Aydın Əliyev,
Vladimir Piriverdiyev

DİSKRET RİYAZİYYATIN ELEMENTLƏRİ

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi
Bakı Dövlət Universiteti

Aydın Yunus oğlu Əliyev
Vladimir Əbdüloviç Piriverdiyev

DİSKRET RİYAZİYYATIN ELEMENTLƏRİ

Ali məktəblər üçün dərs vəsaiti

Bakı-2003

Redaktor:

Rəyçilər:

Aydın Yunus oğlu Əliyev, Vladimir Əbdüloviç Piriverdiyev.
Diskret riyaziyyatın elementləri. – Bakı, nəşriyyat, 2002, 89 səh.

Fizika-riyaziyyat elmləri namizədləri, dosentlər A.Y.Əliyev və V.Ə.Piriverdiyev tərəfindən yazılmış dərs vəsaiti diskret riyaziyyatın və riyazi məntiqin əsaslarına həsr edilib. Burada məntiq cəbrinin, qraflar nəzəriyyəsinin və kodlaşdırma nəzəriyyəsinin elementləri, diskret riyaziyyatın kibernetikaya bəzi tətbiqləri araşdırılır. Nəzəri məlumatlarla yanaşı çoxsaylı misal və çalışmalar verilir.

Kitab, ali məktəb tələbələri, müəllimlər və diskret riyaziyyatla maraqlanan şəxslər üçün nəzərdə tutulub.

A ----------------   ------------ ,   2002

Əziz müəllimimiz, görkəmli alim və ictimai xadim, Azərbaycan EA-nın müxbir üzvü, Dövlət mükafatı laureatı, əməkdar elm xadimi, f.r.e.d., professor Yəhya Cəfər oğlu Məmmədovun xatirəsinə ithaf edirik.

M ü ə l l i f l ə r.

Ö N S Ö Z

Bu kitabda, müəlliflər diskret riyaziyyat və riyazi məntiqin əsas anlayışlarını oxucuya çatacaq sadə dildə açıqlamağa çalışır. Bunun üçün nəzəri məlumatlar çoxsaylı misal və çalışmalarla tamamlanır. Ona görə də bu kitabdan, nəinki tələbələr, eləcə də diskret riyaziyyatla maraqlanan hər bir şəxs istifadə edə bilər.

Dərs vəsaiti, dörd fəsildən ibarətdir. Birinci fəsil, məntiq cəbrinin elementlərinə, ikinci fəsil qraflar nəzəriyyəsinin elementlərinə, üçüncü fəsil kodlaşdırma nəzəriyyəsinin elementlərinə, nəhayət dördüncü fəsil diskret riyaziyyatın kibernetikaya bəzi tətbiqlərinə həsr edilib.

Dərs vəsaiti dövlət universitetlərinin riyaziyyat ixtisaslı fakültələrində tədris olunan «Diskret riyaziyyat» fənninin tədris proqramına uyğun yazılmışdır və müəlliflərin Bakı Dövlət Universitetinin mexanika-riyaziyyat fakültəsində oxuduğu mühazirələrin təcrübəsinə əsaslanmışdır.

M ü ə l l i f l ə r.

I FƏSİL.

MƏNTİQ CƏBRİNİN ELEMENTLƏRİ

§1. Məntiq cəbrinin funksiyaları.

Tutaq ki, $U=\{u_1,u_2,...,u_m,...\}$ – dəyişnlərin (arqumentlərin) verilmiş əlifbasıdır. Arqumentləri $E_2=\{0,1\}$ çoxluğunda təyin edilmiş və $\alpha_i \in E_2$ $(i=1,2,...,n)$ üçün $f(\alpha_1,...,\alpha_2)\in E_2$ şərtini ödəyən $f(u_{i_1},u_{i_2},...,u_{i_n})$ $(u_{i_\nu}\neq u_{i_\mu}$; harada $\nu\neq\mu)$ funksiyalarına məntiq cəbrinin funksiyaları və ya bul funksiyaları deyəcəyik. Sadəlik üçün U əlifbasının elemntlərini, $x,y,z,...$ simvolları, eləcə də bu simvolların indeksli variantları ilə $(x_1,y_1,z_1,...)$ işarə edəcəyik. Beləliklə, $f(x_1,x_2,...,x_n)$ yazılışı, qeyd olunmuş ixtiyari $u_{i_1},u_{i_2},...,u_{i_n}$ $(u_{i_\nu}\neq u_{i_\mu},\nu\neq\mu)$ arqumentlərindən asılı funksiyanın yazılışı kimi başa düşülür.

$f(x_1,...,x_n)$ funksiyasının tərifindən alarıq ki, bu funksiyanı ifadə etmək üçün onun arqumentlərin hər bir mümkün yığımı üçün uyğun gələn qiymətlərini vermək, yəni aşağıdakı cədvəli qurmaq kifayətdir.

x_1 … x_{n-1} x_n	$f(x_1,$ … $, x_{n-1}, x_n)$
0 … 0 0	$f(0,$ … $, 0, 0)$
0 … 0 1	$f(0,$ … $, 0, 0)$
0 … 1 0	$f(0,$ … $, 1, 0)$
………………	…………………
1 … 1 1	$f(1,$ … $, 1, 1)$

Asanlıqla görmək olar ki, n sayda dəyişənə 2^n sayda müxtəlif qiymət uyğun gəlir. Hər bir $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyası $\underbrace{E_2 \times E_2 \times \cdots \times E_2}_{n \text{ dəfə}} \to E_2$ inikasını təyin edir. Buna görə də f simvoluna bu inikası işarə edən simvol kimi, $x_1, x_2, ..., x_n$ isə sütunların adları kimi baxmaq olar. Bu halda $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ və $f(y_1, y_2, ..., y_n)$ funksiyaları eyni bir inikası ifadə edəcək və onların cədvəlləri bir-birindən yalnız sütunlarının adları ilə fərqlənəcək.

P_2 ilə 0 və 1 sabitlərini də özündə saxlayan U əlifbası üzərindəki bütün məntiq cəbrinin funksiyaları sistemini işarə edək.

Əgər n sayda $x_1, x_2, ..., x_n$ dəyişənlərini qeyd etsək, onda qurulan müxtəlif cədvəllər bir-birindən yalnız birinci sütunun qiymətləri ilə fərqlənəcəklər. Buna görə də aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1. N sayda $x_1, x_2, ..., x_n$ dəyişənlərindən asılı, P sistemindəki bütün funksiyaların $P_2(n)$ sayı 2^{2^n} -ə bərabərdir.

Əvvəlcə qeyd edək ki, verilmiş n sayda arqumentdən asılı məntiq cəbrinin funksiyalarının sayı sonludur. Buna görə də bu sonlu çoxluqdakı funksiyaların bu və ya digər şərtləri ödədiyini yoxlamaq üçün verilmiş çoxluqdakı funksiyaları nəzərdən keçirmək (yoxlamaq) kifayətdir. Lakin $P_2(n)$ ədədləri n-nin qiyməti artdıqca, çox sürətlə böyüyürlər:

$$P_2(1) = 4;\ P_2(2) = 16;\ P_2(3) = 256;\ P_2(4) = 65536;\ \ldots$$

Beləliklə, hətta n-nin çox da böyük olmayan qiymtlərində

$(n \geq 6)$, funksiyaların yoxlanması, hesablama texnikasının köməyi ilə də praktiki olaraq mümkün olmur.

İkincisi, arqumentlərin sayı artdıqca funksiyanı ifadə edən cədvəl mürəkkəbləşir. Belə ki, məsələn, $n = 10$ halında cədvəl 1024 sətrə malik olur, $n = 20$ halında isə cədvəli qurmaq çox böyük çətinlik törədir.

Bütün bu çətinlikləri aradan qaldırmaq üçün funksiyaya aşağıdakı tərifi verək:

Tərif. P_2-dən götürülən $f(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n)$ funksiyası, x_i arqumentindən o vaxt əhəmiyyətli dərəcədə asılı olar ki, $x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n$ dəyişənləri elə $\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},...,\alpha_n$ qiymətləri alsın ki,

$$f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},...,\alpha_n) \neq f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$$

şərtini ödəsin.

Bu halda x_i dəyişəni əhəmiyyətli dəyişən adlanır. Əgər x_i dəyişəni əhəmiyyətli dəyişən deyilsə, o, qeyri-əhəmiyyətli və ya fiktiv dəyişən adlanır.

Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası üçün x_i dəyişəni fiktiv dəyişəndir. $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası üçün cədvəl götürüb, bu cədvəldən $(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$ şəklində olan sətrləri və x_i arqumentinin sütununu çıxarmaqla yeni cədvəl quraq. Alınan cədvəl hər hansı $g(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)$ funksiyasını təyin edəcək. Burada deyəcəyik ki, $g(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)$ funksiyası $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasından x_i fiktiv dəyişənin çıxarılması yolu ilə alınıb, eləcə də $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası $g(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)$ funksiyasına x_i fiktiv dəyişəninin daxil edilməsi ilə alına bilər.

Tərif. Əgər f_2 funksiyasını, f_1-dən ona fiktiv dəyişənləri daxil etmək və ya çıxarmaq yolu ilə almaq mümkünsə, onda f_1 və f_2 funksiyaları bərabər funksiyalar adlanır.

Əhəmiyyətli dəyişənlərə malik olmayan iki tip funksiyalar mövcuddur: birinci tip funksiyalar eyniliklə sıfıra, ikinci tip isə vahidə bərabərdir. Buna görə də 0 və 1 sabitlərini, dəyişənlərin boş çoxluğunun funksiyaları kimi nəzərdən keçirəcəyik.

Tərif. İxtiyari $\begin{pmatrix} 1 \ldots k \\ j_1 \ldots j_k \end{pmatrix}$ yerdəyişməsi üçün

$$f(x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n) = f(x_{j_1},x_{j_2},...,x_{j_k},x_{j_{k+1}},...,x_{j_n})$$

bərabərliyi ödənirsə, onda $f(x_1,...,x_n)$ bul funksiyası $x_1,...,x_k$ $(2 \le k \le n)$ dəyişənlərinə nəzərən simmetrik funksiya adlanır.

İxtiyari $x_{i_1},...,x_{i_k}$ dəyişənlərinə nəzərən simmetrik funksiya anlayışı da analoŞıolaraq təyin edilir.

Aşkardır ki, eyniliklə 0 və 1 sabitlərinə bərabər olan funksiyalar, özlərinin ixtiyari dəyişənlər külliyatına nəzərən simmetrikdir.

Məntiqi cəbrin funksiyalarına baxaq. Bu funksiyalardan riyazi məntiq və kibernetikada tez-tez istifadə olunur. Bu funksiyalar misal üçün triqonometrik funksiyaların, Eyler funksiyasının riyazi analizdə oynadığı rolu, yəni elementar funksiyaların rolunu oynayır. Bu funksiyalar aşağıdakılardır:

1) $f_1(x) = 0$ – "0" sabiti.

2) $f_2(x) = x$ – "1" sabiti.

3) $f_3(x) = x$ – eynilik funksiyası.

4) $f_4(x) = \overline{x}$ – inkar funksiyası.

5) $f_5(x_1, x_2) = (x_1 \,\&\, x_2)$ – x_1 və x_2-nin konyunksiyası ("x_1 və x_2" kimi oxunur, burada $\&$ işarəsi əvəzinə $\wedge$, $\cdot$ və ya heç bir işarə verilmir $(x_1 x_2)$). Bu funksiyaya çox vaxt məntiqi vurma deyilir.

6) $f_6(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2)$ – x_1 və x_2-nin dizyunksiyası ("x_1 və ya x_2" kimi oxunur). Bu funksiyaya çox vaxt məntiqi toplama deyilir.

7) $f_7(x_1, x_2) = (x_1 \to x_2)$ – x_1 və x_2-nin implikasiyası ("x_1-dən x_2 alınır" kimi oxunur).

8) $f_8(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)$ – x_1 və x_2-nin $\mathrm{mod}\,2$ üzrə toplanması.

9) $f_9(x_1, x_2) = (x_1 / x_2)$ – Şeffer funksiyası.

Bu funksiyaların ala biləcəyi mümkün qiymətlər aşağıdakı cədvəllərlə verilir:

Cədvəl 1.

x	0	1	x	$\bar{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Cədvəl 2.

x_1	x_2	$x_1 \,\&\, x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \to x_2$	$x_1 + x_2$	x_1 / x_2
0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0

§2. Düsturlar. Funksiyaların düsturlarla ifadəsi. Düsturların ekvivalentliyi. Elementar funksiyaların xassələri.

Elementar cəbrdə olduğu kimi, elementar funksiyalardan istifadə etməklə düsturlar qurmaq olar.

Tərif. Tütaq ki, B, P_2-dən götürülən funksiyaların hər hansı alt çoxluğudur.

a) B-dən olan hər bir $f(x_1,...,x_m)$ funksiyası B üzərində düstur adlanır.

b) Tutaq ki, $f_0(x_1,...,x_m)$, B-dən götürülmüş funksiyadır, $A_1,...,A_m$ – ifadələri isə B üzərindəki düsturlar, ya da U əlifbasından dəyişənlərin simvollarıdır. Onda $f_0(A_1,...,A_m)$ ifadəsi B üzərində düstur adlanır.

Məsələn, tutaq ki, B - elementar funksiyaların çoxluğudur. onda aşağıdakı ifadələr B üzərində düsturlardır:

1) $\{[(x_1 \wedge x_2) + x_1] + x_2\}$;

2) $[\overline{x}_1 \wedge (x_2 + x_3)]$;

3) $\{\overline{x_1 \vee [(x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_2)]}\}$ və s.

Düsturları aşağıdakı kimi işarə edəcəyik: $L[f_1,...,f_s]$, burada bu işarə bildirir ki, L düsturu $f_1,...,f_s$ funksiyalarından qurulur. Düsturun qurulmasında iştirak edən dəyişənləri qeyd etmək tələb edilərsə, aşağıdakı işarələmədən istifadə olunacaq: $L(x_1,...,x_n)$.

Tutaq ki, L, B çoxluğunda qurulan ixtiyari düsturdur. Onda L düsturunun qurulması üçün istifadə edilmiş düsturlar L düsturunun alt düsturları adlandırılacaqdır.

Tutaq ki, L düsturu $B = \{f_1(x_1,...,x_n),...,f_s(x_1,...,x_n)\}$ çoxluğu üzərindəki düsturdur, yəni $L = L[f_1,..., f_s]$. Aşağıdakı funksiyalar çoxluğunu götürək:

$$D = \{g_1(x_1,...,x_n),..., g_s(x_1,...,x_n)\},$$

burada g_i funksiyaları f_i funksiyalarındakı dəyişənlərlə eyni olan dəyişənlərə malikdir $(i = 1,...,s)$.

Tərif. $D = D[g_1,...,g_s]$ düsturu, L düsturundan $\begin{pmatrix} f_1 ... f_s \\ g_1 ... g_s \end{pmatrix}$ yerdəyişməsi nəticəsində alınır. Bu halda deyirlər ki, D düsturu L düsturu ilə eyni bir quruluşa malikdir.

Məsələn:

1) $K = \{\bar{x}_1, (x_1 \wedge x_2)\}$, $\quad L = \{x_1 \wedge (\overline{x_2 \wedge x_3})\}$

2) $S = \{\bar{x}_1, (x_1 \to x_2)\}$, $\quad D = \{x_1 \to (\overline{x_2 \to x_3})\}$.

Aşkardır ki, burada L və D eyni quruluşa malikdir.

Misal. Tutaq ki,

$$f_1(x_1, x_2) = (((x_1 \,\&\, x_2) + x_1) + x_2),$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \,\&\, (x_2 + x_3))$$

funksiyaları verilib.

Burada f_1 düsturu üç addıma qurulur və aşağıdakı alt düsturlardan ibarətdir:

$$(x_1 \,\&\, x_2),\ ((x_1 \,\&\, x_2) + x_1),\ (((x_1 \,\&\, x_2) + x_1) + x_2)$$

Cədvəl 3.

x_1	x_2	$(x_1 \,\&\, x_2)$,	$((x_1 \,\&\, x_2) + x_1)$,	$(((x_1 \,\&\, x_2) + x_1) + x_2)$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

f_2 düsturu da analoji olaraq qurulur:

Cədvəl 4.

x_1	x_2	x_3	$f_2(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Əgər f funksiyası L düsturuna uyğundursa, onda deyirlər ki, L düsturu f funksiyasını realizə edir.

Funksiyalar fiktiv dəyişənlər dəqiqliyi ilə nəzərdən keçirildiyindən demək olar ki, L düsturu f funksiyasına bərabər ixtiyari funksiyanı da realizə edir.

Tərif. Əgər düstur, dəyişənlərin bütün mümükün qiymətlərində doğru və ya «1» qiyməti alırsa, onda bu düstura eyniliklə doğru düstur və ya tavtalogiya deyilir. Əgər düstur dəyişənlərin bütün mümkün qiymətlərində yalan və ya «0» qiyməti alırsa, onda bu düstura eyniliklə yalan düstur deyilir.

L düsturuna uyğun olan f funksiyasını B çoxluğundan olan funksiyaların superpozisiyası adlandıracayıq. B-dən f funksiyasının alınması prosesinə isə superpozisiya əməliyyatı deyəcəyik.

Tərif. İki L və K düsturu o vaxt ekvivalent adlanır ki, onlara uyğun gələn f_L və f_K funksiyaları bərabər $(f_L = f_K)$ olsun. Burada $L = K$ yazılışı bu düsturların bir-birinə bərabər və ya ekvivalent olduğunu bildirəcək.

Misallar:

1) $0 = (x \,\&\, \bar{x})$;

2) $(\bar{x}_1 \,\&\, (x_2 + x_3)) = \overline{(x_1 \vee ((x_2 \to x_3) \,\&\, (x_3 \to x_2)))}$;

3) $(x \to y) = (\bar{y} \to \bar{x})$.

$(x_1 \,\&\, x_2)$, $(x_1 \vee x_2)$ və $(x_1 + x_2)$ funksiyalarından ixtiyari birini $(x_1 \oplus x_2)$ ilə işarə edək:

1) $(x_1 \oplus x_2)$ funksiyası assosiativlik xassəsinə malikdir: $((x_1 \oplus x_2) \oplus x_3) = (x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3))$.

2) $(x_1 \oplus x_2)$ funksiyası kommutativlik xassəsinə malikdir: $(x_1 \oplus x_2) = (x_2 \oplus x_1)$.

3) Konyunksiya və dizyunksiya üçün distributivlik qanunları yerinə yetirilir:

$$((x_1 \vee x_2) \,\&\, x_3) = ((x_1 \,\&\, x_3) \vee (x_2 \,\&\, x_3))$$

$$((x_1 \,\&\, x_2) \vee x_3) = ((x_1 \vee x_3) \,\&\, (x_2 \vee x_3)).$$

4) Konyunksiya və dizyunksiyanın aşağıdakı xassələri ödənilir:

$(x \,\&\, x) = x$; $\quad (x \vee x) = x$;

$(x \,\&\, \bar{x}) = 0$; $\quad (x \vee \bar{x}) = 1$;

$(x \,\&\, 0) = 0$; $\quad (x \vee 0) = x$;

$(x \,\&\, 1) = x$; $\quad (x \vee 1) = 1$.

Aşağıdakı işarələmələrdən istifadə edək:

$$\mathop{\&}_{i=1}^{S} x_i = x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, \cdots \,\&\, x_S; \quad \bigvee_{i=1}^{S} x_i = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_S.$$

Bəzi qaydaları qeyd edək:

1) Əgər məntiqi vurmada, vuruqlardan biri 0-a bərabərdirsə, onda məntiqi vurma da 0-a bərabərdir.

2) Əgər məntiqi vurmada (ən azı iki vuruqlu) 1-ə bərabər vuruq varsa, bu vuruğu çıxarmaq olar.

3) Ən azı iki toplananı olan məntiqi cəmləmədə 0-a bərabər toplanan varsa, bu toplamanı çıxarmaq olar.
4) Əgər məntiqi cəmləmədə toplananlardan biri 1-ə bərabərdirsə, onda məntiqi cəm də 1-ə bərabər olacaqdır.

§3. İkili funksiya. İkilik prinsipi.

Tərif. $[f(x_1,...,x_n)]^* = \bar{f}(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)$ funksiyası $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasına nəzərən ikili funksiya adlanır.

Aşkardır ki, ikili funksiyanın cədvəlini $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasının cədvəlində funksiyanın sütununda 0-ı 1-lə və 1-i 0-la əvəz edib, onu çevirməklə almaq olar.
Məsələn:

Cədvəl 5.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$	$[f(x_1,x_2,x_3)]^*$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

Burada $[f(x_{i_1},...,x_{i_n})]^* = \bar{f}(\bar{x}_{i_1},...,\bar{x}_{i_n})$ şərti ödəndiyindən $[f(x_{i_1},...,x_{i_n})]^*$ və $[f(x_1,...,x_n)]^*$ funksiyaları eyni bir inikası təyin edir. Bu inikası f^* ilə işarə edək. Onda $[f(x_1,...,x_n)]^* = $ $= f^*(x_1,...,x_n)$.

Asanlıqla görmək olar ki, $0,1,x,\bar{x},\ x_1 \,\&\, x_2,\ x_1 \vee x_2$ funksiyaları üçün aşağıdakılar doğrudur:

1) 0 funksiyası 1-ə ikili funksiyadır;
2) 1 funksiyası 0-a ikili funksiyadır;
3) x funksiyası $\overline{x}$ -ə ikili funksiyadır;
4) $\overline{x}$ funksiyası x -ə ikili funksiyadır;
5) $x_1 \mathbin{\&} x_2$ funksiyası $x_1 \vee x_2$ -yə ikili funksiyadır;
6) $x_1 \vee x_2$ funksiyası $x_1 \mathbin{\&} x_2$ -yə ikili funksiyadır.

İkili funksiyanın tərifindən alarıq ki,

$$f^{**} = (f^*)^* = f\,.$$

Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası L düsturu ilə ifadə olunub. Onda $f^*(x_1,...,x_n)$ funksiyasını realizə edən L' düsturunun hansı formada olduğunu təyin edək. $x_1,...,x_n$ ilə $(x_{11},...,x_{1p_1}),...,(x_{m1},...,x_{mp_m})$ çoxluqlarında rast gəlinən bütün müxtəlif dəyişənləri işarə edək.

