e_1|=2$, $|e_2|=1$; 2) $\omega=\frac{\pi}{3}$, $|e_1|=1$, $|e_2|=1$; 3) $\cos\omega=\frac{4}{5}$, $|e_1|=2$, $|e_2|=5$; 4) $\cos\omega=-\frac{4}{5}$, $|e_1|=2$, $|e_2|=5$.

155. $|a|=78$. **156.** $|a|=30$. **157.** $b_1=\left\{\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}\right\}$, $b_2=\left\{-\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right\}$.

158. $g_{11}=|e_1|^2=4$, $g_{22}=|e_2|^2=9$, $g_{12}=|e_1|\cdot|e_2|\cos\omega=$
$$=2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=3,\ d=\sqrt{g_{11}x^2+2g_{12}xy+g_{22}y^2}=$$
$$=\sqrt{4(-4)^2+2\cdot 3\cdot(-4)\cdot 6+9\cdot 6^2}=\sqrt{244}.$$

159. $AB=6$, $AC=4$, $\angle A=\frac{\pi}{3}$. **160.** $\alpha=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$.

161. $|e_1|=2$, $|e_2|=1$, $(\widehat{e_1, e_2})=\frac{2\pi}{3}$.

162. $A'B'=1$, $A'C'=5$, $\cos A'=\frac{4}{5}$.

163. $3x-y+4=0$. **164.** 1) $x-\sqrt{3}\,y=0$; 2) $x-y=0$; 3) $\sqrt{3}\,x-y=0$; 4) $\sqrt{3}\,x+y=0$; 5) $x+y=0$; 6) $x+\sqrt{3}\,y=0$.

165. $\sqrt{3}x+3y+1=0$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$.

166. 1) $k=2$, $a=-2$, $b=4$; 2) $k=-\frac{2}{3}$, $a=3$, $b=2$; 3) $k=-\frac{1}{2}$, $a=-1$, $b=-\frac{1}{2}$; 4) $k=\frac{3}{4}$, $a=-2$, $b=\frac{3}{2}$; 5) $k=-\sqrt{3}$, $a=-1$, $b=-\sqrt{3}$. **168.** $5x+y-13=0$. **169.** $x+y+2=0$. **171.** $(6, 0)$; $2x+3y-12=0$.

172. 1) $x-y+2=0$; 2) $3x-2y=0$; 3) $x-1=0$; 4) $y+3=0$. **173.** $8x-y=0$. **174.** $x-3=0$, $y+2=0$. **175.** $3x+8y-9=0$.

176. $135°$. **177.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **178.** $5x+7y-11=0$.

179. $7x+y+18=0$.

180. $y=0$; $y=2\sqrt{3}$; $y=\sqrt{3}x+5\sqrt{3}$; $y=-\sqrt{3}x+5\sqrt{3}$.
181. $5x+3y-15=0$. **182.** $x+y-6=0$. **183.** $x-2y-4=0$.
184. $S=9$. **185.** $2x+5y\pm 10=0$.
186. $3x+2y-6=0$, $3x+8y+12=0$.
187. $x=3-4t$, $y=-5+2t$. **188.** $x=-6+7t$, $y=-4-3t$.
189. $x=3+3t$, $y=5t$. **190.** $x=-\sqrt{3}t$, $y=t$.

191. 1) $x=-2t$, $y=-\frac{5}{6}+t$; 2) $x=4+2t$, $y=t$; 3) $x=t$, $y=-3t+5$; 4) $x=2$, $y=t$; 5) $x=t$, $y=-3$, 6) $x=3t$, $y=-2t$.
192. $3x+y-1=0$, $7x+5y-34=0$.

193. 1) пересекаются в точке $(1, 2)$; 2) параллельны; 3) совпадают; 4) пересекаются в точке $(-5, 0)$; 5) параллельны; 6) совпадают; 7) пересекаются в точке $(-4, 10)$; 8) параллельны; 9) совпадают.

194. 1) пересекаются в точке $(15, -10)$; 2) параллельны; 3) совпадают.

195. 1) совпадают; 2) пересекаются в точке $(-4, -3)$; 3) параллельны; 4) пересекаются в точке $(4, 6)$; 5) параллельны; 6) совпадают.

196. $4x-5y+17=0$. **197.** $3x-2y-13=0$.

198. Такой прямой не существует, так как данная точка лежит на данной прямой.

199. $x-2=0$, $x-3y+13=0$. **200.** $3x-5y+9=0$; $x-y+3=0$; $x-3y+11=0$. **201.** $x-3y-7=0$; $2x+5y-3=0$. **202.** $3x+4y-16=0$; $5x+3y-1=0$; $2x-y-7=0$. **203.** $x\mp y-7=0$. **204.** $5x-7y-3=0$; $x+y+3=0$; $7x-5y-9=0$. **206.** $x-y-7=0$; $x-2y-10=0$. **207.** $x+2y-3=0$; $2x-y-6=0$; $x+2y-23=0$; $2x-y+14=0$. **208.** $2x+y-1=0$; $2x-y+1=0$; $6x-3y+19=0$; $6x+3y-19=0$. **209.** $9x+12y+20=0$; $5x-12y+36=0$. **210.** 1), 3), 5), 6). **211.** $2x+3y-26=0$. **212.** $91x-26y-2=0$. **213.** $3x-4y+12=0$. **214.** $(2, -7)$. **215.** $M'(2, 3)$. **216.** $\left(\frac{2}{5}, \frac{13}{5}\right)$; $\left(\frac{4}{7}, \frac{17}{7}\right)$. **217.** $\left(\frac{29}{18}, \frac{47}{54}\right)$. **218.** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. **219.** $C(2, 4)$.
220. $x-y-3=0$ (BC); $4x+5y-20=0$ (AC); $3x-12y-1=0$ (CH).
221. $39x-9y-4=0$. **222.** $2x+7y+22=0$; $7x+2y-13=0$, $x-y+2=0$. **223.** $45°$ и $135°$. **224.** $5x+y-16=0$, $x-5y+2=0$. **225.** $72x-y=0$, $12x+71y=0$. **226.** $M_1(4, 0)$, $M_2(-1, 5)$.
227. 1) 5; 2) -7; 3) $-\frac{21}{20}$; 4) $\frac{56}{33}$. **228.** $2x-y+4=0$. **229.** $3x+y+16=0$. **230.** $A_1(-7, 15)$; $A_2(9, -9)$. **231.** $12x-y-23=0$, $26x-7y+71=0$, $2x-5y+1=0$, или $8x+9y-25=0$, $14x+23y+65=0$, $2x-5y+1=0$.

Указание. Определить третью вершину A треугольника поворотом вектора $\overrightarrow{BC}$ около точки B на данный угол при вершине.

232. $x-y+1=0$, $3x-y-1=0$, $x-2y+5=0$, $C_1\left(\frac{7}{5}, \frac{16}{5}\right)$ или $x-y+1=0$, $x-3y+5=0$, $2x-y-2=0$, $C_2\left(\frac{11}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

233. CA: $x+3=0$, CB: $2x-11y+28=0$, или CA: $3x-4y+17=0$, CB: $2x+y+4=0$. **234.** -7, 2, $\frac{1}{3}$.

235. Точки M_1 и M_8 лежат на данной прямой. Остальные точки не лежат на данной прямой. Точки M_2, M_4, M_5, M_6 лежат по одну сторону от данной прямой, точки M_3, M_7 — по другую.

236. $\frac{9}{8}$. **240.** $(Ax_0+By_0+C)(Ax_0+By_0+D)<0$.

241. $-\frac{1}{6} \leqslant u \leqslant \frac{1}{3}$.

243. 1) смежным углам; 2) одному углу; 3) вертикальным углам.

244. Точки A, B и C лежат в полосе, точки D и F принадлежат одной внешней области, точка E — другой внешней области.

245. 1) $M_1M_2 \parallel l$; 2) $M_1M_2 \parallel l$; 3) M_1 и M_2 лежат по разные стороны от l; 4) прямая l пересекает продолжение отрезка M_1M_2 за точку M_1; 5) прямая l пересекает продолжение отрезка M_1M_2 за точку M_2.

246. Данная прямая пересекает стороны CB и BA, а также продолжение стороны CA за точку A.

247. Точка A лежит на 2-й стороне, на ее продолжении за 3-ю вершину. Точка B лежит в области, ограниченной 1-й стороной и продолжениями 2-й и 3-й сторон соответственно за 3-ю и 2-ю вершины. Точка C лежит в области, ограниченной 3-й стороной и продолжениями 1-й и 2-й сторон соответственно за 2-ю и 1-ю вершины. Точка D лежит в области, ограниченной продолжениями 1-й и 2-й сторон за 3-ю вершину. Эти результаты рекомендуется проверить построением.

248. Прямая $2x-y+3=0$ параллельна стороне M_1M_3 и пересекает продолжения сторон M_1M_2 и M_3M_2 за точку M_2.

249. $\cos\varphi=\frac{33}{\sqrt{53}\sqrt{26}}$. **250.** В тупом.

251. 1) Три прямые проходят через одну точку; 2) три прямые параллельны между собой; 3) три прямые проходят через одну точку; 4) три прямые параллельны между собой; 5) три прямые параллельны между собой; 6) прямые образуют треугольник; 7) первые две прямые параллельны, третья их пересекает.

252. $5x-2y=0$. **253.** $25x+29y-21=0$. **254.** $38x-19y+30=0$. **255.** $32x-9=0$, $32y-19=0$. **256.** $x+y-6=0$. **257.** $8x-49y+20=0$. **258.** $91x-26y-2=0$. **259.** $5x+y-16=0$, $x-5y+2=0$. **260.** $7x-6y+19=0$, $9x+2y+5=0$. **261.** $x+4=0$, $3x-4y+20=0$.

262. При $\lambda > 0$ прямая $Ax + By + \frac{C+\lambda D}{1+\lambda} = 0$ будет параллельна данным и лежать между ними. При $\lambda = 0$ прямая будет совпадать с первой из данных. При $0 > \lambda > -1$ прямая $Ax + By + C = 0$ будет проходить между двумя другими. При $-1 > \lambda > -\infty$ прямая $Ax + By + D = 0$ будет проходить между двумя другими.

263. $\frac{13}{5}$, 2, $\frac{11}{5}$, $\frac{12}{5}$, 0. **264.** $\frac{7}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **265.** 78, 273, 70. **266.** $5x + 12y + 64 = 0$, $5x + 12y - 66 = 0$. **267.** $7x - 2y + 57 = 0$, $7x - 2y - 49 = 0$. **268.** $\frac{1}{\sqrt{58}}$. **269.** 1) $6x + 1 = 0$, $2y - 9 = 0$; 2) $64x + 8y + 11 = 0$, $14x - 112y + 41 = 0$; 3) $x = 0$, $y = 0$; 4) $(3 + \sqrt{5})x + 2(2 + \sqrt{5})y = 0$; $(3 - \sqrt{5})x + 2(2 - \sqrt{5})y = 0$. **270.** $\left(-\frac{3}{10}, 0\right)$, $\left(0, \frac{9}{2}\right)$. **271.** (0, 6), $\left(-1, \frac{13}{2}\right)$. **272.** $(-10, 1)$, $(-4, 3)$. **273.** (5, 5), $(-3, 11)$, (3, 19) и (11, 13). **274.** $3x - y - 21 = 0$, $3x - y - 1 = 0$. **275.** $5x - 12y - 32 = 0$. **276.** $x - 10 = 0$, $x + 4 = 0$. **277.** $x + 2y \pm 5 = 0$. **278.** $(3 \pm \sqrt{3})x + 4y = 0$. **279.** $x + 4y + 1 = 0$, $13x + 16y - 23 = 0$. **280.** $4x + 3y + 3 = 0$, $y + 1 = 0$. **281.** $3x + 4y - 64 = 0$, $3x + 4y - 14 = 0$, $4x - 3y - 2 = 0$, $4x - 3y + 48 = 0$, (0, 16), (8, 10), (2, 2) и $(-6, 8)$. **282.** $x \pm 2y \pm 4 = 0$. **283.** (3, 5) и $(-37, 45)$. **284.** $\left(-\frac{11}{4}, -\frac{11}{8}\right)$ и $\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{8}\right)$. **285.** $x + 2y + 3 = 0$, $x + 2y + 7 = 0$ и $x - 2y + 3 = 0$, $x - 2y + 7 = 0$. **286.** $(0, \sqrt{2})$ и $(0, 3\sqrt{2})$. **287.** $\left(\frac{6}{5}, -\frac{17}{5}\right)$, $\left(-\frac{74}{5}, \frac{43}{5}\right)$, $\left(\frac{66}{5}, -\frac{37}{5}\right)$, $\left(-\frac{14}{5}, \frac{23}{5}\right)$. **288.** $2x - y = 0$, $22x - 19y = 0$, $4(\sqrt{21} - 2)x + (\sqrt{21} + 32)y = 0$, $-4(\sqrt{21} + 2)x + (32 - \sqrt{21})y = 0$. **289.** (8, 1) и $\left(\frac{808}{49}, \frac{465}{49}\right)$. **290.** (0, 1). **291.** $3x - y + 9 = 0$, $3x - y - 3 = 0$, $x + 3y + 7 = 0$.

292. Два решения: $y = 0$, $y = 5$ и $20x + 21y - 20 = 0$, $20x + 21y - 165 = 0$.

Указание. Определить угловой коэффициент искомых сторон, принимая во внимание, что расстояния между противоположными сторонами ромба равны между собой.

293. Два решения: $x - 3y + 1 = 0$, $x - 3y + 12 = 0$, $3x + y - 1 = 0$, $3x + y + 10 = 0$ и $7x + y - 15 = 0$, $7x + y - 26 = 0$, $x - 7y + 7 = 0$, $x - 7y - 4 = 0$ (см. указание к предыдущей задаче).

294. $12x + 4y - 11 = 0$. **295.** $3x + y - 14 = 0$.

296. $x - y = 0$, $7x - 56y + 25 = 0$, $77x + 21y - 50 = 0$ (см. общие указания к настоящей главе).

297. $\left(\frac{5}{12}, -\frac{5}{12}\right)$. **298.** $(-2, -6)$.

299. $4x - 4y + 5 = 0$ (см. общие указания к этой главе).

300. $\frac{10x+56y-39}{\pm 13}=0$. **301.** Нормирующий множитель $N=$ $=\pm\frac{1}{13}$, $d=3$.

302. Прямая, у которой угловой коэффициент и отрезок, отсекаемый на оси ординат, суть средние арифметические угловых коэффициентов и соответственных отрезков данных прямых.

303. Отрезок прямой, соединяющий середину основания и середину высоты треугольника.

304. Прямая, соединяющая середины диагоналей. **305.** Прямая.

306. Отрезок прямой, концами которого служат точки пересечения биссектрис внутренних углов треугольника, прилежащих к третьей стороне с противолежащими этим углам сторонами треугольника.

307. $A_1(1,\ 1)$, $B_1(2,\ 4)$, $A_2(5,\ -3)$, $B_2(4,\ -6)$.
Указание. Определить координаты вектора искомой прямой.

308. $4x-3y-1=0$, $2x-y-1=0$; $x-2y+1=0$, $3x-4y+$ $+1=0$. **309.** $3x+4y-2=0$, $4x+3y-5=0$. **310.** $4x-3y-1=0$, $6x-8y+9=0$. **311.** $\frac{1}{2}$. **312.** $x-12y+57=0$, $8x-9y-66=0$.

313. $x-3y+9=0$, $x-3y-5=0$. **314.** $\left(\frac{11}{7},\ 2\right)$, $\left(-\frac{1}{7},\ 0\right)$.

315. $(19,\ 0)$, $(21,\ 5)$. **316.** $(1,\ 2)$, $(5,\ 4)$ или $\left(-\frac{17}{3},\ \frac{11}{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{3},\ \frac{17}{3}\right)$.

317. $(2,\ -4)$, $(1,\ 2)$, $(3,\ -4)$ или $(2,\ 0)$, $(3,\ -6)$, $(1,\ 0)$.
318. $2x-3y+20=0$, $3x+2y-9=0$, $x+5y-3=0$ или $2x-3y-$ $-6=0$, $3x+2y+17=0$, $x+5y-3=0$. **319.** $x-7y+32=0$, $x-$ $-y+2=0$.

320. Четыре решения: $(9,\ -3)$, $(-5,\ -5)$, $(-1,\ 7)$; $(-9,\ 3)$, $(5,\ 5)$, $(1,\ -7)$; $(4,\ -28)$, $(-20,\ -20)$, $(-6,\ -18)$; $(-4,\ 28)$, $(20,\ 20)$, $(6,\ 18)$.

321. $17x-7y+49=0$, $7x-3y+23=0$, $2x-y+7=0$ или $11x-7y+49=0$, $5x-3y+19=0$, $2x-y+7=0$.

322. $x'=\frac{-x+y-2}{2}$, $y'=\frac{2x+y-4}{9}$. **323.** $14x'+4y'-3=0$.

324. $142x-183y-489=0$.
Указание. Принять данные прямые за оси, а данную точку P за единичную точку новой системы координат; написать уравнение искомой прямой в новой системе, а затем перейти к старым координатам.

325. $x-5y+3=0$. Вершины $(1,\ 5)$, $(-3,\ 0)$, $(2,\ 1)$.
Указание. Перейти к новой системе координат.

326. $x+y-12=0$. Вершины $(0,\ 0)$, $(4,\ 8)$, $(2,\ 10)$.

Указание. Принять данные стороны треугольника за оси новой системы координат.

327. $(-3,\ 7)$, $(-6,\ 10)$, $(9,\ -17)$; $9x+5y+4=0$.

328. $3x+8y-17=0$, $6x-y-17=0$, $9x+7y+17=0$; $(-5, 4)$, $(3, 1)$. **329.** Два решения: $x-3=0$ и $5x-3y-1=0$.

330. Задача имеет три решения: $(1, 4)$, $(3, 5)$, $(14, -12)$, $16x+13y-68=0$, $17x+11y-106=0$; $(-1, 3)$, $(3, 5)$, $(16, -11)$, $14x+17y-37=0$, $16x+13y-113=0$; $(1, 4)$, $(5, 6)$, $(12, -13)$, $17x+11y-61=0$, $19x+7y-137=0$.

331. $3x+y-4=0$, $x+3y-5=0$.

Указание. Каждая из искомых прямых проходит через одну из данных точек и точку, симметричную второй данной точке относительно данной прямой.

332. $x+7y-6=0$, $x-y-6=0$, $7x+y-10=0$.

Указание. Сторона BC проходит через точки A_1 и A_2, симметричные точке A относительно данных прямых.

333. $3x-4y+24=0$, $5x+12y+16=0$. **334.** $x+3y-13=0$.

335. $(2, 0)$ и $(-1, 7)$. **336.** $(1, 5)$ и $\left(\frac{183}{29}, \frac{79}{29}\right)$.

337. $(A_1x+B_1y+C_1)\begin{vmatrix}A_2&B_2\\A_3&B_3\end{vmatrix}=(A_2x+B_2y+C_2)\begin{vmatrix}A_3&B_3\\A_1&B_1\end{vmatrix}$ и аналогично для двух других медиан.

338. $(A_1x+B_1y+C_1)(A_2A_3+B_2B_3)=(A_2x+B_2y+C_2)(A_1A_3+B_1B_3)$ и аналогично для двух других высот.

339. $(2\sqrt{34}+5\sqrt{5})\,x+(\sqrt{34}-3\sqrt{5})\,y-7\sqrt{34}-\sqrt{5}=0$.

340. $\frac{7}{\sqrt{170}}$. **341.** $\left|\frac{(C-D)(C'-D')}{\begin{vmatrix}A&B\\A'&B'\end{vmatrix}}\right|$.

342. $(A_1A_2+B_1B_2)(A_1l+B_1m)(A_2l+B_2m)>0$.

343. $(A_1A_2+B_1B_2)\begin{vmatrix}A_1&B_1\\A_3&B_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_2&B_2\\A_3&B_3\end{vmatrix}<0$.

344. Прямая. **345.** Прямая, проходящая через точку пересечения прямых p и q. **346.** Прямая. **347.** Точка O и окружность, описанная около треугольника ABC. **348.** Окружность. **349.** Прямая. **350.** Окружность $x^2+y^2=4$.

351. Отрезки двух прямых, проходящих через точку пересечения двух данных прямых. **352.** $y_0x+x_0y=0$.

353. Окружность, центр которой совпадает с центром тяжести системы из трех данных точек, в которых помещены равные массы. **354.** Окружность, описанная около данного прямоугольника.

355. Прямая, перпендикулярная к линии центров данных окружностей, в случае, если окружности не пересекаются. Если окружности пересекаются, то искомым геометрическим местом являются все точки прямой, проходящей через точки пересечения данных окружностей, за исключением точек этой прямой, лежащих внутри данных окружностей. Если, наконец, окружности касаются, то искомым геометрическим местом является их общая касательная (точка касания исключается).

356. Прямая. **357.** Окружность.

358. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2=c^2-a^2$ (гипербола, рис. 34).

359. $y^2 = 2px$ (парабола, рис. 35).

Указание. За ось абсцисс принять перпендикуляр, опущенный из фокуса F на директрису, за начало координат — середину O этого перпендикуляра, за ось ординат — прямую, проходящую через точку O параллельно директрисе. Длину перпендикуляра FD из фокуса на директрису обозначить через p.

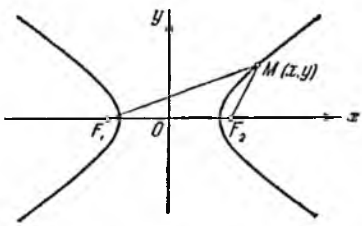

Рис. 34.

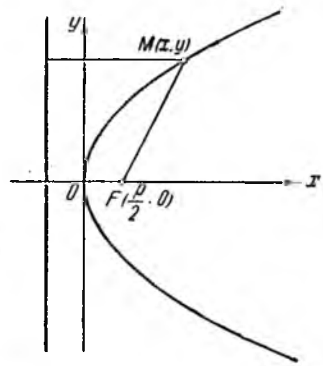

Рис. 35.

360. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ (эллипс). **361.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ (гипербола).

362. $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{r}{k}\right)^2}=1$ (эллипс). **363.** $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}r\right)^2}=1$ (эллипс).

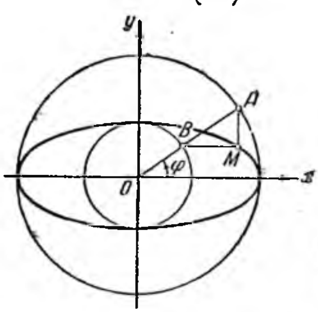

Рис. 36.

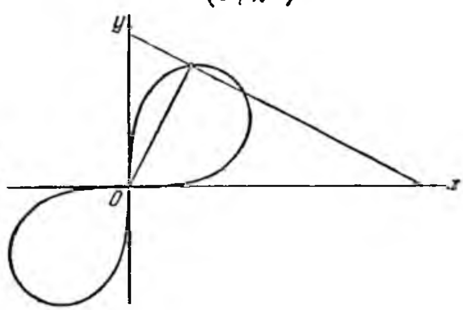

Рис. 37.

364. Если через φ обозначить угол от оси Ox до радиуса OA, а через x и y обозначить координаты произвольной точки искомого геометрического места, то параметрические уравнения искомого геометрического места будут иметь вид: $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ или $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (эллипс, рис. 36).

365. $(x^2+y^2)^2=2Sxy$ (лемниската Бернулли, рис. 37). **366.** Эллипс.

367. $(x^2+y^2)^2-2b^2(x^2-y^2)=a^4-b^4$ — овалы Кассини; при $a=b$ — лемниската Бернулли (рис. 38).

368. $R^2(x^2+y^2)=4x^2y^2$. **369.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (рис. 39).

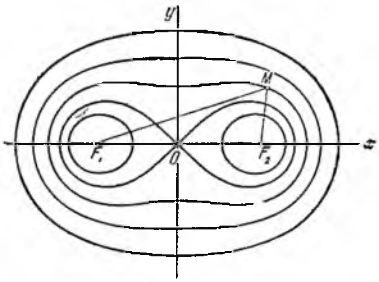

Рис. 38.

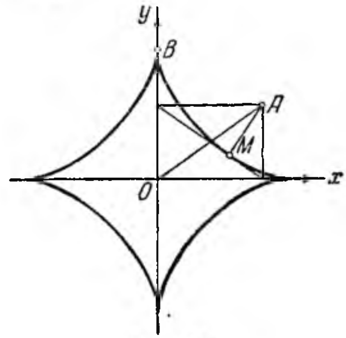

Рис. 39.

370. $r=\dfrac{a}{\cos\varphi}$. **371.** $r=2a\cos\varphi$. **372.** $r=\dfrac{a}{\cos\varphi}\pm b$ или $(x^2+y^2)(x-a)^2-b^2x^2=0$ (рис. 40). **373.** $r=\dfrac{a}{\cos\varphi}\pm a\operatorname{tg}\varphi$ или $(x^2+y^2)(x-a)^2-a^2y^2=0$ (рис. 41). **374.** $r=2a(\cos\varphi\pm 1)$, $(x^2+y^2-2ax)^2=4a^2(x^2+y^2)$ (рис. 42). **375.** $r=a\cos\varphi+b$.

376. $r=\dfrac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$ или $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$ (рис. 43). **377.** $r^2=2a^2\cos 2\varphi$ (рис. 44).

378. Две окружности $(x-a)^2+(y-a)^2=2a^2$; $(x-a)^2+(y+a)^2=2a^2$.

379. $r=a\sin 2\varphi$ или $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$ (рис. 45).

380. $x=2a\cos^2\varphi$, $y=2a\operatorname{tg}\varphi$, где φ — полярный угол или $x=\dfrac{8a^3}{y^2+4a^2}$ (рис. 46).

381. $r^2(1-a^2)-2r(ab+c\cos\varphi)+c^2-b^2=0$. **382.** $r=\dfrac{v}{\omega}\varphi$.

383. $x=(R+r)\cos t-r\cos\dfrac{R+r}{r}t$, $y=(R+r)\sin t-r\sin\dfrac{R+r}{r}t$ (эпициклоида, рис. 47).

