AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
AZƏRBAYCAN DÖVLƏT İQTİSAD UNİVERSİTETİ

Yalçın Hacızalov
Yeganə Kərimova
Leyla Hüseynova

E K O N O M E T R İ K A:
nəzəriyyə və praktikum

Ali məktəblər üçün dərslik

Azərbaycan Respublikası Təhsil nazirinin 01.07.2010 tarixli 953№-li əmri ilə dərslik kimi təsdiq edilmişdir.

B A K I – 2 0 1 0

Elmi məsləhətçi: i.e.d., prof., Dövlət Mükafatı Laureatı, Türk Dünyası Araşdırmaları Beynəlxalq Elmlər Akademiyasının akademiki
BƏDIRXAN MUSAYEV

Elmi redaktor: i.e.n., dos. **MUSTAFA SADIQOV**

Rəyçilər: Azərbaycan Respublikası Nazirlər Kabinetinin "İqtisadiyyat, maliyyə-kredit siyasəti" şöbəsinin müdiri, i.e.d., **Ş.M.Sadıqov**

Azərbaycan Respublikası Prezidenti yanında Dövlət İdarəçilik Akademiyasının "Dövlət idarəçiliyində informasiya texnologiyaları" kafedrasının müdiri, i.e.n., dos**. Ə.K.Bədəlov**

AzDİU-nun "İnformatika" kafedrasının müdiri, i.e.d., prof. **R.Ə.Balayev**

AzDİU-nun "İqtisadiyyatın tənzimlənməsi" kafedrasının dosenti, i.e.n. **M.M.Sadıqov**

Hacızalov Y., Kərimova Y., Hüseynova L. Ekonometrika: nəzəriyyə və praktikum. Dərslik. Bakı: "İqtisad Universiteti" nəşriyyatı, 2010, 520 səh.

© Hacızalov Y., Kərimova Y., Hüseynova L. , 2010
© "İqtisad Universiteti" nəşriyyatı, 2010

G İ R İ Ş

İqtisad elminin inkişaf tarixi ilə tanışlıq göstərir ki, bu elm uzun müddət real iqtisadi sistemlərin davranışı haqqında elmi hekayət rolunu oynamışdır. İqtisadi sistemlərin çox mürəkkəb bir quruluşa malik olması üzündən ayrı-ayrı fikir sahiblərinin dilində bu hekayətlər müxtəlif səpgidə səslənmişdir. Məsələn, Adam Smit "Xalqların sərvətlərinin təbiəti və səbəbləri haqqında tədqiqatlar" əsərində belə hesab edirdi ki, iqtisadiyyatın ayrı-ayrı iştirakçıları bir-birindən asılı olmayaraq fəaliyyət göstərirlər, lakin hər halda "gözəgörünməz əl" onlara "göz qoyur" və davranışlarını əlaqələndirir. Smitə görə dövlətin iqtisadiyyatın tənzimlənməsindəki rolu minimaldır.

Karl Marks özünün "Kapital" əsərində istehsalın bütün cəmiyyətdə həlledici rol oynadığını əsaslandırmağa çalışırdı. Marksa görə hər şeyi "tarixin lokomotivləri" olan inqilablar həll edir, daha doğrusu həm bütövlükdə cəmiyyət, həm də iqtisadiyyat öz inkişafında partlayış xarakterli momentlərdən – inqilablardan keçməlidir.

Con Keyns isə özünün "Məşğulluğun, faizin və pulun ümumi nəzəriyyəsi" əsərində pul tədavülünün həm bütövlükdə cəmiyyətdə, həm də iqtisadiyyatın tənzimlənməsində müstəsna rol oynadığını əsaslandırmaq istəyərək qeyd edirdi ki, müəyyən zaman momentlərində dövlətin rolu təkcə tənzimləyici funksiyalarla məhdudlaşmayaraq həlledici xarakter kəsb edə bilər.