Teorem 2. Əgər

$$\Phi(x_1,...,x_n) = f(f_1(x_{11},...,x_{1p_1}),...,f_m(x_{m1},...,x_{mp_m}))\,,$$

onda

$$\Phi^*(x_1,...,x_n) = f^*(f_1^*(x_{11},...,x_{1p_1}),...,f_m^*(x_{m1},...,x_{mp_m}))\,.$$

İsbatı:

$$\Phi^*(x_1,...,x_n) = \overline{\Phi}(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n) =$$
$$= \overline{f}(f_1(\overline{x}_{11},...,\overline{x}_{1p_1}),...,f_m(\overline{x}_{m1},...,\overline{x}_{mp_m})) =$$
$$= \overline{f}(\overline{\overline{f}}_1(\overline{x}_{11},...,\overline{x}_{1p_1}),...,\overline{\overline{f}}_m(\overline{x}_{m1},...,\overline{x}_{mp_m})) =$$
$$= \overline{f}(\overline{f}_1^*(x_{11},...,x_{1p_1}),...,\overline{f}_m^*(x_{m1},...,x_{mp_m})) =$$
$$= f^*(f_1^*(x_{11},...,x_{1p_1}),...,f_m^*(x_{m1},...,x_{mp_m})).$$

Teoremdən aşağıdakı prinsip alınır:

İkilik prinsipi. Əgər $L = C[f_1,...,f_s]$ düsturu $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasını realizə edirsə, onda L düsturunda $f_1,...,f_s$ funksiyalarını uyğun olaraq $f_1^*,...,f_s^*$ funksiyaları ilə əvəz etməklə alınan $C[f_1^*,...,f_s^*]$ düsturu $f^*(x_1,...,x_n)$ funksiyasını realizə edir.

Bu düstura L düsturuna ikili olan düstur deyilir və L^* ilə işarə edilir. Beləliklə, $L^* = C[f_1^*,...,f_s^*]$.

$F = \{0, 1, \bar{x},\ x_1 \,\&\, x_2,\ x_1 \vee x_2\}$ çoxluğünün düsturları üçün ikilik prinsipini aşağıdakı kimi ifadə etmək olar: L düsturu ilə ikili olan L^* düsturunu almaq üçün L düsturunda hər yerdə 0-ı 1 ilə, 1-i 0 ilə, $\&$ ilə $\vee$, $\vee$ ilə $\&$ əvəz etmək lazımdır. Və ya əgər

$$L = C[0, 1, \bar{x}, x_1 \,\&\, x_2, x_1 \vee x_2],$$

onda

$$L^* = C[1,0, x, x_1 \vee x_2, x_1 \,\&\, x_2].$$

Misallar.

1) $K_1(x_1, x_2) = x_1 \,\&\, x_2;\ K_1^*(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2;$

2) $K_2(x_1, x_2) = (x_1 \,\&\, x_2) \vee (\bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2);$

$K_2^*(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2) \,\&\, (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2);$

İkilik prinsipindən alarıq ki, əgər $K = (x_1,...,x_n) = L(x_1,...,x_n)$ olarsa, onda $K^*(x_1,...,x_n) = L^*(x_1,...,x_n)$. Məsələn, $\overline{x_1 \,\&\, x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ eyniliyindən $\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2$.

§4. Məntiq cəbri funksiyalarının dəyişənlər üzrə ayrılışı. Mükəmməl dizyunktiv normal forma (m.d.n.f.).

Aşağıdakı işarələməni daxil edək:

$$x^\alpha = x\alpha \vee \bar{x}\bar{\alpha},$$

burada α – 0 ya da 1-ə bərabər olan parametrdir. Aşkardır ki,

$$x^{\alpha} = \begin{cases} \overline{x}, & \text{burada} \quad \alpha = 0, \\ x, & \text{burada} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Asanlıqla görmək olar ki, $x^{\alpha} = 1$, yalnız və yalnız o vaxt mümkündür ki, $x = \alpha$ olsun.

Teorem 3. Məntiq cəbrinin hər bir $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasını ixtiyari m $(1 \le m \le n)$ üçün aşağıdakı şəkildə ifadə etmək olar:

$$f(x_1,...,x_m,x_{m+1},...,x_n) =$$
$$= \bigvee_{(\alpha_1,...,\alpha_m)} x_1^{\alpha_1} \,\&\cdots\&\, x_m^{\alpha_m} \,\&\, f(\alpha_1,...,\alpha_m,x_{m+1},...,x_n), \qquad (*)$$

burada dizyunksiya $x_1,...,x_n$ dəyişənlərinin ixtiyari qiymətləri üçün qurulur.

İsbatı: $\beta_1,...,\beta_n$ dəyişənlərinin ixtiyari qiymətlər külliyatını nəzərdən keçirək və göstərək ki, (*) münasibətinin sol və sağ tərəfi bu külliyat üçün eyni bir qiymət alır. Sol tərəf $f(\beta_1,...,\beta_n)$, sağ tərəf isə

$$\bigvee_{(\alpha_1,...,\alpha_m)} \beta_1^{\alpha_1} \,\&\cdots\&\, \beta_m^{\alpha_m} \,\&\, f(\alpha_1,...,\alpha_m,\beta_{m+1},...,\beta_n) =$$
$$= \beta_1^{\beta_1} \,\&\cdots\&\, \beta_m^{\beta_m} \,\&\, f(\beta_1,...,\beta_m,\beta_{m+1},...,\beta_n) = f(\beta_1,...,\beta_n).$$

Bu teoremdən nəticə kimi aşağıdakı iki xüsusi ayrılış forması alınır:

1) Dəyişən üzrə ayrılış:

$$f(x_1,...,x_{n-1},x_n) = x_n \,\&\, f(x_1,...,x_{n-1},1) \vee \overline{x}_n \,\&\, f(x_1,...,x_{n-1},0).$$

2) Bütün n dəyişənlər üzrə ayrılış:

$$f(x_1,...,x_{n-1},x_n) = \bigvee_{(\alpha_1,...,\alpha_n)} x_1^{\alpha_1} \,\&\cdots\&\, x_n^{\alpha_n} \,\&\, f(\alpha_1,...,\alpha_n).$$

$f(x_1,...,x_n) \ne 0$ olduqda bu ayrılış aşağıdakı şəkildə verilə bilər:

$$\bigvee_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} x_1^{\alpha_1} \& \cdots \& x_n^{\alpha_n} \& f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \bigvee_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \\ f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1.}} x_1^{\alpha_1} \& \cdots \& x_n^{\alpha_n}.$$

Nəticədə alarıq:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \\ f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1}} x_1^{\alpha_1} \& \cdots \& x_n^{\alpha_n}.$$

Bu ayrılışa mükəmməl dizyunktiv normal forma (m.d.n.f.) deyilir.

Teorem 4. Məntiq cəbrinin hər bir funksiyası, inkar, konyunksiya və dizyunksiya ilə verilən düstur şəklində ifadə edilə bilər.

İsbatı: 1) Tutaq ki, $f(x_1,\ldots,x_m) \equiv 0$. Onda aşkardır ki, $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \& \bar{x}_1$.

2) Tutaq ki, $f(x_1,\ldots,x_n) \not\equiv 0$. Funksiyanı mükəmməl dizyunktiv normal formada ifadə edək:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \\ f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1}} x_1^{\alpha_1} \& \cdots \& x_n^{\alpha_n}.$$

Beləliklə, hər iki halda f funksiyası, inkar, konyunksiya və dizyunksiya ilə verilən düstur şəklində ifadə edilir.

Misal. 1) $x_1 \to x_2$ funksiyası üçün m.d.n.f. tapaq. Üç cür dəyişənlər cütü üçün $(0,0)$; $(0,1)$ və $(1,1)$ bu funksiya 1 qiymətini alır. Buna görə də alarıq:

$$x_1 \to x_2 = x_1^0 \& x_2^0 \vee x_1^0 \& x_2^1 \vee x_1^1 \& x_2^1 =$$
$$= \bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \& x_2 \vee x_1 \& x_2.$$

2) Aşağıdakı cədvəllə verilən funksiya üçün m.d.n.f. qurmalı

Cədvəl 6.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Buradan alarıq:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 .$$

Mükəmməl d.n.f. $\Sigma\Pi$ tipli ifadə, yəni $x_i^{\alpha_i}$ dəyişənlərinin hasillərinin məntiqi cəmidir. Məntiq cəbri funksiyaları üçün $\Pi\Sigma$ tipli ayrılış almaq mümkün olub-olmadığını təyin edək. Göstərmək olar ki, $f \neq 1$ halı üçün bu mümkündür. Bunun üçün f^* funksiyası $(f^* \not\equiv\ 0)$ m.d.n.f. ayıraq:

$$f^*(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \\ f^*(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1}} x_1^{\alpha_1} \,\&\cdots\&\, x_n^{\alpha_n} .$$

İkili düsturlar üçün eynilikdən istifadə etsək alarıq:

$$f^{**}(x_1,\ldots,x_n) = \mathop{\&}_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \\ f^*(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1}} \left(x_1^{\alpha_1} \vee \cdots \vee x_n^{\alpha_n}\right).$$

Burada sol tərəf $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyasını verir, sağ tərəf isə aşağıdakı kimi ifadə oluna bilər.

$$\mathop{\&}_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \\ f^*(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1}} (x_1^{\alpha_1} \vee \cdots \vee x_n^{\alpha_n}) = \mathop{\&}_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \\ f(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_n)=0}} (x_1^{\alpha_1} \vee \cdots \vee x_n^{\alpha_n}) =$$

$$= \mathop{\&}_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \\ f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=0}} (x_1^{\overline{\alpha}_1} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\alpha}_n}).$$

Beləliklə, alarıq:

$$f(x_1,...,x_n) = \underset{\substack{(\alpha_1,...,\alpha_n) \\ f(\alpha_1,...,\alpha_n)=0}}{\&} (x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}}) \ .$$

Bu ifadə mükəmməl konyunktiv normal forma adlanır (m.k.n.f.).

Misal. 1) $x_1 \to x_2$ funksiyası üçün m.k.n.f. qurmalı:

$$x_1 \to x_2 = x_1^{\overline{1}} \vee x_2^{\overline{0}} = \overline{x}_1 \vee x_2$$

2) Cədvəl 6 ilə verilmiş $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyası üçün m.k.n.f. qurmalı:

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \,.$$

Beləliklə, bul funksiyalarını vermək üçün cədvəllərlə yanaşı, inkar, konyunksiya, dizyunksiya funksiyalarından ibarət çoxluq üzrə qurulan düsturlardan da istifadə etmək olar. Qeyd edək ki, düsturlardan istifadə etmək cədvələ nisbətən daha əlverişli olur. Məsələn, $f(x_1,...,x_{20}) = x_1 \vee \cdots \vee x_{20}$ funksiyasına baxaq. Bu düsturun sağ tərəfində 39 simvol (20 dəyişən və 19 $\vee$ simvolu) olur. $f(x_1,...,x_{20})$ üçün cədvəl 2^{20}, yəni milyondan çox sətrə malik olacaq.

§5. Tamlıq və qapalılıq. Vacib qapalı siniflər.

Tərif. Əgər ixtiyari bul funksiyası, P_2-dən götürülən hər hansı $\{f_1, f_2,..., f_s,...\}$ funksiyalar sisteminin funksiyaları ilə düstur kimi ifadə edilirsə, onda belə sistem funksional olaraq tam sistem adlanır.

Tam sistemlərə misallar verək:

1) Bütün bul funksiyalarının çoxluğu – P_2 sistemi – tam sistemdir.
2) $\Omega = \{\overline{x}, x_1 \,\&\, x_2, x_1 \vee x_2\}$ sistemi – tam sistemdir.

Aşkardır ki, heç də hər bir sistem tam deyil, məsələn $\Omega_1 = \{0,1\}$ sistemi tam deyil.

Teorem 5. Tutaq ki, bizə P_2 sistemindən aşağıdakı iki funksiyalar sistemi verilib:

$$\Omega = \{f_1, f_2, ...\} \tag{I}$$

$$\Sigma = \{g_1, g_2, ...\}\,. \tag{II}$$

Məlumdur ki, (I) sistemi tamdır və onun hər bir funksiyası (II) sisteminin funksiyaları ilə düstur şəklində ifadə edilir. Onda (II) sistemi də tam sistemdir.

İsbatı: Tutaq ki, h, P_2-dən götürülən ixtiyari funksiyadır. (I) sistemi tam olduğundan h funksiyasını Ω sisteminin funksiyaları ilə düstur kimi ifadə etmək olar:

$$h = C[f_1, f_2, ..., f_s, ...]\,.$$

Teoremin şərtlərinə görə

$$f_1 = C_1[g_1, g_2, ...],$$

$$f_2 = C_2[g_1, g_2, ...],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Buna görə də biz $C[f_1, f_2, ...]$ düsturunda $f_1, f_2, ...$ funksiyalarını Σ sisteminin funksiyalarından qurulan düsturlarla əvəz edə bilərik, yəni

$$C[f_1, f_2, ...] = C[C_1[g_1, g_2, ...], C_2[g_1, g_2, ...]...].$$

Axırıncı ifadə Σ sistemi üzrə C' quruluşlu düsturu təyin edir. Onda alırıq:

$$C[C_1[g_1, g_2, ...], C_2[g_1, g_2, ...]...] = C'[g_1, g_2, ...]$$

və ya $h = C'[g_1, g_2, ...]$, yəni biz h-ı Σ sistemi üzərində düstur şəklində ifadə etdik. Teorem isbat olundu.

Bu teoremdən istifadə etməklə, bir çox sistemlərin tamlığını təyin etmək olar.

Misal 1. Tutaq ki, $K=\{\bar{x}, x_1 \& x_2\}$ sistemi tamdır. Bunu isbat etmək üçün teoremə əsaslanaraq (I) sistemi kimi $\Omega=\{\bar{x}, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2\}$ sistemini, (II) sistemi kimi $K=\{\bar{x}, x_1 \& x_2\}$ qəbul edək və elementar funksiyaların xassələrindən alınan $x_1 \vee x_2=\overline{\bar{x}_1 \& \bar{x}_2}$ eyniliyindən istifadə edək. Bu eynilik Ω sisteminin funksiyasının K sistemi üzərində düsturla ifadə edilə bildiyini göstərir, yəni K sistemi tamdır. Həmin qayda ilə $K_1=\{\bar{x}, x_1 \vee x_2\}$ sisteminin də tam olduğunu göstərmək olar.

Misal 2. Tutaq ki, $\Sigma=\{x_1 / x_2\}$ sistemi tamdır. İsbat üçün (I) sistemi kimi $\Omega=\{\bar{x}, x_1 \& x_2\}$, (II) sistemi kimi $\Sigma=\{x_1 / x_2\}$ qəbul edək. Asanlıqla görmək olar ki,

$$x_1 / x_2=\bar{x}_1,\ (x_1 / x_2)/(x_1 / x_2)=\overline{x_1 / x_2}=x_1 \& x_2 .$$

Tərif. Tutaq ki, Ω, P_2 sisteminin funksiyalarının hər hansı alt çoxluğudur. Ω çoxluğunun qapanması, Ω çoxluğunun funksiyaları ilə düstur kimi ifadə edilə bilən, bütün bul funksiyaları çoxluğuna deyilir. Ω çoxluğunun qapanması $[\Omega]$ kimi işarə edilir.

Misal. 1) Əgər $\Omega=P_2$ olarsa, aşkardır ki, $[\Omega]=P_2$. 2) $\Omega=\{1, x_1+x_2\}$ isə, onda bu çoxluğun qapanması, bütün xətti asılı funksiyaların L çoxluğu, yəni

$$f(x_1,..,x_n)=C_0+C_1 x_1+\cdots+C_n x_n$$

formalı funksiyalar olacaqdır, burada $C_i=0{,}1 \ (i=\overline{0, n})$ əmsallardır və əhəmiyyətli dəyişənlər 1 əmsallı, fiktiv dəyişənlər isə 0 əmsallı olur.

Qapanmanın bəzi xassələrini qeyd edək:

1) $[\Omega] \supset \Omega$;

2) $[[\Omega]] = [\Omega]$;

3) Əgər $\Omega_1 \subset \Omega_2$, onda $[\Omega_1] \subset [\Omega_2]$.

4) $[\Omega_1 \bigcup \Omega_2] \supset [\Omega_1] \bigcup [\Omega_2]$.

Tərif. Ω sinfi (çoxluğu), $[\Omega] = \Omega$ şərti ödəndikdə, funksional qapalı sinif adlanır.

Misal. 1) $\Omega = P_2$ sinfi qapalı sinifdir.

2) $\Omega = \{1, x_1 + x_2\}$ sinfi qapalı deyil.

3) L-bütün xətti funksiyaların çoxluğu qapalı sinifdir, çünki xətti ifadələrdən qurulan ifadə də xəttidir.

Qapanma və qapalı sinif anlayışlarından istifadə etməklə, tam sistemə aşağıdakı kimi də tərif vermək olar:

Tərif. $\Omega = P_2$ şərtini ödəyən sistem, tam sistemdir.

P_2 sistemində bəzi vacib qapalı sinifləri nəzərdən keçirək:

1. T_0 ilə sıfır sabitini saxlayan, yəni $f(0,0,...,0) = 0$ bərabərliyini ödəyən bütün $f(x_1,...,x_n)$ bul funksiyalarının sinfini işarə edək. Qeyd edək ki, əgər $f \in T_0$ olarsa və f' ilə f-ə bərabər funksiyanı işarə etsək, onda $f' \in T_0$.

Asanlınla görmək olar ki, $0, x, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, x_1 + x_2$ funksiyaları T_0 sinfinə aiddir, lakin $1, \bar{x}$ funksiyaları T_0-a aid deyil.

T_0 sinfinin f funksiyası üçün qurulan cədvəldə birinci sətr sıfır qiymətini aldığından, T_0-da $x_1,...,x_n$ dəyişənlərindən asılı $(1/2)2^{2^n}$ bul funksiyası var.

T_0 sinfinin qapalı olduğunu göstərək. T_0 sinfi eynilik funksiyasına malik olduğundan, T_0 sinfinin qapalı olduğunu göstərmək üçün $\Phi = f(f_1,...,f_m)$ funksiyasının $f, f_1,...,f_m$ funksiyalarının T_0 sinfinə aid olduğu halda, T_0 sinfinə daxil olduğunu göstərmək kifayətdir. Bu isə aşağıdakı bərabərliklərdən alınır:

$$\Phi(0,...,0) = f(f_1(0,...,0),...,f_m(0,...,0)) = f(0,...,0) = 0 .$$

2. T_1 ilə 1 sabitini saxlayan, yəni $f(1,...,1) = 1$ bərabərliyini ödəyən bütün $f(x_1,...,x_n)$ funksiyalar sinfini işarə edək. Aşkardır ki, T_1 sinfi ixtiyari funksiya ilə yanaşı ona bərabər ixtiyari funksiyaya da malikdir. Asanlıqla görmək olar ki, $1, \bar{x}, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2$ funksiyaları T_1 sinfinə daxildir, $0, x$ isə T_1-ə aid deyildir.

T_1 sinfi, T_0 sinfinin funksiyalarına ikili olan funksiyalardan təşkil olunduğundan, yəni T_1 sinfi T_0 sinfinə ikili olduğundan T_0 sinfinə aid xassələri T_1 sinfinə də aid etmək olar. Yəni T_1 sinfi $x_1,...,x_n$ dəyişənlərindən asılı $(1/2)2^{2^n}$ sayda funksiyaya malikdir və T_1 sinfi qapalıdır.

3. S ilə bütün öz-özünə ikili olan funksiyalar sinfini, yəni P_2-dən olan və $f^* = f$ şərtini ödəyən bütün f funksiyaları sinfini işarə edək. Bu sinif üçün də deyə bilərik ki, həmin sinfin funksiyalarına bərabər funksiyalar da bura aiddir.

Aşkardır ki, x və $\bar{x}$ funksiyaları öz-özünə ikili funksiyalardır. Aşağıdakı funksiyalar da öz-özünə ikili olan funksiyalara

$$h(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3;$$

misal ola bilər: $h^*(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3) =$

$$= x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 = h(x_1, x_2, x_3) .$$

Özü-özünə ikili olan funksiyalar üçün aşağıdakı şərt ödənir:

$$\bar{f}(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n) = f(x_1,...,x_n).$$

Başqa sözlə, bir-birinə əks olan $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ və $(\overline{\alpha_1},...,\overline{\alpha_n})$ qiymətlərində, öz-özünə ikili olan funksiyalar bir-birinə əks olan qiymətlər alır. $x_1,...,x_n$ dəyişənlərindən asılı öz-özünə ikili funksiyaların sayı $2^{2^{n-1}} = \sqrt{2^{2^n}}$ qədərdir.

S sinfinin qapalı olduğunu göstərək. S sinfinə eynilik funksiyası aid olduğundan $f, f_1,..., f_m$ funksiyaları ikilidirsə, $\Phi = f(f_1,..., f_m)$ funksiyalarının da ikili olduğunu göstərmək kifayətdir. Bu isə bilavasitə aşağıdakı bərabərlikdən alınır:

$$\Phi^* = f^*(f_1^*,..., f_m^*) = f(f_1,..., f_m) = \Phi.$$

Lemma 1. Əgər $f(x_1,...,x_n) \notin S$ olarsa, onda bu funksiyaya $\overline{x}$ və x funksiyalarını əlavə etməklə, bir dəyişəndən asılı öz-özünə ikili olmayan funksiyanı, yəni sabiti almaq olar.

4. Aşağıdakı kimi vektor işarələməsi daxil edək:

$$\widetilde{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_n), \quad \widetilde{\beta} = (\beta_1,...,\beta_n), \quad f(\widetilde{\alpha}) = f(\alpha_1,...,\alpha_n).$$

Tərif. $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ və $\widetilde{\beta} = (\beta_1,...,\beta_n)$ qiymətlər külliyatı üçün aşağıdakı şərt ödənirsə,

$$\alpha_1 \le \beta_1 \quad ,..., \; \alpha_n \le \beta_n,$$

onda deyirlər ki, bu qiymətlər üçün qabaqlama münasibəti ödənir və $\widetilde{\alpha} \prec \widetilde{\beta}$ kimi işarə edilir. Məsələn: $(0,1,0,1) \prec (1,1,0,1)$.

Aşkardır ki, $\widetilde{\alpha} \prec \widetilde{\beta}$ və $\widetilde{\beta} \prec \widetilde{\gamma}$ olarsa, onda alarıq: $\widetilde{\alpha} \prec \widetilde{\gamma}$. Qeyd edək ki, heç də bütün mümkün qiymətlər külliyatı üçün qabaqlama münasibətini tətbiq etmək olmur. Məsələn: $(0,1)$ və $(1,0)$ qiymət cütləri belə münasibətdə ola bilməz.

Tərif. $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası $\widetilde{\alpha} \prec \widetilde{\beta}$ qabaqlama münasibətini ödəyən ixtiyari iki $\widetilde{\alpha}$ və $\widetilde{\beta}$ qiymətlər külliyatı üçün $f(\widetilde{\alpha}) \leq f(\widetilde{\beta})$ şərtini ödəyirsə, onda belə funksiya monoton funksiya adlanır. Asanlıqla görmək olar ki, monoton funksiyaya bərabər olan funksiya da monoton olacaqdır. Monoton funksiyalara misal olaraq $0, 1, x, x_1 \& x_2$ və $x_1 \vee x_2$ funksiyalarını göstərmək olar.

M ilə bütün mümkün monoton funksiyaların çoxluğunu işarə edək. Monoton funksiyalar sinfinin qapalı olduğunu göstərək. Eynilik funksiyası M sinfinə aid olduğundan, M sinfinin qapalı olduğunu göstərmək üçün $f, f_1,...,f_m$ funksiyaları monoton olduqda, $\Phi = f(f_1,...,f_m)$ funksiyasının monoton olduğunu göstərmək kifayətdir.