384. $x=(R-r)\cos t+r\cos\dfrac{R-r}{r}t$, $y=(R-r)\sin t-r\sin\dfrac{R-r}{r}t$ (гипоциклоида, рис. 48).

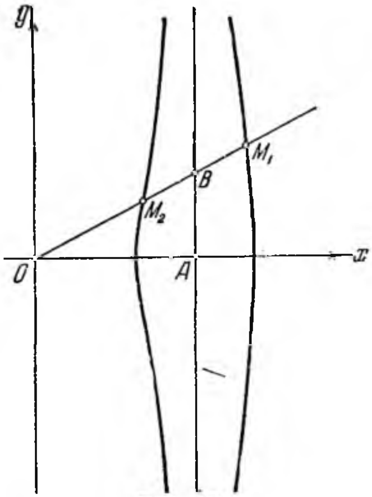

Рис. 40.

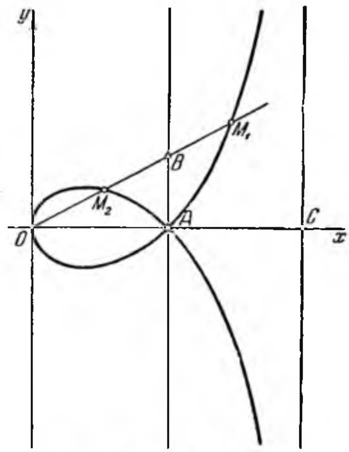

Рис. 41.

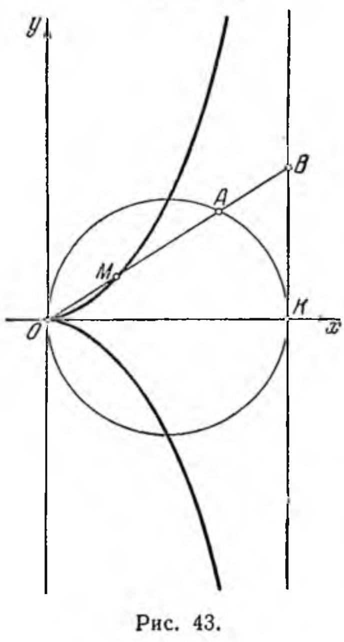

Рис. 43.

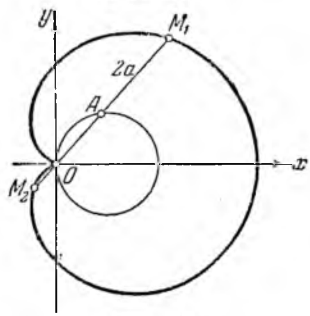

Рис. 42.

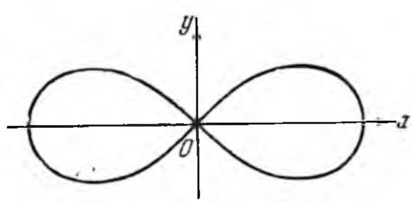

Рис. 44.

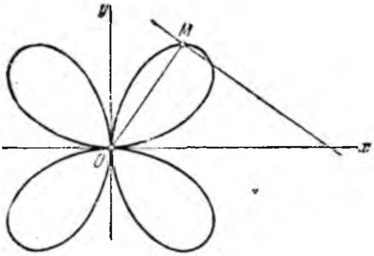

Рис. 45.

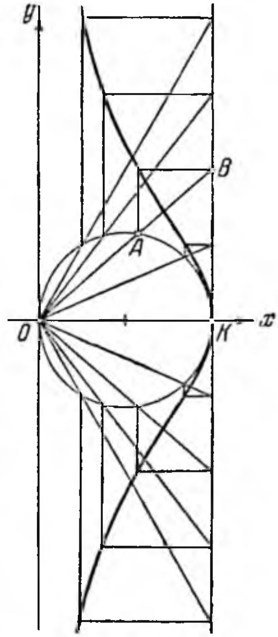

Рис. 46.

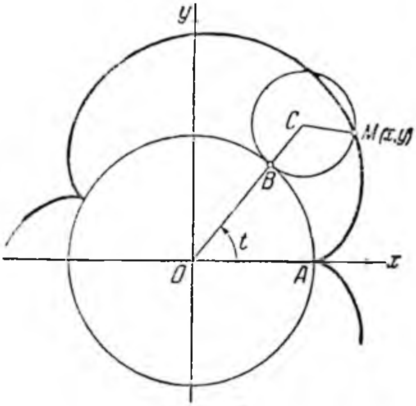

Рис. 47.

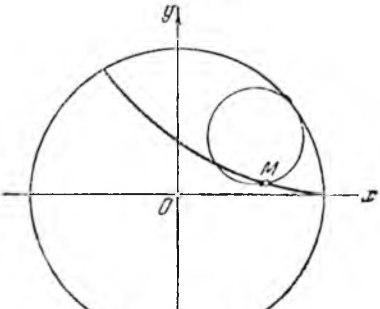

Рис. 48.

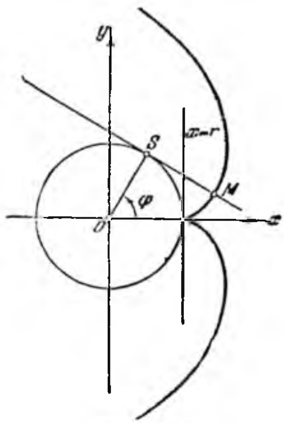

Рис. 49.

387. $4a^2x^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)=\left(r^2-a^2-x^2-\frac{2a+b}{b}y^2\right)^2$.

388. $x=r(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)$, $y=r(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)$ (эвольвента окружности, рис. 49).

389. 1) эллипс; 2) гипербола; 3) парабола. **390.** $(x+1)^2+(y-3)^2=16$. **391.** $x^2+y^2=25$. **392.** 1) $S(3, 0)$, $r=3$; 2) $S(-3, 4)$, $r=5$; 3) $S(5, -12)$, $r=15$; 4) $S\left(-1, \frac{2}{3}\right)$, $r=\frac{4}{3}$.

393. 1) $(x-1)^2+(y+2)^2-5=0$; 2) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{19}{2}=0$; 3) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{41}{36}=0$.

394. Точки A, C, D лежат вне окружности, точка B лежит на окружности.

395. $x=a+r\cos\theta$, $y=b+r\sin\theta$.

396. 1) Точки находятся вне окружности или на самой окружности с центром в точке $S(1, 3)$ и радиусом, равным 5; 2) точки расположены между двумя концентрическими окружностями и на самих окружностях, радиусы которых равны 4 и 5 и их общий центр $(1, -3)$; 3) точки принадлежат общей части двух кругов и границе кругов, центры которых находятся в точках $S_1(1, 2)$ и $S_2(4, 6)$ и радиусы которых равны 5 и 3; 4) точки заполняют полуокружность, находящуюся над осью Ox, радиус этой полуокружности равен 3 и центр находится в точке $(3, 0)$ оси Ox; 5) точки заполняют сегменты, отсекаемые от окружности $x^2+y^2-4y=0$ прямыми $x=\pm1$. **397.** $(x-6)^2+(y-5)^2=25$. **398.** $x^2+y^2-2ay=0$, $a\neq0$. **399.** $x^2+y^2-2ax=0$, $a\neq0$.

400. $a^2+b^2-r^2=0$.

401. Возьмем искомое уравнение в виде $x^2+y^2+Ax+By=0$; имеем: $2A+B+5=0$, $-A+2B+5=0$, $A=-1$, $B=-3$; $x^2+y^2-x-3y=0$. **402.** $A^2+B^2-4C>0$. **403.** $(x-2)^2+(y-3)^2-\frac{9}{5}=0$.

404. $(x-1)^2+(y+3)^2-68=0$. **405.** $x^2+y^2-20=0$. **406.** $(x-3)^2+(y-2)^2-26=0$, $(x+3)^2+(y-6)^2-26=0$. **407.** $(x\pm3)^2+(y\pm3)^2-9=0$ или $x^2+y^2\pm6x\pm6y+9=0$. **408.** $x^2+y^2-4x+6y+4=0$. **409.** 1) $A^2-4C=0$; 2) $B^2-4C=0$; 3) $A^2-4C=B^2-4C=0$.

410. Возьмем уравнение окружности в виде $x^2+y^2+Ax+By+C=0$. Ее центр $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$. Имеем: $5+2A+B+C=0$; $25+3A+4B+C=0$, $2\left(-\frac{A}{2}\right)+\frac{B}{2}+1=0$.

Отв. $x^2+y^2-2x-6y+5=0$.

411. $4x^2+4y^2+2x+(3\pm2\sqrt{10})y=0$.

412. Координаты центров искомых окружностей (их будет четыре) определяются из уравнений

$$\pm(5x+5y-10)=\pm(5x-5y+20)=\pm(x-7y).$$

Отв.

$\left(x+\frac{13}{2}\right)^2+(y-3)^2-\frac{121}{8}=0$, $(x+1)^2+\left(y-\frac{7}{6}\right)^2-\frac{121}{72}=0$,

$\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+(y-3)^2-\frac{121}{18}=0$, $(x+1)^2+(y+8)^2-\frac{121}{2}=0$.

413. $S(-3, -1)$, $r=\sqrt{41}$. **414.** $S(-1, 2)$.

415. $(x+4)^2+(y-3)^2-1=0$, $\left(x+\frac{124}{25}\right)^2+\left(y-\frac{93}{25}\right)^2-1=0$.

416. $x^2+(y-4)^2=5$, $x^2+(y+1)^2=5$.

417. $(x+2)^2+(y-1)^2-1=0$, $\left(x+\frac{8}{3}\right)^2+(y+1)^2-1=0$.

418. $(x+5)^2+(y-5)^2-25=0$, $(x+1)^2+(y-1)^2-1=0$.

419. $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2-2=0$, $\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2-2=0$,
$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\frac{19}{4}\right)^2-2=0$, $\left(x+\frac{7}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2-2=0$.

420. $(x\pm r)^2+(y\pm r)^2-r^2=0$.

421. $(x+1-2\sqrt{5})^2+(y-2+\sqrt{5})^2-25=0$, $(x+1+2\sqrt{5})^2+$
$+(y-2-\sqrt{5})^2-25=0$. **422.** $(x+5)^2+(y+3)^2=25$.

423. $\left(x+\frac{9}{8}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{5}{64}=0$, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2-$
$-\frac{5}{4}=0$.

424. $(x-6)^2+(y+12)^2-200=0$. **425.** $(x-1)^2+y^2-1=0$,
$\left(x+\frac{1}{9}\right)^2+y^2-\frac{1}{81}=0$. **426.** $x^2+y^2-2x-2y=0$.

427. $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\left(y+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{25}{8}=0$, $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2-$
$-\frac{25}{8}=0$.

428. $A\neq 0$, $B^2+C^2-AD>0$, $S\left(-\frac{B}{A}, -\frac{C}{A}\right)$, $r=$
$=\frac{1}{|A|}\sqrt{B^2+C^2-AD}$.

429. Дуги двух окружностей: $\left(x+\frac{11}{2}\right)^2+\left(y-\frac{13}{2}\right)^2=\frac{125}{2}$,
$\left(x-\frac{13}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{125}{2}$.

430. 1) $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}|A\alpha+B\beta-2C|<\sqrt{\alpha^2+\beta^2-4\gamma}$;
2) $\frac{|A\alpha+B\beta-2C|}{\sqrt{A^2+B^2}}>\sqrt{\alpha^2+\beta^2-4\gamma}$; 3) $\frac{|A\alpha+B\beta-2C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=$
$=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-4\gamma}$.

431. Расстояние от центра данной окружности до данной прямой больше радиуса окружности.

432. Расстояние от центра $S(1, 4)$ данной окружности до данной прямой равно 3; следовательно, длина половины хорды равна $\sqrt{25-9}=4$.

433. Одна точка $(-1, 1)$.

434. $C<0$. **435.** $x_0^2+y_0^2+Ax_0+By_0+C<0$. **436.** $3x\pm 4y=0$.

437. $x-3y=0$. **438.** $Ax+By=0$. **439.** $2x+y-7=0$.

441. $3x-4y+21=0$, $3x-4y+1=0$.

442. $3x-4y+4=0$, $3x-4y-21=0$.

443. $(x-a)^2+(y-b)^2-(r\sqrt{2})^2=0$. **444.** 1) $(x-1)^2+(y+3)^2=25$; 2) $(x-701)^2+(y-697)^2=985^2$. **445.** $(A^2+B^2)R^2-C^2=0$. **446.** $3x-4y+14=0$, $3x-4y-36=0$. **447.** 1; 52; 1.

448. $3\sqrt{3}$. **449.** $2\sqrt{2}$.

450. $\sqrt{a^2+b^2-r^2}$. **451.** $3x+2y-8=0$. **452.** $4x-3y-9=0$.

453. $x^2+(y-2)^2=9$. **454.** $(x-4)^2+(y+3)^2=1$. **455.** $x+1=0$.

456.
$$\left(\frac{\begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2-r_1^2 & b_1 & 1 \\ a_2^2+b_2^2-r_2^2 & b_2 & 1 \\ a_3^2+b_3^2-r_3^2 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}},\ -\frac{\begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2-r_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2+b_2^2-r_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2+b_3^2-r_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}\right).$$

457. Координаты радикального центра определяются из системы $A_kx+B_ky+C_k=t$, $k=1, 2, 3$, где t — вспомогательное переменное.

Отв.
$$\left(-\frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 & 1 \\ C_2 & B_2 & 1 \\ C_3 & B_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & 1 \\ A_2 & B_2 & 1 \\ A_3 & B_3 & 1 \end{vmatrix}},\ \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 & 1 \\ C_2 & A_2 & 1 \\ C_3 & A_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & 1 \\ A_2 & B_2 & 1 \\ A_3 & B_3 & 1 \end{vmatrix}}\right).$$

458. $(-3, -7)$. **459.** $(x+3)^2+(y+7)^2-41=0$.

460. $(x-1)^2+(y-2)^2=1$, $(x-4)^2+(y-5)^2=25$.

461. $x^2+y^2-x-3y-10=0$. **462.** $x^2+y^2+18x-28y+27=0$.

463. $x^2+y^2-9x+8y-45=0$. **464.** 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 3) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$. **465.** $(\pm 3, 0)$. **466.** $(0, \pm 12)$.

467. 1) $e=\frac{1}{2}$; 2) $e=\sqrt{\frac{2}{17}}$; 3) $e=\frac{4}{5}$. **468.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$, где $a>c$.

469. 1) внутренняя; 2) внутренняя; 3) внешняя; 4) внешняя; 5) принадлежит эллипсу.

470. $3x^2+5y^2=32$. **471.** $3x^2+2xy+3y^2-4x-4y=0$.

472. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$. **473.** $x=\pm 9$. **474.** $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$.

475. 1) $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $e=\frac{\sqrt{10}}{5}$; 3) $e=\frac{1}{2}$.

476. $\left(-\frac{15}{2}, \pm\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$. **477.** $\frac{2b^2}{a}$.

478. $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **479.** $24x+25y=0$. **480.** $8x+25y=0$.

481. $32x+25y-89=0$. **483.** $3x+4y-24=0$. **484.** 1) $y=4$; 2) $16x-15y-100=0$. **485.** $x+y\pm 5=0$. **486.** $\pm 3x\pm 4y+15=0$. **488.** $x\pm y\pm 3=0$. **490.** $A^2a^2+B^2b^2-C^2=0$. **491.** $x\pm y\pm 3=0$.

494. $x^2+y^2=a^2+b^2$. **495.** $\frac{(x-x')^2}{a^2}+\frac{(y-y')^2}{b^2}=1$.

496. $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ или $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{\left(\frac{25}{3}\right)^2}=1$.

497. $x^2+y^2=a^2+b^2$. **498.** $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$.

499. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **500.** $(x^2+y^2)^2=4(a^2x^2+b^2y^2)$.

502. Окружность.

503. Окружность с центром в фокусе, радиус которой равен большей оси эллипса. **504.** Эллипс.

505. b^2, где b — меньшая полуось эллипса.

506. При условии $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1$. Уравнение пары касательных: $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)-\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1\right)^2=0$.

507. $\frac{(x^2+y^2-a^2-b^2)^2}{a^2b^2}-4\operatorname{ctg}^2\alpha\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0$. Если $\alpha=\frac{\pi}{2}$, то $x^2+y^2=a^2+b^2$ (окружность).

508. $\operatorname{ctg}\alpha=\pm\frac{x_0^2+y_0^2-a^2-b^2}{2ab\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1}}$.

510. 1) $A^2a^2+B^2b^2-C^2>0$; 2) $A^2a^2+B^2b^2-C^2<0$.

513. Окружность. **514.** $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$. **517.** ab.

518. a^2+b^2. **519.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **520.** $\operatorname{arcctg}\frac{c^2}{2ab}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$.

521. $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}$. **524.** Сумма равна $2\frac{a^2+b^2}{a}$.

527. Окружности. **530.** A — внутренняя, B — внешняя, C — точка гиперболы. **531.** 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

532. 1) $\frac{x^2}{576}-\frac{y^2}{100}=1$; 2) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. **533.** $\sqrt{2}$.

534. $\frac{x^2}{432}-\frac{y^2}{75}=1$. **535.** $F_1(-13,\ 0)$, $F_2(13,\ 0)$.

536. $F_1(0,\ 17)$, $F_2(0,\ -17)$. **537.** 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$. **538.** $d=\frac{2b^2}{a}$. **539.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

540. 1) $F_1(5,\ 0)$; $F_2(-5,\ 0)$; 2) $e=\frac{5}{3}$; 3) $y=\pm\frac{4}{3}x$, $x=\pm\frac{9}{5}$; 4) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$, $e=\frac{5}{4}$. **542.** b.

543. 1) $a=2\sqrt{3}$, $b=2$; 2) $a=b=6$; 3) $a=\sqrt{5}$, $b=2\sqrt{5}$; 4) $a=\frac{3\sqrt{19}}{5}$, $b=\sqrt{19}$.

544. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=\pm 1$ или $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=\pm 1$. **545.** 1) $\alpha=120^\circ$; 2) $\alpha=90^\circ$. **546.** $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$. **547.** 1) $\left(\pm\frac{4}{5}\sqrt{34},\ \pm 1{,}8\right)$; 2) $\left(\frac{48}{5},\ \pm\frac{3}{5}\sqrt{119}\right)$. **549.** $20x-9y-91=0$.

551. $\left(\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}},\ \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}\right)$; задача возможна, если $b>a$. **552.** $x+y-1=0$. **553.** $3x+y-8=0$. **554.** 1) $x=1$; 2) $5x-2y+3=0$. **555.** 1) $3x-y\pm 3\sqrt{5}=0$; 2) $5x-2y\pm 9=0$.

556. $a^2A^2-b^2B^2=C^2$. **557.** b^2. **558.** $a=\frac{\sqrt{269}}{2\sqrt{5}}$, $b=\frac{12}{\sqrt{5}}$.

559. $x^2+y^2=a^2-b^2$. **560.** $8xy-4x-4y+3=0$.

562. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **563.** $\rho=\frac{25}{12-13\cos\varphi}$.

564. $|k|>\frac{b}{a}$. **565.** $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$. **566.** $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

567. 1) $\frac{(x-1)^2}{5^2}-\frac{(y+2)^2}{3^2}=1$; 2) $\frac{(x+1)^2}{6}-\frac{(y+1)^2}{5}=1$; 3) $\frac{(x+3)^2}{4}-y^2=1$. **568.** Окружность.

569. Окружность с центром в фокусе, радиус которой равен длине действительной оси гиперболы. **570.** Гипербола.

571. b^2, где b — длина мнимой полуоси.

572. $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}<1$, но $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\neq 0$; уравнение пары касательных: $\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\right)-\left(\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}-1\right)^2=0$;

одну касательную при условии $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=0$ (причем x_0 и y_0 не равны нулю одновременно) или $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$. Если $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$, то уравнение касательной имеет вид $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0$, а если $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=0$, но x_0 и y_0 не равны нулю одновременно (т. е. точка лежит на асимптоте, но не совпадает с центром), то уравнение касательной имеет вид:

$$\left(1+\frac{x_0^2}{a^2}\right)\frac{x}{a}+\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)\frac{y}{b}-\frac{2x_0}{a}=0 \quad \left(\text{если} \quad y_0=\frac{b}{a}x_0\right).$$

573. $(x^2+y^2-a^2+b^2)^2+4a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\right)\operatorname{ctg}^2\alpha=0$. В случае $\alpha=\frac{\pi}{2}$ и $a>b$ окружность $x^2+y^2=a^2-b^2$.

574. $\operatorname{tg}\varphi=\pm\frac{2ab\sqrt{-\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+1}}{x_0^2+y_0^2-a^2+b^2}$. **576.** ab. **578.** $\frac{ab}{2}$.

579. Две сопряженные гиперболы. **580.** $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}>1$.

585. $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}<0$. **586.** $0<\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}<1$.

587. $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}>1$, $\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}>1$, $x_1x_2>0$. **589.** Искомое геометрическое место точек (x, y) удовлетворяет неравенству $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}<0$. **590.** Окружность. **591.** Гипербола.

592. $F_1M_1+F_2M_1=F_1M_2+F_2M_2$, $F_2M_2-F_2M_1=\text{const}$ — ветвь гиперболы, если $F_1M_1-F_1M_2\neq 0$. Геометрическое место центров — также гипербола, гомотетичная данной, с центром гомотетии F_1 и коэффициентом гомотетии, равным $\frac{1}{2}$. В случае, если рассматриваются гиперболы, искомым геометрическим местом будут гиперболы, если $F_1M_1 - F_1M_2 \neq 0$.

593. Второй фокус равноудален от точек, симметричных с данным фокусом относительно данных касательных. Искомое геометрическое место точек — прямая линия.

Если заданы фокус F_0, точка M_0 и касательная l_0, то $F_0M_0 + M_0F = M_0'F$, где M_0' — точка, симметричная с точкой F_0 относительно касательной l_0. Значит, $FM_0' - FM_0 = \mathrm{const}$. Искомое геометрическое место точек — ветвь гиперболы с фокусами M_0 и M_0'.

594. Если P и Q — точки касания, то $F_1P + F_2Q = 2c$ и $F_1P - F_2Q = 2a$. Точки P и Q описывают окружности.

597. b^2.

602. Окружность, центр которой совпадает с центром эллипсов, и радиус равен $\sqrt{a^2 + a_1^2 - c^2}$.

603. 1) $A^2a^2 - B^2b^2 - C^2 < 0$; 2) $A^2a^2 - B^2b^2 - C^2 > 0$ (не считая асимптот).

613. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

615. Угловые коэффициенты искомых диаметров:

$$\frac{(a^2 + b^2)\operatorname{tg}\alpha \pm \sqrt{(a^2 + b^2)\operatorname{tg}^2\alpha + 4a^2b^2}}{2a^2}.$$

618. Гипербола.

623. Пусть M_1 и M_2 — точки прикосновения, лежащие на данной окружности, а F_1 и F_2 — фокусы эллипса. Тогда $M_1F_1 + M_1F_2 = \mathrm{const}$, $M_2F_1 + M_2F_2 = \mathrm{const}$. Но $M_1F_2 = M_2F_1$, значит, $M_1F_1 + M_2F_1 = \mathrm{const}$ и геометрическое место точек F_1 есть эллипс. Аналогично и точка F_2 описывает эллипс с фокусами M_1 и M_2.

624. Гипербола. **625.** Парабола. **627.** (1, 0). **628.** (0, 1).

629. (—2, 0). **630.** $x = -\frac{3}{2}$. **631.** $y^2 = 12x$. **632.** $y^2 = 4x$.

633. $y^2 = 8x - 8$. **634.** $\left(2, \frac{5}{4}\right)$. **635.** 1) $y^2 = \pm 12x$; 2) $y^2 = 10x - 25$; 3) $y^2 = 16x$; 4) $x^2 = 8y$; 5) $x^2 = -18y$. **636.** (18, 12) и (18, —12). **637.** $2p$. **638.** $y = 2x - 5$. **639.** $x - 3y + 9 = 0$.

640. $y^2 = 4x$. **641.** $B^2p = 2AC$. **642.** $y = kx + \frac{p}{2k}$.

643. $x \pm 2y + 4 = 0$. **644.** $x(x^2 + y^2) + py^2 = 0$.

645. Касательные к параболе в ее вершине.

646. $\rho = \frac{4}{1 - \cos\theta}$. **647.** $y^2 = 12x$. **649.** 2. **651.** Директриса.

653. 1) $(y - b)^2 = 2p(x - a)$; 2) $(y - b)^2 = -2p(x - a)$; 3) $(x - a)^2 = 2p(y - b)$; 4) $(x - a)^2 = -2p(y - b)$.

654. 1) $(-2,\ 1)$; $p=5$; ось параллельна оси Ox; 2) $(0,\ -7)$; $p=3$; ось параллельна оси Ox; 3) $(2,\ 0)$; $p=4$; направление оси совпадает с отрицательным направлением оси Ox; 4) $(3,\ 5)$; $p=2$; ось параболы параллельна оси Oy; 5) $\left(-\frac{B}{2A},\ \frac{4AC-B^2}{4A}\right)$, $p=\frac{1}{2|A|}$; ось параболы параллельна оси Oy; 6) $(4,\ -1)$; $p=\frac{1}{2}$; ось параболы параллельна оси Oy; 7) $(-3,\ -9)$; $p=\frac{1}{2}$; ось параболы параллельна оси Oy.

656. $\frac{x}{5}-\frac{y^2}{36}=-1$. **657.** 12. **658.** $\frac{8}{3}$.

659. Парабола, имеющая данную точку фокусом и данную прямую директрисой.

660. Две параболы: $y^2=\pm 2x+1$. **661.** $y_0^2-2px_0<0$.

664. $(y^2-2px)(y_0^2-2px_0)-[yy_0-p(x+x_0)]^2=0$.

669. Парабола $(2x+p)^2+4\operatorname{ctg}^2\alpha\,(2px-y^2)=0$.

672. $y^2=2px$. **674.** Парабола. **675.** Парабола.

679. Прямая, параллельная касательным к параболам в их вершинах.

680. 1) $B^2p>2AC$; 2) $B^2p<2AC$.

684. Искомая точка $(k+p,\ 0)$, если $x=k$ — данная прямая, а уравнение параболы взято в виде $y^2=2px$.