Fikirlərin və yanaşmaların müxtəlif səpkili olmasına baxmayaraq hamı tərəfindən qəbul edilən bit həqiqət də var – iqtisadiyyat mürəkkəb, dinamik, stoxastik xarakterli bir konstruksiya olmaqla, hökmən qərarların qəbulu baxımından idarə olunmalıdır. Bazar iqtisadiyyatı isə iqtisadi sistemlərin davranışını və inkişafını tənzimləyəcək idarəetmə qərarlarının qəbulunu keyfiyyətcə yeni müstəviyə - optimal qərarlar müstəvisinə yüksəltmişdir. Bu gün iqtisad elmində riyazi model iqtisadi sistemlərin tədqiqi və proqnozlaşdırılmasının güclü vasitəsi kimi çıxış edir. Çünki optimal qərarların qəbulu alternativ qərar variantlarının bir-biri ilə müqayisə olunmasını tələb edir. Belə bir müqayisəni isə yalnız kəmiyyət təhlili əsasında, riyazi instrumentarilərdən istifadə bazasında reallaşdırmaq olar.

İqtisadi tədqiqatlarda riyazi üsullardan istifadənin çox qədim və zəngin tarixi vardır. Cədvəllər və formulalar səviyyəsində sadə riyazi modellərdən hələ F.Kene ("İqtisadi cədvəllər" əsəri), A.Smit ("Klassik

makroiqtisadi model”) və D.Rikardo (“Beynəlxalq ticarət modeli”) istifadə etmişdilər.

Bazar iqtisadiyyatının tədqiqinə riyazi yanaşmanın nəzəri-konseptual əsasları isə XIX əsrdə L.Valras, O.Kurno, B.Pareto, R.Edjvort və başqaları tərəfindən işlənib hazırlanmışdır.

Bütün bu tədqiqatlar XX əsrin ortalarında yeni bir elmi dünyagörüşün – iqtisadi sistemlər və onların elementləri arasında mövcud olan kəmiyyət asılılıqlarının təhlili əsasında bu sistemlər üzrə optimal idarəetmə strategiyalarının yaradılmasının nəzəri-konseptual və praktik aspektlərini tədqiq edən müstəqil elm sahəsinin yaranmasına gətirib çıxartdı.

Qeyd edək ki, iqtisad elminin və riyaziyyatın sintezi olan bu elmi istiqamətə müxtəlif dövrlərdə müxtəlif adlar verilmişdir. Bu adlara “İqtisadi kibernetika”nı, “Əməliyyatların tədqiqi”ni, “İqtisadi-riyazi modelləşdirmə”ni və “Ekonometrika”nı aid etmək olar.

Müasir dövrdə Qərbin elmi məktəblərinin bir çoxu “Ekonometrika” elmini iqtisadi sistemlərin davranışlarının kəmiyyət aspektlərinin riyazi-statistik təhlili instrumentarisi kimi təbliğ edirlər. Biz də öz dərsliyimizi “Ekonometrika” adlandırmışıq. Lakin oxucuların nəzərinə çatdırırıq ki, yuxarıda qeyd etdiyimiz yanaşmadan fərqli olaraq biz Ekonometrikaya dar mənada – riyazi-statistik təhlil metodlarının məcmuyu kimi deyil, daha geniş və əhatəli mənada yanaşmışıq. Biz belə hesab edirik ki, ***iqtisadi sistemlər üzrə optimal idarəetmə strategiyalarının qəbulu prosesində riyaziyyatdan hər bir istifadə - ekonometrikanın predmetidir və onun tədqiqat oblastına daxildir***.

Bu yanaşmanın həyatiliyini aşağıdakı kimi əsaslandıra bilərik. Məlumdur ki, iqtisadiyyatın əsas problemi təsərrüfatın səmərəli aparılması, səmərəli fəaliyyətidir (ekonomizing). Daha doğrusu, cəmiyyətin malik olduğu məhdud ehtiyatlar elə bölüşdürülməlidir ki, qarşıya qoyulmuş məqsəd ən yaxşı şəkildə təmin edilsin. Ehtiyatların məhdudluğu onlardan istifadənin alternativ variantlarının bir-biri ilə müqayisə edilməsini və cəmiyyətin istehsal imkanları çərçivəsindən kənara çıxmadan məqsədə çatmanın təmin edilməsini tələb edir.