Tutaq ki,

$$\widetilde{x} = (x_1,...,x_n),\ \widetilde{x}^1 = (x_{11},...,x_{1p_1}),...,\ \widetilde{x}^m = (x_{m_1},...,x_{mp_m}),$$

$\Phi, f_1,...,f_m$ funksiyalarının dəyişənlər külliyatıdır. Burada Φ funksiyasının dəyişənlər çoxluğu, yalnız və yalnız $f_1,...,f_m$ funksiyalarında rast gəlinən dəyişənlərdən ibarətdir. Tutaq ki, $\widetilde{\alpha}$ və $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{x}$ dəyişənlərinin qiymətlərinin n uzunluqlu iki külliyatıdır və $\widetilde{\alpha} \leq \widetilde{\beta}$ şərti ödənir. Bu külliyatlar, $\widetilde{x}^1,...,\widetilde{x}^m$ dəyişənlərin $\widetilde{\alpha}^1 \leq \widetilde{\beta}^1,...,\widetilde{\alpha}^m \leq \widetilde{\beta}^m$ şərtlərini ödəyən $\widetilde{\alpha}^1, \widetilde{\beta}^1,...,\widetilde{\alpha}^m, \widetilde{\beta}^m$ qiymətlər külliyatını təyin edir.

$f_1,...,f_m$ funksiyalarının monotoluq şərtindən alarıq:

$$f_1(\widetilde{\alpha}^1) \leq f_1(\widetilde{\beta}^1),...,f_m(\widetilde{\alpha}^m) \leq f_m(\widetilde{\beta}^m).$$

Buna görə də $(f_1(\widetilde{\alpha}^1),...,f_m(\widetilde{\alpha}^m)) \prec (f_1(\widetilde{\beta}^1),...,f_m(\widetilde{\beta}^m))$ və f

funksiyasının monotonluq şərtinə görə

$$f(f_1(\widetilde{\alpha}^1),...,f_m(\widetilde{\alpha}^m)) \le f(f_1(\widetilde{\beta}^1),...,f_m(\widetilde{\beta}^m)).$$

Buradan alarıq:

$$\Phi(\widetilde{\alpha}) = f(f_1(\widetilde{\alpha}^1),...,f_m(\widetilde{\alpha}^m)) \le f(f_1(\widetilde{\beta}^1),...,f_m(\widetilde{\beta}^m)) = \Phi(\widetilde{\beta}).$$

Lemma 2. Əgər $f(x_1,...,x_n) \notin M$, onda bu funksiyaya 0 və 1 sabitlərini və x eynilik funksiyasını daxil etməklə, $\overline{x}$ funksiyasını almaq olar.

5. Axırıncı qapalı sinif bütün mümkün xətti funksiyaların L çoxluğudur. Bu sinfə 1 və 0 sabitləri, x eynilik funksiyası və $\overline{x}, x_1 + x_2$ funksiyaları aiddir. $x_1 \& x_2$ və $x_1 \vee x_2$ funksiyaları isə bu sinfə aid deyil.

Lemma 3. Əgər $f(x_1,...,x_2) \notin L$, onda bu funksiyaya 0 və 1 sabitlərini, x və $\overline{x}$ funksiyalarını əlavə etməklə, eləcə də f üzərində məntiqi inkar verməklə $x_1 \& x_2$ funksiyasını almaq olar.

Qeyd edək ki, nəzərdən keçirdiyimiz T_0, T_1, S, M və L qapalı sinifləri aşağıdakı cədvəldən göründüyü kimi müxtəlifdirlər (burada + işarəsi funksiyanın sinfə aid olduğunu, - işarəsi isə aid olmadığını bildirir):

	T_0	T_1	S	M	L
0	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
1	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
$\overline{x}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$

İndi isə məntiq cəbrinin əsas məsələlərindən biri olan, tamlığın zəruri və kafi şərtlərinin araşdırılması məsələsinə baxaq. Tutaq ki, $\Omega = \{f_1, f_2, ..., f_s, ...\}$, P_2 sistemindən götürülən ixtiyari funksiyalar sistemidir. Bu sistemin tam olması üçün nə tələb olunduğunu açıqlayan aşağıdakı teoremə baxaq:

Teorem 7. Ω sisteminin tam sistem olması üçün zəruri və kafi şərt, onun beş mümkün T_0, T_1, S, M və L qapalı siniflərdən heç birinə tam şəkildə daxil olmamasıdır.

İsbatı. Zərurilik. Tutaq ki, Ω sistemi tamdır, yəni $[\Omega] = P_2$. Fərz edək ki, Ω, qeyd etdiyimiz beş qapalı sinifdən birinə daxildir, bu sinfi şərti olaraq Σ ilə işarə edək, yəni $\Omega \subset \Sigma$. Onda Σ-nın qapanma və qapalılığının xassələrinə görə alarıq: $P_2 = [\Omega] \subset [\Sigma] = \Sigma$. Deməli, $\Sigma = P_2$, bu isə doğru deyil. Zərurilik isbat olundu.

Kafilik. Tutaq ki, Ω sistemi, qeyd etdiyimiz beş qapalı sinifin heç birinə tamamilə daxil deyil. Onda Ω-dan, beşdən çox funksiyaya malik olmayan və bu şərti ödəyən hər hansı Ω' alt sistemini ayırmaq olar. Bunun üçün Ω-dan uyğun olaraq T_0, T_1, S, M və L siniflərindən olmayan f_i, f_j, f_k, f_m və f_l funksiyalarını seçək və $\Omega' = \{f_i, f_j, f_k, f_l, f_m\}$ qəbul edək. Bütün bu funksiyaların eyni bir $x_1, \ldots, x_n$ dəyişənlərindn asılı olduğunu qəbul edək.

Kafiliyin isbatını üç hissəyə bölək:

I. f_i, f_j və f_k funksiyalarının köməyi ilə 0 və 1 sabitlərinin qurulmasına baxaq. $f_i \notin T_0$ funksiyasını nəzərdən keçirək. Burada iki hal mümkündür:

1. $f_i(1,\ldots,1) = 1$, onda $\varphi(x) = f_i(x,\ldots,x)$ funksiyası 1 sabitidir, çünki $\varphi(0) = f_i(0,\ldots,0) = 1, \varphi(1) = f_i(1,\ldots,1) = 1$. İkinci sabit isə f_j funksiyasından alınır: $f_j(1,\ldots,1) = 0$.

2. $f_i(1,\ldots,1) = 0$, onda $\varphi(x) = f_i(x,\ldots,x)$ funksiyası $\overline{x}$ inkar funk-

siyasını verir, çünki $\varphi(0)=f_i(0,...,0)=1,\ \varphi(1)=f_i(1,...,1)=0$.

$f_k\,(f_k \notin S)$ funksiyasını götürək. Burada $\overline{x}$ funksiyasını aldığımızdan, lemma 1-ə əsasən f_k-dan sabiti ala bilərik. $\overline{x}$ funksiyasına malik olduğumuzdan ikinci sabiti də ala bilərik. Beləliklə, hər iki halda biz 0 və 1 sabitlərini alırıq.

II. $0,1$ sabitləri və f_m funksiyası vasitəsilə $\overline{x}$ funksiyasının qurulması. Bu isə lemma 2-yə əsasən həyata keçirilir.

III. $0,1$ sabitləri və $\overline{x}, f_i$ funksiyaları vasitəsilə $x_1 \,\&\, x_2$ funksiyasının qurulması. Bu isə lemma 3 əsasında həyata keçirilir.

Beləliklə, Ω' sistemi (və deməli Ω sistemi) üzərindəki düsturların köməyi ilə $\overline{x}$ və $x_1 \,\&\, x_2$ funksiyaları realizə edilir. Bununla da kafilik isbat olunur.

Nəticə 1. P_2 sistemindən olub, $\Omega \neq P_2$ şərtini ödəyən, ixtiyari qapalı Ω funksiyalar sinfi, qurulmuş qapalı Ω funksiyalar sinfi, qurulmuş qapalı siniflərdən heç olmasa birinə daxildir.

Tərif. P_2 sistemindən olan Ω funksiyalar sinfi, əgər Ω tam deyilsə, lakin ixtiyari $f\,(f \in P_2,\ f \notin \Omega)$ funksiyası üçün $\Omega \bigcup \{f\}$ sinfi tam olarsa, bu Ω sinfi maksimal adlanır.

Bu tərifdən alarıq ki, maksimal sinif qapalı sinifdir.

Nəticə 2. Məntiq cəbrində yalnız beş T_0, T_1, S, M və L maksimal sinif mövcuddur.

Misal. $f_1 = x_1 \cdot x_2,\ f_2 = 0, f_3 = 1$ və $f_4 = x_1 + x_2 + x_3$ funksiyalar sisteminin tam olduğunu göstərək. Burada $f_3 \notin T_0$, $f_2 \notin T_1,\ \ f_2 \notin S,\ \ f_4 \notin M,\ \ f_1 \notin L$. Digər tərəfdən, bu funksiyalardan hər hansı birinin çıxarılması, tam olmayan sinfə gətirir:

$$\{f_2, f_3, f_4\} \subset L,\ \{f_1, f_3, f_4\} \subset T_1,\ \{f_1, f_2, f_4\} \subset T_0,\ \{f_1, f_2, f_3\} \subset M.$$

ÇALIŞMALAR

1.1. Aşağıdakı düsturlar üçün doğruluq cədvəllərini qurmalı:

1) $((x \to y) \vee (x \to (y \,\&\, x)))$;

2) $(\overline{(x \to \overline{(y \,\&\, x)})} \to (y \vee z))$;

3) $((x \,\&\, (y \to z)) \to \overline{x})$;

4) $(((x \,\&\, \overline{y}) \to y) \to (x \to y))$;

5) $((x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)))$;

6) $((x \,\&\, (y \vee \overline{z})) \,\&\, (\overline{(y \to z)} \vee y))$.

1.2. Aşağıdakı düsturların bütün alt düsturlarını yazmalı:

1) $(((x \to y) \,\&\, (y \to z)) \to (\overline{x} \vee z))$;

2) $((x \to y) \to (x \to \overline{y}) \to \overline{y}))$;

3) $(((x \vee y) \,\&\, (y \,\&\, z)) \to y)$;

4) $((\overline{x \vee y}) \,\&\, (\overline{y} \to z) \to \overline{z})$;

1.3. Aşağıdakı düsturların eyniliklə doğru düstur olduğunu isbat etməli.

1) $((x \to y) \vee (y \to x))$;

2) $((x \to y) \vee (x \to \overline{y}))$;

3) $(x \to (y \to (x \,\&\, y)))$;

4) $((\overline{x} \to \overline{y}) \to (x \to y))$;

5) $(x \to (y \to x))$;

6) $((x \to y) \to ((x \to (y \to z)) \to (x \to z)))$;

7) $((x \to z) \to ((y \to z)) \to ((x \vee y) \to z)))$;

8) $((x \to y) \to ((x \to \overline{y}) \to \overline{x}))$;

9) $(\overline{x} \to \overline{y}) \to ((\overline{x} \to y) \to x))$;

10) $((x \to z) \to ((y \vee x) \to (y \vee z)))$.

1.4. x, y, z dəyişənlərinin hansı qiymətlərində aşağıdakı düsturlar yalan qiyməti alır:

1) $(((x \to (y \& z)) \to (\overline{y} \to \overline{x})) \to \overline{y})$;

2) $(((x \vee y) \vee z) \to ((x \vee y) \& (x \vee z)))$;

3) $(((x \vee y) \& (y \vee z) \& (z \vee x)) \to (x \& y \& z))$;

4) $((x \vee y) \to ((\overline{x} \& y) \vee (x \& \overline{y})))$.

1.5. Aşağıdakı ekvivalentlikləri isbat etməli:

1) $(x \& y) = (y \& x)$;

2) $(x \& (y \vee x)) = x$;

3) $(x \vee y) = (y \vee x)$;

4) $(x \vee (y \& x)) = x$;

5) $x \vee (\overline{x} \& y) = x \vee y$;

6) $x \vee y = \overline{\overline{x} \& \overline{y}}$;

7) $(x \& y) \vee (x \& \overline{y}) = x$;

8) $\overline{x \to y} = x \& \overline{y}$;

9) $x \& y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$;

10) $x \vee y = \overline{x} \to y$;

11) $x \to y = \overline{x} \vee y$;

12) $x \vee x = x$.

1.6. Aşağıdakı ekvivalentlikləri isbat etməli:

1) $(x \& (y \& z)) = ((x \& y) \& z)$;

2) $(x \& (y \vee z)) = ((x \& y) \vee (x \& z))$;

3) $(x \vee (y \vee z)) = ((x \vee y) \vee z)$;

4) $(x \vee (y \& z)) = ((x \vee y) \& (x \vee z))$;

5) $((x \vee y) \& (x \vee \overline{y})) = x$;

6) $((x \& y) \vee ((x \vee y) \& (\overline{x} \vee \overline{y}))) = (x \vee y)$;

7) $(x \& z) \vee (y \vee \overline{z}) \vee (x \& y) = (x \& z) \vee (y \& z)$;

8) $x \& y \vee \overline{z} = (\overline{x} \vee \overline{y}) \& z$;

9) $\overline{\overline{x} \& z \& y} = \overline{\overline{x} \& z} \vee \overline{y}$;

10) $x \& y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$;

11) $(x \vee (y \,\&\, \bar{y})) = x$;

12) $\overline{(x \vee y)} = \bar{x} \,\&\, \bar{y}$.

1.7. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2) \to x_3$ funksiyasını x_2 dəyişəninə görə ayrılışını yazmalı.

1.8. Aşağıdakıları dizyunktiv və konyunktiv normal formaya gətirməli:

1) $(((x \to y) \to (z \to \bar{x})) \to (\bar{y} \to \bar{z}))$;

2) $(((((x \to y) \to \bar{x}) \to \bar{y}) \to \bar{z}) \to z)$;

3) $((x \to (y \to z)) \to ((x \to \bar{z}) \to (x \to \bar{y})))$.

1.9. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 \vee x_1 x_2 x_3$ funksiyasının mükəmməl dizyunktiv normal formasını qurun.

1.10. $xy + yz$ funksiyasının mükəmməl konyunktiv normal formasını qurun.

1.11. Aşağıdakı cədvəllə verilmiş funksiyaların mükəmməl dizyunktiv normal formalarını qurun.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0

1.12. Aşağıdakılar üçün mükəmməl dizyunktiv normal formanı qurmalı

1) $((\bar{x}_1 \to \bar{x}_2) \to ((x_2 \,\&\, x_3) \to (x_1 \,\&\, x_3)))$;

2) $(((x_1 \to x_2) \to \bar{x}_1) \to (x_1 \to (x_2 \,\&\, x_1)))$;

3) $(\overline{((x_1 \,\&\, x_2) \to \overline{x}_1)} \,\&\, \overline{((x_1 \,\&\, x_2) \to \overline{x}_2)})$.

1.13. Aşağıdakılar üçün mükəmməl dizyunktiv və mükəmməl konyunktiv normal formaları qurun

1) $x_1 \,\&\, x_2$;
2) $x_1 \vee x_2$;
3) $(x_1 \to x_2) \,\&\, x_2$;
4) $(x_1 \vee x_2) \to x_1$;
5) $(x_1 \to \overline{x}_2) \to \overline{x}_1$;
6) $(\overline{x_1 \,\&\, x_2}) \to x_1$;
7) $(x_1 \to x_2) \,\&\, x_3$;
8) $(x_1 \vee x_2) \to (x_2 \,\&\, x_3)$.

1.14. Aşağıdakılar üçün mükəmməl konyunktiv normal formanı qurmalı.

1) $((x_3 \to x_1) \to ((\overline{x_2 \vee x_3}) \to x_1))$;
2) $((\overline{(x_1 \,\&\, x_2) \to x_1}) \vee (x_1 \,\&\, (x_2 \vee x_3)))$;
3) $((\overline{x_1 \,\&\, (x_2 \vee x_3)}) \to ((x_1 \,\&\, x_2) \vee x_3))$.

1.15. Aşağıdakı funksiyaların bütün əhəmiyyətli dəişənlərini tapmalı.

1) $(y \,\&\, x) \vee (\overline{y} \,\&\, z)$;
2) $(x \,\&\, y) \vee x$;
3) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$.

1.16. Aşağıdakı cədvəllə verilmiş funksiyaları $\{\overline{x}, x_1 \,\&\, x_2\}$ funksiyalar bazisində düstur kimi ifadə etməli

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

1.17. Aşağıdakı cədvəllə verilmiş funksiyaları $\{\overline{x}, x_1 \vee x_2\}$ funksiyalar bazisində düstur kimi ifadə etməli.

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

1.18. Aşağıdakı düsturları $\{\bar{x}, x_1 \& x_2\}$ bazisində ifadə etməli.

1) $\overline{x_1 \vee (x_1 \& x_2)} \to x_1 \vee x_2$;

2) $((\overline{x_1 \vee x_2}) \& x_2) \vee ((x_1 \& x_2) \to x_3)$;

3) $(x_1 \to x_2) \& (\bar{x}_1 \vee (x_2 \to x_1))$;

4) $\bar{x}_1 \to (\overline{\overline{x_1 \vee x_2} \vee x_2})$.

1.19. Aşağıdakı düsturları $\{\bar{x}, x_1 \vee x_2\}$ bazisində ifadə etməli:

1) x_1 / x_2; 2) $x_1 + x_2$; 3) $x_1 \to x_2$; 4) $(x_1 \to x_2) \& (x_1 / x_2)$.

1.20. Aşağıdakı funksiyalar sisteminin tam olduğunu isbat etməli:

1) $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}\}$;
2) $\{x_1 \vee x_2, \bar{x}\}$;
3) $\{x_1 \& x_2, \bar{x}\}$;
4) $\{x_1 \to x_2, \bar{x}\}$.

1.21. Aşağıdakı funksiyalar sisteminin tam olduğunu isbat etməli:

1) $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \to x_2\}$; 2) $\{\bar{x}\}$.

1.22. Aşağıdakı funksiyalar sisteminin tam olduğunu isbat etməli.

1) $\{x_1 / x_2\}$;
2) $\{\overline{x_1 \vee x_2}\}$;
3) $\{x_1 + x_2, x_1 \vee x_2, 1\}$;
4) $\{x_1 \to x_2, 0\}$.

1.23. Aşağıdakı funksiyalar sisteminin tam olduğunu isbat etməli.

1) $\{0, 1, x + y, x \to y\}$; 2) $\{x \& y, x + y, 1\}$.

1.24. $\{0, 1, x_1 \& x_2, x_1 + x_2\}$ sisteminin tamlığını isbat etməli.

1.25. Aşağıdakı cədvəllə verilmiş funksiyalara ikili olan funksiyaları qurmalı.

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1

1.26. Aşağıdakı düsturlara ikili olan düsturları qurmalı:

1) $(x_1 \& x_2) \to x_1$; 3) $(x_1 \vee x_2) \& x_1$;

2) $(x_1 \to x_2) \& x_2$; 4) $(x_1 \& x_2) \vee x_2$.

1.27. Aşağıdakı cədvəllə verilmiş funksiyalara ikili olan funksiyaları qurmalı

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0

1.28. Aşağıdakı düsturlara ikili olan düsturları qurmalı:

1) $(x_1 \to x_2) \vee (x_2 \vee x_3)$; 4) $(x_1 \& x_2) \to (x_1 \& x_3)$;

2) $(x_1 \to x_3) \to (x_2 \& x_3)$; 5) $(x_1 \vee \bar{x}_2) \& \bar{x}_3$;

3) $(x_1 \& x_3) \vee (x_2 \to x_3)$; 6) $(\overline{x_1 \& x_2}) \to x_3$.

1.29. Aşağıdakı düsturları sadələşdirməli:

1) $xy \vee \bar{x}(y \vee xz)(\overline{x(\bar{y} \vee z) \vee yz})$;

2) $xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z$;

3) $(x \to y) \vee (y \to z) \vee (y \to x)$;

4) $(x \vee y \vee z) \& (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$.

II FƏSİL.

QRAFLAR NƏZƏRİYYƏSİNİN ELEMENTLƏRİ

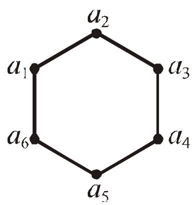
§1. Qraf anlayışı.

Qraflar nəzəriyyəsi təbiət elmlərinin inkişafı ilə əlaqədar yaranmışdır. Belə ki, elektrik şəbəkələri, kristal modelləri, molekul strukturlarının və s. tədqiqi qraflar nəzəriyyəsinin elementləri vasitəsilə aparılmışdır. Müasir elmdə oyunlar nəzəriyyəsi, proqramlaşdırma, biologiya, psixologiya, məlumatların mübadiləsi və verilməsi nəzəriyyəsi və s. bilavasitə qraflar nəzəriyyəsi ilə sıx bağlıdır.

Qraflar nəzəriyyəsinin ilk məsələlərinin predmeti nöqtələr və onları birləşdirən xətlərin konfiqurasiyaları idi. Bu məsələlərdə nöqtələri birləşdirən xətlərin düz və ya əyri olması, yerləşməsi, uzunluğu və ya qısalığı əhəmiyyətli deyil idi. Burada əhəmiyyətli, həmin xətlərin iki nöqtəni birləşdirməsi idi.

Tərif. $A=\{a_1,a_2,...\}$ çoxluğu və A çoxluğundan ixtiyari qaydada seçilən (a_{i_k},a_{j_k}) elementləri cütlərinin B külliyatı Γ qrafı adlanır. A çoxluğunun elementləri qrafın təpələri, B çoxluğunun elementləri isə qrafn tilləri adlanır. (a_i,a_j) tilləri haqqında deyəcəyik ki, onlar a_i və a_j təpələrini birləşdirir.

Misal 1. Tutaq ki, $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$, $B=\{(a_1,a_2),\ (a_2,a_3),(a_3,a_4),\ (a_4,a_5),\ (a_5,a_6),$ $(a_6,a_1)\}$. Onda A və B çoxluqları qraf təyin edir.



Əgər A və B çoxluqları sonlu sayda elementlərdən və element cütlərindən ibarətdirsə, onda onların təyin etdiyi qraf da sonlu qraf adlanır. Misalda baxdığımız qraf sonludur.

Tutaq ki, a_i və a_j – Γ qrafının ixtiyari təpələridir.

Tərif. Γ qrafının aşağıdakı tilləri sistemi

$$A_{a_i a_j} = \{(a_{i_1}, a_{i_2}), (a_{i_2}, a_{i_3}), ..., (a_{i_{s-1}}, a_{i_s})\}$$

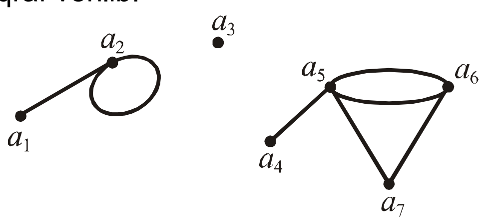
(burada $a_{i_1} = a_i, a_{i_s} = a_j$) a_i və a_j təpələrini birləşdirən yol adlanır. $A_{a_i a_j}$ yoluna aid ixtiyari til üçün deyəcəyik ki, $A_{a_i a_j}$ yolu bu tildən keçir. Analoji olaraq, əgər a təpə nöqtəsi $A_{a_i a_j}$ yolunun keçdiyi hər hansı tilə aiddirsə, onda deyirlər ki, $A_{a_i a_j}$ yolu bu a təpə nöqtəsindən keçir.