686. 1) Пусть C — окружность, описанная около треугольника T, а A и B — точки пересечения прямой l с окружностью C. Проекции точки A на стороны треугольника T лежат на одной прямой p; проекции точки B на стороны треугольника T лежат на одной прямой q. Параболы C_1, C_2 и C_3 вписаны в угол, образованный прямыми p и q.

687. $5x^2+16xy+5y^2-5x-5y=0$.

688. 1) $O'(1,\ 1)$; 2) $O'(-1,\ 2)$; 3) прямая центров $4x+2y-5=0$; 4) нет центра (парабола). **689.** $17x-4y-4=0$.

690. $2x+y+6=0$. **691.** $4x-6y+1=0$. **692.** $y=x-1$.

693. $7x-y-3=0$. **694.** $y=3x+2$; $y=3x-2$; $x+1=0$.

695. $(x-2)^2-(x-y)^2=0$ или две прямые $2x-y-2=0$, $y-2=0$.

696. 1) $3x-y+3=0$, $2y+3=0$; 2) $3x-y=0$; $4y-9=0$.

697. Указание. Составить уравнение линии относительно системы координат, начало которой совпадает с центром тяжести треугольника, одна из осей совпадает с медианой, а другая ось параллельна стороне, соединяющей две другие вершины.

698. $2x+3y-5=0$, $5x+3y-8=0$.

699. 1) $7x-35y+22=0$, $7x+14y+20=0$; 2) $6x-2y+19=0$, $2x+2y-1=0$; 3) $3x+4y+14=0$, $x+y-3=0$; 4) $5y+3=0$, $25x-5y+13=0$.

700. 1) $x-4y-2=0$; 2) $x+4y-3=0$.

701. $x+y-1=0$, $3x+3y+13=0$. **702.** $7x+1=0$.

703. $x-3=0$, $7x-2y-13=0$.

704. При аффинном преобразовании $x'=\alpha x+\beta y+\gamma$, $y'=Ax+By+C$ уравнение линии принимает вид: $x'^2+2y'=0$.

705. Уравнение диаметра $(a_{11}x+a_{12}y)-(a_{11}x_1+a_{12}y_1)=0$. Уравнение касательной $(a_1+a_{11}x_0+a_{12}y_0)x+(a_2+a_{12}x_0+a_{22}y_0)y+(a_1x_0+a_2y_0+a)=0$, где $a_{11}=\alpha^2$, $a_{12}=\alpha\beta$, $a_{22}=\beta^2$.

706. 1) Прямые, соединяющие середины противоположных сторон,— диаметры кривой; 2) прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон,— диаметры кривой.

709. 1) $x+y-2=0$, $x-y=0$; 2) $x+y-1=0$, $x-y+3=0$; 3) $2x-4y-5=0$; 4) $3x+y+1=0$, $x-3y+3=0$; 5) $2x-4y-1=0$.

710. Воспользоваться уравнением диаметра.

711. $\dfrac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}=\dfrac{b_{11}-b_{22}}{2b_{12}}$.

712. Множество центров состоит из внутренних точек треугольника, сторонами которого являются средние линии данного треугольника, а также из внутренних точек углов, вертикальных к углам треугольника, образованного средними линиями.

714. Равносторонняя гипербола.

715. Составить уравнение гиперболы относительно системы с началом в точке O пересечения прямых, проходящих через данные точки и имеющих данные асимптотические направления, принимая эти прямые за оси координат.

Отв. Прямая линия.

717. Окружность. **718.** $B\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$, $C\,(2, 0)$, $D\left(3, \dfrac{7}{2}\right)$.

719. 1) парабола; 2) две параллельные прямые: $x+y=0$, $x+y+1=0$; 3) гипербола; 4) гипербола.

720. 1) эллипс; 2) парабола; 3) гипербола.

721. 1) эллипс $\dfrac{X^2}{6}+\dfrac{Y^2}{3}=1$, центр $O'\,(-2, 1)$, бо́льшая ось параллельна оси Ox;

2) гипербола $\dfrac{X^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{Y^2}{1}=-1$, центр $O'\,(1, -3)$, действительная ось параллельна оси Oy;

3) парабола $Y=-2X^2$, вершина параболы $O'\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$, ось параллельна оси Oy, парабола выпукла вверх; 4) мнимый эллипс;

5) гипербола с центром $O'\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$, действительная ось параллельна оси Oy, длина действительной полуоси равна $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, мнимой $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

6) парабола с вершиной $O'\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, ось параболы параллельна оси Oy, парабола выпукла вверх, параметр равен $\frac{3}{4}$;

7) парабола, вершина $O'\left(-\frac{3}{16}, \frac{1}{4}\right)$ ось параллельна оси Ox, выпукла вправо, параметр равен $\frac{1}{2}$;

8) две пересекающиеся в точке $O'(-1, 1)$ прямые $\sqrt{3}(x+1)+\sqrt{2}(y-1)=0$ и $\sqrt{3}(x+1)-\sqrt{2}(y-1)=0$;

9) гипербола с центром $O'(-1, -1)$, асимптоты параллельны осям координат.

722. Эллипс $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1$; центр $C(2, 3)$, угловой коэффициент большей оси $-\frac{1}{2}$.

723. Парабола $Y^2=10X$, вершина параболы имеет координаты $C(-1, 2)$; вектор $\left\{\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right\}$ имеет направление оси и направлен в сторону вогнутости.

724. Гипербола $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{9}=1$, центр $C(1, 1)$, угловой коэффициент действительной оси $k'=\frac{2}{3}$.

725. Парабола $Y^2=4\sqrt{2}X$, вершина $C(2, 1)$; вектор $\{1, 1\}$ параллелен оси и направлен в сторону вогнутости.

726. Пара действительных пересекающихся прямых

$$x-y-1=0,$$
$$x-4y+2=0.$$

727. Пара действительных параллельных прямых

$$2x-3y+1=0,$$
$$2x-3y-2=0.$$

728. 1) эллипс $\frac{X^2}{\frac{35}{6}}+\frac{Y^2}{\frac{35}{36}}=1$, центр $C\left(\frac{7}{6}, \frac{1}{3}\right)$, угловой коэффициент большей оси $k=-\frac{1}{2}$;

2) эллипс $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{1}=1$, центр $C(1, 1)$, угловой коэффициент большей оси $k=-1$;

3) эллипс $\frac{X^2}{16}+\frac{Y^2}{4}=1$, центр $C(1,\ 1)$, угловой коэффициент большей оси $k=-1$;

4) гипербола $\frac{X^2}{1}-\frac{Y^2}{9}=1$, центр $C(-1,\ -2)$, угловой коэффициент действительной оси $k=-3$;

5) гипербола $\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{25}=1$, центр $(1,\ 0)$, угловой коэффициент действительной оси $k=\frac{9}{4}$;

6) гипербола, длина полуосей $a=4$, $b=3$, центр $(1,\ -1)$, угловой коэффициент действительной оси $k=\frac{4}{3}$;

7) парабола, параметр $p=1$, вершина $(0,\ 0)$, вектор, параллельный оси и направленный в сторону вогнутости $\left\{\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right\}$;

8) парабола, параметр $p=\sqrt{2}$, вершина $(1,\ 1)$, орт оси $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ (направленный в сторону вогнутости);

9) парабола, параметр $p=\frac{3}{\sqrt{5}}$, вершина $\left(-\frac{1}{5},\ \frac{3}{5}\right)$, орт оси $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$ (направленный в сторону вогнутости).

729. $I_2=-4<0$, $I_3=144\neq 0$, гипербола; действительная полуось $a=3$, мнимая полуось $b=6$; центр $(3,\ -4)$; действительная ось $2x-y-10=0$, мнимая ось $x+2y+5=0$; асимптоты: $y+4=0$, $4x+3y=0$; фокусы $(6,\ 2)$, $(0,\ -10)$; соответствующие им директрисы $x+2y+2=0$, $x+2y+8=0$; вершины: $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}+3,\ \frac{6}{\sqrt{5}}-4\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}+3,\ -\frac{6}{\sqrt{5}}-4\right)$; касательные в вершинах: $x+2y+5\pm 3\sqrt{5}=0$.

730. $Y^2=2pX$, $x\cos t+y\sin t=0$ — уравнение оси; $x\sin t-y\cos t+q=0$ — уравнение касательной в вершине. Вершина $(-q\sin t,\ q\cos t)$; вектор $\{\sin t,\ -\cos t\}$ параллелен оси и направлен в сторону вогнутости.

731. Каноническое уравнение $(A_1^2+B_1^2)X^2+(A_2^2+B_2^2)Y^2=1$. Главные оси определяются уравнениями:

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2=0.$$

732. Фокус $(0,\ 4)$, директриса $2x-y+8=0$.

733. Фокус $(-2, 1)$, директриса $x-2y-6=0$.

734. $\pi\cdot\dfrac{K_2}{I_2\sqrt{I_2}}$. **735.** Равносторонняя гипербола.

736. Гиперболы имеют общие асимптоты. **737.** $I_1\cdot 2F(x_0, y_0)<0$,
738. $I_1\cdot 2F(x_0, y_0)<0$. **739.** $I_1=0$.
743. $I_1K_3<0$.
745. Гиперболы имеют общие асимптотические направления.

746. $d^2=-\dfrac{4K_2}{I_1^2}$.

747. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & b \end{vmatrix}<0.$

748. $6x^2-4xy+2y^2+12x-99=0$.

*

Указание. $K_3:K_3=4$.
749. $(A_1x+B_1y+C_1)\pm(A_2x+B_2y+C_2)=0$.
750. $4x^2+8xy+13y^2-24x-42y+9=0$.
751. $x^2-4xy+4y^2-4x-4y=0$. **752.** $x-2=0$, $x+2y-4=0$.
753. $9x^2-24xy+16y^2-60x-16y+256=0$.
754. $9x^2+16y^2-36x-48y=0$. **755.** $x^2-2xy+5y^2-4x-4y+4=0$.
756. $2x^2-xy-3y^2-x-6y-15=0$. **757.** $xy-x-y+1=0$.
758. $x^2-4xy-6x+9=0$. **759.** $2x^2-xy-x+y+5=0$.
760. $4xy+3y^2+4y-11=0$. **761.** $12x^2+40xy+28y^2+16x+8y-11=0$, $2x+2y-1=0$, $6x+14y+11=0$. **762.** $x^2-2xy+2y^2-2x+1=0$.
763. $337x^2+168xy+288y^2-3200x-2400y=0$.
764. $4x^2-4xy+y^2-16x-2y=0$.
765. $x^2+2xy+2y^2-14x-20y+48=0$.
766. $5x^2+6xy+5y^2-6x-10y-3=0$.
767. $x^2+xy+y^2+2x+y-2=0$. **768.** $x^2+2xy+y^2+5x-y=0$.
769. $36x^2+24xy+29y^2-528x-376y+1211=0$.
770. $3x^2-6xy-5y^2+24y-12=0$.

771. $\dfrac{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}=\left|\dfrac{x\cos\theta+y\sin\theta-p}{x_2\cos\theta+y_2\sin\theta-p}\right|$.

772. $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}-\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-4\frac{(Ax_1+By_1+C)(Ax_2+By_2+C)}{A^2+B^2}}.$$

773. $16x^2+24xy+9y^2-94x-58y+124=0$.
774. $x^2+2xy+y^2-12x+24y-54=0$.
775. $x^2-2xy+y^2-8x-8y=0$.
776. $x^2+2xy+y^2-6x+2y-7=0$. **777.** $4xy+3y^2-2y-1=0$.
778. $x^2-6xy+y^2-2x-2y+5=0$.
779. $11x^2-20xy-4y^2+18x+36y=0$.
780. $4x^2+6xy-4y^2-26x+18y-39=0$.

781. $\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix} = 0.$ **782.** $(x-x_0)\,F_x+(y-y_0)\,F_y=0.$

783. $(x-x_0)\,F_x+(y-y_0)\,F_y=0.$ **784.** $F_x\Phi_x+F_y\Phi_y=0.$

785. $(A_1x+B_1y+C_1)\,[A_2\,(x-x_0)+B_2\,(y-y_0)]+$
$+(A_2x+B_2y+C_2)\,[A_1\,(x-x_0)+B_1\,(y-y_0)]=0.$

786. Линия второго порядка. **787.** Линия второго порядка.

792. 1) Гипербола; 2) эллипс; 3) парабола.

793. 1) $2x+3y-5=0$, $x-4y+2=0$; 2) $x+y-2=0$, $3x-2y+1=0$; 3) $2x+5y+1=0$, $2x+3y-5=0$; 4) $2x-y+1=0$, $2x-y-4=0$.

794. $45x+205y-4=0$, $15x-15y-2=0$.

795. $15x+y-2=0$, $5x+3y-4=0$. **796.** $2x+7y-\frac{1}{2}=0$.

797. $x-2y+1=0$ — уравнение оси; координаты вершины $S\left(-\frac{1}{6},\ \frac{5}{12}\right)$.

798. Эллипс $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{1}=1$, центр $O'\left(\frac{1}{8},\ \frac{1}{4}\right)$, угловой коэффициент большей оси $k=-\frac{2}{7}$.

799. Гипербола $\frac{X^2}{15}-Y^2=1$; центр совпадает с началом координат $O\,(0,\ 0)$, угловой коэффициент действительной оси $k=1$.

800. Гипербола $\frac{X^2}{5}-\frac{Y^2}{15}=1$, центр $O'\ (-1,\ 2)$; угловой коэффициент оси $O'X$, $k=-2$.

801. $Y^2=\frac{1}{25}X$. **803.** $11x+2y-3=0$. **804.** $x+y-2-\sqrt{2}=0$, $x-y+4-3\sqrt{2}=0$. **805.** $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$.

806. $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{2}$. **807.** $x-y+6=0$, $x+y-8=0$.

808. $4x+2y+1=0$, $(2-\sqrt{3})\,x+(2\sqrt{3}+1)\,y\pm 1=0$, $(2+\sqrt{3})\,x+(1-2\sqrt{3})\,y\pm 1=0$.

809. $(\sqrt{3}-2)\,x+(2\sqrt{3}+1)\,y+27-7\sqrt{3}=0$, $(2+\sqrt{3})\,x+(2\sqrt{3}-1)\,y-27-7\sqrt{3}=0$.

Указание. Повернуть плоскость около точки (5, 1) на углы 120° и −120°.

810. $(\sqrt{3}-1,\ 0)$ и $(0,\ \sqrt{3}-1)$.

811. $A_1\,(-3,\ -4)$, $B_1\,(7,\ -2)$, $A_2\,(-2,\ 4)$, $B_2\,(3,\ 5)$.

812. $k_1=-3\sqrt{3}$, $k_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $k_3=-\frac{\sqrt{3}}{5}$ или $k_1=3\sqrt{3}$, $k_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $k_3=\frac{\sqrt{3}}{5}$.

813. $\left(A\cos\frac{2k\pi}{n}-B\sin\frac{2k\pi}{n}\right)(x-x_0)+\left(A\sin\frac{2k\pi}{n}+B\cos\frac{2k\pi}{n}\right)\times$ $\times(y-y_0)+Ax_0+By_0+C=0,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$

814. $O'(5,\ -2)$, $A'(21,\ 12)$, $B'(15,\ -18)$. **815.** $(4,\ 3)$.

816. $(4,\ 2)$. **817.** $M'(10,\ 6)$, $P\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$. **818.** $x'=x-y+1$, $y'=x+y+2$. **819.** $(2,\ 1)$. **820.** Прямая двойных точек $x+2y-4=0$. **821.** 1) $2x-y-12=0$, $x+y-3=0$; 2) $x=0$, $y=0$ — оси Oy и Ox; 3) $x-y=0$. **822.** $2x+y-3=0$. **823.** $2x-2y-3=0$, $4x-y=0$. **825.** $x'^*=-x^*$, $y'^*=5y^*$. **826.** $\{1,\ 4\}$, $\{1,\ -1\}$.

827. $\{1,\ 1\}$. **828.** Таких векторов (с действительными координатами) нет.

829. $\{3,\ -2\}$ и $\{3,\ -5\}$. **830.** $x'=x+c_{12}y$, $y'=c_{22}y$.

831. $x'=c_{11}x$, $y'=c_{22}y$. **832.** $x'=c_{11}x$, $y'=y$. **833.** $x'=-3x$, $y'=2y$. **834.** $x'=x-\frac{1}{2}y$, $y'=-\frac{2}{3}y$. **835.** $x'=x+y\cos\omega$, $y'=y\sin\omega$.

836. $x'=x+s(Ax+By+C)$, $y'=y+t(Ax+By+C)$, где s и t могут принимать любые числовые значения.

837. $x'=\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}$, $y'=y$ (см. предыдущую задачу).

838. $x'=\left(1+\frac{A}{C}x_0\right)x+\frac{B}{C}x_0y+x_0$, $y'=\frac{A}{C}y_0x+\left(1+\frac{B}{C}y_0\right)y+y_0$.

839. $x'=x-2A\dfrac{Ax+By+C}{A^2+B^2}$, $y'=y-2B\dfrac{Ax+By+C}{A^2+B^2}$.

840. $x'=-y+5$, $y'=-x+5$.

841. $x'=\frac{1}{12}(17x-y+8)$, $y'=\frac{1}{12}(-x+17y-4)$.

842. $x'=\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{A_1x_0+B_1y_0+C_1}$, $y'=\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{A_2x_0+B_2y_0+C_2}$.

843. $\dfrac{A_2x'+B_2y'+C_2}{A_2x_2+B_2y_2+C_2}=\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{A_1x_1+B_1y_1+C_1}$, $\dfrac{D_2x'+E_2y'+F_2}{D_2x_2+E_2y_2+F_2}=$ $=\dfrac{D_1x+E_1y+F_1}{D_1x_1+E_1y_1+F_1}$. **844.** $x'=\dfrac{-2x+2y+10}{3}$, $y'=\dfrac{-11x+14y+13}{3}$.

845. $x'=5x-3y+8$, $y'=-3x+2y-3$.

846. 1) $x'=x+8$, $y'=4x-5y+14$; 2) $x'=-x+2y-8$, $y'=4x-3y+24$.

847. 1) Тождественное преобразование; 2) центральная симметрия относительно некоторой точки плоскости; 3) «косая» симметрия относительно одной прямой в направлении другой прямой.

848. $\{1,\ 3\}$ и $\{3,\ -1\}$; $x^*=\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y$, $y^*=-\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y$, $X=\sqrt{20}\,x$, $Y=\sqrt{80}\,y$. **849.** Да.

850. Образует. Геометрический смысл: «равномерное сжатие (в k раз) плоскости к оси Ox».

851. Образует. Сдвиг плоскости относительно оси Ox.

852. Образует. Гомотетия.

853. Образует. Поворот плоскости вокруг начала координат на угол φ, соединенный с гомотетией (r — коэффициент гомотетии; если $r<0$, то добавляется еще симметрия относительно начала координат).

854. Образует. Геометрический смысл каждого из данных преобразований такой же, как и в предыдущей задаче: $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

855. Образует. Геометрический смысл каждого из данных преобразований: перемещения, соединенные с поворотом, гомотетией и переносом.

856.
$$S=\frac{1}{2}\left|\frac{\begin{vmatrix} A_1B_1C_1 \\ A_2B_2C_2 \\ A_3B_3C_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_2B_2 \\ A_3B_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_3B_3 \\ A_1B_1 \end{vmatrix}}\right|.$$

Указание. Аффинное преобразование $x'=A_1x+B_1y+C_1$, $y'=A_2x+B_2y+C_2$ переводит две первые из данных сторон соответственно в оси Oy, Ox, а третью сторону — в прямую
$$\begin{vmatrix} A_1B_1C_1-x' \\ A_2B_2C_2-y' \\ A_3B_3C_3 \end{vmatrix}=0.$$
Определяя отрезки, отсекаемые этой прямой на осях координат, найдем площадь преобразованного, а затем и исходного треугольника.

857. $S=\left|\dfrac{(C-D)(C'-D')}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}\right|.$

Указание. См. предыдущую задачу.

858. Два решения $x-12y+57=0$, $8x-9y-66=0$.

Указание. Рассмотреть аффинное преобразование, переводящее данные прямые в оси координат.

859. $142x-183y-489=0$.

Указание. Рассмотреть аффинное преобразование, переводящее данные прямые в оси координат, а данную точку — в единичную точку.

860. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2$. **861.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Указание. Преобразовать аффинно эллипс в круг.

862. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{1}{2}$. **863.** $t=\dfrac{1}{2}$.

866. Эллипс, касающийся сторон параллелограмма в их серединах.

868. Эллипс. **870.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **877.** Эллипс. **881.** πab.

885. $\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$.

887. $x'=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)y+\frac{1}{2}\frac{a}{b}\left(-\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)y,$

$$y'=\frac{1}{2}\left(-\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\frac{b}{a}x+\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)y.$$

Указание. Искомое преобразование может быть представлено как произведение трех преобразований:

1) преобразования α: $x^*=\frac{x}{a}-\frac{y}{b}$, $y^*=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, переводящего данную гиперболу в гиперболу $x^*y^*=1$;

2) преобразования β: $x'^*=\lambda x^*$, $y'^*=\frac{1}{\lambda}y^*$, переводящего гиперболу в себя;

3) преобразования α^{-1}: $x'=\frac{a}{2}(x'^*+y'^*)$, $y'=-\frac{b}{2}(x'^*-y'^*)$, переводящего гиперболу $x'^*y'^*=1$ снова в данную гиперболу. Полагая в случае $\lambda>0$, $\lambda=e^{\varphi}$, можем записать искомое преобразование также в виде:

$$x'=\operatorname{ch}\varphi x+\frac{a}{b}\operatorname{sh}\varphi y,\quad y'=\frac{a}{b}\operatorname{sh}\varphi x+\operatorname{ch}\varphi y.$$

888. $x'=x\sqrt{2}+y$, $y'=x+y\sqrt{2}$ и $x'=x\sqrt{2}-y$, $y'=x-y\sqrt{2}$. **892.** $x'=\frac{\lambda^2}{2p}(2px-2ym+m^2)$, $y'=\lambda(y-m)$.

893. $x'=\frac{1}{2p}(2px-2ym+m^2)$, $y'=y-m$.

894. Точка T — середина отрезка SN.

Указание. Рассмотреть такое аффинное преобразование параболы в себя, при котором точки M_1 и M_2 переходят в точки, симметричные относительно оси параболы.

895. $x'=x+2y+2$, $y'=y+2$.

896. $y^2=2p\left(x-\frac{p}{2}\right)$.

Указание. См. задачу 893.

897. Парабола $y^2=2p(x-a)$ (a — расстояние от вершины параболы до хорды, перпендикулярной к оси параболы и отсекающей от параболы сегмент данной площади).

Указание. Рассмотреть унимодулярное аффинное преобразование, переводящее произвольную хорду, отсекающую сегмент данной площади, в хорду, перпендикулярную к оси параболы.

898. $y^2=2p(x+a)$, где a — расстояние от вершины параболы до хорды, перпендикулярной к оси параболы и отсекающей от параболы сегмент данной площади.

899. 3.

Указание. Преобразовать параболу аффинно в себя так, чтобы точка касания перешла в вершину параболы.

900. Искомое преобразование определяется формулами:

$$\alpha x+\beta y=\lambda(\alpha x'+\beta y'+m),$$

$$2a_1x+2a_2y+a=\lambda^2\left\{2(a_1-\alpha m)x'+2(a_2-\beta m)y'+a-m^2\right\},$$ где λ и m — произвольные параметры.

Указание. При аффинном преобразовании касательная к параболе переходит в касательную, а диаметр, сопряженный первой касательной, перейдет в диаметр, сопряженный второй касательной.

901. $x'=-\frac{\lambda^2}{2p}\left\{2(a_1-\alpha m)\ \ x+2\ \ (a_2-\beta m)\ \ y+a-m^2\right\}$,

$y'=\lambda(\alpha x+\beta y+m)$, где λ и m — произвольные параметры.

904. $\frac{4}{3}a\sqrt{2pa}$. **905.** $y=kx+\frac{p}{2k}-k\sqrt[3]{\frac{9P^2}{32p}}$.

906. $2px-2my+m^2-2p=0$, где $m=y_1\pm y_0$, где y_0 — ордината конца хорды, параллельной касательной в вершине параболы и отсекающей от параболы сегмент данной площади.

911. $x+\frac{a_{12}}{a_{11}}y+\frac{a_1}{a_{11}}=\left(X+\frac{a_{12}}{a_{11}}Y+\frac{a_1}{a_{11}}\right)\cos\theta-\left(Y+\frac{a_2}{a'}\right)\frac{a}{b}\sin\theta$,

$$y+\frac{a_2}{a'}=\left(X+\frac{a_{12}}{a_{11}}Y+\frac{a_1}{a_{11}}\right)\frac{b}{a}\sin\theta+\left(Y+\frac{a_2}{a'}\right)\cos\theta.$$

918. $(-1:1)$. **919.** $(1:2)$. **920.** $(-1:-\lambda)$.

921. $x_1:x_2=7(x-2):(4+x)$.

922. $(1:-1)$.

923. $x_1:x_2=(x-1):x$. **924.** $x_1':x_2'=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}}$.

926. $x_1'=a_{11}x_1$, $x_2'=a_{22}x_2$.

928. $x_1^{*\prime}=13(6x_1^*+13x_2^*)$, $x_2^{*\prime}=6(36x_1^*+13x_2^*)$.

929. $x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2$, $x_2'=a_{22}x_2$.

930. $(1:-1)$, $(1:2)$.

931. $\varrho x_1'=\begin{vmatrix}\lambda a & b\\ \mu c & d\end{vmatrix}x_1+\begin{vmatrix} a & \lambda a\\ c & \mu c\end{vmatrix}x_2$,

$\varrho x_2'=\begin{vmatrix}\lambda b & b\\ \mu d & d\end{vmatrix}x_1+\begin{vmatrix} a & \lambda b\\ c & \mu d\end{vmatrix}x_2$.

932. Корни уравнения $\begin{vmatrix}3-\lambda & -5\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$ комплексные.