Təsərrüfatın səmərəli aparılması problemini iqtisadiyyata riyazi optimallaşdırma metodunun tətbiqi baxımından nəzərdən keçirmək olar. Fərz edək ki, riyazi optimallaşdırma məsələsi müəyyən dəyişənlər üçün bir sıra məhdudiyyət şərtlərini ödəyən və funksiyaya maksimum (minimum) qiymət verən kəmiyyətlərin tapılması şəklində müəyyən edilmişdir. Təsərrüfatın səmərəli aparılması məsələsinin dəyişənləri

olaraq ehtiyatların konkret bölgüsünün aparıldığı "instrumentarilər" çıxış edir. Məsələdə qarşıya qoyulmuş və bir-biri ilə rəqabət aparan məqsədlər məqsəd funksiyası şəklində sintez edilir. Ehtiyatların çatışmamazlığını əks etdirən məhdudiyyətlər isə məsələnin instrumentarilərinin qiymətləri çoxluğunu formalaşdırır. Bu çoxluğa mümkün qiymətlər çoxluğu (opportunitu set) deyilir.

Beləliklə, iqtisadiyyatın əbədi problemi olan təsərrüfatın səmərəli aparılması məsələsi riyazi baxımdan mümkün həllər çoxluğundan instrumental kəmiyyətlər üçün elə qiymətlərin tapılması deməkdir ki, bu qiymətlərə görə qarşıya qoyulmuş məqsədi əks etdirən məqsəd funksiyası özünün ekstremal qiymətini alsın. Bu məsələnin həllinin nəzəri-konseptual və praktiki aspektlərini, yəni iqtisadiyyatın əbədi probleminin həlli istiqamətində riyaziyyatdan istifadənin hər bir istiqamətini biz "Ekonometrika" adlandıracağıq.

Dərslik Azərbaycan Dövlət İqtisad Universitetində yüksək ixtisaslı iqtisadçı kadr hazırlığı planına daxil olan "Ekonometrika" fənninin proqramı əsasında yazılmışdır.

Dərslik 2 bölmədən və 13 fəsildən ibarətdir.

I bölmə iqtisadi-riyazi modelləşdirmənin riyazi aparatı olan riyazi proqramlaşdırma nəzəriyyəsinə həsr edilmişdir.

II bölmədə isə iqtisadi-riyazi modellərin qurulmasının və reallaşdırılmasının nəzəri və praktik əsasları açıqlanmışdır.

1-ci fəsildə iqtisadi-riyazi modelləşdirmənin nəzəri-metodoloji əsasları açıqlanmışdır. Burada iqtisadi-riyazi modellərə obyektiv reallığı dərk etmənin instrumentarilərindən biri kimi yanaşılmış, iqtisadi proseslərin riyazi modellərinin qurulmasına aid nümunələr verilmişdir.

2-ci fəsildə xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin qoyuluşu, həndəsi və iqtisadi mənaları araşdırılmışdır.

3-cü fəsildə xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin qrafik üsulu və simpleks metodla həll alqoritmləri nəzərdən keçirilmiş, eləcə də simpleks metodun xüsusi halları araşdırılmışdır.

4-cü fəsildə qoşmalıq nəzəriyyəsinin elementləri verilmiş, qoşmalıq teoremlərinin iqtisadi mənaları açıqlanmış, qoşmalıq prinsipi əsasında iqtisad-riyazi modellərin dayanıqlılığının və həssaslığının təhlili aparılmış, qoşma simpleks metodun alqoritmi nəzərdən keçirilmişdir.

5-ci fəsildə nəqliyyat məsələsinin klassik qoyuluşu və müxtəlif modifikasiyaları nəzərdən keçirilmiş, onların həll alqoritmləri verilmişdir.

6-cı fəsildə tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu və həll üsulları nəzərdən keçirilmişdir.

7-ci fəsil kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu və həll üsullarına həsr edilmişdir.

8-ci fəsildə parametrik proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu və həll üsulları nəzərdən keçirilmişdir.

9-cu fəsildə qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu və həll üsullarına baxılmışdır.

10-cu fəsildə Leontyev modelləri timsalında makromodellərin qurulması və həll edilməsi məsələləri araşdırılmışdır.

11-ci fəsil müəssisə modellərinin qurulmasına həsr edilmişdir. Burada bir sıra tipik müəssisə modelləri tərtib edilmiş və onların həll edilməsi məsələlərinə baxılmışdır.