Tərif. Eyni bir tildən $a_i = a_j$ olduqda bir dəfə keçən $A_{a_i a_j}$ yoluna dövr deyilir. Xüsusi halda $\{(a_i, a_i)\}$ dövrünə həlqə deyilir.

Tərif. Γ qrafının ixtiyari iki müxtəlif a_i və a_j təpə nöqtəsini birləşdirən yol varsa, onda bu Γ qrafı əlaqəli qraf adlanır.

Misal 1-də baxdığımız qraf əlaqəli qrafdır.

Misal 2. Tutaq ki, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ $B = \{(a_1, a_2),$ $(a_2, a_2), (a_4, a_5), (a_5, a_6), (a_5, a_6), (a_6, a_7), (a_5, a_7)\}$ çoxluqları ilə təyin olunan qraf verilib.



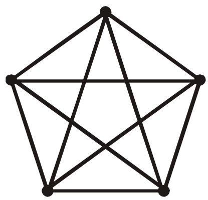
Tərif. Qrafın heç bir tilinə aid olmayan təpə nöqtəsinə təcrid olunmuş təpə nöqtəsi deyilir. Baxdığımız misal 2-də qraf əlaqəsiz və sonludur, eləcə də həlqəyə və təcrid olunmuş təpə nöqtəsinə malikdir.

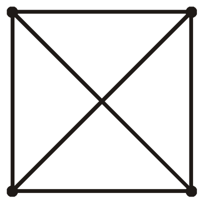
Tərif. Əgər evklid fəzasındakı hər hansı γ fiqurunun təpə nöqtələri ilə hər hansı Γ qrafının təpə nöqtələri arasında və bu fiqurun təpə nöqtələrini birləşdirən əyrilərlə qrafın təpə nöqtələrini birləşdirən tillər arasında (a_i ilə qrafın, b_i ilə fiqurun təpə nöqtələrini işarə etsək) $(b_i, b_j) \leftrightarrow (a_i, a_j)$ və $b_i \leftrightarrow a_i, b_j \leftrightarrow a_j$ kimi qarşılıqlı, birqiymətli uyğunluq olarsa, onda γ fiquruna Γ qrafının həndəsi ifadəsi deyilir.

Misal 1 və 2 -də qurulan fiqurlar orada təyin olunmuş uyğun qrafların həndəsi ifadələridir.

Tərif. Hər hansı Γ_1 qrafının təpə nöqtələri və tilləri hər hansı Γ_2 qrafına aid olarsa, onda Γ_1 qrafına Γ_2 qrafının alt qrafı deyilir.

Tərif. Bütün mümkün $(a_i, a_j)(1 \le i < j \le m)$ formalı tillərə malik olan qrafa tam qraf deyilir. Aşağıdakı təsvir olunan qrafları tam qraflara misal göstərmək olar:





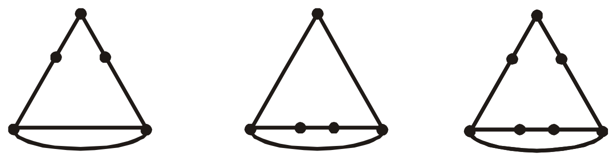
Tərif. Əgər hər hansı Γ_1 və Γ_2 qraflarının uyğun təpə nöqtələrini, uyğun tillər birləşdirirsə, onların təpə nöqtələri və tillri arasında qarşılıqlı birqiymtli uyğunluq varsa, onda Γ_1 və Γ_2 qrafına izomorf qraflar deyilir. Bu nöqteyi nəzərdən abstrakt qraf və onun həndəsi ifadəsi izomorf qraflardır. Deməli, sonlu abstrakt qraf əvəzinə onun həndəsi ifadəsindən istifadə etmək olar, yəni qraflarla həndəsi obyektlər kimi davranmaq olar.

Tutaq ki, (a_i, a_j) Γ qrafının ixtiyari tilidir və a nöqtəsi Γ qrafının A təpə nöqtələri çoxluğundan deyil. Γ qrafının (a_i, a_j) tilinin alt hissəsinin alınması əməliyyatı elə bir Γ_1 qrafının qurulmasıdır ki, bu qrafın təpə nöqtələri çoxluğu $A_1 = A \bigcup \{a\}$ kimi təyin edilsin, tilləri çoxluğu isə Γ qrafının ayırdığımız (a_i, a_j) tilindən başqa bütün tillərindən və əlavə olaraq, yeni $(a_i, a), (a, a_j)$ tillərindən ibarət olsun, yəni aşağıdakı kimi təyin edilsin: $B_1 = (B \setminus (a_i, a_j)) \bigcup \{(a_i, a), (a, a_j)\}$.

Tərif. Əgər Γ_2 qrafını Γ_1 qrafından Γ_1-ə tilin alt hissəsinin alınması əməliyyatının sonlu sayda tətbiqi nəticəsində almaq olarsa, onda Γ_2 qrafı Γ_1 qrafının alt hissəsi adlanır.

Tərif. Γ_1 və Γ_2 qraflarının bir-birilə izomorf olan alt hissələri mövcuddursa, onda Γ_1 və Γ_2 qrafları homomorf qraflar adlanır.

Misal.



Γ_1 Γ_2 Γ

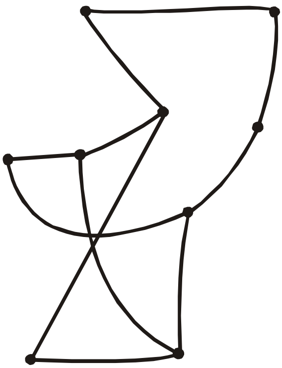
Burada təsvir olunmuş Γ_1 və Γ_2 qrafları izomorf deyil, çünki onların təpə nöqtələri çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yoxdur. Lakin Γ_1 və Γ_2 qrafları homomorfdurlar, çünki onların hər birinə tilin alt hissəsinin alınması əməliyyatını tətbiq etməklə Γ qrafına gətirmək olar.

Qrafın tillərinin təyini zamanı tilin uc nöqtələrinin yerləşməsi qaydası nəzərə alınarsa, bu til istiqamətlənmiş, əks halda, yəni $(a_i, a_j) = (a_j, a_i)$ şərti ödənərsə, istiqamətlənməmiş til adlanır.

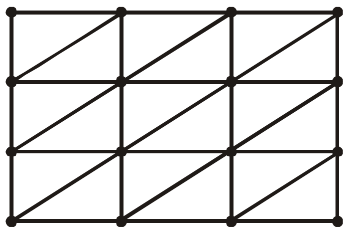
İstiqamətlənmiş til halında (a_i, a_j) tili üçün a_i-yə tilin başlanğıc təpəsi, a_j isə sonuncu təpəsi deyilir.

Hər bir tili istiqamətlənməmiş olan qrafa istiqamətlənməmiş qraf, bütün tilləri istiqamətlənmiş qrafa istiqamətlənmiş qraf deyilir.

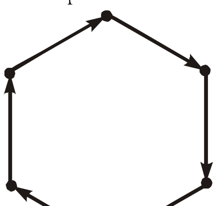
Aşağıdakı Γ_1 və Γ_2 qrafları istiqamətlənməmiş qraflara, Γ_3 və Γ_4 qrafları isə istiqamətlənmiş qraflara misal ola bilər:



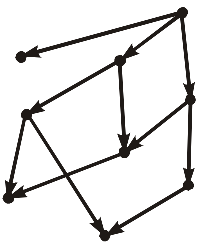
Γ_1



Γ_2



Γ_3



Γ_4

Bəzi hallarda təbii olaraq qarışıq qrafları, yəni həm istiqamətlənmiş, həm də istiqamətlənməmiş tilləri olan qrafları nəzərdən keçirmək lazım gəlir. Məsələn, hər hansı bir şəhərin planına qarışıq qraf kimi baxmaq olar. Bu qrafda şəhərin küçələri qrafın tilləri, onların kəsişmə nöqtələri isə qrafın təpə nöqtələri rolunu oynayır. Şəhərin bəzi küçələrində nəqliyyatın hərəkəti birtərəflidir, bu küçələrə uyğun tillər istiqamətlənmiş olacaq, bəzi küçələrdə isə hərəkət iki tərəflidir, bu küçələrə uyğun tillər istiqamətlənməmiş olacaqdır.

Qeyd edək ki, izomorf qraflarda istiqamətlənmiş tillər olarsa, onlarn istiqamətləri də bir-birilə üst-üstə düşməlidir.

Qrafın təpə nöqtələri çoxluğunu təyin edərkən onlar içində yalnız təcrid olunmamış təpə nöqtələrini nəzərə almaq əhəmiyyətli olur. Yalnız təcrid olunmuş təpə nöqtələrindən ibarət qrafa sıfır qrafı deyilir.

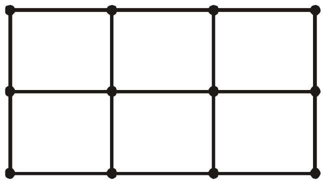
Qrafın hər hansı təpə nöqtələri cütünün bir neçə til ilə birləşdiyini fərz etməklə, qraf anlayışını genişləndirmək olar. Γ istiqamətlənmiş qraf üçün təpə nöqtələri cütünün hər iki istiqamətdə bir neçə til ilə birləşdiyini fərz etmək olar. Məsələn:

Bu hala misal olaraq futbol komandaları yarışının turnir cədvəlini göstərək. Bu cədvələ uyğun qrafın təpə nöqtələri yarışda iştirak edən komandalardır. Hər hansı A və B komandaları cütü, hər dəfə öz aralarında oyun keçirdikdə, tillə birləşdirilirlər. Əgər A komandası B komandasına qalib gəlirsə, bu til A-dan B-yə doğru istiqamətlənir, B komandası A komandasına qalib gəldikdə B-dən A-ya doğru istiqamətlənir və nəhayət əgər oyun heç-heçə başa çatıbsa, A və B-ni birləşdirən til istiqamətlənməmiş olur.

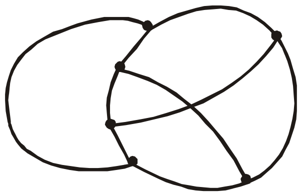
Hər bir istiqamətlənmiş Γ qrafı üçün onun əks qrafı adlanan Γ^* qrafı mövcuddur. Bu Γ^* qrafında bütün tillərin istiqaməti Γ-nın tillərinin istiqamətinə əksdir.

Tərif. Əgər qrafın müstəvi üzərindəki təsvirində tillərin bütün kəsişmə nöqtələri, qrafın təpə nöqtələri olarsa, belə qrafa hamar qraf deyilir.

Məsələn, aşağıdakı Γ_1 qrafı hamar, Γ_2 qrafı isə hamar qraf deyil.



Γ_1



Γ_2

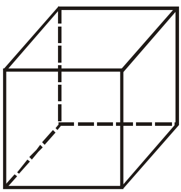
Tutaq ki, Γ hər hansı istiqamətlənməmiş qrafdır. Bu qrafın hər hansı a təpə nöqtəsindən keçən bütün tillərin sayını $\rho(a)$ ilə işarə edək. Bu ədədə qrafın a təpə nöqtəsindəki lokal tərtibi və ya sadəcə tərtibi deyilir. Əgər qrafın bütün $\rho(a)$ ədədləri sonludursa, onda bu qraf lokal sonlu qraf adlanır.

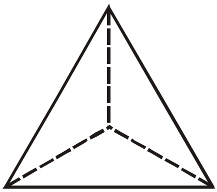
Γ qrafında a və b təpə nöqtələrini birləşdirən tillərin sayını $\rho(a,b)=\rho(b,a)$ ilə işarə edək. Əgər Γ qrafında təkrarlanan tillər yoxdursa, onda $\rho(a,b)$ ədədinin ala biləcəyi qiymətlər aşağıdakılardır:

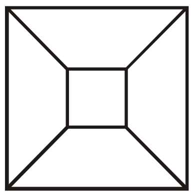
$$\rho(a,b)=0,\;\; \rho(a,b)=1\,.$$

Tərif. Əgər qrafın bütün təpə nöqtələri üçün tərtibi n ədədinə bərabərdirsə, $\rho(a)=n,\, a\in A,$ onda bu qrafa n tərtibli bircins qraf deyilir.

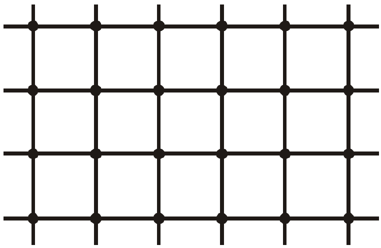
Sonlu bircins qraflara kub, tetraedr, oktaedr, dodekaedr, ikosaedr həndəsi fiqurlarının əmələ gətirdiyi qrafları göstərmək olar. Məsələn,

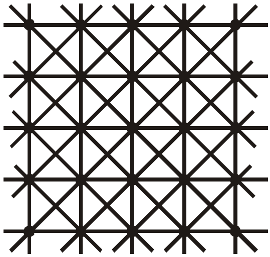




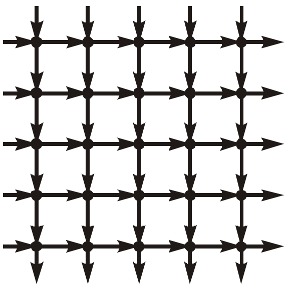


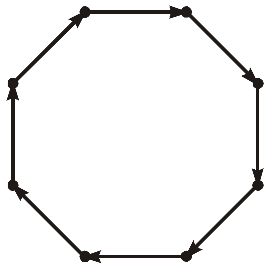
Aşağıdakı qraflar isə sonsuz bircins qraflara misal ola bilər:





İndi tutaq ki, Γ – istiqamətlənmiş qrafdır. Γ qrafının hər hansı a təpə nöqtəsinə daxil olan və çıxan tillərin sayını uyğun olaraq $\rho(a)$ və $\rho^*(a)$ ilə işarə edək. Bu ədədlərə Γ qrafının a təpə nöqtəsində lokal tərtibi deyilir. Əgər istiqamətlənmiş qrafın bütün lokal tərtibləri eyni bir n qiymətini alırsa, $\rho(a) = \rho^*(a) = n$ onda bu qrafa istiqamətlənmiş n tərtibli bircins qraf deyilir. Aşağıdakı qraflar istiqamətlənmiş bircins qraflara misal ola bilər:





§2. Şəbəkələr, ağaclar.

Qraf anlayışını ümumiləşdirək.

Tərif. $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ çoxluğu və $E_i = \{a_{\nu_1(i)}, a_{\nu_2(i)}, \ldots\}$ elementləri A-dan olan $B = \{E_0; E_1, E_2, \ldots\}$ çoxluğuna şəbəkə deyilir və aşağıdakı kimi işarə olunur: $A(E_0; E_1, E_2,...)$. A çoxluğunun elementləri şəbəkənin təpələri, E_0 külliyatının obyektləri şəbəkənin qütbləri adlanır.

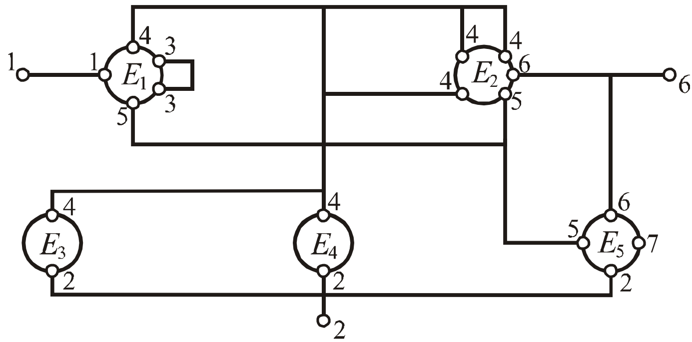
Qraflar halında olduğu kimi şəbəkələr üçün də sonlu şəbəkənin həndəsi ifadəsi anlayışını daxil etmək olar. Bunun üçün əvvəlcə aşağıdakı işarələməni daxil edək: Əgər E - külliyatdırsa, onda $< E >$ ilə E-dən olan bütün obyektlərin çoxluğunu işarə edəcəyik. Tutaq ki, bizə $A(E_0; E_1, E_2,...)$ şəbəkəsi verilib. A çoxluğunu bir-birilə kəsişməyən aşağıdakı üç çoxluğa bölək: $A_1 =< E_0 >$ – qütblər çoxluğu; $A_2 = A \setminus \bigcup\limits_{i \geq 0} < E_i >$ – qütb nöqtələrindən fərqli təcrid olunmuş təpə nöqtələri çoxluğu; A_3 – qalan təpə nöqtələri çoxluğu.

A_1 və A_2 çoxluqlarının hər bir elementinə üçölçülü evklid fəzasında elə bir uyğunluq qoyaq ki, hər bir təpə nöqtəsinə fəzada bir nöqtə uyğun gəlsin. Bu nöqtələri A çoxluğunun a_i təpələrinin simvoları ilə işarə edək. Aşkardır ki, qütblərə $a_{v_1(0)}, a_{v_2(0)},...$ ilə işarə olunmuş nöqtələr uyğun gələcəkdir.

B çoxluğunun $(i \geq 1)$ hər bir $E_i = (a_{v_1(i)}, a_{v_2(i)},...)$ külliyatlarına üçölçülü evklid fəzasında çevrə (E_i bir və ya iki obyektdən ibarət olduqda isə çevrə əvəzinə təpə nöqtəsi və ya qövs götürmək olar) uyğun gətirilir. Bu çevrə üzərində E_i külliyatına daxil olan $a_{v_1(i)}, a_{v_2(i)},...$ ilə işarə olunmuş təpə nöqtələri yerləşdirilir.

Sonra A çoxluğunun eyni bir a_i simvolu ilə işarələnmiş nöqtələri A_i əlaqələndirici xətləri ilə birləşdirilir. Nəticədə alınan fiqura verilmiş $A(E_0; E_1, E_2,..)$ şəbəkəsinin həndəsi ifadəsi deyilir.

Misal. Tutaq ki, $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}, B=\{E_0;E_1,E_2,E_3,E_4,E_5\}$, burada $E_0=(1,2,6);E_1=(1,3,3,4,5);E_2=(4,4,4,5,6);\ E_3=E_4=(2,4)$, $E_5=(2,5,6,7)$. Onda $A(E_0;E_1,E_2,E_3,E_4,E_5)$ şəbəkə əmələ gətirəcək. Bu şəbəkənin həndəsi ifadəsi aşağıdakı kimi verilə bilər:



Bu fiqur radioqəbuledicidə olan sxemləri xatırladır.

Şəbəkələrdə A və B çoxluqları sonlu olduqda şəbəkə də sonlu adlanır. Məsələn, misalda baxdığımız şəbəkə sonludur. A və ya B çoxluqlarından heç olmasa biri sonsuz olan şəbəkəyə sonsuz şəbəkə deyilir.

Tərif. $A'(E'_0;E'_1,E'_2,...)$ və $A''(E''_0;E''_1,E''_2,...)$ şəbəkələrinin A' və A'' eləcə də B' və B'' çoxluqları obyektləri arasında aşağıdakı kimi qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq vermək olarsa:

1) uyğun E' və E'' külliyatları bir-birinə uyğun obyektlərdən təşkil olunub;
2) E'_0 və E''_0 külliyatları bir-birinə uyğundur.

Onda $A'(E'_0;E'_1,...)$ və $A''(E''_0;E''_1,...)$ şəbəkələri izomorf şəbəkələr adlanır.

Aşkardır ki, abstrakt şəbəkə, özünün həndəsi ifadəsi ilə izomorfdur. Ona görə də abstrakt şəbəkə əvəzinə onun həndəsi ifadəsini nəzərdən keçirmək olar. Bu mənada şəbkələrə həndəsi obyektlər kimi baxmaq olar.

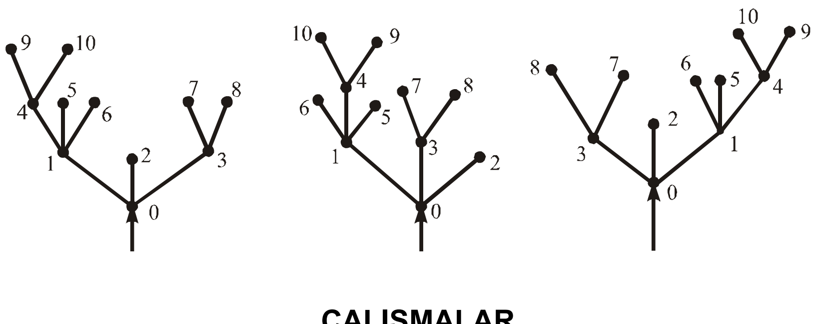
Aşkardır ki, $E_0 = \varnothing$ və hər bir $E_i \ (i \geq 1)$ külliyatı A çoxluğunun yalnız iki obyektindən ibarət olan şəbəkələr sinfi, qraflar sinfi ilə üst-üstə düşür.

Şəbəkələrin digər bir sinfi ağaclar adlanır. Dövrə malik olmayan, kök adlanan qeyd olunmuş təpə nöqtəli, əlaqəli sonlu qraf ağac adlanır. Aşkardır ki, ağac bir qütblü şəbəkədir, yəni $E_0 = (a)$.

Qraflarda, şəbəkələrdə olduğu kimi ağacların da həndəsi ifadəsini vermək olar. Təpə nöqtələri nöqtələr, təpələri birləşdirən tillər düz xətt parçaları, kök isə əlavə parça-ox işarəli təpə nöqtəsi şəklində verilən həndəsi ifadəyə ağacın düzümü deyilir. Eyni bir ağacı bir nesə qaydada düzmək olar.

Misal. Tutaq ki, $A = \{0,1,2,...,10\}$, $B = \{E_0; E_1,...,E_{10}\}$ burada $E_0 = (0)$, $E_1 = (0,1)$, $E_2 = (0,2)$, $E_3 = (0,3)$, $E_4 = (1,4)$, $E_5 = (1,5)$, $E_6 = (1,6)$, $E_7 = (3,7), E_8 = (3,8), E_9 = (4,9), E_{10} = (4,10)$.

Aşkardır ki, $A = \{E_0; E_1, E_2,...,E_{10}\}$ ağac təyin edir. Bu ağacın mümkün düzümlərini quraq:

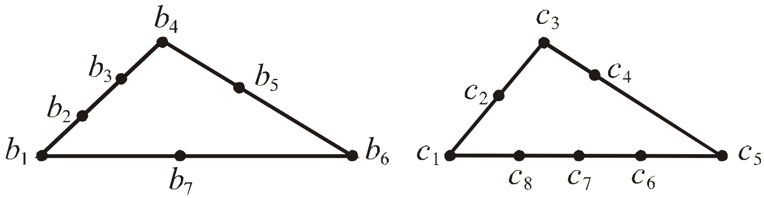


ÇALIŞMALAR

2.1. $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}, B = \{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_4),$
$(a_4, a_6), (a_5, a_6), (a_6, a_6), (a_3, a_6), (a_3, a_3)\}$ qrafı verilib.