933. $\varrho x_1'=\lambda b_1'\begin{vmatrix}x_1x_2\\ a_1a_2\end{vmatrix}+\mu a_1'\begin{vmatrix}x_1x_2\\ b_1b_2\end{vmatrix}$, $\varrho x_2'=\lambda b_2'\begin{vmatrix}x_1x_2\\ a_1a_2\end{vmatrix}+\mu a_2'\begin{vmatrix}x_1x_2\\ b_1b_2\end{vmatrix}$

935. $\varrho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$, $\varrho x_2' = a_{21}x_1 - a_{11}x_2$ и тождественное преобразование. **936.** $(-\lambda:1)$.

937. Принять точки A, B, C за фундаментальные точки новой системы координат.

938. 1) $\frac{12}{25}$; 2) $-\frac{76}{9}$; 3) ∞.

939. Проведем через точку A прямую, построим начало координат (произвольно) и припишем точке A аффинную координату (-1), далее построим относительно этой прямой $B'\left(\frac{3}{4}\right)$, $C'(2)$. Проектируя точки 0, ∞, E аффинной системы координат на первоначальную прямую из точки пересечения прямых BB', CC', получим искомые точки.

940. Указание. См. задачу 939. **941.** (5:7).

943. $D(-1:14)$, $F(-1:2)$; $G(-1:24)$, $H(1:16)$, $O(3:8)$, $E(1:6)$.

944. 1) $M(3:2:-1)$; 2) $N(12, 9)$; 3) $R(5:0:-3)$; 4) $P(1:1:0)$.

945. $(0:1:-1)$.

946. $x_1' + x_2' = 0$ — уравнение оси Ox;

$x_1' - x_2' = 0$ — уравнение оси Oy; уравнение несобственной прямой: $x_1' + x_2' + 2x_3' = 0$.

947. 1) $3x_1 + x_2 + 9x_3 = 0$; 2) $x_1 = 3\alpha - \beta$, $x_2 = 3\beta$, $x_3 = -\alpha$; 3) $\alpha = 0$, $x_1 = -\beta$, $x_2 = 3\beta$, $x_3 = 0$.

948. Прямые пересекаются на одной из сторон координатного треугольника.

949. Прямая, инцидентная обеим точкам, проходит через вершину базисного треугольника.

950. 1) $(-3:4:1)$; 2) $\alpha(2x_1 + 3x_2 - 6x_3) + \beta(x_1 + 3x_3) = 0$; 3) $x_2 - 4x_3 = 0$.

953. Две.

958. Координаты несобственных точек сторон треугольника $(0:1:-1)$; $(1:0:-1)$; $(1:-1:0)$; координаты несобственных точек прямых O_1E, O_2E, O_3E: $(-2:1:1)$, $(1:-2:1)$, $(1:1:-2)$.

959. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. **960.** $ax + by + cz = 0$, где a, b, c — длины сторон треугольника $O_1O_2O_3$.

961. $\frac{ax}{\cos A} + \frac{by}{\cos B} + \frac{cz}{\cos C} = 0$, где a, b, c — длины сторон, а A, B, C — углы треугольника $O_1O_2O_3$.

962. $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. **963.** $(2:0:-1)$, $2u_1 - u_3 = 0$.

964. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \\ 8 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $15x_1 - 9x_2 - 22x_3 = 0$.

965. $u_1 - u_2 - u_3 = 0$, $(1:-1:-1)$. **966.** $(2:0:1)$, $2u_1 + u_3 = 0$.

967. $(2:0:1)$, $2x_1 + x_3 = 0$. **968.** $(120:14:-203)$. **969.** $(5:-1:10)$, $5x_1 - x_2 + 10x_3 = 0$. **970.** $(2:3:0)$, $(5:0:-3)$, $(0:5:2)$. **971.** $2x_2 + x_3 = 0$, $2x_1 - 3x_3 = 0$, $x_1 + 3x_2 = 0$, $3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$; $(0:2:1)$, $(2:0:-3)$, $(1:3:0)$, $(3:1:-4)$.

972. $x_2-x_3=0$, $x_3-x_1=0$, $x_1-x_2=0$, $(0:1:-1)$, $(1:0:-1)$, $(1:-1:0)$. **973.** $(1:-1:0)$.

974. Точки пересечения прямых O_1O_2 и AB $(\lambda:-\mu:0)$, O_3O_2 и BC $(0:\mu:-\nu)$, O_3O_1 и CA $(\lambda:0:-\nu)$. Так как $\begin{vmatrix} \lambda & -\mu & 0 \\ \lambda & 0 & -\nu \\ 0 & \mu & -\nu \end{vmatrix}=0$, то точки находятся на одной прямой.

975. $(0:u_2:u_3)$, $(u_1:0:u_3)$, $(u_1:u_2:0)$. **981.** $(ABCD)=-9$.

982. $(abcd)=-\frac{1}{4}$.

983. $E_1\,(0:1:1)$, $E_3\,(1:1:0)$, $P\,(1:2:1)$, $Q\,(-1:0:1)$, $(E_1E_3PQ)=-1$

984. $D\,(4:0:-1)$. **985.** $d\,(-1:5:0)$.

986. $O_2A\,(0:0:1)$, $O_2B\,(1:0:0)$, $O_2C\,(1:0:1)$, $O_2D\,(1:0:-1)$, $(O_2A,\ O_2B,\ O_2C,\ O_2D)=-1$.

991. Прямая, параллельная основаниям и проходящая через точку пересечения боковых сторон трапеции.

992. Прямая, соединяющая вершину прямого угла треугольника с серединой отрезка гипотенузы, отсекаемого на ней биссектрисами внутреннего и внешнего углов при этой вершине.

993. Биссектриса угла, смежного с данным.

994. Прямая, параллельная третьей стороне, проходящая через противоположную вершину треугольника.

995. $(3:10:19)$.

996. $((\lambda\alpha x_1+\beta y_1):(\lambda\alpha x_2+\beta y_2):(\lambda\alpha x_3+\beta y_3))$. **997.** $x_3=0$.

998. $x:y:z=4x_2:4x_3:(x_1+x_2+2x_3)$.

999. $x_1:x_2:x_3=(-6x-6y+6z):2x:3y$.

1000. $E\,(6:3:2)$ относительно проективной системы для O_1, O_2, O_3 и $S\,(1:2:3)$, принятой за единичную точку.

1001. Рассмотрим проекции трех первых точек из вершин координатного треугольника на противоположные стороны и построим проекции четвертой точки.

1002. $F\,(-15:4:-24)$, $G\,(3:4:-4)$. **1003.** $x=\frac{x_1}{x_3}$, $y=\frac{x_2}{x_3}$.

1004. $347\,x-250\,y-74=0$; $1513\,x-500\,y-1786=0$; $x-2=0$.

1005. $x_1=\lambda\,(8x'_1-4x'_2)$, $x_2=\lambda\,(2x'_1-4x'_2+4x'_3)$, $x_3=\lambda\,(2x'_1-x'_2+x'_3)$.

1006.

$$x'_1:x'_2:x'_3=(x_2-x_3):x_2:(-x_1+x_2),$$
$$u_1:u_2:u_3=-u'_3:(u'_1+u'_2+u'_3):-u'_1,$$
$$x_1:x_2:x_3=(x'_2-x'_3):x'_2:(-x'_1+x'_2),$$
$$u'_1:u'_2:u'_3=-u_3:(u_1+u_2+u_3):-u_1.$$

1007. $u'_1=-11\,(2u_1+u_2)$, $u'_2=8\,(3u_1+u_3)$, $u'_3=3\,(u_1+2u_2+4u_3)$.

1008. $x'_1:x'_2:x'_3=x_2:x_3:x_1$.

1009. $\sigma x_1=32x'_1-20x'_2+3x'_3$, $\sigma x_2=16x'_1+40x'_2+4x'_3$,
$\sigma x_3=16x'_1+60x'_2-x'_3$.

1010. $A'\,(-1:13:14)$, $B'\,(11:23:28)$, $C'\,(-1:1:2)$.

1011. $O_1'\ (1:1:1)$, $O_2'\ (1:-4:0)$, $O_3'\ (-1:0:1)$, $E'\ (1:-3:2)$.

1012. $a'\ (-8:6:-11)$, $b'\ (7:6:-36)$, $c'\ (-18:1:14)$.

1013. $u_1':u_2':u_3'=u_1:(-u_1+u_3):(-u_1+u_2)$,

$u_1:u_2:u_3=u_1':(u_1'+u_3'):(u_1'+u_2')$.

1014. $O_1'O_2'\ (2:6:-7)$, $O_2'O_3'\ (7:6:-2)$, $O_3'O_1'\ (8:9:-13)$.

1015. $A'\ (-10:1:4)$, $B'\ (-10:3:3)$.

1016. $a'\ (7:-2:2)$, $b'\ (-4:5:4)$.

1017. $x_1:x_2:x_3=(3x_2'+6x_3'):(14x_1'+x_2'-5x_3'):(7x_1'+5x_2'-4x_3')$,

$u_1:u_2:u_3=(u_1'+u_2'+3u_3'):(2u_1'-2u_2'+u_3'):(-u_1'+4u_2'-2u_3')$,

$u_1':u_2':u_3'=(14u_2+7u_3):(3u_1+u_2+5u_3):(6u_1-5u_2-4u_3)$.

1018. $\mu x_1'=c_1x_1$, $\mu x_2'=c_2x_2$, $\mu x_3'=c_3x_3$.

1019. $\varrho x_1'=x_3$, $\varrho x_2'=x_1$, $\varrho x_3'=x_2$.

1020. $x_1'=\lambda x_1$, $x_2'=\lambda x_2$, $x_3'=\lambda(x_1+x_2-x_3)$.

1021. $x_1'=-x_1$, $x_2'=x_2$, $x_3'=x_3$.

1022. $x_1'=\lambda(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)$, $x_2'=\lambda(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)$,

$x_3'=\lambda x_3$.

1023. $x_1'=\mu(x_1+\alpha x_3)$, $x_2'=\mu(x_2+\beta x_3)$, $x_3'=\gamma x_3$.

1024. $x_1'=\lambda a_{11}x_1$, $x_2'=\lambda a_{22}x_2$, $x_3'=\lambda(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)$.

1025. $x'=\dfrac{-15x+43y}{5x-9y+16}$, $y'=\dfrac{7x-3y}{5x-9y+16}$.

1026. $u_1'=\dfrac{u_1^{0'}}{u_1^0}u_1$, $u_2'=\dfrac{u_2^{0'}}{u_2^0}u_2$, $u_3'=\dfrac{u_3^{0'}}{u_3^0}u_3$.

1027. $x'=\dfrac{abx}{(2a-b)x+2(b-a)}$, $y'=\dfrac{2(b-a)y}{(2a-b)x+2(b-a)}$.

1028. $x_1'=\lambda(x_2+x_3)$, $x_2'=\lambda(x_1+x_3)$, $x_3'=\lambda(x_1+x_2)$.

1029. $(1:2:0)$ переходит в точку $(-3:4:0)$.

1030. $u_1':u_2':u_3'=(u_1+5u_2-u_3):(4u_1+2u_2+14u_3):(7u_1-u_2+11u_3)$,

$x_1':x_2':x_3'=(2x_1+3x_2-x_3):(-3x_1+x_2+2x_3):(4x_1-x_2-x_3)$,

$x_1:x_2:x_3=(x_1'+4x_2'+7x_3'):(5x_1'+2x_2'-x_3'):$

$:(-x_1'+14x_2'+11x_3')$.

1031. 1) $x_1':x_2':x_3'=(x_1-4x_2+3x_3):(2x_1+4x_2-3x_3):(x_1+5x_2-3x_3)$;

2) $x_1':x_2':x_3'=(7x_1-7x_2+10x_3):(9x_1-7x_2+11x_3):$

$:(3x_1+x_2+x_3)$;

3) $x_1':x_2':x_3'=(3x_1-5x_2+9x_3):(3x_1+x_2-3x_3):(4x_1+x_2-3x_3)$

1032. $x_1':x_2':x_3'=(x_1+x_2-2x_3):(x_1-x_3):(2x_1-2x_2+x_3)$.

1033. $x_1':x_2':x_3'=(2x_1+3x_2-7x_3):(3x_1-5x_2+4x_3):(8x_1-9x_2+x_3)$.

1034. $x_1':x_2':x_3'=px_1:qx_2:rx_3$.

1035. Точки $(1:2:-3)$, $(2:0:-5)$ переходят соответственно в прямые $(5:4:-17)$, $(4:3:-22)$. Прямые $(2:0:-7)$ и $(0:1:-2)$ переходят соответственно в точки $(-3:17:20)$ и $(2:12:3)$; $x_1:x_2:x_3=$ $=(2u_1+u_3):(5u_1-14u_2-u_3):(3u_1-7u_2-2u_3)$.

1036. $x_1:x_2:x_3=u_1:u_2:u_3$.

1037. $x_1':x_2':x_3'=(11x_1-7x_2+8x_3):(14x_1-18x_2+22x_3):$ $:(-5x_1+15x_2-20x_3)$.

1038. $u_1:u_2:u_3=(2x_1+x_2-x_3):x_2:(x_2+x_3)$.

1039. $u_1:u_2:u_3=2x_1:(x_2+x_3):(2x_1-3x_2+5x_3)$ или $x_1:x_2:x_3=4u_1:(u_1+5u_2-u_3):(-u_1+3u_2+u_3)$.

1040. $x_1:x_2:x_3=(3u_1+u_2-u_3):(u_1+2u_2-u_3):(2u_1+3u_2+4u_3)$ или $u_1:u_2:u_3=(11x_1-7x_2+x_3):(-6x_1+14x_2+2x_3):(-x_1-7x_2+5x_3)$.

1041. $(1:1:1)$ и $(7:3:5)$.

1042. 1) действительная нераспадающаяся линия; 2) действительная нераспадающаяся линия; 3) пара действительных прямых; 4) действительная нераспадающаяся линия; 5) линия распадается на пару мнимых прямых.

1044. 1) $x'=\dfrac{1}{x}$; $y'=\dfrac{y}{x}$; 2) $x'=\dfrac{1}{x+y}$, $y'=\dfrac{x-y}{x+y}$;

3) $x'=\dfrac{x}{y+1}$, $y'=-\dfrac{y-1}{y+1}$; 4) $x'=\dfrac{x}{y}$, $y'=\dfrac{1}{y}$;

5) $x'=\dfrac{a^2}{x}$, $y'=\dfrac{ay}{x}$.

1045. $x_1'=\sqrt{\dfrac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}}\,x_1$, $x_2'=\sqrt{\dfrac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}}\,x_2$, $x_3'=\sqrt{\dfrac{a_{23}a_{31}}{a_{12}}}\,x_3$.

1046. $2y_1y_2-y_1y_3-y_2y_3=0$. **1047.** $2y_1^2-y_2^2-y_3^2=0$.

1048. $y_3^2-y_1y_2=0$. **1049.** $x'=-\dfrac{13x+25}{x+13}$, $y'=\dfrac{-12y}{x+13}$.

1050. $x'=\dfrac{30\,(x-2y+10)}{x-9y+55}$, $y'=\dfrac{5\,(x+9y-35)}{-x+9y-55}$.

1051. $x'=\pm\dfrac{b}{y}(x\operatorname{ch}\theta+a\operatorname{sh}\theta)$; $y'=\pm\dfrac{b^2}{ay}(x\operatorname{sh}\theta+a\operatorname{ch}\theta)$.

1052. $x'=\dfrac{25\,(x+y+1)}{x-11y+121}$; $y'=10\,\dfrac{-x+5y+11}{x-11y+121}$.

1053. $x'=5\,\dfrac{-x+4}{x+4}$; $y'=\dfrac{10y}{x+4}$. **1054.** $2bx_1x_2+x_3^2=0$.

1057. $6x^2+3xy-y^2+2x-y=0$.

1058. $25x^2-30xy+9y^2-150x-90y+225=0$.

1060. $9x^2+12xy+16y^2-72x-96y+144=0$.

1061. $4x^2+6xy+9y^2-36x-54y=0$.

1062. Прямая, соединяющая точку пересечения данных прямых с серединой отрезка O_1O_2.

1065. $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+(a_{12}+a_{21})\ x_1x_2+(a_{13}+a_{31})\ x_1x_3+$ $+(a_{23}+a_{32})\,x_2x_3=0$. В случае $a_{ik}=a_{ki}$, $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+$

$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1=0.$$

1066. $x-6y+8=0$.

1067. 1) $55x-6y+10=0$; 2) $15x+11y+14=0$; 3) $19x+4y=0$; 4) $x_3=0$ — несобственная прямая; 5) поляра неопределенная; линия состоит из двух прямых и данная точка — точка пересечения прямых.

1068. $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=t$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=t$.

1072. Система неопределенная, когда линия второго порядка распадается на пару прямых и данная прямая принадлежит пучку, определяемому прямыми, на которые распадается линия второго порядка; система несовместна, когда данная линия второго порядка распадается на пару прямых, а данная прямая не принадлежит пучку, определяемому этими прямыми.

1073. 1) $(-3;\ 1)$; 2) $(3,\ 3)$; 3) $(0,\ 3)$; 4) $(1:-1:0)$ — несобственная точка, данная прямая — диаметр, сопряженный хордам направления $\{1,\ -1\}$; 5) полюс неопределенный: геометрическим местом полюсов служит прямая $9x-y+19=0$.

1074. $(1,\ -1)$. **1075.** $y=1$. **1076.** $(-7,\ -5)$. **1077.** $(1, -A)$.

1078. Указание. Написать уравнение линии относительно системы координат, одной осью которой является ось кривой, а другой осью — прямая, перпендикулярная к первой.

1079. Указание. Уравнение линии второго порядка относительно системы координат с началом в фокусе имеет вид $x^2(1-e^2)+y^2-2pex-p^2=0$.

Определить поляру точки, лежащей на директрисе.

1080. Указание. Использовать условие полярной сопряженности. **1081.** $3x-y+10=0$. **1082.** $7x^2+2xy-6x-10y+15=0$.

1083. $2x^2-xy+y^2-3x+y=0$. **1084.** $\frac{b}{k}\,x+by+c^2=0$.

1085. $15\xi^2-4\xi\eta+12\eta^2+50\xi+100\eta-625=0$.

1086. Указание. Уравнение линии второго порядка с фокусом в начале координат имеет вид:

$$x^2(1-e^2)+y^2-2pex-p^2=0;$$

определяем полюсы касательных к этой линии.

1087. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-y^2=\frac{9}{4}$.

1088. $$x=\frac{3\bar{x}^2-6\bar{x}\bar{y}+9\bar{y}^2-9\bar{x}+18\bar{y}}{2\bar{x}^2-4\bar{x}\,\bar{y}+6\bar{y}^2-12\bar{x}+24\bar{y}+27},$$

$$y=\frac{-3\bar{x}^2+6\bar{x}\bar{y}-9\bar{y}^2+18\bar{x}-45\bar{y}-54}{2\bar{x}^2-4\bar{x}\,\bar{y}+6\bar{y}^2-12\bar{x}+24\,\bar{y}+27},$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ удовлетворяют уравнению $x^2-2xy-y^2-6x=0$.

1089. $(x^2+y^2)[y(y_1+y_2)+x(x_1+x_2)]-2(x_1x+y_1y)(x_2x+y_2y)=0.$

1090. $y=0,\ |x|>1.$

1091. $2x^2+3y^2+x-1=0.$ **1092.** $\begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ Az & Bz & -(Ax+By) \end{vmatrix}=0.$

1093. $\begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ A & B & C \\ y-y_0 & x_0-x & xy_0-x_0y \end{vmatrix}=0.$

1094. $$a_{11}\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}^2+2a_{12}\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix}^2+$$
$$+2a_1\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix}+2a_2\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix}+a\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix}^2=0.$$

1095. $\begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ k & -1 & y-kx \\ A & B & C \end{vmatrix}=0.$ **1096.** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}>0.$

1097. 1) $(aA+bB+C)^2-r^2(A^2+B^2)<0$; 2) $a^2A^2\pm b^2B^2-C^2>0$; 3) $2AC-pB^2<0$.

1098. $$a(byw'-czv')(byw''-czv'')+$$
$$+b(czu'-axw')(czu''-axw'')+$$
$$+c(axv'-byu')(axv''-byu'')=0.$$

1099. $\begin{vmatrix} F_{x_1} & F_{x_2} & F_{x_3} \\ \Phi_{x_1} & \Phi_{x_2} & \Phi_{x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}=0.$ **1100.** $\begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ \Psi_x & \Psi_y & \Psi_z \end{vmatrix}=0.$

1101. Указание. Диаметр есть поляра несобственной точки.

1102. $x_1'=-x_1,\ x_2'=x_2,\ x_3'=x_3.$

1103. $\xi=\dfrac{x+2y-2}{2x+2y-3},\ \eta=\dfrac{2x+y-2}{2x+2y-3}.$ **1104.** $uw-\chi vt=0.$

1105. $uw-\dfrac{u_sw_s}{v_st_s}vt=0.$

1106. $16x^2+47xy+30y^2-112x-172y+196=0.$

1107. $3x^2-6xy+10y^2-3x-10y-60=0.$

Указание. Составить уравнение линии второго порядка, проходящей через точку B и точки пересечения прямых AE, DC с прямыми AD, CE.

1108. Указание. Приняв за координатные оси прямые параллельные осям данных линий; уравнение любой линии, проходящей через точки пересечения данных, запишем:

$$(a_{11}x^2+a_{22}y^2+\ldots)+\lambda(b_{11}x^2+b_{22}y^2+\ldots)=0.$$

1109. Указание. Принимаем касательную к данной линии в данной точке за ось Oy, а нормаль в этой точке за ось Ox, тогда уравнение имеет вид:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x=0,$$

а уравнение линии, состоящей из двух катетов, $x^2+2b_{12}xy-y^2=0$; тогда уравнение $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+a_{22}(x^2+2b_{12}xy-y^2)=0$ определяет линию второго порядка, состоящую из касательной и гипотенузы. При любом значении b_{12} эти гипотенузы проходят через одну и ту же точку $\left(x=-\dfrac{2a_{13}}{a_{11}+a_{22}},\ y=0\right)$.

1110. Указание. Для равносторонней гиперболы или пары перпендикулярных прямых $I_1=0$.

1111. Принимаем за оси координат прямые параллельные осям линии. Тогда уравнение пучка линий принимает вид:

$$(a_{11}x^2+a_{22}y^2+\ldots)+\lambda(b_{11}x^2+b_{22}y^2+\ldots)=0.$$

При трех значениях λ это уравнение определяет нужные пары прямых с каноническим уравнением

$$(a_{11}x^2+a_{22}y^2)+\lambda(b_{11}x^2+b_{22}y^2)=0;$$

отсюда и следует утверждение.

1112. $2F\omega_0^2-2F_0\omega^2=0$.

1113. Уравнение искомой линии можно записать $2F-\lambda\omega^2=0$, где λ — корень уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda A^2 & a_{12}-\lambda AB & a_1-\lambda AC \\ a_{21}-\lambda AB & a_{22}-\lambda B^2 & a_2-\lambda BC \\ a_1-\lambda AC & a_2-\lambda BC & a-\lambda C^2 \end{vmatrix}=0,$$

$$2F\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 & A \\ a_{21} & a_{22} & a_2 & B \\ a_1 & a_2 & a & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}\omega^2=0.$$

1114. $\left(\dfrac{w_B}{u_B}u-\dfrac{w_A}{v_A}v\right)^2-2\left(\dfrac{w_B}{u_B}u+\dfrac{w_A}{v_A}v\right)w+w^2=0.$

Уравнение прямой AB имеет вид: $\dfrac{w_B}{u_B}u+\dfrac{w_A}{v_A}v-w=0.$

1115. $9x^2-264xy+16y^2-72x-96y+144=0$; $\left(\dfrac{8}{17},\ \dfrac{9}{17}\right)$.

1116. $2F\cdot 2F_0-(x_0F_x+y_0F_y+z_0F_z)^2=0$.

1117. $(a_{11}+2a_{12}k+a_{22}k^2)\cdot 2F-[a_{11}x+a_{12}y+a_1+k(a_{21}x+$
$+a_{22}y+a_2)]^2=0.$

1118. $x-y\pm\sqrt{13}=0$. **1119.** $x_0u+y_0v+w=0$. **1120.** $(x_1+x_2)u+$ $+(y_1+y_2)v+2w=0$. **1121.** $d=\dfrac{u_1x_0+v_1y_0+w_1}{\sqrt{u_1^2+v_1^2}}$. **1122.** $-20u_1^2-$ $-15u_2^2+12u_3^2=0$. **1123.** $3v^2-4vw+8uw=0$. **1124.** $R^2(u^2+v^2)=w^2$.

1125. 1) $a^2u^2+b^2v^2=w^2$; 2) $a^2u^2-b^2v^2=w^2$; 3) $2kb=p$.

1126. $p_{21}p_{13}x_1^2+p_{32}p_{21}x_2^2+p_{13}p_{32}x_3^2=0$. **1127.** $\left(\dfrac{9}{25};\ \dfrac{16}{25}\right)$.

1128. При помощи тангенциальных уравнений определяем общие касательные $3x+y-1=0$ и $x+y-3=0$.

1129. $30uv-14uw-15vw-w^2=0$.

1130. $31u^2+6v^2-5w^2-15uv-14uw-3vw=0$.

1131. $\alpha_1T_2T_3+\alpha_2T_3T_1+\alpha_3T_1T_2=0$,
где $T_j=x_ju+y_jv+w$ $(j=1,\ 2,\ 3)$.

1132. $$u_1\cdot u_3-\frac{u_1^0\cdot u_3^0}{u_2^0\cdot u_4^0}u_2\cdot u_4=0,$$
где $u_i=x_iu+y_iv+w$, $u_i^0=x_iu_0+y_iv_0+w_0$.

1133. Линия второго порядка касается прямых M_1M_2 и M_2M_3 в точках M_1 и M_3.

1134. $I_2^{(a)}=I_3^{(b)}b_{33}$, $I_3^{(a)}=(I_3^{(b)})^2$. **1135.** $\left(\frac{b_{13}}{b_{33}};\ \frac{b_{23}}{b_{33}}\right)$.

1136. Если $I_2^{(a)}$, $I_3^{(a)}$ — инварианты уравнения той же линии в точечных координатах, то $I_2^{(a)}=b_{33}I_3^{(b)}$, $I_3^{(a)}=[I_3^{(b)}]^2$.