12-ci fəsildə iqtisadi sistemlərin idarə edilməsində korrelyasiya və reqressiya təhlili metodundan istifadə məsələlərinə baxılmışdır. Burada cüt korrelyasiyanın və çox korrelyasiyanın xətti və qeyri-xətti modellərinin qurulması və parametrlərinin hesablanması, əlaqənin sıxlığının qiymətləndirilməsi məsələləri nəzərdən keçirilmişdir. Bu fəsildə eləcə də biramilli və çoxamilli istehsal funksiyalarının qurulması və tətbiqi məsələlərinə, ekonometrik yanaşma əsasında iqtisadi inkişafın proqnozlaşdırılması modellərinin tərtibi məsələlərinə baxılmışdır.

13-cü fəsil iqtisadi qeyri-müəyyənlik və risk şəraitində optimal qərarların qəbulu modellərinin tərtibinin riyazi əsaslarına həsr edilmişdir. Burada oyunlar nəzəriyyəsinə münaqişəli vəziyyətlərdə optimal strategiyaların qəbulu instrumentarisi kimi yanaşılmış, iqtisadi proseslərin matris oyunlarına gətirilməsi və həlli məsələlərinə baxılmışdır. Bu fəsildə eləcə də insanın təbiətlə oyunlarına baxılmış, bu tip oyunların həllinə pessimist və optimist kriteriyaların tətbiqi məsələləri araşdırılmışdır.

Dərsliyin diqqəti cəlb edən məqamlarından biri odur ki, burada çoxsaylı praktik məsələlər həll edilmiş və optimal idarəetmə strategiyalarının qəbulunun praktik aspektləri araşdırılmışdır. Belə ki, dərslikdə 360 məsələ həll edilmiş, bunlardan 66 məsələnin izahı verilmiş, 294 məsələ isə praktikum kimi təklif edilmişdir.

FƏSIL 1

EKONOMETRİKA – İQTİSADİ SİSTEMLƏRİN OPTİMAL İDARƏ EDİLMƏSİNİN RİYAZI APARATI KİMİ

1.1.İqtisadi-riyazi modelləşdirmənin metodoloji əsasları

Model sözü latın mənşəli «modulus» («modelius») sözündən götürülmüşdür və dilimizə «ölçü», «nümunə», «norma» kimi tərcümə edilir. Model termini bir çox elmlərin fundamental anlayışı olduğundan, onun hamı tərəfindən qəbul edilən ümumi tərifi yoxdur. Ekonometrikada modelə aşağıdakı kimi tərif verilir:

Tərif: Model dedikdə elə bir maddi və ya təsəvvür olunan obyekt başa düşülür ki, bu obyekt tədqiqat prosesində öyrənilən real obyekti əvəz edir və onun haqqında əlavə biliklər toplamağa imkan verir.

Başqa sözlə desək model- öyrənilən hadisə, obyekt və ya prosesin tədqiqatın məqsədi baxımından mühüm olan xüsusiyyətlərinin ümumiləşdirilmiş (sadələşdirilmiş) təsviri olub, bu hadisə, obyekt və ya proses haqqında əlavə biliklər mənbəyi rolunu oynayır.

Məlum olduğu kimi, ictimai praktika (eksperimentlər) obyektiv reallığı dərk etməyin universal vasitəsi kimi çıxış edir və eksperimentlə təsdiq olunan hər bir şey həqiqət kimi qəbul edilir. Lakin elə elm sahələri var ki, bu sahələrdə real obyektlərlə eksperiment aparmaq mümkün olmur (məsələn astronomiya, təbabət, iqtisadiyyat və s.). Odur ki, obyektiv reallığı dərk etmək üçün başqa bir vasitədən- modellərdən istifadə etmək zərurəti yaranır. Yəni eksperimentlər real obyektlər səviyyəsində deyil, onların sadələşdirilmiş proobrazları olan modellər səviyyəsində aparılır. Beləliklə, model- obyektiv reallıqla insan şüuru arasında aralıq bənd olub, bu obyektiv reallığı dərk etmək vasitəsi kimi çıxış edir.

Modellərin qurulmasının əsasını fəlsəfənin «analogiya» prinsipi təşkil edir. Real obyekt ilə onun modeli arasında analogiyanı (oxşatmanı) aşağıdakı üç istiqamət üzrə yaratmaq olar:

1. Daxili struktura görə;

2. Xarici təsvirə görə;

3. Ətraf mühitin təsirlərinə verilən cavab reaksiyalarının eyni liyinə görə.