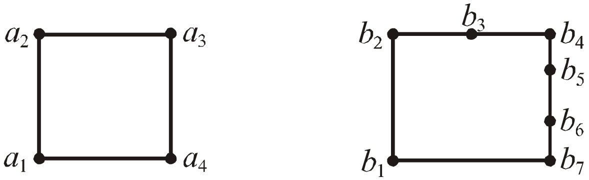
1) qrafn həndəsi ifadəsini qurmalı;
2) bu qrafın əlaqəli olub-olmadığını təyin etməli;
3) a_3-dən a_5-ə yol olub-olmadığını təyin etməli;
4) qrafda dövrün olub-olmadığını təyin etməli;
5) qrafda halqanın olub-olmadığını təyin etməli;
6) bu qrafın bütün alt qraflarını təyin etməli;
7) bu qrafa izomorf olan bir neçə qraf göstərməli;
8) bu qrafa homomorf olan hər hansı bir qraf göstərməli;

2.2. Qraflar özlərinin həndəsi ifadəsi ilə verilib:



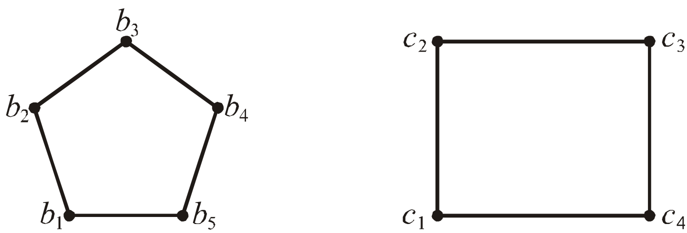
Bu qrafların izomorf və homomorf olub-olmadığını təyin etməli.

2.3. Qraflar özlərinin həndəsi ifadəsi ilə verilib.



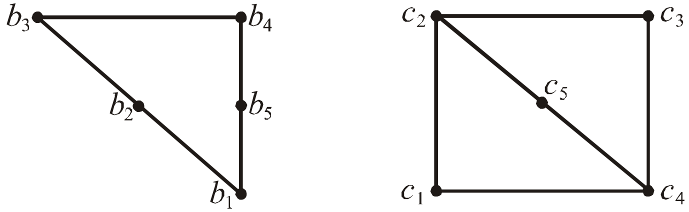
Bu qraflar izomorfdurmu? Onların homomorf olub-olmadığını təyin etməli.

2.4. Qraflar özlərinin həndəsi ifadəsi ilə verilib.



Bu qrafların izomorf və homoorf olub-olmadığını təyin etməli.

2.5. Qraflar özlərinin həndəsi ifadəsi ilə verilib.



Bu qrafların izomorf olub-olmadığını təyin etməli, mümkünsə onların homomorf olduğunu isbat etməli.

2.6. $A=\{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\}, B=\{(a_0,a_1),(a_1,a_2),$ $(a_1,a_3),(a_1,a_3),(a_3,a_3),(a_4,a_5),(a_2,a_5),(a_2,a_4),(a_4,a_6),$ $(a_4,a_7),(a_6,a_7),(a_7,a_7),(a_6,a_7),(a_6,a_8)\}$ qrafı verilib.

1) bu qrafın həndəsi ifadəsini qurmalı;
2) bu qrafın əlaqəli olduğunu, onda təcrid olunmuş təpə nöqtələri olduğunu, onda dövr, halqa olduğunu təyin etməli;
3) a_2 ilə a_7-ni birləşdirən yol olduğunu təyin etməli;
4) bu qrafa izomorf qraf qurmalı;
5) bu qrafa homomorf olan qraf qurmalı;
6) bu qrafın, alt qraflarını qurmalı.

2.7. $A=\{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}, B=\{(a_0,a_1),(a_1,a_2),(a_1,a_3),$ $(a_1,a_5),(a_2,a_2),(a_2,a_4),(a_2,a_5),(a_3,a_5),(a_3,a_3),(a_3,a_4),$ $(a_3,a_5),(a_4,a_5),(a_5,a_5)\}$ qrafı verilib.

1) qrafın müstəvidə həndəsi ifadəsini qurmalı;
2) bu qrafın əlaqəli olduğunu, təcrid olunmuş təpə nöqtəsinə, dövrə, halqaya malik olduğunu təyin etməli;
3) a_1 və a_4 təpə nöqtələrini birləşdirən yol olduğunu təyin etməli;
4) bu qrafa izomorf olan qraf qurmalı;
5) bu qrafa homomorf olan qraf qurmalı;

6) bu qrafın alt qraflarını və onların həndəsi ifadəsini qurmalı.

2.8. $A=\{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9\}, B=\{(a_0,a_1),(a_1,a_2),$
$(a_1,a_3),(a_1,a_5),(a_2,a_5),(a_2,a_6),(a_5,a_6),(a_6,a_6),(a_5,a_8),$
$(a_6,a_8),(a_7,a_8),(a_8,a_8),(a_8,a_9),(a_5,a_8)\}.$
qrafı verilib.

1) bu qrafın həndəsi ifadəsini qurmalı;
2) qrafın əlaqəli olduğunu, qrafda təcrid olunmuş təpə nöqtələri, dövr, halqa olub-olmadığını təyin etməli;
3) a_3 və a_8 təpələrini birləşdirən yolu təyin etməli;
4) a_4 və a_9 təpələrini birləşdirən yolu təyin etməli;
5) bu qrafa izomorf olan qrafı qurmalı;
6) bu qrafla homomorf olan qrafı qurmalı;
7) bu qrafın alt qraflarını təyin edib, onların həndəsi ifadəsini verməli.

2.9. $A=\{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10}\}, B=\{(a_0,a_1),(a_0,a_2),$
$(a_1,a_3),(a_3,a_4),(a_3,a_4),(a_3,a_6),(a_6,a_7),(a_6,a_8),(a_4,a_7),$
$(a_6,a_9),(a_7,a_9),(a_8,a_{10}),(a_9,a_{10})\}$ qrafı verilib.

1) qrafın müstəvidəki həndəsi ifadəsini qurmalı;
2) qrafın əlaqəli olduğunu, təcrid olunmuş təpə nöqtələrinə, dövrə, halqaya malik olub-olmadığını təyin etməli;
3) a_2 və a_7 təpə nöqtələrini birləşdirən yolu təyin etməli;
4) a_5 ilə a_{10} təpələrini birləşdirən yolu təyin etməli;
5) bu qrafa izomorf qrafı qurmalı;
6) bu qrafa homomorf qrafı qurmalı;
7) bu qrafın alt qrafını tapıb, onların həndəsi ifadəsini verməli.

2.10. $A=\{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_6,a_7,a_8\}, B=\{(a_0,a_1),(a_1,a_2),(a_1,a_3),$
$(a_1,a_4),(a_2,a_8),(a_3,a_8),(a_4,a_5),(a_5,a_6),(a_5,a_7),(a_6,a_7),$

$(a_6, a_8), (a_5, a_8), (a_7, a_8), (a_8, a_8)\}$ qrafı verilib.

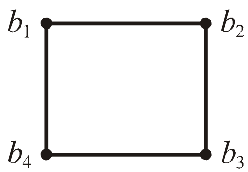
1) qrafın həndəsi ifadəsini verməli;
2) qrafın əlaqəli olduğunu, təcrid olunmuş təpə nöqtələrinin olduğunu, dövrə, halqaya malik olduğunu təyin etməli;
3) a_2 ilə a_7 təpələrini birləşdirən yolu tapmalı;
4) a_4 ilə a_8 təpələrini birləşdirən yolu tapmalı;
5) bu qrafa izomorf qrafı qurmalı;
6) bu qrafa homomorf olan qrafı qurmalı;
7) qrafın alt qraflarını təyin edib, həndəsi ifadələrini verməli.

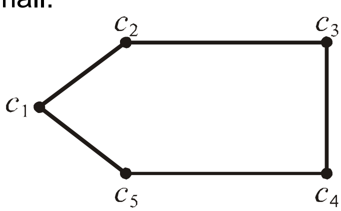
2.11. $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_6\}$, $B = \{(a_0, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_3),$
$(a_1, a_4), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4), (a_3, a_6), (a_4, a_6), (a_6, a_6)\}$
qrafı verilib.

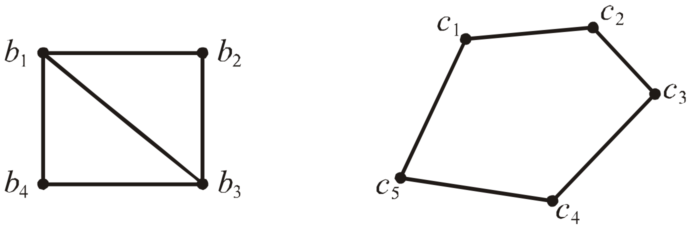
1) qrafın müstəvidəki həndəsi ifadəsini verməli;
2) qrafın əlaqəli olduğunu, təcrid olunmuş təpə nöqtələri olduğunu, dövrə, halqaya malik olduğunu təyin etməli;
3) a_3 ilə a_5 təpələrini birləşdirən yolu tapmalı;
4) a_1 ilə a_6 təpələrini birləşdirən yolu tapmalı;
5) bu qrafa izomorf qrafı qurmalı;
6) bu qrafa homomorf olan qrafı qurmalı;
7) qrafın bütün alt qraflarını təyin edib, həndəsi ifadələrini verməli.

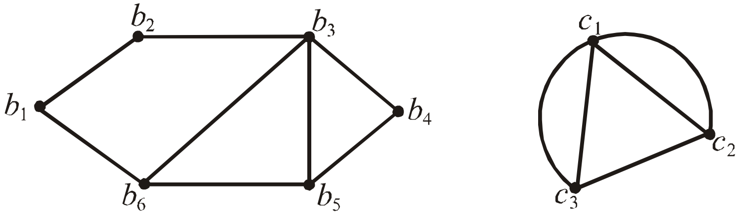
2.12. Qraflar həndəsi ifadələri ilə verilib. Onların abstrakt ifadələrini verməli, izomorf və homomorf olub-olmadıqlarını təyin etməli, alt qraflarını tapmalı.

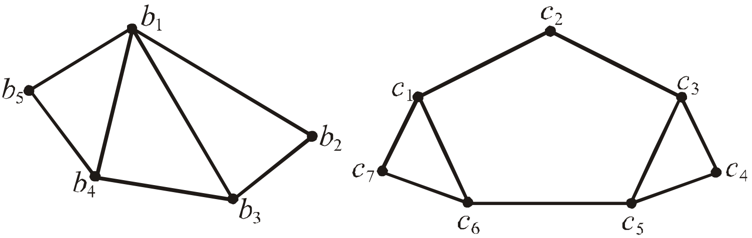
1)



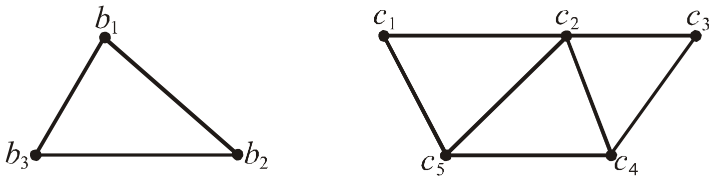


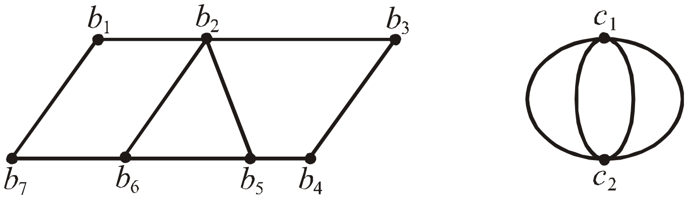
2) 

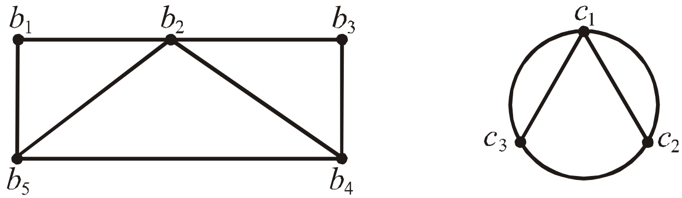
3) 

4) 

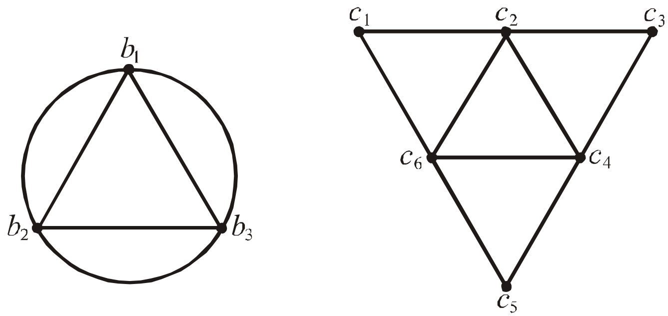
2.13. Qraflar həndəsi ifadələri ilə verilib. Onların abstrakt ifadələrini verməli, izomorf və homomorf olub-olmadıqlarını təyin etməli.

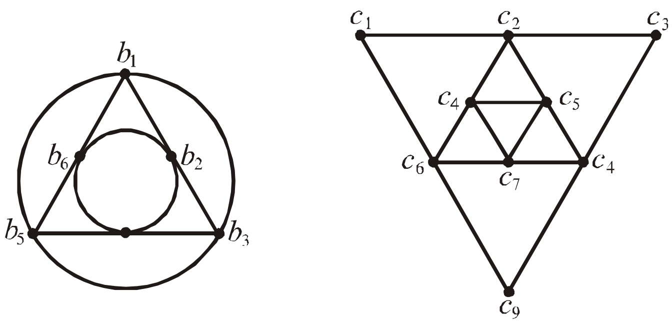
1) 

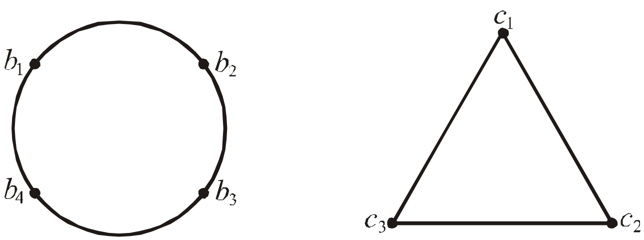
2) 

3) 

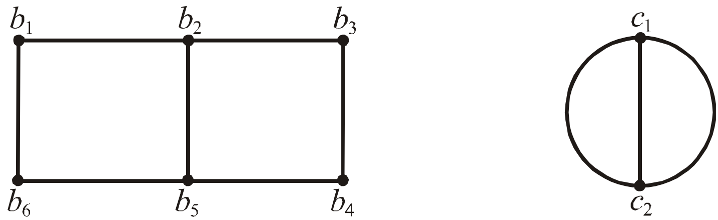
2.14. Qraflar həndəsi ifadələri ilə verilib. Onların abstrakt ifadələrini verməli, izomorf və homomorf olub-olmadıqlarını təyin etməli, alt qraflarını tapmalı.

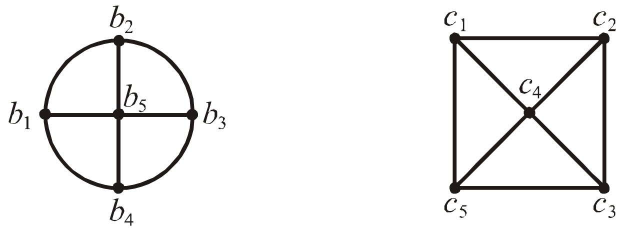
1) 

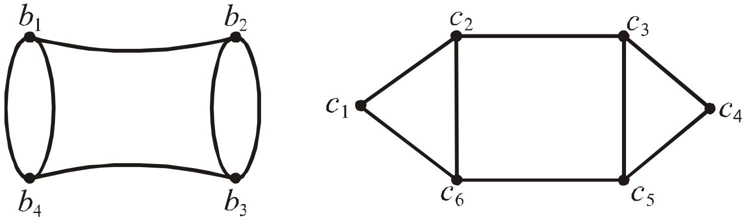
2) 

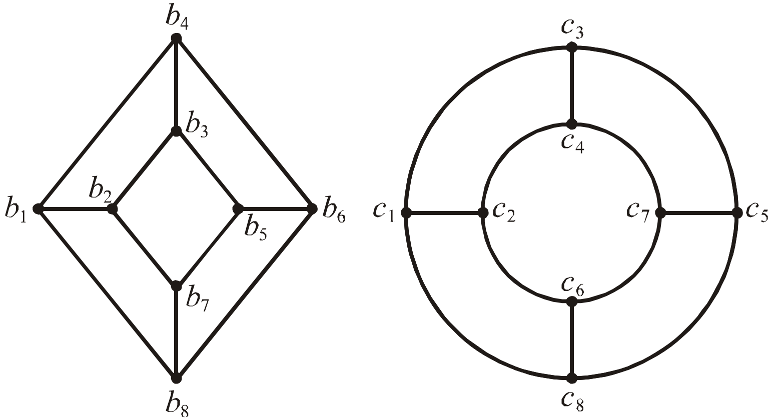
3) 

2.15. Qraflar həndəsi ifadələri ilə verilib. Onların abstrakt ifadələrini verməli, izomorf və homomorf olub-olmadıqlarını təyin etməli, alt qraflarını tapmalı.

1) 

2) 

3) 

4) 

2.16. Aşağıdakı çoxluqlarla verilən şəbkəni qurmalı;

1) $A = \{1,2,3,4,5,6\}; B = \{E_0; E_1, E_2, E_3, E_4\}$, burada $E_0 = (2,4,6)$; $E_1 = (1,2)$; $E_2 = (4,3,1)$; $E_3 = (3,5,6)$; $E_4 = (5,6)$.

2) $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}; B = \{E_0; E_1, E_2, E_3, E_4.E_5, E_6\}$, burada $E_0 = (1,3,5,7); E_1 = (1,2,4)$; $E_2 = (3,4,6)$; $E_3 = (4,5,6)$; $E_4 = (4,5,6); E_5 = (6,7,8)$; $E_6 = (7,9,10)$.

2.17. Aşağıdakı çoxluqlarla verilən şəbkəni qurmalı;

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$; $B = \{E_0; E_1, E_2, E_3, E_4.E_5\}$, burada $E_0 = (1,3,5); E_1 = (1,2,6)$; $E_2 = (6,7)$; $E_3 = (4,7)$; $E_4 = (4,5,8)$; $E_5 = (2,3,8)$.

2.18. Aşağıdakı çoxluqlarla verilən şəbkəni qurmalı;

$A = \{1,2,3,4,5,6\}; B = \{E_0; E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$, burada $E_0 = (2,4,6)$; $E_1 = (1,2,3)$; $E_2 = (3,4)$; $E_3 = (3,5,6)$; $E_4 = (1,3); E_5 = (1,5)$.

2.19. Aşağıdakı çoxluqlarla verilən şəbkəni qurmalı;

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$; $B = \{E_0; E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$, burada $E_0 = (1,3,5,7)$; $E_1 = (1,6)$; $E_2 = (4,5)$; $E_3 = (2,3)$; $E_4 = (2,4,6,8)$; $E_5 = (7,8)$.

2.20. Aşağıdakı çoxluqlarla verilən ağacı qurmalı;

$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; $B = \{E_0; E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8\}$, burada $E_0 = (0); E_1 = (0,2)$; $E_2 = (0,3); E_3 = (0,4); E_4 = (2,5)$; $E_5 = (2,6); E_6 = (3,7); E_7 = (3,8); E_8 = (4,9)$.

2.21. Aşağıdakı çoxluqlarla verilən ağacı qurmalı;

$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$; $B = \{E_0; E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9, E_{10}, E_{11}\}$, burada $E_0 = (0)$; $E_1 = (0,2)$;

$E_2 = (0,3)$; $E_3 = (0,4)$; $E_4 = (0,5)$; $E_5 = (1,6)$; $E_6 = (1,7)$;

$E_7 = (2,8)$; $E_8 = (2,9)$; $E_9 = (3,10)$; $E_{10} = (3,11)$; $E_{11} = (4,12)$.

2.22. Aşağıdakı çoxluqlarla verilən ağacı qurmalı;

$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; $B = \{E_0; E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6,$

$E_7, E_8, E_9, E_{10}\}$, burada $E_0 = (0)$; $E_1 = (0,1)$; $E_2 = (0,2)$;

$E_3 = (0,3)$; $E_4 = (1,4)$; $E_5 = (1,5)$; $E_6 = (1,6)$; $E_7 = (3,7)$;

$E_8 = (3,8)$; $E_9 = (4,9)$; $E_{10} = (4,10)$.

2.23. Aşağıdakı çoxluqlarla verilən ağacı qurmalı;

$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; $B = \{E_0; E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6,$

$E_7, E_8, E_9\}$, burada $E_0 = (0)$; $E_1 = (0,1)$; $E_2 = (0,2)$; $E_3 = (1,4)$;

$E_4 = (1,5)$; $E_5 = (1,6)$; $E_6 = (3,7)$; $E_7 = (3,8)$; $E_8 = (4,9)$;

$E_9 = (4,10)$.

2.24. Aşağıdakı çoxluqlarla verilən ağacı qurmalı;

$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; $B = \{E_0; E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6,$

$E_7, E_8, E_9\}$, burada $E_0 = (0)$; $E_1 = (0,1)$; $E_2 = (0,2)$;

$E_3 = (0,3)$; $E_4 = (3,7)$; $E_5 = (3,8)$; $E_6 = (1,5)$; $E_7 = (1,6)$;

$E_8 = (4,9)$; $E_9 = (4,10)$.

2.25. Aşağıdakı çoxluqlarla verilən ağacı qurmalı;

$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$; $B = \{E_0; E_1, E_2, E_3, E_4, E_5,$

$E_6, E_7, E_8, E_9, E_{10}, E_{11}\}$, burada $E_0 = (0)$; $E_1 = (0,1)$;

$E_2 = (0,2)$; $E_3 = (0,3)$; $E_4 = (0,4)$; $E_5 = (1,5)$; $E_6 = (1,6)$;

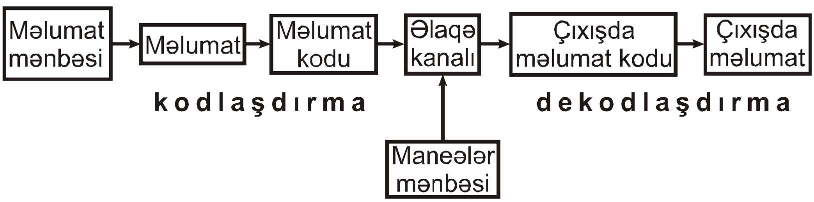
$E_7 = (2,7)$; $E_8 = (3,8)$; $E_9 = (3,9)$; $E_{10} = (4,10)$; $E_{11} = (4,11)$.

III FƏSİL.

KODLAŞDIRMA NƏZƏRİYYƏSİNİN ELEMENTLƏRİ

§1. Kodlaşdırma və dekodlaşdırma anlayışı.