1137. $b_{11}u^2+2b_{12}uv+b_{22}v^2+2b_{13}uw+2b_{23}vw=0$, где $I_3^{(b)}\neq 0$.

1138. $\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23}\\ b_{32} & b_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13}\\ b_{31} & b_{33}\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b_{12} & b_{23}\\ b_{13} & b_{33}\end{vmatrix}=0$.

1139. Уравнение искомой линии в тангенциальных координатах $12uv+uw-vw=0$ и в точечных координатах $x^2+2xy+y^2+$ $+24x-24y+144=0$.

1140. $\pi\sqrt{\frac{I_3^{(b)}}{b_{33}^3}}$.

1141. Уравнение линии в тангенциальных координатах

$$(4u+w)(-3u+w)-\lambda(2v+w)(-v+w)=0.$$

Отсюда (см. задачу 1135) $x_C=\frac{1}{2(1-\lambda)}$, $y_C=\frac{\lambda}{2(1-\lambda)}$ или $x_C+y_C=\frac{1}{2}$.

1142. Уравнение линии в тангенциальных координатах: $p(5u+w)w+q(4v+w)w+l(5u+w)(4v+w)=0$; определяем далее p, q при помощи координат центра. В точечных координатах уравнение имеет вид:

$$x^2+2xy+4y^2-6x-12y+9=0.$$

1143. Уравнение линии в тангенциальных координатах

$$(4v+w)(6u+w)+\lambda w(4u+4v+w)=0.$$

Площадь эллипса равна $\pi\sqrt{\frac{96\lambda}{(1+\lambda)^2}}$. Наибольшее значение площади при $\lambda=1$; $16x^2+8xy+25y^2-96x-120y+144=0$.

1144. Если $pw(u+w)+qw(v+w)+(u+w)(v+w)=0$ — уравнение линии в тангенциальных координатах, то

$$S_0=\pi\sqrt{\frac{2pq}{8(p+q+1)^3}},\quad x_C=\frac{p+1}{2(p+q+1)},\quad y_C=\frac{q+1}{2(p+q+1)}.$$

Исключая p и q, получаем $(1-2x)(1-2y)(2x+2y-1)=\frac{4S_0^2}{\pi^2}$.

1145. Уравнение линии в тангенциальных координатах:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 & u \\ a_{21} & a_{22} & a_2 & v \\ a_1 & a_2 & a & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}=0;$$

заменяя в этом уравнении u, v, w через x, y и $-(x^2+y^2)$, получаем искомое уравнение.

1146. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 & x-a \\ a_{21} & a_{22} & a_2 & y-b \\ a_1 & a_2 & a & -[x(x-a)+y(y-b)] \\ x-a & y-b & -[x(x-a)+y(y-b)] & 0 \end{vmatrix}=0.$$

1147. Принимаем одну из вершин O треугольника за начало аффинных координат, а стороны OA, OB за единичные векторы осей. Определяем уравнение линии в тангенциальных координатах; тогда

$$\begin{vmatrix} 0 & x+y-\frac{1}{2} & x \\ x+y-\frac{1}{2} & 0 & y \\ x & y & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=I_3^{(b)}=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(x+y-\frac{1}{2}\right)>0;$$

отсюда и определяем совокупность искомых точек.

1148. Окружность, центр которой совпадает с центром эллипса, а радиус равен большой полуоси.

У к а з а н и е. $p^2+2cp\cos\varphi-b^2=0$, где p — длина перпендикуляра из правого фокуса на касательную к эллипсу x^2+y^2+ $+2cx-b^2=0$.

1149. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. У к а з а н и е. Определить расстояния точек F_1, F_2 до прямой $ux+vy+w=0$.

1150. $xy=\frac{S}{2\sin\omega}$, где S — площадь треугольника и ω — угол между данными прямыми; осями координат являются данные прямые.

1151. $x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

1152. $(a^2+b^2)uv+buw+avw=0$, где a, b — расстояния от данной точки до данных прямых.

1153. Парабола. $2uv+2vw+2wu=0$ — тангенциальное уравнение искомой линии относительно системы координат, начало которых совпадает с точкой O, а единичные векторы равны $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$.

1154. Если $y=a_1$ и $y=a_2$ уравнения данных прямых, то уравнение искомой линии будет

$$y\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)+\frac{x^2}{4}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)^2-1=0.$$

1155. Парабола: $C\,uv\sin^2\omega+(A\cos\omega-B)\,uw+(B\cos\omega-A)\,vw=0$.

Указание. Рассмотрим косоугольную систему координат с началом O и осями OA, OB; тогда уравнения прямых, перпендикулярных к осям: $x\cos\omega+y-q=0$, $x+y\cos\omega-p=0$; уравнение прямой AB: $Ax+By+C=0$; прямые принадлежат к одному пучку: $p=-\frac{w}{u}$, $q=-\frac{w}{v}$.

1156. Эллипс. **1157.** Линия второго порядка.

1159. $\overrightarrow{AB}=\frac{a-b}{2}$, $\overrightarrow{BC}=\frac{a+b}{2}$, $\overrightarrow{CD}=\frac{b-a}{2}$, $\overrightarrow{DA}=-\frac{a+b}{2}$.

1160. $\overrightarrow{BC}=\frac{4l-2k}{3}$, $\overrightarrow{CD}=\frac{2l-4k}{3}$. **1161.** $\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$.

1162. 0. **1164.** $\overrightarrow{BC}=p+q$, $\overrightarrow{CD}=-q$, $\overrightarrow{DE}=-p$, $\overrightarrow{EF}=-p-q$.

1167. Точка пересечения медиан треугольника.

1168. Точка пересечения диагоналей.

1169. $\overrightarrow{OM}=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}$. **1170.** $AD=\frac{\overrightarrow{AB}\,|\overrightarrow{AC}|+\overrightarrow{AC}\,|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}$.

1171. $\overrightarrow{A'B'}=\boldsymbol{p}$, $\overrightarrow{A'D'}=\boldsymbol{q}$, $\overrightarrow{A'C'}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$, $\overrightarrow{A'B}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r}$, $\overrightarrow{A'D}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}$, $A'C=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}$.

1172. $\overrightarrow{BC}=c-b$, $\overrightarrow{CD}=d-c$, $\overrightarrow{DB}=b-d$, $DM=\frac{b+c}{2}-d$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{b+c+d}{3}$.

1173. $\overrightarrow{MN}=\frac{b+c-a}{2}$, $\overrightarrow{PQ}=\frac{c+a-b}{2}$, $\overrightarrow{RS}=\frac{a+b-c}{2}$.

1174. $\overrightarrow{EF}=\frac{m+p}{2}-\frac{n+q}{2}$. **1175.** $\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2$.

1176. $x=\frac{[\boldsymbol{r}_3[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3]](\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)+[[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3]\boldsymbol{r}_2](\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_3)}{[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3]^2}$.

1177. $\boldsymbol{r}=\frac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2+\ldots+m_n\boldsymbol{r}_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$.

1179. $r=\frac{r_1+r_2+r_3}{3}$. **1180.** $r=\frac{r_1+r_3}{2}$.

1181. $r_4=r_1+\lambda(r_3-r_2)$, $r'=\frac{r_1+\lambda r_3}{1+\lambda}$, $r''=\frac{r_1-\lambda r_2}{1-\lambda}$.

1182. $r_C=r_B+r_D-r_A$, $r_{B'}=r_B-r_A+r_{A'}$, $r_{C'}=r_B+r_D+$ $+r_{A'}-2r_A$, $r_{D'}=r_D-r_A+r_{A'}$.

1183. $r=\frac{r_1+r_2+r_3}{3}$. **1184.** $\{-30,\ 21\}$, $\{0,\ 0\}$.

1185. $\alpha=2$, $\gamma=-3$.

1186. 1) $c=a-b$; 2) $c=2a-3b$; 3) $c=-\frac{3}{2}a$.

1187. $\{0{,}6;\ -0{,}8\}$, $\{-0{,}6;\ 0{,}8\}$. **1188.** $\left\{\frac{3}{\sqrt{130}},\ \frac{11}{\sqrt{130}}\right\}$.

1189. $b=\{-2,\ -5\}$. **1190.** 1) $\{3,\ 22,\ -3\}$; 2) $\{19,\ 39,\ 30\}$.
1191. 1) $d=a+b-c$; 2) $d=5a+4b$; 3) $d=4a-c$.
1192. 1) Векторы a, b и c линейно независимы;

2) векторы a, b и c линейно зависимы и $c=\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b$;

3) векторы a, b и c линейно зависимы, но вектор c не может быть представлен как линейная комбинация векторов a и b, так как эти последние коллинеарны между собой, а вектор c им не коллинеарен.

1194. $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=5$. **1195.** $\left\{-\frac{8}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{1}{9}\right\}$.

1196. $\left\{-\frac{2}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$. **1197.** 5. **1198.** 1) 20; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 0; 4) 18; 5) -3. **1199.** -19. **1200.** $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

Указание. Выразить векторы, направленные по медианам треугольника через векторы, направленные по его боковым сторонам.

1202. $\frac{\pi}{3}$. **1203.** $-\frac{3}{2}$. **1204.** 0. **1205.** $\overrightarrow{CH}=\frac{a^2b+b^2a}{c^2}$.

Указание. Точка H делит гипотенузу AB в отношении: $\overrightarrow{AH}:\overrightarrow{HB}=\lambda=a^2:b^2$.

1207. $CD^2=\frac{\lambda}{1+\lambda}a^2+\frac{1}{1+\lambda}b^2-\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}c^2$, где a, b, c — длины сторон треугольника.

1208. Указание. Выразить каждый вектор через радиусы-векторы его начала и конца.

1209. Указание. Смотри предыдущую задачу.

1210. 1) -3; 2) 0; 3) 1. **1211.** 1) 45°; 2) 90°; 3) 135°; 4) 180°.

1212. $x=\{6,\ 4\}$.

1213. 1) 181; 2) $\{-254,\ 12\}$. **1214.** -8. **1215.** 1) 31; 2) 6, 3) 0.

1216. 1) $\cos\alpha=\frac{1}{3}$; 2) $\alpha=90°$. **1217.** 1) 716; 2) -721; 3) -353.

1218. 1) $\{21,\ 42,\ 21\}$; 2) 280; 3) $\{115,\ 242,\ 137\}$. **1219.** 3.

1220. $\left\{\frac{6}{5\sqrt{5}},\ -\frac{1}{\sqrt{5}},\ -\frac{8}{5\sqrt{5}}\right\}$.

1221. $\left\{\frac{1}{2},\ \frac{-1+\sqrt{5}}{4},\ \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right\}$.

1222. $\left\{\frac{5}{\sqrt{2}},\ -\frac{11}{\sqrt{2}},\ \frac{4}{\sqrt{2}}\right\}$.

1223. $x=\{2,\ 7,\ 3\}$. **1224.** 1) $-2[ab]$; 2) $[ab]$; 3) $\frac{3}{4}[ab]$.

1229. Указание. Воспользоваться тождеством: $[(b-a)(c-a)]=[ab]+[bc]+[ca]$. **1231.** $c=\frac{[ab]}{|a|}$.

1232. 1) $\{6,\ -3,\ -3\}$; 2) $\{-12,\ -26,\ 8\}$; 3) $\{0,\ 0,\ 0\}$.

1233. $18\sqrt{2}$. **1234.** 1) -7; 2) $\{-46,\ 29,\ -12\}$; 3) $\{-7,\ 7,\ 7\}$.

1236. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда выполнено, по крайней мере, одно из двух условий: 1) вектор b перпендикулярен к векторам a и c; 2) векторы a и c коллинеарны.

1237. $x=\frac{\alpha[bc]+\beta[ca]+\gamma[ab]}{abc}$.

Указание. Отнести векторы a, b, c и x к какой-нибудь прямоугольной системе координат, заменить систему трех векторных уравнений системой трех линейных уравнений с тремя неизвестными (координатами искомого вектора), найти эти последние по правилу Крамера и написать разложение искомого вектора по трем единичным векторам осей координат. Сгруппировав в полученном разложении члены, содержащие α, β и γ и принимая во внимание выражения смешанного и векторного произведения в координатах, получим формулу, данную в ответе.

1238. $b_1=\frac{[a_2a_3]}{a_1a_2a_3}$, $b_2=\frac{[a_3a_1]}{a_1a_2a_3}$, $b_3=\frac{[a_1a_2]}{a_1a_2a_3}$.

1239. $b_1=\left\{-\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ -1\right\}$, $b_2=\left\{\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\right\}$, $b_3=\left\{\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ 1\right\}$.

1241. (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1).

1242. 1) $(-x,\ -y,\ -z)$; 2) $(x,\ y,\ -z)$; 3) $(-x,\ -y,\ z)$.

1243. 1) $(x,\ 0,\ 0)$; 2) $(0,\ y,\ z)$.

1244. $d_x=\sqrt{y^2+z^2}$, $d_y=\sqrt{x^2+z^2}$, $d_z=\sqrt{x^2+y^2}$.

1245. $M(-6,\ -4,\ 3)$.

1246. $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{6}{7}$. **1247.** 45° или 135°.

1248. $M_1(4\sqrt{2}, 4, 4)$ и $M_2(4\sqrt{2}, -4, 4)$.

1249. $\sin\varphi_1=\frac{6}{11}$, $\sin\varphi_2=\frac{2}{11}$, $\sin\varphi_3=\frac{9}{11}$.

1250. $\cos\alpha_1=\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$, $\cos\beta_1=\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}$, $\cos\gamma_1=0$.

1251. $\cos\alpha=\frac{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2}{2\cos\frac{\varphi}{2}}$, $\cos\beta=\frac{\cos\beta_1+\cos\beta_2}{2\cos\frac{\varphi}{2}}$,

$\cos\gamma=\frac{\cos\gamma_1+\cos\gamma_2}{2\cos\frac{\varphi}{2}}$, где φ — угол между данными лучами, и

$$\cos\varphi=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2.$$

1252. $\cos\alpha=\frac{\begin{vmatrix}\cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\end{vmatrix}}{\sin\varphi}$, $\cos\beta=\frac{\begin{vmatrix}\cos\gamma_1 & \cos\alpha_1\\ \cos\gamma_2 & \cos\alpha_2\end{vmatrix}}{\sin\varphi}$,

$\cos\gamma=\frac{\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2\end{vmatrix}}{\sin\varphi}$, где φ — угол между данными лучами,

$$\sin\varphi=\sqrt{\begin{vmatrix}\cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\cos\gamma_1 & \cos\alpha_1\\ \cos\gamma_2 & \cos\alpha_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2\end{vmatrix}^2}.$$

1254. $\sqrt{34}$, $\sqrt{21}$. **1255.** $\left(0, \frac{11}{6}, 0\right)$. **1256.** $\left(\frac{5}{6}, 0, -\frac{7}{6}\right)$.

1257. $(3, 3, 1)$, $R=3$.

1258. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

1259. $AB=3$, $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{1}{3}$.

1260. $B_1(15, 11, 7)$, $B_2(15, -7, 7)$, $B_3(-9, 11, 7)$, $B_4(-9, -7, 7)$.

1261. $B_1(9, 5, 11)$, $B_2(9, 5, -1)$.

1262. $M_1(2, 3, 6)$, $M_2\left(\frac{190}{49}, \frac{285}{49}, \frac{570}{49}\right)$.

1263. $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{4}$. **1264.** $\frac{-2}{\sqrt{5}}$, 0, $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **1265.** $\cos A=\frac{-89}{7\cdot13}$, $\cos B=\frac{23}{7\sqrt{11}}$, $\cos C=\frac{36}{13\sqrt{11}}$. **1266.** 60°. **1267.** $\cos\alpha=\frac{3}{5}$,

$\cos\beta=\frac{4}{5}$, $\cos\gamma=0$. **1268.** $S=3{,}5$. **1269.** $S=9$. **1270.** 1) $D(11, 4, 5)$; 2) $M(6, 3, 4)$; 3) $\arccos\frac{1}{3}$; 4) $6\sqrt{2}$; 5) $18\sqrt{2}$. **1271.** $V=150$.

1272. 1) $\left(3, \frac{2}{3}, 2\right)$; 2) $(-30, 8, 13)$. **1273.** $(3, 0, 5)$.

1274. $A\left(\frac{14}{3}, -8, 12\right)$, $B\left(-\frac{11}{3}, 7, -13\right)$ и остальные точки деления: $D\left(\frac{4}{3}, -2, 2\right)$, $E\left(-\frac{1}{3}, 1, -3\right)$.

1275. $C(4, -5, -2)$.

1276. $\lambda_1=\frac{7}{2}$, $\lambda_2=\frac{1}{5}$, $\lambda_3=-\frac{1}{2}$.

1277. Данные прямые пересекаются в точке $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 11\right)$.

1278. Пересекает ось Oz. **1279.** 3. **1280.** $\frac{1}{2}$.

1282. $A\left(r=9, \quad \cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}, \ \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}, \ \sin\theta=\frac{1}{9}\right)$,

$B\left(r=3, \quad \varphi=\frac{-3\pi}{4}, \quad \theta=\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$,

$C\left(r=5, \quad \varphi=-\frac{\pi}{2}, \quad \theta=\arcsin\frac{3}{5}\right)$,

$D\left(r=\sqrt{3}, \ \varphi=-\frac{\pi}{4}, \quad \theta=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$,

$E\left(r=1, \quad \varphi=\frac{\pi}{2}, \ \theta=0\right)$.

1283. $r=2$, $\cos\varphi=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sin\varphi=\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\theta=-\frac{\pi}{6}$.

1284. $\left(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1285. $s=r\arccos(\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\theta_1\cos\theta_2 +$
$+\cos\varphi_1\cos\varphi_2\sin\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)$.

1286. $A\left(\varrho=5, \ \cos\varphi=\frac{3}{5}, \ \sin\varphi=\frac{4}{5}, \ z=5\right)$,

$B\left(\varrho=\sqrt{2}, \quad \varphi=-\frac{\pi}{4}, \ z=-1\right)$, $C(\varrho=6, \ \varphi=\pi, \ z=8)$.

1287. $\varrho=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1288. $\cos\alpha=\dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\left(\frac{h}{\varrho}\right)^2}}$.

1289. $x=-x'+1,\quad y=-y'+1,\quad z=-z'+1.$

1290. $x=\frac{1}{2}x'+\frac{1}{2},\quad y=\frac{1}{2}y'+\frac{1}{2},\quad z=\frac{1}{2}z'+\frac{1}{2}.$

1291. 1) $x=2x'+z'+2,\quad y=4x'+4y'+z'+1,\quad z=x'+4y'+3$; 2) $x'=-x+y-z+4,\quad y'=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-\frac{7}{4},\quad z'=3x-2y+2z-10$; 3) $O\left(4,\ -\frac{7}{4},\ -10\right)$, $e_1=\left\{-1,\ \frac{1}{4},\ 3\right\}$, $e_2=\left\{1,\ -\frac{1}{4},\ -2\right\}$, $e_3=\left\{-1,\ \frac{1}{2},\ 2\right\}$.

1292. 1) $x'=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2},\quad y'=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-\frac{1}{4},$ $z'=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}y-\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}$; 2) $O'(-1,\ 0,\ 1)$, $e_1'=\{-2,\ 0,\ 1\}$, $e_2'=\{-1,\ -1,\ 3\}$, $e_3'=\{-1,\ -1,\ 1\}$; 3) $O\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$, $e_1=\left\{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}\right\}$, $e_2=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{5}{4}\right\}$, $e_3=\left\{0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right\}$.

1293. $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(-1,\ 1,\ 1)$, $B(1,\ -1,\ 1)$, $C(1,\ 1,\ -1)$.

1294. $\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\leftrightarrow\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)\leftrightarrow\left(0,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)\leftrightarrow\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\leftrightarrow\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\right)\leftrightarrow\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)\leftrightarrow\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$, где числа в скобках, соединенных стрелкой, суть координаты одной и той же точки в первой и второй системах.

1295. $(0,\ 0,\ 0)\leftrightarrow(0,\ 0,\ 0)$, $(1,\ 0,\ 0)\leftrightarrow\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$, $(0,\ 1,\ 0)\leftrightarrow\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$, $(0,\ 0,\ 1)\leftrightarrow\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$, $(1,\ 1,\ 1)\leftrightarrow\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $(0,\ 1,\ 1)\leftrightarrow(-1,\ 1,\ 1)$, $(1,\ 0,\ 1)\leftrightarrow(1,\ -1,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 0)\leftrightarrow(1,\ 1,\ -1)$, где числа в скобках, соединенных стрелкой, суть координаты одной и той же точки в первой и второй системах.

1296. $x_1^*=g_{11}x_1+g_{12}x_2+g_{13}x_3,\quad x_2^*=g_{21}x_1+g_{22}x_2+g_{23}x_3,\quad x_3^*=g_{31}x_1+g_{32}x_2+g_{33}x_3$, где $g_{ik}=e_ie_k$, $i=1,\ 2,\ 3$; $k=1,\ 2,\ 3$.

1297. $x=\frac{x'}{\sqrt{2}}-\frac{z'}{\sqrt{3}},\ y=\frac{y'}{\sqrt{2}}-\frac{z'}{\sqrt{3}},\ z=\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}+\frac{z'}{\sqrt{3}}.$

1298. $x=x'-\frac{\sqrt{3}}{3}y'-\frac{\sqrt{6}}{6}z',\ y=\frac{2\sqrt{3}}{3}y'-\frac{\sqrt{6}}{6}z',\ z=\frac{\sqrt{6}}{2}z'.$

1299. $x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-z'$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}y'$, $z=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$.

1300. $x=\frac{x'}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{y'}{\sqrt{2}}$, $z=\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}+z'$.

1301. $x_1+\omega_{12}x_2+\omega_{13}x_3=\alpha_{11}x_1'+\alpha_{12}x_2'+\alpha_{13}x_3'$,

$\omega_{21}x_1+x_2+\omega_{23}x_3=\alpha_{21}x_1'+\alpha_{22}x_2'+\alpha_{23}x_3'$,

$\omega_{31}x_1+\omega_{32}x_2+x_3=\alpha_{31}x_1'+\alpha_{32}x_2'+\alpha_{33}x_3'$, где $\omega_{ik}=\omega_{ki}$.

1302. $x=-\frac{11}{5}x'-\frac{2}{15}y'+\frac{2}{3}z'$, $y=-\frac{2}{15}x'-\frac{14}{15}y'-\frac{1}{3}z'$, $z=\frac{2}{3}x'-\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}z'$.

1303. $x=\frac{1}{2}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'-\frac{1}{2}z'$, $y=\frac{1}{2}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'-\frac{1}{2}z'$, $z=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}z'$.

1304. $x=\frac{1}{3}x'-\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}z'+1$, $y=-\frac{2}{3}x'-\frac{2}{3}y'-\frac{1}{3}z'+2$, $z=\frac{2}{3}x'-\frac{1}{3}y'-\frac{2}{3}z'+3$.

1305. $x=-\frac{2}{3}x'-\frac{1}{\sqrt{18}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z'+2$, $y=-\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}\sqrt{2}y'+1$, $z=-\frac{2}{3}x'-\frac{1}{\sqrt{18}}y'-\frac{1}{\sqrt{2}}z'+2$.

1306. $x=\frac{1}{3}x'-\frac{2}{3}y'-\frac{2}{3}z'+\frac{2}{3}$, $y=-\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'-\frac{2}{3}z'+\frac{2}{3}$, $z=-\frac{2}{3}x'-\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}z'+\frac{2}{3}$.

1308. 2. **1309.** $\{0, 7, 1\}$, $\{7, 0, 2\}$, $\{1, -2, 0\}$. **1310.** 1) $x+2y+z-9=0$; 2) $x+y-2=0$. **1311.** $4x-11y+3z=0$. **1312.** $x=2$, $y=6$, $z=-3$.

1313. $14x-10y+33z-70=0$. **1314.** $x+y+z-1=0$. **1315.** 27. **1316.** $7x+7y-6z-50=0$. **1317.** $35x+21y-15z-105=0$. **1318.** $a=4$, $b=-4$, $c=\frac{4}{7}$. **1319.** $x-2z=0$. **1320.** $5x-6y-7z+41=0$.

1321. $x-2y=0$, $2x+z=0$, $4y+z=0$. **1322.** $5x+3y=0$, $x-3z=0$, $y+5z=0$. **1323.** $3x-z=0$, $x-z=0$. **1324.** $27x+11y+z-65=0$. **1325.** $10x+9y+5z-74=0$. **1326.** $x-z-2=0$. **1327.** $13x+y-20=0$.

1328. Семь плоскостей: $x-z-6=0$, $x+y-10=0$, $x+2y-z-8=0$, $2x+y-z-14=0$, $x-y-z-2=0$, $2x+y+z-16=0$, $5x+y-2z-28=0$.

1329. $x=2-5u+4v$, $y=3+6u-2v$, $z=-5+4u$.

1330. 1) $x=-13$, $y=13$, $z=-9$; 2) $u=\frac{-1}{5}$, $v=\frac{2}{5}$.

1331. 1) $x=-6$, $y=-4$, $z=-3$; 2) $u+v-1=0$, $u=0$, $v=0$; 3) $39u+9v-1=0$.

1332. 1) $x-4y-z+16=0$; 2) $x+5y-z+5=0$.

1333. 1) пересекаются; 2) пересекаются; 3) параллельны; 4) пересекаются; 5) совпадают.

1334. $x-2y+4z-17=0$.

1335. $2x+3y+4z-1=0$, $x+3y+9=0$, $z-1=0$.

1336. Точки A и B лежат в данной плоскости, точки D и E — по одну сторону от плоскости, а точки C и F — по другую сторону от нее.

1337. $(ABC)=\frac{4}{39}$.

1338. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0$, $\frac{\Delta\cdot(A_3x_0+B_3y_0+C_3z_0+D_3)}{A_1B_2-A_2B_1}>0$,

$$\frac{\Delta\cdot(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)}{A_2B_3-A_3B_2}>0, \frac{\Delta\cdot(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)}{A_3B_1-A_1B_3}>0,$$

где $\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}$.

1339. $(Ax_0+By_0+Cz_0+D)\,(Ax_0+By_0+Cz_0+E)<0$.

1340. $E<D<F$ или $E>D>F$. **1341.** Точки D и E.