Bu baxımdan modellərin aşağıdakı üç tipini fərqləndirirlər:

1. Fiziki modellər;

2. Qrafiki modellər;

3. Məntiqi-riyazi modellər.

Fiziki modellər obyektlərin daxili strukturunu, sistemyaradıcı xüsusiyyətlərini əks etdirir. Məsələn, yeni təyyarə yaradılan zaman laboratoriya şəraitində bu təyyarənin bütün qurğuları quraşdırılır, başqa sözlə, onun fiziki modeli qurulur. Bu model real obyektə oxşamasa da, onun üzərində eksperimentlər aparmaqla, təyyarənin real uçuşda məruz qalacağı bütün təsirlər haqqında informasiya toplamaq mümkün olur.

Qrafiki modellər isə öyrənilən sistemin, prosesin daxilinə nüfuz etmədən onun xarici görünüşünü, ölçülərini, konturlarını əks etdirir (məsələn sxemlər, diaqramlar, çertyojlar, xəritələr və s). Bu baxımdan qlobusu yer kürəsinin qrafiki modeli hesab etmək olar. Qeyd edək ki, fiziki və qrafiki modellər iqtisadi sistemlər səviyyəsində demək olar ki, tətbiq olunmur.

Məntiqi-riyazi model dedikdə isə öyrənilən sistemin tədqiqatın məqsədi baxımından mühüm olan xüsusiyyətlərinin formal riyazi ifadələr, yəni tənliklər, bərabərsizliklər, funksiyalar və s. şəklində ifadə edilməsi başa düşülür.

Məntiqi-riyazi modellər içərisində iqtisadi-riyazi modellər, daha doğrusu iqtisadi sistemlərin riyazi modelləri xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. ***İqtisadi-riyazi model dedikdə*** formal riyazi ifadələrlə verilən iqtisadi mücərrədlik başa düşülür. Qeyd edək ki, öyrənilən iqtisadi sistemlə onun modeli arasında birqiymətli uyğunluq prinsipi mövcud ola bilməz. Çünki bu halda model real iqtisadi obyektdən heç nə ilə fərqlənməzdi və onun təkrarı olardı. Yəni, iqtisadi-riyazi model real iqtisadi sistemin birqiymətli inikası deyildir və həmişə ümumiləşdirmədir. Ümumiləş-dirmə zamanı isə bütün digər şərtlər dəyişməz qaldıqda, müəyyən qədər informasiya itkisi baş verir. İqtisadi-riyazi modellərin məhz bu xüsusiy-yəti, yəni tədqiqatın məqsədi baxımından artıq olan informasiyanı itirə bilmək qabiliyyəti onlardan müxtəlif təyinatlı iqtisadi sistemlərin idarə edilməsində yüksək səmərəliliyə malik vasitə kimi istifadə etməyə imkan verir.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, model qurulan zaman iqtisadi sistemdə sadələşdirmə aparılır. Lakin bu sadələşdirmə ixtiyari və kobud olmamalıdır. Hər bir modelin qurulması zamanı tədqiqatçı obyektiv olaraq iki arzuolunmaz halla qarşılaşır. Bu halları görkəmli riyaziyyatçı R.Bellman obrazlı şəkildə «həddən artıq sadələşdirmək tələsi və həddən

artıq mürəkkəbləşdirmək bataqlığı» kimi ifadə etmişdir. Doğrudan da, əgər model qurulan zaman iqtisadi sistemdə ifrat sadələşdirməyə yol verilmişdirsə, onda alınmış model real iqtisadi sistemə xas olan xüsusiyyətləri kifayət qədər dolğun və tam əks etdirməyəcəkdir, yəni ona adekvat (uyğun) olmayacaqdır. Təbii ki, belə modelin informasiyasına əsaslanaraq qəbul ediləcək idarəetmə strategiyası da səmərəli strategiya olmayacaqdır. Əgər model tərtib olunan zaman ifrat mürəkkəbləşməyə yol verilmişdirsə, onda alınmış modelin yüksək adekvatlığına (uyğunluğuna) baxmayaraq bu modeli həll etmək üçün mürəkkəb riyazi aparatdan istifadə etmək lazım gələcəkdir, daha doğrusu modelin həlli prosesində çətinliklər yaranacaqdır. Odur ki, model qurulan zaman ifrat sadələşdirmə ilə ifrat mürəkkəbləşdirmə arasında qızıl ortanı tapmaq lazımdır. Qeyd edək ki, bu halları bir-birindən çox dar bir cığır ayırır və bir arzuolunmaz hal digəri ilə asanlıqla əvəz oluna bilər.