Kodlaşdırma, riyaziyyatda əhəmiyətli rol oynayır. Kodlaşdırma bir obyektlərin öyrənilməsini, digər obyektlərin öyrənilməsinə gətirməyə imkan verir. Məsələn, ədədlərin onluq say sistemi vasitəsilə təsvirinin nə qədər böyük rol oynadığı məlumdur. Həndəsi obyektləri analitik ifadələrlə kodlaşdırmağa imkan verən, koordinatlar üsulunun yaranması riyaziyyatın gələcək inkişafına böyük təkan vermişdir. Lakin bu hallarda kodlaşdırma vasitələri yalnız köməkçi qurğu rolunu oynayırdı və tədqiqat obyekti deyildi. İdarəedici sistemlərin öyrənilməsi ilə əlaqədar olaraq kodlar tamam başqa əhəmiyyət kəsb etməyə başlamışdı. Kodlaşdırma nəzəriyyəsi sahəsində sistematik tədqiqatlar aparmaq ehtiyacı yaranmışdı. Əsas tədqiqat məsələlərinin dairəsi, rabitə sahəsinə aid olan və aşağıdakı sxemlə verilən misal üzərində göstərilə bilər:



Tutaq ki, sonlu sayda hərflərdən ibarət $U=\{a_1,...,a_r\}$ əlifbası verilib. U əlifbasından götürülən $A=a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_n}$ sonlu simvollar ardıcıllığına U əlifbasında söz, n ədədinə isə A sözünün uzunluğu deyəcəyik. A sözünün uzunluğunu $l(A)$ ilə işarə edəcəyik.

Tutaq ki, $S = S(U)$, U əlifbasındakı bütün boş olmayan sözlərin çoxluğudur, S' isə S çoxluğunun hər hansı alt çoxluğudur. S' çoxluğundan sözlər yaradan obyektə məlumatlar mənbəyi, S'-dən olan sözlərə isə məlumatlar deyilir. Məlumat mənbəyi – insan, maşın və s. ola bilər. Adətən kodlaşdırma nəzəriyyəsinin məsələlərini nəzərdən keçirərkən məlumatlar mənbəyi haqqında onun bu və ya digər formada təsviri şəklində əlavə məlumat verilir. Məlumat mənbəyinin təsviri üçün aşağıdakı qaydalardan istifadə etmək olar:

1) nəzəri təsvir – bu təsvirdə S' çoxluğunun xassələri qeyd olunur, məsələn S' çoxluğu verilmiş m uzunluqlu bütün sözlər çoxluğudur;
2) statistik təsvir – bu təsvir S' çoxluğunun ehtimal olunan xassələrinin verilməsi ilə yerinə yetirilir, məsələn, $S' = S$ və $a_1,...,a_r$ hərflərinin olmasının $p_1,...,p_r$ ehtimalları verilib $(\sum_{i=1}^{r} p_i = 1)$;
3) məntiqi təsvir – bu təsvir S' çoxluğunun yaradılması üsullarını xarakterizə edir, məsələn, S' hər hansı bir avtomat vasitəsilə yaradıla bilər.

Tutaq ki, $L = \{b_1,...,b_q\}$ əlifbası verilib. B ilə L əlifbasında sözü, $S(L)$ ilə L əlifbasındakı bütün boş olmayan sözlər çoxluğunu işarə edək.

Tutaq ki, hər bir $A\ (A \in S'(U))$ sözünə qarşı $B = F(A)$ $(B \in S(L))$ sözünü qoyan F inikası verilib. Burada, B sözünə A məlumatının kodu, A sözündən onun koduna keçidə isə kodlaşdırma deyəcəyik. Kodlaşdırma nəzəriyyəsində F inikası hər hansı bir alqoritmlə verilir.

Misal 1) Əlifba kodlaşdırması. Hər hansı U əlifbasının hərfləri ilə L əlifbasının müəyyən sözləri arasındakı uyğunluğu nəzərdən keçirək:

$$\begin{array}{l} a_1 ------B_1, \\ a_2 ------B_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_r ------B_r \end{array} \qquad (\Sigma)$$

Bu uyğunluq sxem adlanır və Σ ilə işarə olunur. O, əlifba kodlaşmasını aşağıdakı kimi təyin edir: $S'(U) = S(U)$-dan olan hər bir $A = a_{i_1} \dots a_{i_n}$ sözünə, A sözünün kodu adlanan $B = B_{i_1} \dots B_{i_n}$ sözü uyğun qoyulur. $B_1, \dots, B_r$ sözləri elementar kodlar adlanır.

2) Müntəzəm kodlaşdırma. Tutaq ki, $\{A_1, \dots, A_s\}$ U əlifbasının eyni bir m uzunluqlu, cüt-cüt müxtəlif sözlərinin hər hansı alt çoxluğudur. Aşkardır ki, hər bir A sözü yeganə $A = A_{i_1} \dots A_{i_n}$ ayrılışına malikdir. Tutaq ki, $S'(U)$, U əlifbasının qeyd etdiyimiz ayrılışa malik bütün sözlərinin alt çoxluğudur. B_i elementar kodlarının eyni bir uzunluğa malik olduğu aşağıdakı sxemi nəzərdən keçirək:

$$\begin{array}{l} A_1 ------B_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_S ------B_S. \end{array} \qquad (\Sigma^/)$$

Bu $\Sigma^/$ sxemi müntəzəm kodlaşdırmanı aşağıdakı kimi təyin edir: $S'(U)$-dan olan hər bir $A = A_{i_1} \dots A_{i_n}$ sözünə, A sözünün kodu adlanan $B = B_{i_1} \dots B_{i_n}$ sözü uyğun qoyulur.

Hər hansı konkret kod aşağıdakı şərtlərdən asılı olaraq seçilir:

1) Kodların verilişinin əlverişliliyi baxımından (məsələn, ikilik

kodunun texniki nöqteyi-nəzərdən istifadəsi əlverişlidir);

2) Kodların qəbul edilməsinin əlverişliliyi baxımından (Məsələn, maşın kodları prosessorun işi üçün əlverişlidir);
3) Kanalın maksimal keçid imkanlarının təmin edilməsi baxımından;
4) Kodların maneələrə davamlılığının təmin edilməsi baxımından;
5) Kodlaşdırma alqoritmlərinin bəzi xassələrinin təmin edilməsi baxımından (məsələn, kodlaşdırmanın sadəliyi, birqiymətli dekodlaşdırma imkanları) və s.

Əlaqə kanalına, bir girişi və bir çıxışı olan qurğu kimi baxmaq olar.

Bu qurğunun girişinə məlumatın B kodu daxil olur. Çıxışda isə məlumatın çıxışdakı B' kodunu alırırlar. Burada B', hər hansı L' əlifbasındakı sözdür və $B' = f(B)$.

Ən sadə halda, kanal maneələrsiz olduqda, yəni əlaqə xəttinin ideal halında $B' = B$ və ya $f(B) = B$ olur. Deməli $L' = L$ olar. Ümumi halda kodların çevrilməsi də əlaqə kanalına daxil ola bilər və $L' \neq L$ olar (məsələn, EHM-də olduğu kimi).

Maneələr mənbəsi əlaqə kanalına səhvlər daxil edir və kodların çıxışda təhrifinə gətirib çıxarır. Maneələr mənbəsinin təsviri üçün iki üsuldan istifadə olunur:

1) məntiqi kombinator təsvir – bu təsvir maneələrin, təhriflərin sayı üzərinə qoyulan məhdudiyyətlərin göstərilməsi ilə verilir;
2) statistik təsvir – bu təsvir isə mənbənin ehtimal olunan xarakteristikalarının verilməsi ilə yerinə yetirilir.

Maneələrsiz kanal halında məlumatın çıxışdakı kodu $L' = L$ əlifbasının hər hansı sözü olur. Lakin maneələr mənbəsi

$B' \neq B$ halına gətirib çıxara bilər.

Çıxışda məlumat hər hansı G əlifbasının sözü olur. Maneələrsiz kanal halında, yəni məlumatın verilişi halında $G = U$ olur. Məlumatın çıxışdakı kodundan, çıxışdakı məlumata keçid iki çevirməni nəzərdə tutur:

1) Məlumatın çıxışdakı kodunun dəqiqləşdirilməsi. Bu çevirmə məlumatın xüsusi kodları üçün mümkündür. Bu halda məlumatın verilişi zamanı B'-dən B-yə keçid baş verir.
2) Dekodlaşdırma. Dekodlaşdırma, məlumatın çıxışdakı kodunun dəqiqləşdirilməsindən sonra alınan koddan çıxışdakı məlumata keçidə deyilir. Dekodlaşdırma da ixtiyari kodlara deyil, yalnız məlumatın xüsusi kodlarına tətbiq edilə bilər. Məlumatın verilişi zamanı dekodlaşdırma, əks F^{-1} inikası olduğu halda mümkündür.

§2. Birqiymətli dekodlaşdırma meyarı və birqiymətli dekodlaşdırmanın təyini alqoritmi.

U və L əlifbalarının aşağıdakı Σ sxemi ilə verilən əlifba kodlaşmasına baxaq:

$$\begin{array}{l} a_1 ----B_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_r ----B_r \end{array} \qquad (\Sigma)$$

Fərz edək ki, burada $S'(U) = S(U)$, yəni məlumatlar mənbəsi U əlifbasındakı bütün mümkün sözlər çoxluğunu yaradır. Aşkardır ki, bu əlifba kodlaşdırması $S(U)$ çoxluğunun, $S(L)$ çoxluğuna inikasını yaradır. $S_\Sigma(L)$ ilə bu inikasda $S(U)$ çoxluğunun obrazını işarə edək.

$S(U)$ çoxluğunun $S_\Sigma(L)$ obrazına inikası qarşılıqlı birqiymətli olduğu halda dekodlaşdırma mümkündür, yəni kodu B

olan başlanğıc A məlumatını B kodu üzrə birqiymətli olaraq bərpa etmək olar. Bu halda deyirlər ki, əlifba kodlaşdırması qarşılıqlı birqiymtlidir.

Misal 1. $U=\{a_1,a_2\}$, $L=\{b_1,b_2\}$ olan əlifba kodlaşdırmasına baxaq, onun sxemi aşağıdakı kimi verilir.:

$$a_1 - - - - b_1,$$
$$a_2 - - - - b_1b_2.$$

Tutaq ki, B' və B'' uyğun olaraq A' və A'' sözlərinin kodlarıdır. Aşkardır ki, əgər $A' \neq A''$, onda $B' \neq B''$ olar.

Dekodlaşdırma prosesi aşağıdakı qayda ilə aparılır. B sözünün $B \in S_\Sigma(L)$ elementar kodlara ayrılışı yerinə yetirilir. Bunun üçün qeyd edək ki, B sözündə b_2 hərfindən hər dəfə istifadə edilməmişdən qabaq b_1 hərfi təyin edilir. Bu isə bütün mümkün (b_1b_2) cütlərini ayırmağa imkan verir. B sözünün qalan hissəsi b_1 hərflərindən ibarət olacaqdır. Əgər indi hər bir (b_1b_2) cütünü a_2 ilə, qalmış hər bir b_1 hərfini isə a_1 ilə əvəz etsək, onda B-yə uyğun gələn A sözünü alarıq:

Tutaq ki, $B=b_1b_1b_2b_1b_2b_1b_1b_1b_2$. Burada hərf cütlərini ayırdıqdan sonra elementar kodlara ayrılış alarıq:

$$B=b_1(b_1b_2)(b_1b_2)b_1b_1(b_1b_2).$$

Buradan da aşağıdakı sözü alarıq:

$$A=a_1a_2a_2a_1a_1a_2.$$

Tərif. Tutaq ki, B sözü $B=B'B''$ şəklindədir. Onda burada B' sözü B sözünün başlanğıcı və ya prefiksi, B' isə B sözünün sonu adlanır. Xüsusi halda Λ boş söz və B sözünün özü, sözün başlanğıcı və sonu hesab edilir. B sözünün, özündən fərqli bütün başlanğıcları və sonları məxsusi sözlər adlanır.

Tərif. Əgər B_i sözü, ixtiyari i və j $(1 \le i, j \le r, i \ne j)$ üçün B_j sözünün prefiksi deyilsə, onda Σ sxemi prefiks xassəsinə malikdir.

Teorem 1. Əgər Σ sxemi prefiks xassəsinə malik olarsa, onda uyğun əlifba kodlaşdırması qarşılıqlı birqiymtli olacaqdır.

İsbatı: Σ sxemi prefiks xassəsinə malik olduğundan, bu sxemdə bütün elementar kodlar müxtəlifdir, yəni $i \ne j$ olduqda $B_i \ne B_j$. Fərz edək ki, $S_\Sigma(L)$-dən olan hər hansı B sözü elementar kodlara iki qayda ilə ayrılır:

$$B = B_{i_1}...B_{i_s}; \quad B = B_{j_1}...B_{j_t}.$$

Tutaq ki, $B_{i_1} = B_{j_1}, ..., B_{i_{n-1}} = B_{j_{n-1}}$, $B_{i_n} \ne B_{j_n}$. Bu halda B_{i_n}, B_{j_n} sözlərindən biri digərinin prefiksi olur. Bununla teorem isbat olunur.

Tutaq ki, $B = b_{i_1}..b_{i_n}$ sözü $S(L)$-dən seçilib. $\widetilde{B}$ ilə B sözündən çevirmə vasitəsilə alınan $\widetilde{B} = b_{i_n}..b_{i_1}$ sözünü işarə edək. $\widetilde{\Sigma}$ ilə aşağıdakı sxemi işarə edək:

$$a_1 - - - - \widetilde{B}_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_r - - - - \widetilde{B}_r.$$

Misal 2. Σ sxemi kimi misal 1-də verdiyimiz sxemi qəbul edək. Onda $\widetilde{\Sigma}$ sxemi aşağıdakı kimi olar.

$$a_1 - - - - b_1,$$
$$a_2 - - - - b_2 b_1.$$

Burada $\widetilde{\Sigma}$ sxemi prefiks xassəsinə malikdir, deməli teorem 1-ə əsasən $\widetilde{\Sigma}$ sxemi ilə təyin edilən əlifba kodlaşdırması qarşılıqlı birqiymətli olacaqdır.

Qeyd edək ki, Σ və $\tilde{\Sigma}$ sxemləri ilə təyin edilən əlifba kodlaşdırmaları, qarşılıqlı birqiymətlilik xassəsinə eyni zamanda malikdirlər, yaxud malik deyillər.

Teorem 2. Əgər ya Σ sxemi, ya da $\tilde{\Sigma}$ sxemi prefiks xassəsinə malikdirsə, onda Σ sxemi ($\tilde{\Sigma}$ sxemi) ilə təyin edilən əlifba kodlaşdırması, qarşılıqlı birqiymətli olacaqdır.

Burada göstərmək olar ki, Σ və $\tilde{\Sigma}$ sxemləri prefiks xassəsinə malik olmadıqda belə, Σ sxemi ilə qurulan əlifba kodlaşdırması qarşılıqlı birqiymətli olacaqdır.

Misal 3. Tutaq ki, $U = \{a_1, a_2, a_3\}$ və $L = \{b_1, b_2, b_3\}$. Aşağıdakı Σ sxeminə baxaq:

$$\begin{aligned} &a_1 ----b_1, \\ &a_2 ----b_1 b_2, \\ &a_3 ----b_3 b_1. \end{aligned} \qquad (\Sigma)$$

Aşkardır ki, Σ və $\tilde{\Sigma}$ sxemləri prefiks xassəsinə malik deyil, lakin eyni zamanda qurulan əlifba kodlaşdırması qarşılıqlı birqiymətli olacaqdır. Doğrudan da əgər $B \in S_\Sigma(L)$ olarsa, onda bu söz birqiymətli olaraq aşağıdakı kimi elementar kodlara ayrılır:

1) b_2 hərfindən solda bilavasitə b_1 hərfi durduğundan $(b_1 b_2)$ cütünü ayırırıq;
2) b_3 hərfindən sağda bilavasitə b_1 hərfi durduğundan $(b_3 b_1)$ cütünü ayırırıq;
3) bütün $(b_1 b_2)$ və $(b_3 b_1)$ cütlərini ayırdıqdan sonra sözdə yalnız b_1 simvolları qalacaqdır.

Aşağıdakı işarələmələri daxil edək:

$l(B)$ ilə B sözünün uzunluğunu, yəni bu sözdəki hərflərin sayını işarə edəcəyik. Xüsusi halda $B_i\,(i=\overline{1,r})$ elementar kodlarının uzunluqlarını $l(B_i)=l_i$ qəbul edək. Daha sonra P ilə Σ sxeminin uzunluğunu, yəni $l(B_1,...,B_r)$ kəmiyyətini işarə edək.

Tutaq ki,

$$B_i=\beta' B_{i_1}...B_{i_\omega}\beta'' \qquad (1)$$

ayrılışı B_i elementar kodunun trivial olmayan ayrılışıdır. Yəni bu ayrılış $B_i=B_i\;(\beta'=\beta''=\Lambda)$ ayrılışından (burada β' və β'' elementar kodlardan fərqlidir) fərqli ayrılışdır. Burada ω parametri sıfırdan böyük və ya sıfra bərabər tam ədəd ola bilər.

(1) ayrılışından alarıq ki, B_i elementar kodunda hər hansı β' başlığını və hər hansı β'' sonunu çıxararaq, qalan hissəni elementar kodlara ayırmaq olar.

Aşkardır ki, hər bir B_i üçün (1) formalı ayrılışların sayı sonludur. W ilə B_i üçün olan bütün ayrılışlar və bütün i-lər üzrə olan ω ədədlərinin maksimumunu işarə edək, yəni $W=\max\omega$.

Misal 4. $U=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$, $L=\{b_1,b_2,b_3\}$ və aşağıdakı sxemlə təyin edilən əlifba kodlaşdırmasına baxaq:

$$\begin{aligned}
&a_1 ----b_1b_2,\\
&a_2 ----b_1b_3b_2,\\
&a_3 ----b_2b_3,\\
&a_4 ----b_1b_2b_1b_3,\\
&a_5 ----b_2b_1b_2b_2b_3.
\end{aligned}$$

Burada $2\le l_i<6$ olduğundan, $W<3$ olacaqdır. Digər tərəfdən $B_5=b_2b_1b_2b_2b_3=b_2B_1B_3$ olduğundan alarıq $W=2$.

Nəhayət, $S^N(U)$ ilə U əlifbasındakı uzunluğu N-i aşmayan bütün boş olmayan sözlər çoxluğunu işarə edək. Aşkardır ki, $S^N(U)$ - sonlu çoxluqdur və onun gücü $\sum_{i=1}^{N} r^i$ ilə təyin edilir.

İndi isə əlifba kodlaşdırmasının qarşılıqlı birqiymətlilik meyarını təyin edək:

Teorem 3. Σ sxemi ilə təyin edilən hər bir əlifba kodlaşdırması üçün elə bir N_0 var ki, $N_0 \leq \left[\frac{(W+1)(P-r+2)}{2}\right]$ əlifba kodlaşdırmasının qarşılıqlı birqiymətlilik problemi, sonlu $S^{N_0}(U)$ çoxluğunun kodlaşdırması üçün analoji problemə gətirilir.

Dekodlaşdırmanın birqiymətlilik meyarı, əlifba kodlaşdırmasının qarşılıqlı birqiymətlilik xassəsinə malik olub-olmadığını təyin etməyə imkan verən Σ sxemi üzrə sadə alqoritm verir. Bunun üçün U əlifbasındakı uzunluğu N_0-ı aşmayan bütün $S^{N_0}(U)$ sözlər çoxluğunu nəzərdən keçirmək və bu sonlu çoxluğun kodlaşdırmasının qarşılıqlı birqiymətli olub-olmadığını təyin etmək kifayətdir. Bu alqoritmdəki əməllər sayını kobud olaraq r^{N_0} ilə qiymətləndirmək olar. Məlum olur ki, bu alqoritmdən hətta ən sadə misallarda belə istiadə etmək mümkün olmur.

Misal 5. Misal 4-də verdiyimiz əlifba kodlaşdırmasına baxaq. Burada $r=5, W=2, L=16$ olduğundan

$$N_0 = \left[\frac{(W+1)(L-r+2)}{2}\right] = \left[\frac{3\cdot 13}{2}\right] \approx 19 \quad \text{və} \quad r^{N_0} = 5^{19}.$$

Bu isə çox böyük rəqəmdir.

Qraflar nəzəriyyəsinin elementləri ilə dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməyə imkan verən kifayət qədər səmərəli bir alqoritm vermək olar.

Tutaq ki, əlifba kodlaşdırması aşağıdakı Σ sxemi ilə verilib:

$$\begin{array}{l} a_1 ----B_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_r ----B_r. \end{array} \qquad (\Sigma)$$

Hər bir elementar B_i kodu üçün,

$$B_i = \beta' B_{i_1} \dots B_{i_\omega} \beta'' \qquad (2)$$

formalı bütün mümkün trivial olmayan ayrılışlara baxaq. Burada β' və β'' elementar kodlardan fərqlidir. L_0 ilə aşağıdakı elementləri olan çoxluğu işarə edək:

a) Λ boş söz;

b) (2) formalı ayrılışlarda prefiks və sonluq şəklində rast gəlinən β sözləri. Sonra L_0 çoxluğunun hər bir sözünə qarşı müstəvidə bir nöqtə uyğun gətirək.

Tutaq ki, $\beta', \beta'' \in L_0$. (2) formalı bütün mümkün trivial olmayan ayrılışlara baxaq. Onların hər biri üçün β' və β'' sözlərinə uyğun təpə nöqtələrini istiqamətlənmiş parçalarla (β'-dən β''-ə) birləşdirək. Alınan qrafı $\Gamma(\Sigma)$ ilə işarə edək.

Xüsusi trivial halı qeyd edək, Σ sxemli əlifba kodlaşdırmasının qarşılıqlı birqiymətlilik xassəsi, $\beta' = \beta'' = \Lambda$ şərti ödənən (2) formalı ayrılışa malik B_i elementar kodunun olması ilə pozulur. Bu halda $\Gamma(\Sigma)$ qrafı Λ təpə nöqtəsində halqaya malikdir.

Teorem 4. Σ sxemi ilə təyin edilən əlifba kodlaşdırması üçün qarşılıqlı birqiymətlilik xassəsi yalnız və yalnız o halda pozulur ki, $\Gamma(\Sigma)$ qrafının Λ təpə nöqtəsindən keçən istiqamətlənmiş dövrü olsun.

İsbatı. Zərurilik. Tutaq ki, əlifba kodlaşdırması qarşılıqlı birqiymətlilik xassəsinə malik deyil. Onda elə bir

$$B = B_{i_1^0} \ldots B_{i_{\omega^0}^0} \beta' B_{i_1^1} \ldots B_{i_{\omega^1}^1} \beta'' \ldots \beta^n B_{i_1^p} \ldots B_{i_{\omega^p}^p}$$

sözü var ki, onun üçün aşağıdakı şərtlər ödənir:

$$B_{i^0} = B_{i_1^0} \ldots B_{i_{\omega^0}^0} \beta';$$

$$B_{i^1} = \beta' B_{i_1^1} \ldots B_{i_{\omega^1}^1} \beta'';$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B_{i^p} = \beta^p B_{i_1^p} \ldots B_{i_{\omega^p}^p}.$$

Ona görə də $\Gamma(\Sigma)$ qrafında Λ təpə nöqtəsindən keçən istiqamətlənmiş dövr mövcuddur.