1342. 1) $\pm\frac{20}{\sqrt{14}\sqrt{53}}$; 2) плоскости взаимно перпендикулярны.

1343. $x+20y+7z=0$ и $x-z=0$. **1344.** $4x-z=0$.

1345. $(-2, 1, 4)$.

1346. $2x+6y-4z-56=0$. **1347.** $3x+2y+4z-38=0$.

1348. $7x+y-3z=0$. **1349.** $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{6}{7}$. **1350.** $-\frac{4}{3\sqrt{21}}$.

1351. $(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)\,(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)\,(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)<0$.

1352. $\frac{1}{3}$. **1353.** $\frac{73}{75}$.

1354. $(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)\,(A_1A_3+B_1B_3+C_1C_3)\,(A_2A_3+B_2B_3+C_2C_3)<0$.

1355. 1) Три плоскости пересекаются в точке (3, 5, 7); 2) три плоскости попарно параллельны; 3) три плоскости переходят через одну прямую; 4) плоскости попарно пересекаются и линия пересечения каждых двух плоскостей параллельна третьей плоскости; 5) первая и третья плоскости параллельны, вторая плоскость их пересекает.

1356. 1) Ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ равен 3;

2) ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ равен рангу матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$ и равен 2;

3) ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ равен 1; ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$ равен 2;

4) ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ равен 2, ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$ равен 3, причем ранг каждой из матриц $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ равен 2;

5) ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ равен 2, ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$ равен 3, а ранг одной из матриц $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ равен 1.

1357. $6x+9y-22z=0$. **1358.** $20x+19y-5z+41=0$. **1359.** $5y+13z-60=0$. **1360.** $2x-2y-2z-1=0$. **1361.** $3x+5y-4z+25=0$. **1362.** $x+3y-2z-10=0$. **1363.** $3x+4y-z+1=0$ и $x-2y-5z+3=0$. **1364.** $41x-19y+52z-68=0$, $33x+4y-5z-63=0$. **1365.** $x+20y+7z-12=0$, $x-z+4=0$. **1366.** $x+3y=0$ и $3x-y=0$. **1367.** $11x+16y+5z+4=0$. **1368.** $4y-3z-3=0$. **1369.** $24x+21y-33z+50=0$.

1370. $16x+50y-3z-132=0$.

1371. 1) $10x-7z=0$; 2) $6y-7=0$; 3) $39x-29y-7z=0$.

1372. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0$. Связка будет собственной при условии

$$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix}=\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}.$$

Связка будет несобственной при условии

$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} < \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}.$$

1373. $$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_4 & B_4 & C_4 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

1374. 1) $\frac{16}{3}$; 2) 2; 3) $\frac{1}{3}$.

1375. $4x-4y+4z-7=0$, $10x+6y-4z-5=0$.

1376. $8x+5y-9z-24=0$.

1377. $Ax+By+Cz+D\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,d=0$.

1378. $d=\dfrac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. **1379.** $\dfrac{1}{\sqrt{11}}$.

1380. $$\mathrm{mod}\,\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\sqrt{A_4^2+B_4^2+C_4^2}}.$$

1381. $3x+4y-2z\pm29=0$. **1382.** (0, 0, 3). **1383.** (0, −3, 0).

1384. $2x+y-4z+17=0$, $2x+y-4z-25=0$.

1385. (0, −3, 5) и $\left(\frac{98}{23}, -\frac{363}{23}, -\frac{375}{23}\right)$.

1386. $\left(-\frac{31}{10}, 0, \frac{14}{5}\right)$, $\left(\frac{17}{10}, 0, \frac{2}{5}\right)$.

1387. $(3+\sqrt{61})\,x-4y+6z-2=0$.

1388. $l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)\pm d\sqrt{l^2+m^2+n^2}=0$.

1389. $6x+3y+2z-75=0$, $6x+3y+2z-19=0$.

1390. $\left(-\frac{17}{53}, \frac{63}{53}, 0\right)$. **1391.** $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$; $r=\frac{3}{2}$.

1392. $x+2y+2z-9=0$, $y-2=0$.

1393. $3x-4y-5=0$, $387x-164y-24z-421=0$.

1394. $x'=\dfrac{x+1}{2}$, $y'=-(2x-y)$, $z'=\dfrac{x+2y+3z-6}{16}$.

1395. $x'=x$, $y'=y$, $z'=-\frac{3}{7}(2x+3y-6z+6)$.

1396. $x'=\dfrac{x+2y+5z+1}{\sqrt{30}}$, $y'=\dfrac{2x-y+1}{\sqrt{5}}$, $z'=-\dfrac{x+2y-z-1}{\sqrt{6}}$.

1397. $x' = -\frac{x+y+z-1}{\sqrt{3}}$, $y' = \frac{2x-y-z+1}{\sqrt{6}}$, $z' = \frac{y-z+2}{\sqrt{2}}$.

1398. 1) $x=2+2t$, $y=3+3t$, $z=1+8t$; 2) $x=7-t$, $y=-1$, $z=2+t$; 3) $x=1$, $z=1$.

1399. 1) $x=-2t$; $y=7t$; $z=4t$; 2) $x=t$, $y=-8-4t$, $z=-3-3t$.

1400. 1) $x-5z-33=0$, $y+4z+17=0$; 2) $5x-z+5=0$, $5y+z-5=0$.

1401. 1) лежат на одной прямой; 2) образуют треугольник; 3) лежат на одной прямой.

1402. Точки A, B и D лежат на прямой, точки C и E нет.

1403. 1) $x=3+4t$, $y=5-3t$, $z=1$; 2) $x+2y+10=0$, $z-4=0$.

1404. 1) $11x-4y+6=0$, $z=0$; 2) $6x+5y-38=0$, $z=0$.

1405. 1) $(-1;\ 7{,}5;\ 0)$, $(2,\ 0,\ 3)$, $(0,\ 5,\ 1)$; 2) $(6,\ -2,\ 0)$, $\left(7,\ 0,\ -\frac{5}{2}\right)$, $(0,\ -14,\ 15)$. **1406.** $\left(-\frac{x_2z_1}{z_2-z_1},\ \frac{y_1z_2}{z_2-z_1},\ 0\right)$.

1407. 1) пересекаются в точке $(-3,\ 5,\ -5)$ и лежат в плоскости $9x+10y-7z-58=0$; 2) скрещиваются; 3) параллельны и лежат в плоскости $5x-22y+19z+9=0$; 4) совпадают.

1408. 1) пересекаются в точке $(-3,\ 0,\ 4)$ и лежат в плоскости $3x+4y+5z-11=0$; 2) скрещиваются; 3) параллельны и лежат в плоскости $4x+3y=0$; 4) совпадают.

1409. 1) совпадают; 2) параллельны и лежат в плоскости $12x-3y+8z=0$; 3) скрещиваются; 4) пересекаются в точке $(10,\ -1,\ 0)$ и лежат в плоскости $x-7y+3z-17=0$.

1411. 1) Прямая и плоскость пересекаются в точке $(0,\ 0,\ 2)$; 2) прямая параллельна плоскости; 3) прямая лежит в плоскости; 4) прямая и плоскость пересекаются в точке $(2,\ 3,\ 1)$.

1412. 1) Прямая и плоскость пересекаются в точке $(2,\ 4,\ 6)$; 2) прямая параллельна плоскости; 3) прямая лежит в плоскости.

1413. $(6,\ -2,\ 6)$. **1414.** $x=1+4t$, $y=-2t$, $z=t$.

1415. $4x+3z=0$, $y+2z+9=0$.

1416. $2y-z+2=0$, $x-7y+3z-17=0$.

1417. $4x+3y-z=0$, $13x+2y-8z=0$.

1418. $x-9y+5z+20=0$, $x-2y-5z+9=0$.

1419. Числа $\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}$ должны быть одного знака.

1420. $x-3y+5z=0$. **1421.** $20x+19y-5z+41=0$. **1422.** $18x-11y+3z-47=0$. **1423.** $x-3y-3z+11=0$. **1424.** $5x+6z=0$.

1425. $(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)(A_1l+B_1m+C_1n)(A_2l+B_2m+C_2n)>0$.

1426. $x=3-t$, $y=2+t$, $z=1+t$. **1427.** $y-2z=0$.

1428. 1) $\cos\alpha=\frac{4}{13}$, $\cos\beta=-\frac{3}{13}$, $\cos\gamma=\frac{12}{13}$;

2) $\cos\alpha=\frac{12}{25}$, $\cos\beta=\frac{9}{25}$, $\cos\gamma=\frac{20}{25}$.

1429. $x-1=\frac{y+5}{\sqrt{2}}=-(z-3)$. **1430.** $\cos\varphi=\pm\frac{72}{77}$. **1431.** $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\frac{\pi}{2}$. **1432.** $\cos\alpha=\frac{6}{11}$; $\cos\beta=\frac{7}{11}$, $\cos\gamma=\frac{6}{11}$.

1433. $\cos\varphi=\pm\frac{98}{195}$.

1434. 1) $\pm\frac{7}{2\sqrt{91}}$; 2) $\pm\frac{9}{\sqrt{2}\sqrt{66}}$.

1435. $\arcsin\frac{33}{\sqrt{46}\sqrt{62}}$. **1436.** $\arcsin\frac{1}{10\sqrt{19}}$.

1437. $x-z+4=0$, $y=0$.

1438. $5x-13y-12z+20=0$, $2x-2y+3z-5=0$.

1439. $x=x_0+At$, $y=y_0+Bt$, $z=z_0+Ct$.

1440. $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}$.

1441. (7, 1, 0). **1442.** (4, -1, 3). **1443.** $x=\frac{3}{7}$, $z=\frac{18}{7}$.

1444. $4x+5y-2z=0$. **1445.** (2, 9, 6).

1446. Такой прямой нет. **1447.** $4x+5z=0$, $41y-63=0$.

1448. $y-2z=0$, $x=3$. **1449.** $y+2z-8=0$, $x+2y-z+5=0$.

1450. $x+y+z-1=0$, $x-1=0$. **1451.** $\sqrt{14}$.

1452. 1) $\sqrt{\frac{35}{6}}$; 2) $8\sqrt{\frac{3}{26}}$.

1453. $x+3y=0$, $3x-y+4z-12=0$, $h=\sqrt{\frac{117}{5}}$.

1454. 1) $\frac{18}{\sqrt{110}}$; 2) 0 (прямые пересекаются); 3) $\frac{16}{\sqrt{102}}$.

1455. 3. **1456.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

1457. $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\,\mathbf{a}=0$ или $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+u(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)+v\,\mathbf{a}$.

1458. $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{a}=0$.

1459. $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2=0$ или $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+u\mathbf{n}_1+v\mathbf{n}_2$.

1460. $\mathbf{r}_0+\mathbf{a}\frac{D-\mathbf{r}_0\mathbf{n}}{\mathbf{a}\mathbf{n}}$.

1461. $\mathbf{r}_0+\mathbf{a}\frac{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\,\mathbf{b}\mathbf{c}}{\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}}$.

1462. $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\,\mathbf{a}_1=0$, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_0)\,\mathbf{a}_2=0$.

1463. $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\mathbf{a}\,[\mathbf{a}\mathbf{n}]=0$, $\mathbf{r}\mathbf{n}=D$. **1464.** $\mathbf{r}_1+\frac{(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}\,\mathbf{a}$.

1465. $2\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0+2\frac{(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}\,\mathbf{a}$.

1466. $r_0+\frac{D-r_0n}{n^2}n$. **1467.** $r_0+2\frac{D-r_0n}{n^2}n$.

1468. $r_0+\frac{(r_1-r_0)ab}{[ab]^2}[ab]$.

1469. $r_0+2\frac{(r_1-r_0)ab}{[ab]^2}[ab]$.

1470. $D_1(n_2n_3n_4)+D_2(n_1n_4n_3)+D_3(n_4n_1n_2)+D_4(n_1n_3n_2)=0$.

1471. $[rn_3][n_1n_2]=D_1(n_2n_3)-D_2(n_1n_3)$.

1472. $\frac{D_1[n_2n_3]+D_2[n_3n_1]+D_3[n_1n_2]}{n_1n_2n_3}$. **1473.** $r=\frac{[aM]}{a^2}+at$.

1474. $r=\frac{[aM]}{a^2}+a\frac{D-Mn}{an}$.

1475. $r_0+a\frac{D-r_0n+dn}{an}$.

1476. 1) $an\neq 0$; 2) $an=0$; 3) $an=0$, $r_0n\neq D$; 4) $an=0$, $r_0n=D$.

1477. 1) $(r_2-r_1)a_1a_2\neq 0$; 2) $(r_2-r_1)a_1a_2=0$, $[a_1a_2]\neq 0$; 3) $[a_1a_2]=0$; 4) $[a_1a_2]=0$, $[(r_2-r_1)a_1]\neq 0$; 5) $[a_1a_2]=[(r_2-r_1)a_1]=0$.

1478. $(r-r_0)an=0$. **1479.** $(r-r_0)ab=0$. **1480.** $(r-r_0)ab=0$.

1481. $\left(r-\frac{[aM]}{a^2}\right)[an]=0$ или $n([ra]-M)=0$.

1482. $(r-r_0)([aM]-r_0a^2)a=0$ или $(r-r_0)(M-[r_0a])=0$.

1483. $(r-r_1)a_1[a_1a_2]=0$, $(r-r_2)a_2[a_1a_2]=0$.

1484. $([ra_1]-M_1)a_1a_2=0$, $([ra_2]-M_2)a_1a_2=0$.

1485. $[r[n_1n_2]]=D_2n_1-D_1n_2$, $r=\frac{[(D_2n_1-D_1n_2)[n_1n_2]]}{[n_1n_2]^2}+[n_1n_2]t$.

1486. $(r-r_0)a=0$, $(r-r_0)(r_1-r_0)a=0$.

1487. $(r-r_0)n_1n_2=0$, $\begin{vmatrix} rn_1-D_1 & rn_2-D_2 \\ r_0n_1-D_1 & r_0n_2-D_2 \end{vmatrix}=0$.

1488. $(r-r_0)a=0$ и $r([r_0a]-M)+r_0M=0$.

1489. $\frac{|D_2n_1-D_1n_2-[r_0[n_1n_2]]|}{|[n_1n_2]|}$. **1490.** $n_1n_2n_3\neq 0$.

1491. $n_1n_2n_3=0$, $[n_1n_2]\neq 0$, $[n_2n_3]\neq 0$ $[n_3n_1]\neq 0$, $D_1[n_2n_3]+D_2[n_3n_1]+D_3[n_1n_2]\neq 0$.

1492. $n_1n_2n_3=0$, $[n_1n_2]^2+[n_2n_3]^2+[n_3n_1]^2\neq 0$, $D_1[n_2n_3]+D_2[n_3n_1]+D_3[n_1n_2]=0$.

1493. $n_1n_2n_3\neq 0$, $n_1n_4n_3\neq 0$, $n_2n_3n_4\neq 0$, $n_2n_4n_1\neq 0$, $D_1(n_2n_3n_4)+D_2(n_1n_4n_3)+D_3(n_2n_4n_1)+D_4(n_1n_3n_2)\neq 0$.

1494. $rn_3[n_1n_2]=D_1n_2n_3-D_2n_1n_3$.

1495. $\frac{D_1[n_2[n_1n_2]]-D_2[n_1[n_1n_2]]+(r_0n_1n_2)[n_1n_2]}{[n_1n_2]^2}$.

1496. $\frac{[aM]+a(r_1a)}{a^2}$.

1497. Числа $(r_1-r_0)(r_2-r_0)a$, $(r_2-r_0)(r_3-r_0)a$, $(r_3-r_0)(r_1-r_0)a$ — одного знака.

1498. $r_0 - a\dfrac{r_0r_1r_2 + r_0r_2r_3 + r_0r_3r_1 + r_1r_3r_2}{a([r_1r_2] + [r_2r_3] + [r_3r_1])}$.

1499. 1) $[n_1n_2] \neq 0$; 2) $[n_1n_2] = 0$; 3) $[n_1n_2] = 0$, $D_1n_2 - D_2n_1 = 0$.

1500. 1) $an \neq 0$; 2) $an = 0$; 3) $an = 0$, $naM - a^2D \neq 0$; 4) $an = 0$, $naM - a^2D = 0$.

1501. Конус вращения. Осью вращения служит биссектриса угла между положительными направлениями осей Ox и Oy. Оси Ox и Oy являются образующими конуса (так что угол в осевом сечении этого конуса равен 90°).

1502. $[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]\cos^2\varphi = [(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma]^2$. **1503.** $\dfrac{x^2+y^2}{r^2} - \dfrac{z^2}{h^2} + 2\dfrac{z}{h} - 1 = 0$.

1504. $xy + yz + zx = 0$. **1505.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0$.

1506. $19x^2 - 29y^2 - 44z^2 - 64xy - 16xz + 8yz - 304x + 512y + 128z + 1216 = 0$. **1507.** $2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2 = 0$.

1508. $\dfrac{x^2+y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{a^2} = 1$. **1509.** $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$. **1510.** $-\dfrac{x^2+y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{a^2} = 1$.

1511. $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1$. **1512.** $x^2 + y^2 = 2pz$. **1513.** $z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q}$.

1514. $x^2 + y^2 - z^2\operatorname{tg}^2\gamma = r^2$. **1515.** $\begin{vmatrix} \dfrac{y-y_0}{\cos\beta} & \dfrac{z-z_0}{\cos\gamma} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{z-z_0}{\cos\gamma} & \dfrac{x-x_0}{\cos\alpha} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{x-x_0}{\cos\alpha} & \dfrac{y-y_0}{\cos\beta} \end{vmatrix}^2 = r^2$.

1516. $\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2} - r} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2} + x}$. **1517.** $y^2 + z^2 = [f(x)]^2$.

1518. $x^2 + y^2 = f^2(z) + g^2(z)$. **1519.** $x = r\cos^2 u$, $y = r\sin u\cos u$, $z = r\sin u$.

1520. Поверхность вращения около оси Oz; u — расстояние точки поверхности от оси Oz и v — угол перпендикуляра из точки поверхности на ось Oz с положительным направлением оси Ox. Эта поверхность вращения пересекает плоскость Oxz по линии $z = f(x)$, $y = 0$.

Указание. Параметры u, v можно рассматривать как полярные координаты основания M_3 перпендикуляра, опущенного из M на плоскость Oxy; $OM_3 = u$, $M_3M = f(u)$. При постоянном v точка описывает некоторую линию, вид которой и расположение не зависят от v.

1521. $x = a\cos v$, $y = a\sin v$, $z = u$, где v — угол перпендикуляра, опущенного из точки поверхности на ось вращения (Oz) с положительным направлением оси Ox, u — расстояние точки от плоскости Oxy.

1522. Из уравнения $x = \operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ находим $z = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$;

$$\mathbf{r} = \{u\cos v,\quad u\sin v,\quad \ln(u \pm \sqrt{u^2-1})\}.$$

1523. Винтовая поверхность, образующие которой пересекают ось Oz и перпендикулярны к ней; u — расстояние точек M винтовой поверхности от оси Oz, v — угол образующей с осью Ox, равный расстоянию точки M от плоскости Oxy.

1524. Образующие этой поверхности составляют с осью вращения Oz угол 45°.

1525. $r = \{vt \sin\alpha\cos\omega t,\quad vt\sin\alpha\sin\omega t,\quad vt\cos\alpha\}$.

1526. Цилиндроид распадается на две поверхности: $(x+y)^2+z^2-2a(x+y)=0$ (эллиптический цилиндр) и $z^4+z^2[(x-y)^2-2a(x+y)]+4a^2xy=0$. **1527.** $\left[\frac{b^2}{c^2}(x+a)^2(c^2-z^2)-\frac{c^2}{b^2}(x-a)^2(b^2-z^2)\right]^2-8a^2y^2\left[\frac{b^2}{c^2}(x+a)^2(c^2-z^2)+\frac{c^2}{b^2}(x-a)^2(b^2-z^2)\right]+16a^4y^4=0$.

1528. $\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(\frac{z}{h}-1\right)^2-\frac{y^2}{b^2}=0$. **1529.** $a^2y^2=2pz(x-a)^2$.

1530. $y^2-z^2=2px$ (гиперболический параболоид). **1531.** $b^2xyz=a^3(x^2+y^2)$.

1532. $[ar]^2=R^2a^2$. **1533.** $[ar]^2=a^2r^2\sin^2\gamma$. **1534.** $\boldsymbol{r}=v\boldsymbol{r}(u)$.

1535. $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)+v\boldsymbol{a}$. **1536.** $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+v(\boldsymbol{r}(u)-\boldsymbol{r}_0)$.

1537. $[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a}]^2=[(\boldsymbol{r}(u)-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a}]^2$.

1538. $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)+v\boldsymbol{a}(u)$.

1539. $$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+u\boldsymbol{a}_1+v\left(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1-u\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2\frac{(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3+u\boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1-u\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_3}{(\boldsymbol{r}_1+u\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3}\right).$$

1540. 1) $(6, -2, 3)$, $r=7$; 2) $(-4, 0, 0)$, $r=4$; 3) $(1, -2, 3)$, $r=6$; 4) $(0, 0, 3)$, $r=4$. **1541.** $\left(\frac{10}{3}, -\frac{14}{3}, \frac{5}{3}\right)$, $r=3$.

1542. $$\left(-\frac{AD}{A^2+B^2+C^2}, -\frac{BD}{A^2+B^2+C^2}, -\frac{CD}{A^2+B^2+C^2}\right).$$

1543. A — внутренняя, B — внешняя, C — принадлежит сфере, D — внешняя.

1544. 1) пересекает; 2) касается в точке $\left(-\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$; 3) не пересекает.

1545. $l(x-a)+m(y-b)+n(z-c)=0$. **1546.** $2x+y+2z-13=0$.

1547. $x(x-x_0)+y(y-y_0)+z(z-z_0)=0$ (сфера).

1548. $x^2+y^2+z^2+Rx=0$ (сфера).

1549. $(x-a)(x-x_0)+(y-b)(y-y_0)+(z-c)(z-z_0)=0$.

1550. $[x(x-x_0)+y(y-y_0)+z(z-z_0)]^2=R[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]$. **1551.** $6x+2y+3z-55=0$.

1552. $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)+(z_0-c)(z-z_0)=0$.

1553. $x_0x+y_0y+z_0z-R^2=0$.

1554. $x^2+y^2+z^2-10z-9=0$.

1555. $x^2+y^2+z^2+22x+16y-6z=0$.

1556. $x^2+y^2+z^2+27x+21y-\frac{33}{2}z+10=0.$

1557. Сфера, для которой отрезок S_1S_2 является диаметром.

1558. $R^2(A^2+B^2+C^2)-D^2=0$. Точка прикосновения:

$$\left(-\frac{AR^2}{D},\ -\frac{BR^2}{D},\ -\frac{CR^2}{D}\right).$$

1559. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4=0$ и

$$x^2+y^2+z^2-\frac{58}{65}x+\frac{116}{65}y-\frac{144}{65}z-\frac{188}{65}=0.$$

1560. $x^2+y^2+(z+1)^2=12$ и $x^2+y^2+(z+4)^2=27.$

1561. $\dfrac{x}{\begin{vmatrix} A_1 & u_1 \\ A_2 & u_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{y}{\begin{vmatrix} B_1 & u_1 \\ B_2 & u_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{z}{\begin{vmatrix} C_1 & u_1 \\ C_2 & u_2 \end{vmatrix}}$,

где $u_1=A_1x+B_1y+C_1z+D_1$, $u_2=A_2x+B_2y+C_2z+D_2$.

1562. $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=[2(x-3)+2(y-2)+(z-3)]^2\times$
$\times[2(x-3)+2(y-2)+z-2]=x(x-3)+y(y-2)+z(z-2).$

1563. $x+y+z=0,\ 9(x^2+y^2+z^2)=[x(x-1)+y(y-2)+z(z+1)]^2.$

1564. $x'=\dfrac{R^2x}{x^2+y^2+z^2},\quad y'=\dfrac{R^2y}{x^2+y^2+z^2},\quad z'=\dfrac{R^2z}{x^2+y^2+z^2}.$

1565. $2ax+2by+2cz-R^2=0.$

1566. $x^2+y^2+z^2+\left(\dfrac{A}{D}x+\dfrac{B}{D}y+\dfrac{C}{D}z\right)R^2=0.$

1567. $\dfrac{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}-R}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}+R}$. **1568.** $4y-5z=0$. **1569.** $\left(\dfrac{31}{12},\ \dfrac{31}{12},\ \dfrac{31}{12}\right)$.

1572. $(l^2+m^2+n^2)R^2=\begin{vmatrix} a-x_0 & b-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} b-y_0 & c-z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2+$
$+\begin{vmatrix} c-z_0 & a-x_0 \\ n & l \end{vmatrix}^2.$

1573. $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z-z_1 & x-x_1 \\ n_1 & l_1 \end{vmatrix}^2=$
$=\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y-y_2 & z-z_2 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z-z_2 & x-x_2 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2.$

1576. 1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) 3; 5) 3; 6) 2; 7) 3; 8) 2; 9) 1.

1577. 1) $(\mathbf{r}_0\mathbf{n}-D)^2>R^2\mathbf{n}^2$; 2) $(\mathbf{r}_0\mathbf{n}-D)^2=R^2\mathbf{n}^2$;
3) $(\mathbf{r}_0\mathbf{n}-D)^2<R^2\mathbf{n}^2$.

1578. $\pm(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=\pm(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=$
$=\pm(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)$ (четыре прямые), при этом $A_i^2+B_i^2+$
$+C_i^2=1$ $(i=1,\ 2,\ 3)$.

1579. $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2<R^2$, $(Aa+Bb+Cc+$
$+D)(Ax_0+By_0+Cz_0+D)<0.$

1580. $\begin{vmatrix} a-x_1 & b-y_1 & c-z_1 \\ x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}^2=R^2\left[\begin{vmatrix} y-y_1 & z-z_1 \\ m & n \end{vmatrix}^2+\right.$
$\left.+\begin{vmatrix} z-z_1 & x-x_1 \\ n & l \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ l & m \end{vmatrix}^2\right].$

1581. 1) $\begin{vmatrix} \frac{b-y_1}{m} & \frac{c-z_1}{n} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{c-z_1}{n} & \frac{a-x_1}{l} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{a-x_1}{l} & \frac{b-y_1}{m} \end{vmatrix}^2 >$
$> R^2(l^2+m^2+n^2)$; 2) пересекаются, если знак $>$ заменить на знак $<$.