Beləliklə, iqtisadi-riyazi modelin qurulması qarşısına qoyulan əsas tələblərə modelin öyrənilən real iqtisadi sistemə kafi adekvatlığı tələbini və istifadə olunan riyazi aparatın kafi sadəliyi tələbini aid etmək olar.

Strukturlarına görə iqtisadi-riyazi modellər real iqtisadi asılılıqları əks etdirən formal riyazi asılılıq qruplarından ibarətdir. İqtisadi-riyazi modellərə daxil olan parametrlər ***ekzogen*** (məlum) və ***endogen*** (məchul) parametrlərə ayrılırlar. Ekzogen parametrlərin qiymətləri modeldən kənarda hesablanır və modelə hazır şəkildə daxil edilir. Endogen parametrlərin qiymətləri isə qurulmuş iqtisadi-riyazi model həll edildikdən sonra tapılır.

Modellər tərtib edilən zaman bu modellərdə iştirak edən endogen parametrlərin çoxvariantlı alternativ qiymətlərə malik olmaları təmin edilir. Yəni bu parametrlərin mümkün qiymətlər çoxluğu mövcud olur. Odur ki, endogen parametrlərin mümkün qiymətlərini bir-biri ilə müqayisə etmək yolu ilə onların içərisindən qarşıya qoyulmuş məqsədə ən yaxşı cavab verənləri seçmək problemi ortaya çıxır. Belə bir müqayisəni aparmaq üçün müxtəlif keyfiyyət kriteriyalarından istifadə edilir (məsələn, maksimum mənfəət, minimum istehsal xərcləri, minimum daşınma xərcləri və s.). Bu keyfiyyət göstəricilərinin riyazi ifadələrinə ***optimallıq kriteriyaları*** deyilir və onlar iqtisadi-riyazi modellərin tərkibində məqsəd funksiyası şəklində iştirak edirlər.

İqtisadi-riyazi modelləri həm birkriteriyalı şəkildə, həm də çoxkriteriyalı şəkildə tərtib etmək olar. Qeyd edək ki, yalnız birkriteriyalı halda modelləri həll etmək mümkün olur. Odur ki, çoxkriteriyalı

modelləri xüsusi yanaşmalar əsasında birkriteriyalı modellər şəklinə gətirmək lazım gəlir. Bu yanaşmalar aşağıdakılardır:

• Modelin verilmiş kriteriyalarından hər hansı biri prioritetli kriteriya kimi seçilir və qalan bütün kriteriyalar bu kriteriyaya tabe edilir. Qeyd edək ki, bu yanaşmadan yalnız o halda istifadə etmək olar ki, baxılan kriteriyalar arasında heç bir ziddiyyət olmasın. Məsələn, modeldə optimallıq kriteriyaları olaraq maksimum mənfəət, maksimum gəlir, maksimum rentabellik kimi kriteriyalardan istifadə edilmişdirsə, onda bu kriteriyalardan birini, tutaq ki, maksimum mənfəət kriteriyasını prioritetli kriteriya kimi seçmək, qalanlarına isə baxmamaq olar. Çünki bu kriteriyaya görə tapılmış optimal strategiya qalan kriteriyalar üçün də optimal strategiya olacaqdır. Lakin bu kriteriyalar içərisində minimum istehsal xərcləri kriteriyası da iştirak edirsə, onda bu yanaşmadan istifadə etmək olmur, çünki maksimum mənfəət kriteriyasına görə tapılmış optimal strategiya minimum istehsal xərcləri kriteriyasına görə optimal olmayacaqdır.

• Modelin mövcud optimallıq kriteriyalarından hər birinə onların qarşıya qoyulmuş məqsədə çatma baxımından vacibliyini əks etdirən $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_r)$ çəki əmsalları verilir (belə hesab edəcəyik ki, bu əmsalların qiymətləri $0 \le \omega_j \le 1$ oblastında dəyişir. Qarşıya qoyulan məqsəd baxımından hansı kriteriya daha vacib hesab olunursa, onun əmsalı vahidə yaxın götürülür, hansı ikinci dərəcəlidirsə, əmsalı sıfıra yaxın götürülür). Sonra isə bu çəki əmsalları əsasında vahid optimallıq kriteriyası sintez edilir:

$$F = \omega_1 f_1 + \omega_2 f_2 + ... + \omega_r f_r$$

Burada $f_1, f_2, ..., f_r$ – verilmiş fərdi optimallıq kriteriyalarıdır.