Kafilik. Tutaq ki, $\Gamma(\Sigma)$ qrafı Λ təpə nöqtəsindən keçən istiqamətlənmiş dövrə malikdir. Onda

$$B = B_{i_1^0} \ldots B_{i_{\omega^0}^0} \beta' B_{i_1^1} \ldots B_{i_{\omega^1}^1} \beta'' \ldots \beta^p B_{i_1^p} \ldots B_{i_{\omega^p}^p}$$

sözü aşağıdakı iki ayrılışla təyin edilən iki ifadə formasına malikdir:

$$B = (B_{i_1^0}) \cdots (B_{i_{\omega^0}^0})(\beta' B_{i_1^1} \cdots B_{i_{\omega^1}^1} \beta'') \cdot (B_{i_1^2}) \cdots (B_{i_{\omega^2}^2}) \cdot (\beta''' B_{i_1^3} \cdots B_{i_{\omega^3}^3} \beta^{IV}) \cdots,$$

$$B = (B_{i_1^0} \cdots B_{i_{\omega^0}^0} \beta')(B_{i_1^1}) \cdots (B_{i_{\omega^1}^1}) \cdot (\beta'' B_{i_1^2} \cdots B_{i_{\omega^2}^2} \beta''') \cdots.$$

Teorem isbat olundu.

Beləliklə, alqoritm, $\Gamma(\Sigma)$ qrafının qurulması və Λ nöqtəsindən keçən istiqamətlənmiş dövrlərin təyin edilməsindən ibarətdir.

Misal 6. Aşağıdakı sxemlə təyin edilən əlifba kodlaşdırmasına baxaq.

$$\begin{aligned} &a_1 --- b_1 b_2, \\ &a_2 --- b_1 b_3 b_2, \\ &a_3 --- b_2 b_3, \\ &a_4 --- b_1 b_2 b_1 b_3, \\ &a_5 --- b_2 b_1 b_2 b_2 b_3. \end{aligned} \qquad (\Sigma)$$

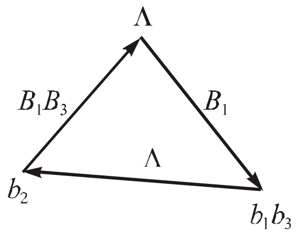
Aşağıdakı trivial olmayan ayrılışları alarıq:

$$\begin{aligned} &B_1 = (b_1)(b_2), \\ &B_2 = (b_1)(b_3 b_2) = (b_1 b_3)(b_2), \\ &B_3 = (b_2)(b_3), \\ &B_4 = (b_1)(b_2 b_1 b_3) = (b_1 b_2)(b_1 b_3) = (b_1 b_2 b_1)(b_3), \\ &B_5 = (b_2)(b_1 b_2 b_2 b_3) = (b_2)(b_1 b_2)(b_2 b_3) = (b_2 b_1)(b_2 b_2 b_3) = \\ &\quad = (b_2 b_1 b_2)(b_2 b_3) = (b_2 b_1 b_2 b_2)(b_3). \end{aligned}$$

Aşkardır ki, $L_0 = \{\Lambda, b_2, b_1 b_2\}$ və onunla aşağıdakı ayrılışlar bağlıdır:

$$\begin{aligned} &B_2 = (b_1 b_3)(b_2), \\ &B_4 = (b_1 b_2)(b_1 b_3) = B_1 (b_1 b_3), \\ &B_5 = (b_2)(b_1 b_2)(b_2 b_3) = (b_2) B_1 B_3. \end{aligned}$$

Bu isə $\Gamma(\Sigma)$ qrafını qurmağa imkan verir. $\Gamma(\Sigma)$ qrafı $B = B_1 b_1 b_3 b_2 B_1 B_3$ sözünü yaradan istiqamətlənmiş dövrə malikdir. B sözü aşağıdakı iki ifadə formasına malikdir:



$$B = (B_1 b_1 b_3)(b_2 B_1 B_3), \quad \text{yəni} \quad A' = a_4 a_5,$$

$$B = B_1 (b_1 b_3 b_2) B_1 B_3, \quad \text{yəni} \quad A'' = a_1 a_2 a_1 a_3.$$

Misal 7. Aşağıdakı sxemlə təyin edilən əlifba kodlaşdırmasına baxaq:

$$
\begin{aligned}
&a_1 --- b_1, \\
&a_2 --- b_2b_1, \\
&a_3 --- b_1b_2b_2, \\
&a_4 --- b_2b_1b_2b_2, \\
&a_5 --- b_2b_2b_2b_2.
\end{aligned} \qquad (\Sigma)
$$

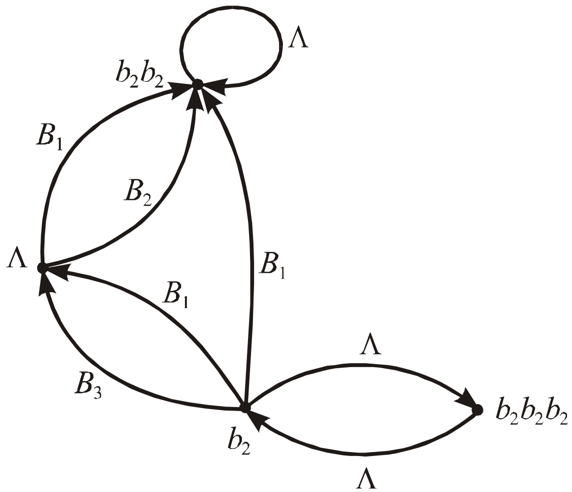
Aşağıdakı trivial olmayan ayrılışları alarıq:

$$B_2 = (b_2)(b_1) = (b_2)B_1;$$
$$B_3 = (b_1)(b_2b_2) = B_1(b_2b_2); \;\; B_3 = (b_1b_2)(b_2);$$
$$B_4 = (b_2)(b_1)(b_2b_2) = (b_2)B_1(b_2b_2);$$
$$B_4 = (b_2)(b_1b_2b_2) = (b_2)B_3;$$
$$B_4 = (b_2b_1)(b_2b_2) = B_2(b_2b_2); \;\; B_4 = (b_2b_1b_2)(b_2);$$
$$B_5 = (b_2)(b_2b_2b_2) = (b_2b_2)(b_2b_2) = (b_2b_2b_2)(b_2).$$

Aşkardır ki, $L_0 = \{\Lambda, b_2, b_2b_2, b_2b_2b_2\}$ və onunla aşağıdakı ayrılışlar bağlıdır:

$$B_2 = (b_2)B_1;$$
$$B_3 = B_1(b_2b_2);$$
$$B_4 = (b_2)B_1(b_2b_2); \; B_4 = (b_2)B_3; \;\; B_4 = B_2(b_2b_2);$$
$$B_5 = (b_2)(b_2b_2b_2) = (b_2b_2)(b_2b_2) = (b_2b_2b_2)(b_2).$$

Nəticədə Λ təpə nöqtəsindən keçən istiqamətlənmiş dövrü olmayan $\Gamma(\Sigma)$ qrafını alırıq:



Deməli, Σ sxemi ilə təyin edilən əlifba kodlaşdırması qarşılıqlı birqiymtlilik xassəsinə malikdir.

ÇALIŞMALAR

3.1. $U=\{a_1,a_2\},\ L=\{b_1,b_2\}$ əlifbaları və aşağıdakı sxemlərlə əlifba kodlaşmaları verilib. Bu sxemlər üçün dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməli.

1) $\begin{cases} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_1b_2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_1 - b_1b_1 \\ a_2 - b_2b_1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a_1 - b_1b_2 \\ a_2 - b_2b_1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a_2 - b_1 \\ a_2 - b_2b_1 \end{cases}$

3.2. $U=\{a_1,a_2,a_3\}, L=\{b_1,b_2,b_3\}$ əlifbaları və aşağıdakı sxemlə təyin edilən əlifba kodlaşması verilib. Bu sxem üçün dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməli.

$$\begin{cases} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_1b_2 \\ a_3 - b_3b_1 \end{cases}$$

3.3. $U=\{a_1,a_2,a_3\}, L=\{b_1,b_2,b_3\}$ əlifbaları və aşağıdakı sxemlə təyin edilən əlifba kodlaşması verilib.

$$\begin{cases} a_1 - b_1b_2 \\ a_2 - b_1b_3b_2 \\ a_3 - b_2b_3 \end{cases}$$

Aşağıdakı kodlar üçün dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməli:

1) $b_1b_3b_2b_1b_2b_2b_3b_1b_3b_2$;

2) $b_1b_2b_2b_3b_2b_3b_1b_2b_1b_3b_2$.

3.4. $U=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\},\ L=\{b_1,b_2,b_3\}$ əlifbaları və aşağıdakı sxemlə təyin edilən əlifba kodlaşması verilib.

$$\begin{cases} a_1 - b_1b_2 \\ a_2 - b_1b_3b_2 \\ a_3 - b_2b_3 \\ a_4 - b_1b_2b_1b_3 \\ a_5 - b_2b_1b_2b_2b_3 \end{cases}$$

Aşağıdakı kodlar üçün dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməli:

1) $b_2b_3b_2b_1b_2b_2b_3b_1b_2$;

2) $b_1b_2b_1b_3b_2b_2b_1b_2b_2b_3b_2b_3$.

3.5. $U=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$, $L=\{b_1,b_2,b_3\}$ əlifbaları və aşağıdakı sxemlə təyin edilən əlifba kodlaşması verilib.

$$\begin{cases} a_1-b_1 \\ a_2-b_2b_1 \\ a_3-b_1b_2b_2 \\ a_4-b_2b_1b_2b_2 \\ a_5-b_2b_2b_2b_2 \end{cases}$$

Aşağıdakı kodlar üçün dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməli:

1) $b_1b_2b_2b_1b_1b_2b_1b_2b_1b_2b_2$;

2) $b_2b_1b_1b_2b_2b_1b_2b_1b_2b_2$.

3.6. $U=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$, $L=\{b_1,b_2,b_3\}$ əlifbaları və aşağıdakı sxemlə təyin edilən əlifba kodlaşmaları verilib. Bu sxemlər üçün dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməli.

$$1)\ \begin{cases} a_1-b_1b_2 \\ a_2-b_2b_3 \\ a_3-b_3b_1b_2 \\ a_4-b_1b_2b_2 \\ a_5-b_3b_2 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} a_1-b_1 \\ a_2-b_1b_3 \\ a_3-b_2b_1 \\ a_4-b_3b_1b_1 \\ a_5-b_3b_2 \end{cases}$$

3.7. $U=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$, $L=\{b_1,b_2,b_3\}$ əlifbaları və aşağıdakı sxemlərlə təyin edilən əlifba kodlaşmaları verilib. Bu sxemlər üçün dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməli.

$$1)\begin{cases} a_1 - b_1b_2 \\ a_2 - b_2b_3b_1 \\ a_3 - b_3b_2 \\ a_4 - b_3b_1b_2 \\ a_5 - b_3b_2b_2b_2 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} a_1 - b_2b_1 \\ a_2 - b_3b_1b_2 \\ a_3 - b_2b_3b_3 \\ a_4 - b_1b_3 \\ a_5 - b_1b_1b_2 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} a_1 - b_1b_3 \\ a_2 - b_3b_2b_2 \\ a_3 - b_1b_2 \\ a_4 - b_1b_1b_3 \\ a_5 - b_3b_1 \end{cases}$$

3.8. $U = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $L = \{b_1, b_2, b_3\}$ əlifbaları və aşağıdakı sxemlərlə təyin edilən əlifba kodlaşmaları verilib. Bu sxemlər üçün dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməli.

$$1)\begin{cases} a_1 - b_2b_1 \\ a_2 - b_1b_3 \\ a_3 - b_3b_2b_1 \\ a_4 - b_2b_1b_1 \\ a_5 - b_3b_1 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} a_1 - b_2 \\ a_2 - b_2b_3 \\ a_3 - b_1b_2 \\ a_4 - b_3b_2b_2 \\ a_5 - b_3b_1 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} a_1 - b_2b_1 \\ a_2 - b_1b_3b_2 \\ a_3 - b_3b_1 \\ a_4 - b_3b_2b_1 \\ a_5 - b_3b_1b_1b_1 \end{cases}$$

3.9. $U = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $L = \{b_1, b_2, b_3\}$ əlifbaları və aşağıdakı sxemlərlə təyin edilən əlifba kodlaşmaları verilib. Bu sxemlər üçün dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməli.

$$1)\begin{cases} a_1 - b_1b_2 \\ a_2 - b_3b_2b_1 \\ a_3 - b_1b_3b_3 \\ a_4 - b_2b_3 \\ a_5 - b_2b_2b_1 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} a_1 - b_2b_3 \\ a_2 - b_3b_1b_1 \\ a_3 - b_2b_1 \\ a_4 - b_2b_2b_3 \\ a_5 - b_3b_2 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} a_1 - b_3b_2 \\ a_2 - b_2b_1 \\ a_3 - b_1b_3b_2 \\ a_4 - b_3b_2b_2 \\ a_5 - b_1b_2 \end{cases}$$

3.10. $U = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $L = \{b_1, b_2, b_3\}$ əlifbaları və aşağıdakı sxemlərlə təyin edilən əlifba kodlaşmaları verilib. Bu sxemlər üçün dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməli.

$$1)\begin{cases} a_1 - b_3 \\ a_2 - b_3b_1 \\ a_3 - b_2b_3 \\ a_4 - b_1b_3b_3 \\ a_5 - b_1b_2 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} a_1 - b_3b_2 \\ a_2 - b_2b_1b_3 \\ a_3 - b_1b_2 \\ a_4 - b_1b_3b_2 \\ a_5 - b_1b_2b_2b_3 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} a_1 - b_2b_3 \\ a_2 - b_1b_3b_2 \\ a_3 - b_2b_1b_1 \\ a_4 - b_3b_1 \\ a_5 - b_3b_3b_2 \end{cases}$$

3.11. $U=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$, $L=\{b_1,b_2,b_3\}$ əlifbaları və aşağıdakı sxemlərlə təyin edilən əlifba kodlaşmaları verilib. Bu sxemlər üçün dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməli.

$$1)\begin{cases} a_1-b_3b_1 \\ a_2-b_1b_2b_2 \\ a_3-b_3b_2 \\ a_4-b_3b_3b_1 \\ a_5-b_1b_3 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} a_1-b_1b_3 \\ a_2-b_3b_2 \\ a_3-b_2b_1b_3 \\ a_4-b_1b_3b_3 \\ a_5-b_2b_3 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} a_1-b_3 \\ a_2-b_3b_1 \\ a_3-b_2b_3 \\ a_4-b_1b_3b_3 \\ a_5-b_1b_2 \end{cases}$$

3.12. $U=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$, $L=\{b_1,b_2,b_3\}$ əlifbaları və aşağıdakı sxemlərlə təyin edilən əlifba kodlaşmaları verilib. Bu sxemlər üçün dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməli.

$$1)\begin{cases} a_1-b_3b_2 \\ a_2-b_2b_1b_3 \\ a_3-b_1b_2 \\ a_4-b_1b_3b_2 \\ a_5-b_1b_2b_2b_2 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} a_1-b_2b_3 \\ a_2-b_1b_3b_2 \\ a_3-b_2b_1b_1 \\ a_4-b_3b_1 \\ a_5-b_3b_3b_2 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} a_1-b_3b_1 \\ a_2-b_1b_2b_2 \\ a_3-b_3b_2 \\ a_4-b_3b_3b_1 \\ a_5-b_1b_3 \end{cases}$$

3.13. $U=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$, $L=\{b_1,b_2,b_3\}$ əlifbaları və aşağıdakı sxemlərlə təyin edilən əlifba kodlaşmaları verilib. Bu sxemlər üçün dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməli.

$$1)\begin{cases} a_1-b_1b_2 \\ a_2-b_3b_1 \\ a_3-b_1b_2b_3 \\ a_4-b_1b_1b_2 \\ a_5-b_1b_3 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} a_1-b_2 \\ a_2-b_3b_2 \\ a_3-b_2b_1 \\ a_4-b_2b_2b_3 \\ a_5-b_1b_3 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} a_1-b_1b_2 \\ a_2-b_2b_3b_1 \\ a_3-b_1b_3 \\ a_4-b_1b_2b_3 \\ a_5-b_1b_1b_1b_3 \end{cases}$$

3.14. $U=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$, $L=\{b_1,b_2,b_3\}$ əlifbaları və aşağıdakı sxemlərlə təyin edilən əlifba kodlaşmaları verilib. Bu sxemlər üçün dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməli.

$$1)\begin{cases} a_1 - b_3b_1 \\ a_2 - b_2b_3 \\ a_3 - b_3b_1b_2 \\ a_4 - b_3b_3b_1 \\ a_5 - b_3b_2 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} a_1 - b_3 \\ a_2 - b_1b_3 \\ a_3 - b_3b_2 \\ a_4 - b_3b_3b_1 \\ a_5 - b_2b_1 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} a_1 - b_2b_1 \\ a_2 - b_1b_2b_3 \\ a_3 - b_3b_3b_1 \\ a_4 - b_3b_2 \\ a_5 - b_1b_2b_2 \end{cases}$$

3.15. $U = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $L = \{b_1, b_2, b_3\}$ əlifbaları və aşağıdakı sxemlərlə təyin edilən əlifba kodlaşmaları verilib. Bu sxemlər üçün dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməli.

$$1)\begin{cases} a_1 - b_1b_3 \\ a_2 - b_2b_2b_1 \\ a_3 - b_2b_3 \\ a_4 - b_1b_3b_3 \\ a_5 - b_3b_1 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} a_1 - b_3b_2 \\ a_2 - b_1b_1b_3 \\ a_3 - b_1b_2 \\ a_4 - b_3b_2b_2 \\ a_5 - b_2b_3 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} a_1 - b_3b_2 \\ a_2 - b_2b_3b_1 \\ a_3 - b_1b_2b_3 \\ a_4 - b_1b_3 \\ a_5 - b_2b_3b_3 \end{cases}$$

3.16. $U = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $L = \{b_1, b_2, b_3\}$ əlifbaları və aşağıdakı sxemlərlə təyin edilən əlifba kodlaşmaları verilib. Bu sxemlər üçün dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməli.

$$1)\begin{cases} a_1 - b_2b_3 \\ a_2 - b_3b_1b_2 \\ a_3 - b_2b_1 \\ a_4 - b_2b_3b_1 \\ a_5 - b_2b_2b_2b_1 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} a_1 - b_3b_1 \\ a_2 - b_2b_2b_3 \\ a_3 - b_2b_1 \\ a_4 - b_3b_1b_1 \\ a_5 - b_1b_3 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} a_1 - b_2b_3 \\ a_2 - b_1b_2 \\ a_3 - b_2b_3b_1 \\ a_4 - b_2b_2b_3 \\ a_5 - b_2b_1 \end{cases}$$

3.17. $U = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $L = \{b_1, b_2, b_3\}$ əlifbaları və aşağıdakı sxemlərlə təyin edilən əlifba kodlaşmaları verilib. Bu sxemlər üçün dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməli.

$$1)\begin{cases} a_1 - b_3 \\ a_2 - b_1b_3 \\ a_3 - b_3b_2 \\ a_4 - b_3b_3b_1 \\ a_5 - b_2b_1 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} a_1 - b_1b_3 \\ a_2 - b_2b_2b_1 \\ a_3 - b_2b_3 \\ a_4 - b_1b_3b_3 \\ a_5 - b_3b_1 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} a_1 - b_2b_3 \\ a_2 - b_3b_1b_2 \\ a_3 - b_2b_1 \\ a_4 - b_2b_3b_1 \\ a_5 - b_3b_2b_2b_1 \end{cases}$$

3.18. $U=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$, $L=\{b_1,b_2,b_3\}$ əlifbaları və aşağıdakı sxemlərlə təyin edilən əlifba kodlaşmaları verilib. Bu sxemlər üçün dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməli.

$$1)\begin{cases} a_1-b_2b_1 \\ a_2-b_3b_2 \\ a_3-b_2b_1b_3 \\ a_4-b_2b_2b_1 \\ a_5-b_2b_3 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} a_1-b_3b_2 \\ a_2-b_2b_3b_1 \\ a_3-b_1b_1b_2 \\ a_4-b_1b_3 \\ a_5-b_2b_3b_3 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} a_1-b_1 \\ a_2-b_3b_1 \\ a_3-b_1b_2 \\ a_4-b_1b_1b_3 \\ a_5-b_2b_3 \end{cases}$$

3.19. $U=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$, $L=\{b_1,b_2,b_3\}$ əlifbaları və aşağıdakı sxemlərlə təyin edilən əlifba kodlaşmaları verilib. Bu sxemlər üçün dekodlaşdırmanın birqiymətliliyini təyin etməli.

$$1)\begin{cases} a_1-b_2b_1 \\ a_2-b_1b_3b_2 \\ a_3-b_2b_3 \\ a_4-b_2b_1b_3 \\ a_5-b_2b_2b_2b_3 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} a_1-b_1b_2 \\ a_2-b_2b_1b_3 \\ a_3-b_3b_3b_2 \\ a_4-b_3b_1 \\ a_5-b_2b_1b_1 \end{cases}$$

IV FƏSİL.

DİSKRET RİYAZİYYATIN KİBERNETİKAYA BƏZİ TƏTBİQLƏRİ

§1. Dizyunktiv normal forma anlayışı. Bul funksiyalarının minimumlaşdırılması məsələsi.

Tutaq ki, $\{x_1,...,x_n\}$ dəyişənlər əlifbası verilib.

Tərif. $K = x_{i_1}^{\alpha_1} \& \cdots \& x_{i_r}^{\alpha_r}$ $(i_\nu \neq i_\mu, \nu \neq \mu)$ ifadəsi elementar konyunksiya adlanır. Burada r ədədi elementar konyunksiyanın ranqı adlanır. Tərifə əsasən 1 sabitini 0 ranqlı elementar konyunksiya qəbul edirik.

Tərif. $D = \mathop{\vee}\limits_{i=1}^{s} K_i$ $(K_i \neq K_j, i \neq j)$, burada K_i $(i = \overline{1,s})$ r_i ranqı elementar konyunksiyalardır. D ifadəsinə dizyunktiv normal forma (d.n.f.) deyilir.

Aşkardır ki, D d.n. forması hər hansı $f(x_1,...,x_n)$ bul funksiyasını realizə edir. I fəsildə dediklərimizə əsaslanaraq, göstərə bilərik ki, hər bir $f(x_1,...,x_n)$, $f \not\equiv 0$ funksiyası üçün $f(x_1,...,x_n) = D$ şərtini ödəyən D d.n. forması mövcuddur.

Belə d.n.f. kimi, məsələn f üçün m.d.n.f. götürmək olar:

$$D = \mathop{\vee}\limits_{\substack{(\alpha_1,...,\alpha_n) \\ f(\alpha_1,...,\alpha_n)=1}} x_1^{\alpha_1} \& ... \& x_n^{\alpha_n}.$$

Misal 1. Aşağıdakı cədvəllə verilən $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyasını nəzərdən keçirək.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Bu funksiyanı aşağıdakı m.d.n.f. şəklində ifadə etmək olar:

$$D_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 .$$

Digər tərəfdən bilavasitə yoxlama ilə göstərə bilərik ki, bu funksiya digər bir d.n.f. ilə aşağıdakı kimi ifadə edilə bilər: $D_2 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1$. Bu misal göstərir ki, məntiq cəbri funksiyası d.n.f. kimi bir neçə formada ifadə edilə bilər. Bununla əlaqədar daha əlverişli ifadənin seçilməsi imkanı yaranır. Bunun üçün qurulacaq d.n. formanın mürəkkəbliyini xarakterizə edən sadəlik indeksi adlanan $L(D)$ indeksini daxil edək.