1582. $A(x-a)+B(y-b)+C(z-c) \pm R\sqrt{A^2+B^2+C^2}=0$.

1583. $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=17$.

1584. $2(r_1-r_2)r=-R_1^2+r_1^2+R_2^2-r_2^2$.

1585. $2(r_1-r_2)r=-R_1^2+R_2^2+r_1^2-r_2^2$,
$2(r_1-r_3)r=-R_1^2+R_3^2+r_1^2-r_3^2$.

1586. Радиус-вектор радикального центра

$$\frac{(R_2^2-R_1^2+r_1^2-r_2^2)\,[(r_1-r_3)(r_1-r_4)]}{2(r_1-r_2)(r_1-r_3)(r_1-r_4)}+$$
$$+\frac{(R_3^2-R_1^2+r_1^2-r_3^2)\,[(r_1-r_4)(r_1-r_2)]}{2(r_1-r_2)(r_1-r_3)(r_1-r_4)}+$$
$$+\frac{(R_4^2-R_1^2+r_1^2-r_4^2)\,[(r_1-r_2)(r_1-r_3)]}{2(r_1-r_2)(r_1-r_3)(r_1-r_4)}.$$

1587. $r_1+a\,\dfrac{-a(r_1-r_0)\pm\sqrt{R^2a^2-[a(r_1-r_0)]^2}}{a^2}$.

1588. $\left(r-r_1-a\,\dfrac{D-r_1n\pm R\,|n|}{an}\right)^2=R^2$.

1589. $\sqrt{R^2-\dfrac{(r_0n-D)^2}{|n|^2}}$. **1590.** $n^2>D$, $S(-n)$, $R=\sqrt{n^2-D}$.

1591. $r^2-rn\,\dfrac{R^2}{D}=0$ (сфера). **1592.** $nr=\dfrac{1}{2}R^2$ (плоскость).

1593. $(a^2-r_0^2)r^2+2r_0rR^2-R^4=0$ (сфера). **1594.** $(r-\varrho_0)(r_0-\varrho_0)=0$.

1595. $8x^2+5y^2+5z^2-4xy+8yz+4zx+16x+14y+22z-39=0$.

1596. $x^2+y^2+7z^2-16xy-8xz-8yz+62x+44y-32z-11=0$.

1597. $27[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2]=4(2x+2y-z-3)^2$.

1598. $(x-5)^2-24(y^2+z^2)=0$.

1599. $\left(x-\dfrac{x+y+z}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{x+y+z}{3}\right)^2+\left(z-\dfrac{x+y+z}{3}\right)^2=1$.

1600. $\left(x-\dfrac{x+2y-2z}{9}\right)^2+\left(y-2\,\dfrac{x+2y-2z}{9}\right)^2+$
$+\left(z+2\,\dfrac{x+2y-2z}{9}\right)^2=36$.

1601. $8(x^2+y^2)-(z-6)^2=0$ (второй конус вырождается в точку).

1602. $(10x-5y-5z+2)^2+(-5x+10y-5z+11)^2+(5x+5y-$
$-10z+13)^2=294$.

1603. 5. **1604.** 6. **1605.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 2.

1606. $18y^2+50z^2+75xz+225x-450=0$.

1607. Уравнение оси: $r=r_0+\lambda\left[\left(\dfrac{r_1}{r_1}-\dfrac{r_2}{r_2}\right)\left(\dfrac{r_2}{r_2}-\dfrac{r_3}{r_3}\right)\right]$. Уравнение конуса: $\left(r\left(\dfrac{r_1}{r_1}-\dfrac{r_2}{r_2}\right)\left(\dfrac{r_2}{r_2}-\dfrac{r_3}{r_3}\right)\right)^2=r^2\,\dfrac{(r_1r_2r_3)^2}{r_1^2\,r_2^2\,r_3^2}$, r—радиус-вектор произвольной точки конуса, полюс находится в вершине конуса.

1608. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)-\left(\frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}+\frac{nz}{c^2}\right)^2=0.$

1609. 1) $[[ab][ar_0]]^2-c^2[ab]^2>0$; 2) $[[ab][ar_0]]^2-c^2[ab]^2<0$; 3) $[[ab][ar_0]]^2-c^2[ab]^2=0$, $[ab]\neq 0$; 4) $[ab]=0$, $[ar_0]^2=c^2$.

1610. 1) $\{(ab)^2-a^2b^2\cos^2\lambda\}\{(ar_0)^2-a^2r_0^2\cos^2\lambda\}-$ $-\{(ab)(ar_0)-a^2(r_0b)\cos^2\lambda\}^2>0$; 2) $[r_0b]=0$; 3) $[r_0b]=0$, $(ab)^2=$ $=a^2b^2\cos^2\lambda$; 4) $\{(ab)^2-a^2b^2\cos^2\lambda\}\{(ar_0)^2-a^2r_0^2\cos^2\lambda\}-\{(ab)(ar_0)-$ $-a^2(r_0b)\cos^2\lambda\}^2<0$; 5) $(ab)^2-a^2b^2\cos^2\lambda\neq 0$, $\{(ab)^2-$ $-a^2b^2\cos^2\lambda\}\{(ar_0)^2-a^2r_0^2\cos^2\lambda\}-\{(ab)(ar_0)-a^2(r_0b)\cos^2\lambda\}^2=0.$

1611. $(ar_1)^2<a^2r_1^2\cos^2\lambda$.

1612. Пересечение сферы $x(x-x_0)+y(y-y_0)+z(z-z_0)=0$ с данным конусом.

1613. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$. **1614.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}=1$. **1615.** $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}+$ $+\frac{z^2}{7,2}=1$. **1616.** $10x+15y+6z-90=0$.

1617. $a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2=D^2$.

1618. $a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2>D^2$.

1619. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$.

1620. $\left(-\frac{a^2AD}{\Delta},\ -\frac{b^2BD}{\Delta},\ -\frac{c^2CD}{\Delta}\right)$, где $\Delta=a^2A^2+b^2B^2+$ $+c^2C^2$.

1621. $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}-\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}\right)=0.$

1622. $32x+9y+72z=0$.

1623. $\frac{x(x-x_0)}{a^2}+\frac{y(y-y_0)}{b^2}+\frac{z(z-z_0)}{c^2}=0.$

1624. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2-R^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)=0.$

1626. Прямая, сопряженная плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

1627. Линия пересечения состоит из двух эллипсов.

1628. $c\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}x\pm a\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}z+\lambda ac=0$, где λ — любое действительное число по абсолютной величине — меньшее 1.

1629. Линия пересечения данного эллипсоида с эллипсоидом: $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{d^2}$. **1630.** См. 1629.

1631. Пара прямых $x=a\sqrt{a^2-b^2}t$, $y=0$, $z=\pm c\sqrt{b^2-c^2}t$.

1632. 1) $C\left(\frac{Bz}{c^2}-\frac{Cy}{b^2}\right)\left(\frac{Cx}{a^2}-\frac{Az}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)+B\left(\frac{Bz}{c^2}-\frac{Cy}{b^2}\right)\left(\frac{Ay}{b^2}-\right.$ $\left.-\frac{Bx}{a^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+A\left(\frac{Cx}{a^2}-\frac{Az}{c^2}\right)\left(\frac{Ay}{b^2}-\frac{Bx}{a^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0;$

2) $(3z-2y)(x-3z)-2(3z-2y)(2y-x)+(x-3z)(2y-x)=0$ или $x+(2-2\sqrt{3})y-(6-3\sqrt{3})z=0$, $x+(2+2\sqrt{3})y-(6+3\sqrt{3})z=0$.

1633. $\frac{x_0(x-x_0)}{a^2}+\frac{y_0(y-y_0)}{b^2}+\frac{z_0(z-z_0)}{c^2}=0$.

1639. $x^2+y^2=13z^2-14z+10$.

1640. $x^2+y^2=a^2\pm 2az$ — два параболоида вращения.

1641. $z^2-y^2+2x=0$ — гиперболический параболоид.

1642. $x^2\pm 2yz=1$. **1643.** $z^2-2xy-az+\frac{z}{2a}(x+y)^2=0$.

1644. Если $x-z=u(1-y)$, $u(x+z)=1+y$ и $x-z=v(1+y)$, $v(x+z)=1-y$ — две образующие, то $\cos\theta=\pm\frac{(uv-1)^2}{(u^2+1)(v^2+1)}$.

1645. 45°.

1646. $u\cos v\mp\sqrt{u^2-1}=c(1\mp u\sin v)$, $c(u\cos v\pm\sqrt{u^2-1})=1\pm u\sin v$.

1647. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}$.

1648. $x(x-x_0)+y(y-y_0)-z(z-z_0)=0$.

1649. $xy-yz-zx=0$ (конус).

1650. $z^2+xy-xz-yz=0$. **1651.** $x^2-9y^2+4z^2-10z+4=0$.

1652. $(x^2+y^2)(1+2z)+2z^3=0$.

1654. 1) $x-y=0$, $z=0$; 2) $x+y=0$, $z=0$.

1655. $x(x-x_0)+y(y-y_0)-z(z-z_0)=0$.

1657. Касаются горлового эллипса.

1658. Два однопараметрических семейства параллельных прямых.

1659. $\frac{x}{a^2A}=\frac{y}{b^2B}=\frac{z}{c^2C}$. **1660.** Сфера $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2$.

1661. Уравнения полодии $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{p^2}$, где $p=\text{const}$.

1662. $\frac{x}{4}=\frac{z}{-16}$, $y=0$. **1663.** $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}<1$.

1664. $(x-x_0)\frac{x_0}{a^2}+(y-y_0)\frac{y_0}{b^2}+(z-z_0)\frac{z_0}{c^2}=0$.

1665. $$\left[\frac{x_0(x-x_0)}{a^2}+\frac{y_0(y-y_0)}{b^2}+\frac{z_0(z-z_0)}{c^2}\right]^2=$$
$$=\left[\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}\right]\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right).$$

1666. $\frac{11}{25}\left(\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}\right)-\frac{1}{25}(x-6)^2=0$.

1668. Сфера.

1671. Если оси Ox и Oy взаимно перпендикулярны, то $x^2+y^2+k^2z^2=1$, где $k\neq 0$.

1672. Эллипс, гипербола, парабола, две пересекающиеся прямые, две параллельные прямые.

1675. Однополостный гиперболоид при $p \neq 1$ и гиперболический параболоид при $p = 1$.

1676. Плоскость $z + \frac{A+B}{2} = 0$.

1678. Эллипс, гипербола, точка, мнимая линия.

1680. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\pm 1\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\pm 1\right)-$

$-\left(\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}\pm 1\right)^2=0$

(везде берется или $+1$ или -1).

1681. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\pm 1\right)\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}\right)-\left(\frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}-\frac{nz}{c^2}\right)^2=0.$

1682. $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}<-1.$ **1683.** $xy-\lambda z^2+2\mu z=0, \quad \lambda \neq 0,$ $\mu \neq 0.$

1684. $2z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}.$

1686. Эллипсоид в случае $\lambda > -c^2$, однополостный гиперболоид в случае $-b^2 < \lambda < -c^2$, двуполостный гиперболоид в случае $-a^2 < \lambda < -b^2$.

1688. Параметрические уравнения однополостного гиперболоида:

$$x=a\frac{uv+1}{u+v}, \quad y=b\frac{v-u}{v+u}, \quad z=c\frac{uv-1}{u+v};$$

двуполостного: $x=a\cos u \operatorname{tg} v, \quad y=b\sin u \operatorname{tg} v, \quad z=\frac{c}{\cos v}.$

1689. 1) $x^2+y^2-k^2z^2=\mu^2$; 2) $x^2+y^2+\alpha z^2+2\beta xz+2\gamma yz+a_{44}=0$, где $\alpha<\beta^2+\gamma^2$, $a_{44}<0$.

1690. 1) $x^2+y^2-k^2z^2=-\mu^2$; 2) $x^2+y^2+\alpha z^2+2\beta xz+2\gamma yz+$ $+a_{44}=0$, где $\alpha<\beta^2+\gamma^2$, $a_{44}>0$.

1693. Эллипс, парабола, точка, мнимая линия.

1694. $x=-\frac{Ap}{C}, \quad y=-\frac{Bq}{C}.$ **1695.** $\frac{x_0^2}{p}+\frac{y_0^2}{q}<2z_0.$

1696. $\frac{x_0}{p}(x-x_0)+\frac{y_0}{q}(y-y_0)=z-z_0.$

1697. Уравнение плоскости прикосновения: $\frac{x_0x}{p}+\frac{y_0y}{q}=z+z_0$;

$$\left(\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z\right)\left(\frac{x_0^2}{p}+\frac{y_0^2}{q}-2z_0\right)-\left(\frac{x_0x}{p}+\frac{y_0y}{q}-z-z_0\right)^2=0.$$

1698. $\left(\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z\right)\left(\frac{l^2}{p}+\frac{m^2}{q}\right)-\left(\frac{lx}{p}+\frac{my}{q}-n\right)^2=0.$

1699. См. 1676.

1701. Параболоид вращения.

1705. Гипербола, парабола, две пересекающиеся прямые, одна прямая.

1706. $x=-\frac{Ap}{C}$, $y=\frac{Bq}{C}$. **1707.** $\frac{x_0}{p}(x-x_0)-\frac{y_0}{q}(y-y_0)=z-z_0$.

1708. $z=-\lambda xy$, где $\lambda\neq 0$.

1713. Гиперболический параболоид.

1716. Гипербола: $z=\frac{q-p}{2}$, $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=q-p$ (в случае $p\neq q$); в случае $p=q$ — две пересекающиеся прямые (прямолинейные образующие): $z=0$, $x=y$ и $z=0$, $x=-y$.

1720. $C(1,\ 1,\ -1)$; $X^2+Y^2+Z^2+2XY-2YZ+6XZ-1=0$.

1721. Прямая центров $x=1$, $y=t$, $z=-t$, $4XY+4XZ-1=0$.

1722. $a_{11}(x-x_0)^2+a_{22}(y-y_0)^2+a_{33}(z-z_0)^2+$ $+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+2a_{23}(y-y_0)(z-z_0)+2a_{31}(z-z_0)(x-x_0)+$ $+a=0$.

1723. $X+Y+Z=0$. **1724.** $X-Y-Z=0$, $\{0,\ 0,\ 1\}$.

1725. $4x-y-4z+1=0$. **1726.** $\{0;\ 1;\ 0\}$. **1727.** $Y=h$.

1728. $3x+1=0$, $3z-2=0$.

1729. $z=1$; $2x-3y=0$. **1730.** $7x+17y+19z+19=0$.

1731. Указание. Составить уравнение конуса относительно системы координат, оси которой совпадают с линиями касания и прямой пересечения плоскостей.

1732. Указание. Составить уравнение поверхности относительно системы координат, осями которой являются три ребра, исходящие из одной вершины.

1733. $x-4y+2z=0$. **1734.** $(0,\ 0,\ 1)$.

1735. 1) $\varphi=135^\circ$; 2) $\alpha=\beta=60^\circ$, $\gamma=45^\circ$.

1736. $x+y+2z+5=0$, $x+(-3\pm\sqrt{8})\,y-5\pm2\sqrt{8}=0$.

1737. $x-y-z=2k(\sqrt{3}+y-z)$, $k(x-y-z)=\sqrt{3}-y+z$.

1738. $x=u$, $u(y+z)=-x-y-1$ — одна серия и $y+z=v$, $vx=-x-y-0$ — вторая серия.

1739. $u(x+z+1)=y-x+z+2$, $x+z+1=u(y-x+z)$.

1740. $z-1=0$, $x+y-z+3=0$ и $x-z+2=0$, $x+y+2=0$.

1741. $x+2y-2=0$ и $x+2y=0$. **1742.** $4x-5y-2z+2=0$.

1743. $x^2+2y^2+2xy-2x-4y=0$.

1744. $x^2-4xz-8yz=0$; $x+2y+2z-2=0$.

1745. Указание. Уравнение пары плоскостей центральных круговых сечений относительно системы координат, состоящих из осей эллипсоида, имеет вид:

$$(\lambda_1-\lambda_2)\,x_1^2-(\lambda_2-\lambda_3)\,z_1^2=0 \text{ или}$$

$$\left(\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2+\lambda_3z_1^2+\frac{K_4}{I_3}\right)-\left[\lambda_2(x_1^2+y_1^2+z_1^2)+\frac{K_4}{I_3}\right]=0.$$

1746. $x-\lambda=0$, $x+y-z-\mu=0$.

1747. $2x+3\sqrt{2}\,z=9\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}z-2x=9\sqrt{2}$.

1748. $x-(3\pm2\sqrt{2})\,y+\lambda=0$, где λ принимает все действительные значения.

1749. $z+1=0,\ x+2y-2=0$ и $z+1=0,\ 3x+4y-4=0$.

1750. $x+1=0,\ y+1=0$.

1751. 1) две плоскости $2x+y=0,\ y+2z-2=0$;
2) две плоскости $x-2y+3z+2=0,\ x-2y+3z-3=0$;
3) две плоскости $x+2y+3z+4=0,\ 3x-2y+z-6=0$;
4) две плоскости $x+y+z+1=0,\ 5x+4y+3z+2=0$;
5) две плоскости $2x-7y+z+3=0,\ 2x-7y+z+1=0$;
6) двойная плоскость $(4x+3y+10z+7)^2=0$.

1752. 1) эллипсоид; 2) однополостный гиперболоид; 3) двуполостный гиперболоид; 4) конус; 5) эллиптический параболоид; 6) гиперболический параболоид; 7) эллиптический цилиндр; 8) гиперболический цилиндр; 9) параболический цилиндр; 10) гиперболический параболоид; 11) однополостный гиперболоид.

1753. 1) гиперболический параболоид $Z=2X^2-4Y^2$ с вершиной $\left(\frac{3}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$; 2) эллиптический параболоид $Z=X^2+3Y^2$ с вершиной $(0,\ 1,\ -2)$; 3) конус $X^2+2Y^2-3Z^2=0$ с вершиной $(-1,-1,-1)$; 4) пара плоскостей $x+y\pm z=0$; 5) параболический цилиндр $Z^2=5X$; 6) параболический цилиндр $Z=2X^2$; 7) гиперболический цилиндр $Z^2-2X^2=1$; 8) эллипсоид $\frac{X^2}{36}+\frac{Y^2}{9}+\frac{Z^2}{4}=1$ с центром $(3,\ -1,\ 1)$; 9) конус $X^2-Y^2+Z^2=0$; 10) пара плоскостей $x-y\pm(z-1)=0$; 11) однополостный гиперболоид $\frac{X^2}{16}+\frac{Y^2}{4}-\frac{Z^2}{16}=1$ с центром $(5,\ 2,\ 3)$; 12) гиперболический параболоид $X^2-Y^2=-2Z$; 13) параболический цилиндр $X^2-10Y=0$; 14) круглый цилиндр $X^2+Z^2=1$; 15) сфера $(x-1)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2+z^2=\frac{16}{9}$; 16) круглый цилиндр $(x-1)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$; 17) круглый конус $X^2+Y^2-Z^2=0$; 18) пара плоскостей $(2x-1)\pm(y-2)=0$.

1754. Однополостный гиперболоид $\frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}-\frac{Z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$, центр $\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$; координаты единичных векторов новой системы $e_1'=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, $e_2'=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$, $e_3'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\right\}$.

1755. Эллиптический цилиндр $\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}+\frac{Y^2}{1}=1$, уравнения оси симметрии $x=t$, $y=2+2t$, $z=-1-t$, вектор оси $O'X$

$$e_1'=\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\},\text{ оси } O'Y\ e_2'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

1756. Параболический цилиндр $6X^2-2\sqrt{3}Y=0$.

1757. Две параллельные плоскости $2x-3y+z=-1\pm\sqrt{6}$.

1758. Эллипсоид $\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{1}+\frac{Z^2}{\frac{2}{3}}=1$, центр $(1,\ 2,\ -1)$,

$$e_1'=\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\},\ e_2'=\left\{\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right\},\ e_3'=\left\{\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right\}.$$

1759. Двуполостный гиперболоид $\frac{X^2}{\frac{4}{5}}+\frac{Y^2}{\frac{4}{15}}-\frac{Z^2}{\frac{4}{25}}=-1$, центр $\left(0,\ 1,\ -\frac{2}{5}\right)$,

$$e_1'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right\},\ e_2'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right\},\ e_3'=\{0,\ 0,\ 1\}.$$

1760. Конус вращения $X^2+Y^2-2Z^2=0$, вершина $(1,\ 1,\ -1)$, вектор, параллельный оси конуса, $\{2,\ 1,\ -2\}$.

1761. Эллиптический параболоид $\frac{X^2}{\frac{5}{2\sqrt{2}}}+\frac{Y^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=2Z$. Единичный вектор оси параболоида, направленный в сторону вогнутости, $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right\}$, векторы $\{1,\ 1,\ -2\}$ и $\{1,\ 1,\ 1\}$ параллельны главным осям сечений, перпендикулярных к оси параболоида, вершина $\left(-\frac{1}{40},\ -\frac{19}{40},\ \frac{1}{2}\right)$.

1762. Эллиптический цилиндр $\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{1}=1$, $(0,\ 1,\ 0)$ точка на оси цилиндра; $\{1,\ 0,\ 1\}$ — вектор параллельный оси цилиндра; $\{1,\ 1,\ -1\}$ и $\{-1,\ 2,\ 1\}$ — векторы параллельные главным осям сечений, перпендикулярных к оси цилиндра.

1763. 1) однополостный гиперболоид $\frac{X^2}{\frac{1}{3}}+\frac{Y^2}{\frac{1}{6}}-\frac{Z^2}{\frac{1}{2}}=1$, центр $O'\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, единичные векторы осей

$e_1' = \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, $e_2' = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$,

$e_3 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$;

2) круглый цилиндр $X^2+Y^2=\frac{1}{6}$, уравнения оси $5x-2y-z+5=0$; $x-y+z+1=0$;

3) гиперболический цилиндр $X^2-Y^2=\frac{1}{3}$, уравнения оси центров $x+2y-5z+1=0$, $x-y+z+1=0$. Направление действительной оси главного сечения $e_1' = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, направление мнимой оси $e_2' = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

1764. $\dfrac{X^2}{\frac{4}{7\sqrt{14}}} - \dfrac{Y^2}{\frac{2}{\sqrt{14}}} = 2Z$ — гиперболический параболоид; $p=\frac{4}{7\sqrt{14}}$, $q=\frac{2}{\sqrt{14}}$; положительное направление оси параболы, полученной в сечении поверхности плоскостью $O'XZ$, определяется вектором $\{1, 2, -3\}$. Положительное направление оси $O'X$ определяется вектором $\{4, 1, 2\}$. Положительное направление оси $O'Y$ определяется вектором $\{-1, 2, 1\}$, вершина $O'\left(-\frac{617}{392}, -\frac{113}{196}, \frac{1011}{392}\right)$. **1765.** Гиперболический параболоид $7X^2-2Y^2-\frac{8Z}{\sqrt{14}}=0$. Вершина $\left(-\frac{183}{784}, -\frac{499}{784}, \frac{509}{392}\right)$. Векторы, определяющие направления осей $O'X$, $O'Y$, $\{2, 4, 1\}$ и $\{1, -1, 2\}$. Вектор $\{-3, 1, 2\}$ направлен по оси параболоида в сторону оси главного сечения с меньшим параметром (плоскость $O'XZ$).

1766. 1) Оси симметрии сохранятся; новые цилиндры будут гомотетичны начальному; 2) ось симметрии сдвинется параллельно самой себе; новый цилиндр будет подобен первоначальному.

1767. 1) Произойдет перенос цилиндра без изменения его параметра, направления вогнутости и направления образующих; 2) направление образующих изменится, параметр изменится.

1769. $\lambda=\pm 1$; $\mu=\pm\sqrt{2}$ определяются из условий $I_3=0$, $K_4=0$, $I_1^2=4I_2$. **1770.** $ab+bc+ca=0$.

1771. Характеристическое уравнение имеет кратный корень $\lambda_1=\lambda_2=1$, $y=0$, $\lambda x+z+\lambda^2-\lambda-1=0$ — уравнения оси вращения.

1772. Два конуса $2x^2-4xy+(1\pm\sqrt{5})\ z^2=0$, ось вращения одного конуса $z=0$, $(1+\sqrt{5})x-2y=0$, ось вращения другого конуса $z=0$, $(1-\sqrt{5})x-2y=0$.

1773. 1) Если $-\infty < m < -1$ — эллипсоид; 2) если $m=-1$ — эллиптический цилиндр; 3) если $-1 < m < \frac{1}{2}$ — однополостный гиперболоид; 4) если $m=\frac{1}{2}$ — конус; 5) если $\frac{1}{2} < m < 1$ — двуполостный гиперболоид; 6) если $m=1$ — две мнимые пересекающиеся плоскости; 7) если $m > 1$ — эллипсоид.

1774. $4\lambda^2+\mu^2-4\lambda\mu-2\lambda-4\mu+4=0$. **1775.** $a_{11}x^2+a_{22}y^2+$ $+a_{33}z^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_3z=0$. **1776.** $b=\sqrt[4]{-\frac{K_4}{\lambda_1\lambda_2}}$.

1777. Принимая эти прямые за ось координат, получим $I_1=0$.

1778. Результат подстановки координат точки M в левую часть уравнения цилиндра должен быть равен $\frac{K_3}{I_2}$.

1779. Две асимптотические плоскости.

1780. Если все соответствующие коэффициенты их уравнений, кроме, может быть, свободных членов, пропорциональны.

1781. Если $\frac{K_4}{I_3}+b-a>0$, $\frac{K_4}{I_3}>0$, — однополостный гиперболоид; если $\frac{K_4}{I_3}+b-a<0$, $\frac{K_4}{I_3}<0$, — однополостный гиперболоид; если $\frac{K_4}{I_3}+b-a<0$, $\frac{K_4}{I_3}>0$, — двуполостный гиперболоид; если $\frac{K_4}{I_3}+b-a>0$, $\frac{K_4}{I_3}<0$, — двуполостный гиперболоид; если $\frac{K_4}{I_3}+$ $+b-a=0$ — асимптотический конус.