Məsələn, fərz edək ki, modeldə optimallaşdırma

1) $f_1 = 8x_1 + 3x_2 \to \max$

2) $f_2 = 2x_1 + x_2 \to \min$

optimallıq kriteriyalarına görə aparılır və birinci kriteriya müəssisənin fəaliyyətinin səmərələşdirilməsi baxımından daha vacib hesab edilir. Odur ki, həmin kriteriya üçün $\omega_1 = 0{,}7$, ikinci üçün isə $\omega_2 = 0{,}1$ çəki əmsalları seçək. Onda alırıq:

$$F = 0{,}7(8x_1 + 3x_2) - 0{,}1(2x_1 + x_2) = 5{,}4x_1 + 2x_2 \to \max$$

• Modeldə bir məqsəd funksiyası saxlanılır, qalanları isə modelin məhdudiyyət şərtlərinə çevrilir.

Bu halı daha ətraflı nəzərdən keçirək. Fərz edək ki, iqtisadi sistemin davranışının optimallaşdırılması məsələsi xətti məhdudiyyət şərtləri daxilində iki xətti funksiyanın ekstremumlarının tapılmasına gətirilmişdir:

$$Z_1(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max$$

$$Z_2(x) = \sum_{j=1}^{n} q_j x_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_i \qquad (i = \overline{1,m})$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,n})$$

Beləliklə, iki məqsəd funksiyasına görə elə bir kompromis (suboptimal) həll tapmaq tələb edilir ki, bu həllə görə baxılan bütün göstəricilərin (yəni $Z_1(x)$ və $Z_2(x)-$ in) qiymətləri ekstremal qiymətlərə yaxınlaşsınlar.

Tutaq ki, model hər iki məqsəd funksiyasına görə həll edilmişdir və $\max Z_1(x)$ və $\min Z_2(x)$ tapılmışdır. Fərz edək ki, $\max Z_1(x) = Q_1$, $\min Z_2(x) = Q_2 -$ dir. Onda məqsəd funksiyalarının üzərində müəyyən çevirmələr apararaq iki məqsəd funksiyasına görə kompromis həllin tapılması məsələsinin aşağıdakı iqtisadi-riyazi modelini alırıq:

$$F = x_{n+1} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} p_j x_j + Q_1 x_{n+1} \ge Q_1 \\ \sum_{j=1}^{n} q_j x_j - Q_2 x_{n+1} \le Q_2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_i \qquad (i = \overline{1,m}) \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,n+1})$$

Burada x_{n+1} -ə $Z(x_1)$ və $Z(x_2)$ məqsəd funksiyaları ilə əks etdirilən iqtisadi göstəricilərin ən böyük nisbi qiyməti kimi baxılmışdır.

Qeyd edək ki, hər bir model modelləşdirmə prosesinin məhsuludur. ***Modelləşdirmə*** dedikdə iqtisadi-riyazi modellərin qurulması, öyrənilməsi və tətbiq edilməsi prosesi başa düşülür.