$L(D)$ funksionalı üçün aşağıdakı aksiomlar ödənir:

I Müsbətlik aksiomu. İxtiyari d.n.f. üçün $L(D) \geq 0$.

II Müsbətlik aksiomu (vurmaya nəzərən). Tutaq ki, $D = D' \vee x_i^{\alpha_i}K'$. Onda $L(D) \geq L(D' \vee K')$.

III Qabarıqlıq aksiomu (toplamaya nəzərən). Tutaq ki, D d.n.f. üçün $D = D_1 \vee D_2$ doğrudur və D_1, D_2 d.n. formaları ümumi hədlərə malik deyil. Onda $L(D) \geq L(D_1) + L(D_2)$.

IV İnvariantlıq aksiomu (izomorfluğa nəzərən). Tutaq ki, D' d.n. forması, D d.n. formasından dəyişənlərin adlarının dəyişdirilməsi ilə alınıb. Onda $L(D') = L(D)$.

D.n.f. üçün sadəlik indeksinə aid misallara baxaq:

1) $L_H(D)$ ilə D d.n.formasında rast gəlinən dəyişənlərin hərf-

lərinin sayını işarə edək. Misal 1-dəki D_1 və D_2 götürsək, onda onlar üçün $L_H(D_1)=15,\ L_H(D_2)=3$ olacaq, yəni D_2, D_1-ə nisbətən sadədir.

2) $L_K(D)$ ilə D d.n. formasına daxil olan elementar konyunksiyaların sayını işarə edək. D_1 və D_2 d.n.f. üçün aşkardır ki, $L_k(D_1)=5,\ L_k(D_2)=2$ olar, yəni bu indeks mənasında da D_2 d.n. forması D_1 d.n. formasından sadədir.

3) $L_0(D)$ ilə D d.n. formasında olan – məntiqi inkar işarələrinin sayını işarə edək. D_1, D_2 d.n.f. üçün $L_0(D_1)=7$, $L_0(D_2)=2$, yəni bu indeks mənasında D_2 d.n. forması D_1 d.n. formasından sadədir.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, qeyd etdiimiz hər üç indeks yuxarıda verdiyimiz aksiomları ödəyir.

Tutaq ki, $D = D' \vee K$. Onda I və III aksiomlara əsasən $L(D) \geq L(D')$.

Aşkardır ki, $\{x_1,..,x_n\}$ dəyişənləri əlifbası üzərində 3^n sayda müxtəlif elementar konyunksiyalar (burada boş konyunksiya əvəzinə 1 sabiti götürülür) qurmaq olar. Buradan alarıq ki, bu əlifba üzrə n sayda hərflərdən ibarət d.n.f. sayı 2^{3^n} bərabərdir. Buna əsaslanaraq aşağıdakı tərifi vermək olar:

Tərif. $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasını realizə edən və minimal $L(D)$ sadəlik indeksi olan D d.n. forması L indeksinə nəzərən
minimal d.n. forma adlanır.

L_H indeksinə nəzərən minimal olan d.n.f., minimal d.n.f. adlanacaq. L_K indeksinə nəzərən minimal olan d.n.f. ən qısa d.n.f. adlanacaq.

Misal 1-ə baxaq:

1) $D_2 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1$ minimal d.n. formadır. Doğrudan da bu d.n.f. realizə etdiyi $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyası x_1, x_2, x_3 dəyişənlərindən əhəmiyyətli asılıdr və ona görə də hərflərinin sayı üçdən az olan d.n. forma ilə ifadə edilə bilməz.
2) $D_2 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1$ ən qısa d.n. formadır, çünki onun realizə etdiyi $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyası ixtiyari elementar konyunksiyadan fərqlidir.
3) $D_2 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1$ L_0 indeksinə nəzərən minimaldır, çünki onun realizə etdiyi $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyası x_2 və x_3 dəyişənləri üzrə artmır və bu dəyişənlərin hər ikisi əhəmiyyətlidir. Buna görə də məntiqi inkarların sayı ikidən az olan d.n.f. ilə ifadə edilə bilməz.

Baxacağımız əsas məsələ, məntiq cəbrinin ixtiyari $f(x_1, ..., x_n)$ funksiyası üçün onun L indeksinə nəzərən minimal d.n. formasının qurulması məsələsidir. Bu məsələ bul funksiyalarının minimumlaşdırılması məsələsi adlanır.

§2. Dizyunktiv normal formaların sadələşdirilməsi.

Tutaq ki, D ixtiyari d.n. formadır və $D = D' \vee K$, $D = D' \vee x_i^{\alpha_i} K'$, burada K, D-dən olan ixtiyari elementar konyunksiyadır, D' isə D-yə daxil olan yerdə qalan elementar konyunksiyalardan qurulmuş d.n. formadır, $x_i^{\alpha_i}$, K-ya daxil hər hansı vuruqdur, K' isə K-ya daxil yerdə qalan vuruqların hasilidir. D.n. formalar üçün mümkün olan aşağıdakı iki çevirməyə baxaq:

I Elementar konyunksiyanın çıxarılması əməliyyatı. D d.n. formasından D' d.n. formasına keçid, K elementar konyunksiyasının çıxarılması yolu ilə yerinə yetirilən çevirmədir. Bu cür çevirmə yalnız və yalnız $D' = D$ şərti ödəndikdə təyin olunur.

II Vuruğun çıxarılması əməliyyatı. D d.n. formasından $D' \vee K'$ d.n. formasına keçid $x_i^{\alpha_i}$ vuruğunun çıxarılması yolu ilə həyata keçirilən çevirmədir. Bu cür çevirmə yalnız və yalnız $D' \vee K' = D$ şərti ödəndikdə təyin edilir.

Tərif. I və II çevirmələri vasitəsilə sadələşdirmək mümkün olmayan D d.n. formasına sadələşdirilməsi mümkün olmayan (I və II çevirmələrinə nəzərən) d.n.f. və ya sadələşməyən d.n.f. deyilir.

Misal 2. Aşkardır ki, $D = x_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$ d.n. forması verilmiş çevirmələrə nəzərən sadələşməyən d.n.f. olacaqdır.

Bu çevirmələrə əsaslanaraq d.n.f. üçün aşağıdakı sadələşdirmə alqoritmini vermək olar:

1) $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası üçün hər hansı bir d.n. formanı başlanğıc d.n.f. kimi seçirik. Belə d.n.f. kimi məsələn, m.d.n. formanı seçmək olar.
2) Sonra başlanğıc d.n. formada əvvəlcə toplananların, sonra isə hər bir toplananda vuruqların çeşidlənməsi aparılır. Bu çeşidlənmələri d.n.f. yazılışı kimi vermək olar.

Misal 3. Aşağıdakı cədvəllə verilmiş $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyasını nəzərdən keçirək:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0

1	1	0	1
1	1	1	1

Başlanğıc d.n.f. kimi bu funksiya üçün onun m.d.n. formasını seçək və birinci təbii, ikinci isə xüsusi çeşidləmə qaydası seçək:

$$D' = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1 x_2\bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3\,,$$

$$D'' = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_3 x_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\,.$$

3) Sonra d.n.f. yazılışı soldan sağa doğru nəzərdən keçirilir, növbəti K_i $(i = \overline{1,s})$ hədi üçün əvvəlcə elementar K_i konyunksiyasının çıxarılması əməliyyatını tətbiq edirlər, əgər bu əməliyyatı tətbiq etmək mümkün deyilsə, onda K_i konyunksiyasının $x_{i_\nu}^{\alpha_\nu}$ $(\nu = \overline{1,r})$ hədlərini soldan sağa doğru nəzərdən keçirib, $x_{i_\nu}^{\alpha^\nu}$ vuruqlarının çıxarılması əməliyyatını, bu əməliyyatı tətbiq etmək mümkün olduqca tətbiq edirlər.

Bundan sonra növbəti elementar konyunksiyaya keçib, təsvir etdiyimiz prosesi təkrarən tətbiq edirlər.

Axırıncı elementar konyunksiyanın emalını sona çatdırıb, alınan d.n. formanı bir də soldan sağa doru nəzərdən keçirib, elementar konyunksiyanın çıxarılması əməliyyatını tətbiq edirlər. Nəticədə axtarılan d.n.f. alınır.

Teorem 1. Sadələşdirmə alqoritminin tətbiqi nəticəsində alınan d.n. formaya, (I və II çevirmələrə nəzərən) sadələşməyə d.n.f. deyilir.

Misal 4. Misal 3-dəki cədvəllə verilmiş $f(x_1, x_2, x_3)$ funksi yası üçün başlanğıc d.n.f. kimi onun m.d.n. formasını götürək. Onun üçün verdiyimiz D' çeşidlənməsini qəbul edib, sadələşdirmə alqoritmini tətbiq edək:

1) $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ konyunksiyası, aşkardır ki, çıxarıla bilməz. Lakin burada $\bar{x}_1$ vuruğunu çıxarmaq olar, belə ki, $\bar{x}_2\bar{x}_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee$

$\vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$. Nəticədə biz $\overline{x}_2\overline{x}_3$ konyunksiyasını alırıq ki, buradan artıq heç bir vuruğu çıxarmaq olmaz.

2) $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$ konyunksiyasını çıxarmaq mümkün deyil. Asanlıqla görmək olar ki, bu konyunksiyadan $\overline{x}_1$ vuruğunu çıxarmaq mümkün deyil, lakin $\overline{x}_2$ vuruğunu çıxarmaq olar. Nəticədə $\overline{x}_1x_3$ konyunksiyasını alırıq, onu isə vuruğun çıxarılması yolu ilə sadələşdirmək mümkün deyil.

3) $\overline{x}_1x_2x_3$ konyunksiyası çıxarıla bilər, çünki $\overline{x}_1x_3 = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee$ $\vee \overline{x}_1x_2x_3$.

4) $x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$ konyunksiyası da çıxarıla bilər

5) $x_1x_2\overline{x}_3$ konyunksiyası çıxarıla bilməz. Lakin buradan x_2 vuruğunu çıxarmaq olar. Nəticədə $x_1\overline{x}_3$ konyunksiyasını alarıq, buradan isə artıq vuruq çıxarmaq mümkün deyil.

6) $x_1x_2x_3$ konyunksiyası aşkardır ki, çıxarıla bilməz. Lakin ondan x_1 vuruğunu çıxarmaq olar. Nəticədə x_2x_3 konyunksiyasını alırıq, bu konyunksiyanı isə artıq vuruğun çıxarılması yolu ilə sadələşdirmək mümkün deyil.

Nəhayət $\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_2x_3$ d.n.f. alırıq. Alınan d.n. formanın konyunksiyaların çıxarılması məqsədi ilə ikinci dəfə nəzərdən keçirilməsi sadələşdirmə vermir. Deməli, $D_1 = \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee$ $\vee \overline{x}_1x_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_2x_3$ d.n. forması sadələşdirmə alqoritminin tətbiqi nəticəsində alınan d.n. formadır.

Həmin funksiya üçün onun m.d.n. formasının digər çeşidlənmə variantını götürək:

$$D'' = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_3\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_1x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_3x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 .$$

Bu d.n. formanın sadələşdirilməsi üçün alqoritmin tətbiqini aşağıdakı cədvəllə vermək olar:

№	D.n.f. və baxılan qayda	Nəzərdən keçirilən kon-siya	Əməliy-yatın tipi
1.	D.n.f.-nin birinci dəfə nəzərdən keçirilməsi. $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee$ $\vee\, x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_3x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$;	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1$ -in çıxarılması
2.	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_1x_3 \vee$ $\vee\, x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_3x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$;	$x_3\bar{x}_1\bar{x}_2$	x_3 -ün çıxarılması
3.	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_1x_3 \vee$ $\vee\, x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_3x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$;	$x_2\bar{x}_1x_3$	x_2 -nin çıxarılması
4.	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee$ $\vee\, \bar{x}_3x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$;	$x_1x_2x_3$	x_1 -in çıxarılması
5.	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee$ $\vee\, \bar{x}_3x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$;	$\bar{x}_3x_1x_2$	$\bar{x}_3$ -ün çıxarılması
6.	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee$ $\vee\, x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$;	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ -ün çıxarılması
7.	D.n.f.-nin ikinci dəfə nəzərdən keçirilməsi. $\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3$	$\bar{x}_2\bar{x}_3$	çıxarmaq mümkün deyil
8.	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \vee$ $\vee\, x_2x_3 \vee x_1x_2$;	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$ -nin çıxarılması
9.	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2$;	$\bar{x}_1x_3$	çıxarmaq mümkün deyil
10.	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2$;	x_2x_3	x_2x_3
11.	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2$;	x_1x_2	çıxarmaq mümkün deyil
12.	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2$;		
alqoritm sona çatır			

Beləliklə, bu halda sadələşdirmə alqoritminin tətbiqi nəticəsində $D_2 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2$ d.n. formasını alırıq.

Bu misaldan alırıq ki, sadələşdirmə alqoritminin tətbiqinin nəticələri başlanğıc d.n. formanın çeşidlənməsinin seçilməsindən asılıdır. Belə ki, məsələn: $L_H(D_1) = 8,\ L_H(D_2) = 6$ və ya $L_H(D_1) \neq L_H(D_2)$.

Sadələşməyən d.n. formalar müxtəlif mürəkkəblik dərəcəsinə malik ola bilər və xüsusi halda minimal d.n. formadan fərqlənə bilər. Buna görə də buradan belə bir sual yaranır ki, ixtiyari $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasına sadələşdirmə alqoritmini tətbiq etməklə, minimal d.n.f. almaq olarmı? Bu suala cavab aşağıdakı teoremlə verilir.

Teorem 2. Tutaq ki, $f(x_1,...,x_n)$ ixtiyari bul $(f \neq 0)$ funksiyasıdır və $D = \bigvee_{i=1}^{s} K_i$ bu funksiyanın (I və II çevirmələrə nəzərən) ixtiyari sadələşməyən d.n. formasıdır, onda f funksiyasının m.d.n. formanın elə bir çeşidlənməsi var ki, ondan sadələşdirmə alqoritmini tətbiq etməklə sadələşməyən d.n.f. alınır.

İsbatı. $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası üçün hədd və vuruqlarının adi qayda ilə verilmə ardıcıllıqlı m.d.n. formasını götürək:

$$D^0 = \bigvee_{\substack{(\alpha_1,...,\alpha_n) \\ f(\alpha_1,...,\alpha_n)=1}} x_1^{\alpha_1} \& ... \& x_n^{\alpha_n}.$$

Tutaq ki, $x_1^{\alpha_1} \& ... \& x_n^{\alpha_n}$ –onun ixtiyari hədidir. $f(\alpha_1,...,a_n) = 1$ olduğundan sadələşməyən d.n. formada heç olmasa bir K_i konyunksiyası var ki, $K_i(\alpha_1,...,a_n) = 1$ ödənir, buradan da alırıq ki, $K_i = x_1^{\alpha_{i_1}} \& ... \& x_{i_r}^{\alpha_{i_r}}$. Burada $x_1^{\alpha_1} \& ... \& x_n^{\alpha_n}$ hədində vuruqların yerləşmə ardıcıllığını elə seçək ki, əvvəlcə K_i-yə daxil olmayan vuruqlar, sonra isə K_i-yə daxil vuruqlar ixtiyari qayda ilə gəlsin. Deməli, $x_1^{\alpha_1} \& ... \& x_n^{\alpha_n} = K_\alpha \cdot K_{i(\alpha)}$ $(\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n))$. Nəticədə m.d.n. formanın D' ilə işarə edilən hər hansı bir çeşidlənməsini alırıq. Asanlıqla görmək olar ki, D' d.n. formasında sadələşdirmə alqoritmi hər bir $K_\alpha \cdot K_{i(\alpha)}$ konyunksiyası üçün mümkün iki nəticədən birinə gətirir: ya bu konyunksiya çıxarılır, ya da o $K_{i(\alpha)}$ konyunksiyasına keçirilir. Buradan alırıq ki, alqoritmin tətbiqinin nəticəsi olan D_1' d.n. forması, yalnız D d.n. formasına daxil olan elementar konyunksiyalardan ibarətdir. Digər tərəfdən D d.n. forması sadələşməyən olduğundan $D_1' = D$ olmalıdır.

ÇALIŞMALAR

4.1. Aşağıdakı funksiya üçün minimal dizyunktiv normal formaları qurun.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1

4.2. Aşağıdakı dizyunktiv normal formaları sadələşdirin.

1) $x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$

2) $\bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$

3) $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$

4) $x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$

5) $x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$

6) $x_1x_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_3x_4$

7) $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$.

4.3. Aşağıdakı dizyunktiv normal formaları sadələşdirin.

1) $x\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$

2) $x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee x\,y\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee x\,y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,\bar{z}$

3) $x\,y\,z \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,z \vee x\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z$

4) $\bar{x}\,y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee x\,y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,\bar{z}$

5) $x\,\bar{y}\,z \vee x\,y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$

6) $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,z \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,y\,\bar{z}$

7) $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,z \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,y\,\bar{z}$

8) $\bar{x}\,y\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee x\,y\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee x\,\bar{y}\,z$

4.4. Sadələşdirmə alqoritmindən istifadə edərək, sadələşməyən dizyunktiv normal formaları almalı:

1) $xyzt \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee xyzt \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$

2) $x\bar{y}zt \vee xy\bar{z}t \vee xyz\bar{t} \vee x\bar{y}zt \vee \bar{x}\bar{y}zt \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}\bar{x}\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee xy\bar{z}\bar{t}$

3) $\bar{x}yzt \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee xyzt \vee xy\bar{z}t \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t}$

4) $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xyz \vee x\bar{y}\bar{z}$

5) $\bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z$

6) $\bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xyz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}$

7) $\bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee xyzt \vee xyz\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}yz\bar{t}$

8) $xy\bar{z}t \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}yz\bar{t} \vee xyzt \vee xyz\bar{t}$

9) $\bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}zt \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee xyzt \vee xyz\bar{t}$

10) $xy\bar{z}t \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}yz\bar{t} \vee xyzt \vee xyz\bar{t}$

11) $xyz\bar{t} \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee xyzt \vee \overline{xy}zt \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee xy\bar{z}t$

12) $\bar{x}\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}yz\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}zt \vee xyzt \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t$

13) $x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}zt \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee x\bar{y}zt$

14) $\bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee xyz\bar{t} \vee xyzt \vee \bar{x}yz\bar{t} \vee \bar{x}yzt$

15) $xy\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee xy\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}yz\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee xyz\bar{t} \vee xyzt$

16) $\bar{x}yz\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee xyzt \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee xy\bar{z}t \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}t$

4.5. Aşağıdakı düsturlarla verilən funksialar üçün dizyunktiv normal formaları qurmalı və onları sadələşdirməli:

1) $(x \to y) + (t \to \bar{z})$
2) $(x \vee t) \& (y \vee \bar{z})$
3) $(x + t) \to (y + z)$
4) $(\bar{x} \to t) \vee (y \to \bar{z})$
5) $(x \to \bar{y}) \& (z + t)$
6) $(\bar{x} \& y) \to (z \to \bar{t})$
7) $(x \vee \bar{y}) \& (\bar{t} + z)$
8) $(x + y) \to (\bar{t} + z)$
9) $(x + y + z) \to \bar{t}$
10) $(x \vee y \vee \bar{t}) \to z$
11) $((x + y) \to \bar{t}) \to z$
12) $((\bar{x} \vee y) + z) \to \bar{t}$
13) $((x \vee \bar{t}) \to z) + y$
14) $((x \& \bar{y}) + t) \to \bar{z}$
15) $((\bar{x} \vee y) \to t) + z$
16) $((x \& \bar{y}) \to \bar{t}) + \bar{z}$
17) $((\bar{x} \vee y) + z) \to t$
18) $((x \& y) + \bar{t}) \& (\bar{x} \vee z)$
19) $((x \vee y) \to z) \to (t \vee y)$
20) $((x \to z) \vee y) \to (t \vee y)$
21) $((x + y) \to t) + z$
22) $((x \vee \bar{y}) \to \bar{t}) \to z$
23) $((x \vee \bar{y}) \to (\bar{t} \vee y)) \to z$
24) $((x \vee z) \to (t \vee z)) \to \bar{y}$
25) $((x \vee y) + (\bar{x} \vee t)) \to z$
26) $((x \vee z) + (\bar{x} \vee t)) \to (y \vee z)$
27) $((x \vee t) \to \bar{z}) \to (y + t)$
28) $((x \to t) + y) \to (\bar{z} \to y)$

ƏDƏBİYYAT

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М., Наука, 1986, 384 с.
2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.Н. Сборник задач по дискретной математике. М., Наука, 1977, 367с.
3. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Под ред. С.В.Яблонского и др. М., Наука, 1974, 312с.
4. Марков А.А. Введение в теорию кодирования. М., Наука, 1982.
5. Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. М., Наука, 1972.
6. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М., Наука, 1984, 224с.
7. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М., Наука, 1976.
8. Клини С.К. Математическая логика. М., Мир, 1973, 480с.
9. Берж К. Теория графов и ее применения. М. ИЛ, 1962, 319с.
10. Оре О. Теория графов. М., Наука, 1968, 352с.
11. Лупанов О.Б. Асимптотические оценки сложности управляемых систем. М., МГУ, 1984, 138с.
12. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. М., Энергоатомиздат, 1988, 480с.
13. Зыков А.А. Теория конечных графов. Новосибирск, Наука, 1969.
14. Марков А.А., Нагорный Н.И. Теория алгоритмов. М., Наука, 1984.

M Ü N D Ə R İ C A T

Айдын Юнус оглы Алиев

Владимир Абдулович Пиривердиев

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие для вузов

(на азербайджанском языке)

Баку, Мутарджим, 2003

ƏLİYEV AYDIN YUNUS OĞLU

Əliyev Aydın Yunus oğlu 21.04.66-cı ildə Bakı şəhərində anadan olmuşdur. 1988-ci ildə Azərbaycan Dövlət Universitetinin mexanika-riyaziyyat fakültəsini fərqlənmə diplomu ilə bitirib, aspiranturada saxlanılmışdır.

1992-ci ildə hesablama riyaziyyatı ixtisası üzrə fizika-riyaziyyat elmləri namizədi adını almaq üçün müvəffəqiyyətlə dissertasiya müdafiə etmişdir. Müxtəlif vaxtlarda universitetdə müəllim, baş müəllim və dosent vəzifələrinə seçilmişdir. 1995-ci ildən hazırkı dövrə qədər «Hesablama riyaziyyatı» kafedrasının dosentidir.

Dosent A.Y.Əliyev 30-a qədər elmi məqalənin, hesablama riyaziyyatı, informatika və proqramlaşdırma üzrə 4 dərs vəsaitinin müəllifidir.

PİRİVERDİYEV VLADİMİR ƏBDÜLOVİÇ