1782. Результат подстановки координат данной точки в левую часть уравнения гиперболоида должен быть заключен между 0 и $\frac{K_4}{I_3}$. **1783.** $I_3=K_4=K_3=I_1=0$, $I_2\neq 0$. **1784.** 1) $I_3=K_3=0$, $I_2^2=4I_2$, $I_1K_3<0$; 2) $K_4=0$, I_1I_3 или $I_2\leq 0$ и равны два корня характеристического уравнения; 3) $K_4<0$, $3I_2=I_1^2$, $27I_3=I_2^3$.

1785. $\frac{\pi\sqrt{-K_4^3}}{I_3^2}$. **1786.** Координаты центра эллипсоида.

1787. При изменении a по одну сторону от числа $a-\frac{K_4}{I_3}$ будем получать эллипсоиды, гомотетичные с данными; при замене свободного члена числом $a-\frac{K_4}{I_3}$ получаем уравнение, которому удовлетворяют координаты только центра симметрии, а при изменении свободного члена по другую сторону от указанного числа получим мнимые эллипсоиды.

1788. $\frac{1}{\lambda_1}$. **1789.** $2F(x_0, y_0, z_0)\cdot I_1<0$. **1790.** $I_1\cdot 2F(x_0, y_0, z_0)<0$.

1791. $\operatorname{tg}\alpha_{1,2}=\pm\frac{2\sqrt{-I_2}}{I_1}$. **1792.** $I_1\cdot 2F(x_0, y_0, z_0)<0$.

1793. $d=2\frac{\sqrt{-K_2}}{|I_1|}$. **1794.** $I_3=0$, $K_4<0$, $I_1^2=4I_2$.

1795. $z^2=\pm 2xy$. **1796.** $\frac{xy}{c}+\frac{yz}{a}+\frac{zx}{b}=1$.

1797. $y^2+z^2+\frac{p}{r}xy-2px-2ry=0$.

1798. $x^2+y^2+z^2+\frac{a^2+b^2}{ab}xy-2ax-2by=0$.

1799. Эллиптический цилиндр $(x+y-r)^2+z^2=r^2$.

1800. $x^2+y^2-12x-18y-2z+32=0$.

1801. $x^2+2y^2+z^2+2xz-3x-5z=0$.

Указание. Предварительно составить уравнение параболоида относительно новой системы координат, координатная плоскость $O'x'y'$ которой совпадает с плоскостью $x-z=0$.

1802. $x^2+y^2+xz-yz-2rx=0$. **1803.** $z^2+3xz-yz+6x+2y-4=0$ и $z^2-2xy+2xz-yz+4x+2y-4=0$.

1804. Эллиптический параболоид $x^2+y^2-2z-1=0$.

1805. $x^2+3z^2-4xy+6z-1=0$.

1806. 1) $a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_3z=0$; 2) $2a_{12}xy+2a_3z=0$.

Из условия принадлежности осей Ox, Oy поверхности следует, что $a_{11}=a_1=a_2=a_{22}=a=0$; так как диаметр сопряжен с плоскостью Oxy, то $a_{13}=a_{23}=0$. В случае параболоида $a_{33}=0$.

1807. $\frac{(x-y+1)^2}{32}+\frac{(x+y-2z)^2}{24}+\frac{(x+y+z-1)^2}{3}=4$.

1808. $x+y+z\pm 1=0$ — две плоскости.

1809. Однополостный гиперболоид

$$4(x+y+z)^2-3(2x-y-z)^2+(y-z+1)^2=1.$$

1810. $x^2+y^2+(l^2+m^2)z^2-2lxz-2myz+2a_3z-r^2=0$, $a_3\neq 0$.

1811. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{1}{\gamma^2}\left(1-\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}\right)z^2-\frac{\alpha x}{a^2}-\frac{\beta y}{b^2}=0$, если $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ — уравнение данного эллипса и (α, β, γ), $(\alpha, \beta, -\gamma)$ — координаты данных точек, симметричных относительно плоскости данного эллипса.

1812. Поверхность второго порядка $(x-a)F_x+(y-b)F_y+(z-c)F_z=0$, если $2F(x, y, z)=0$ — уравнение данной поверхности. **1813.** $4x^2+y^2-z^2=1$.

1814.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 & x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 & y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 & z \\ a_1 & a_2 & a_3 & a & -(x^2+y^2+z^2) \\ x & y & z & -(x^2+y^2+z^2) & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Указание. Записать уравнение поверхности в тангенциальных координатах.

1815. $k^2x^2-y^2+(k^2-1)z^2=(k^2-1)c^2$. **1816.** $kxy+(k^2+1)cz=0$.
1817. $x^2+y^2+2z^2-r^2=0$, где r — радиус данной окружности.
1818. $y^2+z^2=2px$.

1819. Указание. l, m, n — координаты направляющего вектора главного направления определяются из системы:

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)l+a_{12}m+a_{13}n-A\beta&=0,\\ a_{21}l+(a_{22}-\lambda)m+a_{23}n-B\beta&=0,\\ a_{31}l+a_{32}m+(a_{33}-\lambda)n-C\beta&=0,\\ Al+Bm+Cn&=0, \end{aligned}$$

где λ — корень уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & A\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & B\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & C\\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}=0.$$

1820. $4x-3y-5z+4=0$. Плоскость, параллельная плоскости искомой параболы и проходящая через начало координат, имеет с конусом две совпадающие образующие.

1821. $2x+y+2+\lambda(y+z)=0$ при $\lambda<-\frac{5}{2}$.

1822. Определить взаимно перпендикулярные асимптотические направления; $x-y+(-2\pm\sqrt{7})(2x-z)=0$.

1823. Параметр параболы $p=\frac{3}{2\sqrt{2}}$, уравнения оси параболы $2y+1=0$, $x+y+z-1=0$, вершина $\left(\frac{1}{8}, \frac{-1}{2}, \frac{11}{8}\right)$, вектор оси параболы, направленный в сторону ее вогнутости, $\{1, 0, -1\}$.

1824. $\frac{27-\sqrt{33}}{12}X^2+\frac{27+\sqrt{33}}{12}Y^2-1=0$, центр совпадает с началом системы координат, главные направления:
оси OX: $\{\sqrt{33}+15, \ -12-4\sqrt{33}, \ -18+2\sqrt{33}\}$,
оси OY: $\{-15+\sqrt{33}, \ 12-4\sqrt{33}, \ 18+2\sqrt{33}\}$.

1825. $x=\frac{3}{4}+t$, $y=\frac{3}{4}+t$, $z=\frac{1}{4}+t$. **1826.** $y+2z=0$.

1827. $-\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\beta^2+\frac{1}{\lambda_1}-2\gamma+\lambda_1R^2=0$, $\alpha=0$ — парабола. Написать уравнение семейства поверхностей $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2-2z-\sigma[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-R^2]=0$ и потребовать, чтобы выполнялись условия $I_3=0$, $K_1=0$, $K_2=0$.

1828. $x^2+y^2+z^2\pm\sqrt{3}xz-yz-1=0$. Из условий $I_3=K_4=0$ следует, $a_{33}-a_{13}^2-a_{23}^2=0$, $-a_3^2=0$; так как цилиндр проходит через окружность $x^2+y^2-1=0$, $z=0$, то уравнение цилиндра имеет вид: $x^2+y^2-1+a_{33}z^2+2a_{13}zx+2a_{23}zy=0$. Эта поверхность пересекается со сферой $x^2+y^2+z^2-1=0$ по двум окружностям.

1829. $a=1,\ b=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **1830.** $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **1831.** $p=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

1832. Если $D^2 < A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2$, то в сечении — действительный эллипс; если $D^2=A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2$, то две мнимые пересекающиеся прямые; если $D^2 > A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2$, то мнимый эллипс.

1833. Если $C^2c^2 > A^2a^2+B^2b^2$, то в сечении — эллипс; если $C^2c^2 < A^2a^2+B^2b^2$ и $D^2+C^2c^2-A^2a^2-B^2b^2 \neq 0$, то гипербола; если $C^2c^2 < A^2a^2+B^2b^2$, $D^2+C^2c^2-A^2a^2-B^2b^2=0$, то две пересекающиеся прямые; если $C^2c^2=A^2a^2+B^2b^2$ и $D\neq 0$, то парабола; если $C^2c^2=A^2a^2+B^2b^2$, $D=0$, то две параллельные прямые.

1834. По гиперболе. **1835.** По эллипсу. **1836.** Если $C^2c^2 > A^2a^2+B^2b^2$, $D^2 < C^2c^2-A^2a^2-B^2b^2$, то в сечении — мнимый эллипс; если $C^2c^2 > A^2a^2+B^2b^2$, $D^2 > C^2c^2-A^2a^2-B^2b^2$, то действительный эллипс; если $C^2c^2 > A^2a^2+B^2b^2$, $D^2=C^2c^2-A^2a^2-B^2b^2$, то две мнимые пересекающиеся прямые; если $C^2c^2-A^2a^2-B^2b^2 < 0$, то гипербола; если $C^2c^2=A^2a^2+B^2b^2$, $D\neq 0$, то парабола; если $C^2c^2=A^2a^2+B^2b^2$, $D=0$, то две мнимые параллельные прямые.

1837. Если $C\neq 0$, $2DC > B^2q+A^2p$, то мнимый эллипс; если $C\neq 0$, $2DC=B^2q+A^2p$, то две мнимые пересекающиеся прямые; если $C\neq 0$, $2DC < B^2q+A^2p$, то эллипс; если $C=0$, то парабола.

1838. Если $C\neq 0$, $2DC\neq -qB^2+pA^2$, то гипербола; если $C\neq 0$, $2DC=-qB^2+pA^2$, то две пересекающиеся прямые; если $C=0$, $qB^2-pA^2\neq 0$, то парабола; если $C=0$, $qB^2-pA^2=0$, то две совпавшие прямые.

1839. Эллипс, если $C^2c^2 > A^2a^2+B^2b^2$, $D\neq 0$; гипербола, если $C^2c^2 < A^2a^2+B^2b^2$, $D\neq 0$; две пересекающиеся прямые, если $C^2c^2 < A^2a^2+B^2b^2$, $D=0$; две мнимые пересекающиеся прямые, если $C^2c^2 > A^2a^2+B^2b^2$, $D=0$; парабола, если $C^2c^2=A^2a^2+B^2b^2$, $D\neq 0$; две совпадающие прямые, если $C^2c^2=A^2a^2+B^2b^2$, $D=0$.

1840. $\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}x \pm \frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}z+\lambda\frac{ac}{b}=0$, где $|\lambda|<1$.

1841. $\pm\sqrt{\frac{p-q}{p}}y+\sqrt{\frac{q}{p}}z+(p-q)\sqrt{\frac{q}{p}}\lambda=0$, где $\lambda<\frac{1}{2}$

или $\pm\sqrt{\frac{p-q}{q}}y+z+\lambda(p-q)=0,\ \lambda<\frac{1}{2}$.

1842. $c\sqrt{a^2-b^2}\,y \pm b\sqrt{a^2+c^2}\,z+\lambda=0$ при любом значении λ.

1843. $\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2+c^2}}y \pm \frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{a\sqrt{b^2+c^2}}z+\lambda\frac{bc}{a}=0$, где $|\lambda|>1$.

1844. $c\sqrt{a^2-b^2}\,y \pm b\sqrt{a^2+c^2}\,z+D=0$, где $D\neq 0$.

1845. По двум параллельным прямолинейным образующим.

1846. Указание. Определить I_2 для плоского сечения.

1847. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 & a_1 & A \\ a_{21} & a_{22} & a_2 & a_2 & B \\ a_{31} & a_{32} & a_3 & a_3 & C \\ a_1 & a_2 & a_3 & a & D \\ A & B & C & D & 0 \end{vmatrix}=0.$$

1848. Сечения существуют, если уравнение $\frac{B^2}{a^2}-\frac{A^2}{b^2}=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}$ допускает решения A, B такие, что $A^2+B^2<1$.

1849. Средняя полуось b.

1850. Если $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ — уравнение однополостного гиперболоида и $a>b$, то $R=a$, а если $b>a$, то $R=b$.

1851. Плоскость $Ax+By+Cz+D=0$, $A^2+B^2+C^2=1$ рассекает гиперболический параболоид по равносторонней гиперболе, если $C\neq 0$, $pA^2-qB^2+(p-q)C^2=0$, $D\neq 1/2(q-p)C$.

1852. Плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ определяются условиями:

$$A^2+B^2+C^2=1,\ C^2c^2<A^2a^2+B^2b^2,\quad D^2+C^2c^2-A^2a^2-B^2b^2\neq 0,$$

$$A^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+B^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+C^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=0.$$

Решение возможно, если $b>c$ или $a>c$.

1853. Указание. Принять плоскость, содержащую линию второго порядка пересечения поверхности, за плоскость Oxy.

1854. Указание. Если линии принадлежат одной поверхности, то две точки пересечения общей прямой плоскости с поверхностью будут принадлежать каждой из двух данных линий. Если две линии имеют общие точки, то докажем принадлежность этих линий одной поверхности второго порядка, составив уравнение линий относительно системы координат, две координатные плоскости которой есть данные плоскости.

1855. Указание. Принять плоскости этих линий за координатные плоскости.

1856. Указание. Доказательство необходимости: пусть A и B — матрицы квадратичных форм данных поверхностей; существует ортогональное преобразование, приводящее матрицы квадратичных форм обеих поверхностей к диагональной форме λ и μ. Если C — матрица преобразования, то $C^{-1}AC=\lambda$, $C^{-1}BC=\mu$; отсюда $AB=C\lambda\mu C^{-1}$, $BA=C\mu\lambda C^{-1}$, но $\lambda\mu=\mu\lambda$, поэтому $AB=BA$.

1857. Указание. Если оба сечения проходят через ось параболоида, то, принимая их за плоскости OXZ, OYZ, а касательную плоскость в вершине параболоида за плоскость OXY, получим уравнение $2z=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$. Отсюда $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=a_{11}+a_{22}=I_1$.

1858. Пересечение поверхности четвертого порядка

$$-\frac{y^2}{b^2}(x^2+y^2+z^2)+\frac{c^2x^2}{a^2}+\frac{a^2z^2}{c^2}+2y^2-b^2=0$$

с поверхностью однополостного гиперболоида и будет искомым геометрическим местом. Плоскости, параллельные касательным плоскостям в точках этой кривой, пересекают однополостный гиперболоид по равносторонним гиперболам.

1859. Указание. Если $e_1=\{l_1, m_1, n_1\}$, $e_2=\{l_2, m_2, n_2\}$ — единичные векторы, параллельные главным направлениям параболоида, а X, Y, Z — координаты в канонической системе координат, то $2F-\frac{1}{\lambda_1}(l_1F_x+m_1F_y+n_1F_z)^2-\frac{1}{\lambda_2}(l_2F_x+m_2F_y+n_2F_z)^2=2F-$ $-\frac{1}{\lambda_1}[\lambda_1(l_1x+m_1y+n_1z)+l_1a_1+m_1a_2+n_1a_3]^2-\frac{1}{\lambda_2}[\lambda_2(l_2x+$ $+m_2y+n_2z)+l_2a_1+m_2a_2+n_2a_3]^2=2a_3'z$, т. е. равно линейной функции от x, y, z. Исключая из этого выражения слагаемые, содержащие вторые степени координат, получаем нужное выражение.

1861. Указание. Принять за ось Oz системы координат образующую линейчатой поверхности.

1862. $\operatorname{tg}\varphi_{1,2}=\pm\frac{2ac\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}{b^2(a^2+c^2)-2a^2c^2}$; плоскости будут перпендикулярны при условии $b^2(a^2+c^2)-2a^2c^2=0$.

1863. $\operatorname{tg}\varphi_{1,2}=\pm\frac{2cb\sqrt{(a^2+c^2)(a^2-b^2)}}{a^2b^2-a^2c^2+2b^2c^2}$;

прямые будут перпендикулярны, если $a^2b^2-a^2c^2+2b^2c^2=0$.

1864.

$$x=-\frac{\begin{vmatrix}\alpha & B_1 & C_1\\ \beta & B_2 & C_2\\ D_3+\lambda\alpha^2+\mu\beta^2 & B_3 & C_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}};\quad y=-\frac{\begin{vmatrix}A_1 & \alpha & C_1\\ A_2 & \beta & C_2\\ A_3 & D_3+\lambda\alpha^2+\mu\beta^2 & C_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}};$$

$$z=-\frac{\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & \alpha\\ A_2 & B_2 & \beta\\ A_3 & B_3 & D_3+\lambda\alpha^2+\mu\beta^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}},$$

где $\alpha=\frac{[N_1N_2][N_2N_3]}{2\lambda[N_1N_2]^2}$, $\beta=\frac{[N_1N_2][N_3N_1]}{2\mu[N_1N_2]^2}$, причем $N_j=$ $=\{A_j,\ B_j,\ C_j\}$ $(j=1,\ 2,\ 3)$.

1865. $2x^2-6z^2=1-2R^2$, $y=0$. Если $R\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$, то гипербола; если $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$, то две прямые. **1867.** $x'=x+z$, $y'=y+z$, $z'=z$.

1868. $(2,\ 0,\ -1)$. **1869.** $x'=c_{11}x$, $y'=c_{22}y$, $z'=c_{33}z$.

1870. $x'=x+c_{13}z$, $y'=y+c_{23}z$, $z'=c_{33}z$.

1871. $x'=c_{11}x+c_{12}y$, $y'=c_{21}x+c_{22}y$, $z'=c_{31}x+c_{32}y+z$.

1872. $x'=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z+\frac{2}{3}$; $y'=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z+\frac{2}{3}$; $z'=-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}$.

1873. $x'=2x$, $y'=2y$, $z'=x+y+z$. **1874.** Конус $a_{11}x^2+$ $+a_{22}y^2+a_{33}z^2+(a_{12}+a_{21})xy+(a_{13}+a_{31})xz+(a_{23}+a_{32})yz=0$.

1875. 1) $\{-6,\ 6,\ 1\}$, $\{8,\ 8,\ 7\}$, $\{0,\ 0,\ 1\}$;
2) $x'^*=x^*$, $y'^*=3y^*$, $z'^*=-5z^*$.

1876. Три попарно ортогональных вектора $e_1' = \{1,\ -1,\ 1\}$, $e_2' = \{1,\ 2,\ 1\}$ $e_3' = \{1,\ 0,\ -1\}$ переходят при данном преобразовании в векторы, им коллинеарные; данное преобразование может быть представлено как произведение тождественного преобразования и трех взаимно перпендикулярных растяжений с коэффициентами $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 2$ в направлении векторов e_1', e_2', e_3' и отражение от плоскости, коллинеарной векторам e_1', e_2'.

1877. Координаты a, b, c направляющего вектора искомой прямой определяются из уравнений:

$$(c_{11}-1)\,a + c_{12}b + c_{13}c = 0, \quad c_{21}a + (c_{22}-1)\,b + c_{23}c = 0,$$
$$c_{31}a + c_{32}b + (c_{33}-1)\,c = 0.$$

1878. $\cos\varphi = \dfrac{c_{11}+c_{22}+c_{33}-1}{2}$.

1879. $(c_{32}-c_{23})\,a + (c_{31}-c_{13})\,b + (c_{21}-c_{12})\,c > 0$.

1880. $e = \{-1,\ -2,\ 0\}$, $\cos\varphi = \dfrac{2}{3}$.

Указание. См. задачу 1877.

1881. $x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{\sqrt{2}}z$, $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y$,
$z' = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{\sqrt{2}}z$.

1882. $x' = [a^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi]\,x + [ab\,(1-\cos\varphi) - c\sin\varphi]\,y + [ac(1-\cos\varphi)+b\sin\varphi]\,z$, $y' = [ab\,(1-\cos\varphi)+c\sin\varphi]x + [b^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi]\,y + [bc\,(1-\cos\varphi) - a\sin\varphi]\,z$, $z' = [ac\,(1-\cos\varphi) - b\sin\varphi]\,x + [bc\,(1-\cos\varphi)+a\sin\varphi]\,y + [c^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi]\,z$ или в векторной форме $r' = r\cos\varphi + [er]\sin\varphi + e\,(er)\,(1-\cos\varphi)$, где $r = \{x,\ y,\ z\}$ — произвольный вектор, $r' = \{x',\ y',\ z'\}$ — его образ и $e = \{a,\ b,\ c\}$ — направляющий вектор неподвижной прямой, определяющий направление вращения.

1883. 1) $(-2:1:1:0)$; 2) $(1:2:-6:0)$.

1884. 1) Плоскость проходит через вершину координатного тетраэдра $O_1\,(1:0:0:0)$; 2) плоскость проходит через ребро координатного тетраэдра $O_1O_2: x_3 = 0,\ x_4 = 0$; 3) плоскость совпадает с гранью координатного тетраэдра $O_1O_2O_3: x_4 = 0$.

1885. Даны две точки: $A\,(a_1:a_2:a_3:a_4)$, $B\,(b_1:b_2:b_3:b_4)$; показать, что 1) если $a_1:a_2:a_3:a_4 = b_1:b_2:b_3:b_4$, то обе точки совпадают; 2) если $a_1:a_2:a_3 = b_1:b_2:b_3$, то прямая, соединяющая точки A и B, проходит через вершину координатного тетраэдра $O_4\,(0:0:0:1)$; 3) если $a_1:a_2 = b_1:b_2$, то прямая, соединяющая точки A и B, пересекает ребро координатного тетраэдра $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

1887. 1) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1' & a_2' & a_3' & a_4' \\ b_1' & b_2' & b_3' & b_4' \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \\ v_1' & v_2' & v_3' & v_4' \end{vmatrix} = 0$;

3) $(u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 + u_4a_4)\,(v_1b_1 + v_2b_2 + v_3b_3 + v_4b_4) = (u_1b_1 + u_2b_2 + u_3b_3 + u_4b_4)\,(v_1a_1 + v_2a_2 + v_3a_3 + v_4a_4)$.

1888. $3x_1+11x_2+2x_4=0, \quad 7x_1+17x_2-17x_3-x_4=0.$

1889. $x_1=8\alpha+45\beta, \quad x_2=27\alpha-36\beta, \quad x_3=-20\alpha+30\beta, \quad x_4=-16\alpha+5\beta,$

1890. $x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2, \quad x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2, \quad x_3'=a_{33}x_3+a_{34}x_4,$
$x_4'=a_{43}x_3+a_{44}x_4.$

1891. $x_1'=\lambda x_1, \quad x_2'=\lambda x_2, \quad x_3'=\mu x_3, \quad x_4'=\mu x_4.$

1892. $x_1'=a_{13}x_3+a_{14}x_4, \quad x_2'=a_{23}x_3+a_{24}x_4, \quad x_3'=a_{31}x_1+a_{32}x_2,$
$x_4'=a_{41}x_1+a_{42}x_2.$

1893. $x_1'=a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4, \quad x_2'=a_{21}x_1+a_{23}x_3+a_{24}x_4,$
$x_3'=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{34}x_4, \quad x_4'=a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3.$

1894. $x_1'=x_2+x_3+x_4, \quad x_2'=x_1+x_3+x_4, \quad x_3'=x_1+x_2+x_4,$
$x_4'=x_1+x_2+x_3.$

1895. $a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{34}x_4x_3=0.$

1896. Линия второго порядка, лежащая в плоскости, проходящей через данную точку и поляру точки пересечения данной прямой с плоскостью данной кривой относительно этой кривой.

1897. Отнесем поверхность к автополярному тетраэдру, две вершины которого $O_1(1:0:0:0)$ и $O_2(0:1:0:0)$ совпадают с вершинами конусов; тогда уравнение поверхности будет иметь вид:

$$\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\lambda_3x_3^2+\lambda_4x_4^2=0,$$

а уравнения конусов соответственно будут:

$$\lambda_2x_2^2+\lambda_3x_3^2+\lambda_4x_4^2=0, \quad \lambda_1x_1^2+\lambda_3x_3^2+\lambda_4x_4^2=0.$$

Вычитая одно уравнение из другого, получим: $\lambda_1x_1^2-\lambda_2x_2^2=0$ — уравнение пары плоскостей, в которых и лежат линии пересечения конусов.

1898.

$$\begin{vmatrix} a_1F_{x_1}+a_2F_{x_2}+a_3F_{x_3}+a_4F_{x_4} & b_1F_{x_1}+b_2F_{x_2}+b_3F_{x_3}+b_4F_{x_4} \\ a_1\Phi_{x_1}+a_2\Phi_{x_2}+a_3\Phi_{x_3}+a_4\Phi_{x_4} & b_1\Phi_{x_1}+b_2\Phi_{x_2}+b_3\Phi_{x_3}+b_4\Phi_{x_4} \end{vmatrix}=0.$$

1899. $x:y:z:t=$

$$=\begin{vmatrix} F_{y_1} & F_{z_1} & F_{t_1} \\ \Phi_{y_1} & \Phi_{z_1} & \Phi_{t_1} \\ \Psi_{y_1} & \Psi_{z_1} & \Psi_{t_1} \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} F_{z_1} & F_{t_1} & F_{x_1} \\ \Phi_{z_1} & \Phi_{t_1} & \Phi_{x_1} \\ \Psi_{z_1} & \Psi_{t_1} & \Psi_{x_1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_{t_1} & F_{x_1} & F_{y_1} \\ \Phi_{t_1} & \Phi_{x_1} & \Phi_{y_1} \\ \Psi_{t_1} & \Psi_{x_1} & \Psi_{y_1} \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} F_{x_1} & F_{y_1} & F_{z_1} \\ \Phi_{x_1} & \Phi_{y_1} & \Phi_{z_1} \\ \Psi_{x_1} & \Psi_{y_1} & \Psi_{z_1} \end{vmatrix}.$$

1900.

$$\begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z & F_t \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z & \Phi_t \\ \Psi_x & \Psi_y & \Psi_z & \Psi_t \\ A & B & C & D \end{vmatrix}=0.$$

1901. $F_x^2-F_y^2-2F_zF_t=0$ и плоскость $F_z=0$; для второго семейства прямолинейных образующих получаем ту же поверхность.