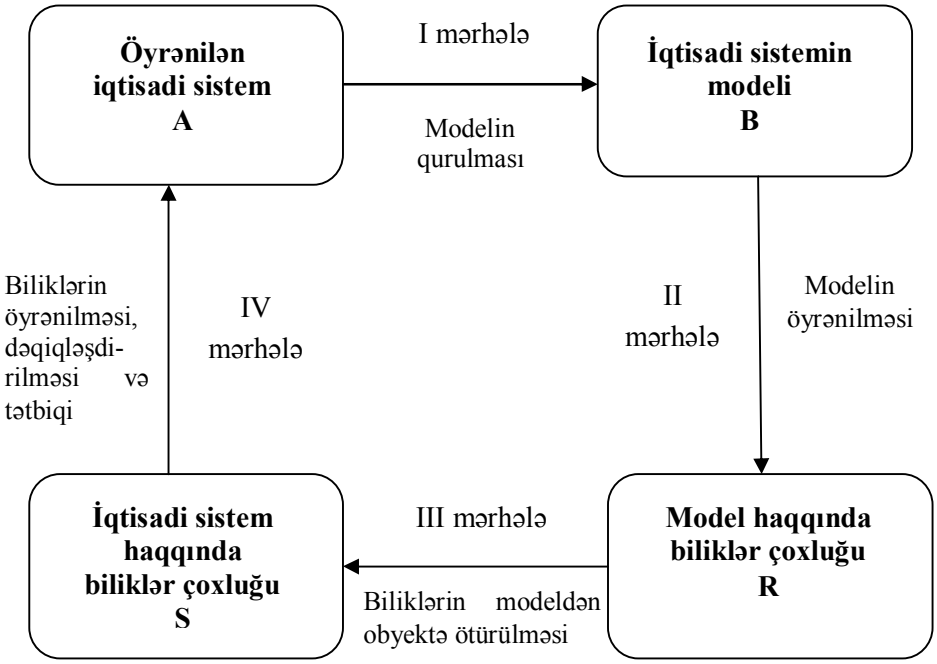
Modelləşdirmədə üç element iştirak edir:

1. Öyrənilən iqtisadi sistem (obyekt);

2. Tədqiqatçı (subyekt);

3. İqtisadi sistemin modeli (instrumentari).

Modelləşdirmə prosesinin blok-sxemini aşağıdakı kimi təsvir etmək olar:



Göründüyü kimi, modelləşdirmə prosesi qarşılıqlı asılı dörd mərhələli prosesdir. Bu prosesin dialektikasını nəzərdən keçirək.

Tutaq ki, tədqiqatçının qarşısına *A* iqtisadi sistemin səmərəli davranışını və ya inkişafını təmin edəcək optimal idarəetmə strategiyası hazırlamaq vəzifəsi qoyulmuşdur.

Modelləşdirmənin I mərhələsində tədqiqatçı maddi aləmin obyektləri içərisində elə bir obyekt axtarır ki, bu obyekt öz xüsusiyyətlərinin təzahürünə görə *A* obyektinin modeli rolunu oynaya bilsin. Əgər belə bir obyekt tapmaq mümkün olmazsa, onda *A* obyektinin əsas xüsusiyyətlərinin ümumiləşdirilmiş təsviri olan

iqtisadi-riyazi model qurulur. Beləliklə, modelləşdirmənin I mərhələsi A sisteminin B modelinin qurulması ilə başa çatır.

Modelləşdirmənin II mərhələsində B modeli müstəqil tədqiqat obyekti kimi çıxış edir. Yəni tədqiqatçı real obyektin problemlərindən uzaqlaşaraq bütün diqqətini B modeli üzərində cəmləşdirir. II mərhələnin məzmunu B modeli üzərində model eksperimentlərinin aparılmasından ibarətdir. Bu eksperimenlər nəticəsində model haqqında biliklər çoxluğu olan R sistemi yarynır.

Modelləşdirmənin III mərhələsində model haqqında əldə edilmiş biliklər modelin dilindən (riyazi dil) obyektin dilinə (iqtisadi dil) tərcümə edilir. Bu mərhələ iqtisadi sistem haqqında əlavə biliklər çoxluğu olan S sisteminin formalaşması ilə başa çatır. Bununla da tədqiqatçı yenidən iqtisadi sistemin problemlərinə qayıdır.

Modelləşdirmənin sonuncu, IV mərhələsində tədqiq edilən obyekt haqqında əldə edilmiş əlavə biliklər dəqiqləşdirilir və optimal idarəetmə qərarı qəbul etmək məqsədi ilə istifadə edilir.

Qeyd edək ki, modelləşdirmə prosesi dövrü prosesdir. Yəni dörd mərhələdən ibarət birinci dövrün arxasınca 2,3 və s. dövrlər gələ bilər. Bu dövrlük onunla əlaqədardır ki, bəzən birinci dövrdən sonra əldə edilən əlavə biliklər optimal idarəetmə qərarı qəbul etmək üçün kifayət etmir.

Tutaq ki, modelləşdirmədən əvvəl tədqiqatçının iqtisadi sistem haqqında biliyi f - ə bərabərdir və birinci dövrdən sonra Δf_1 qədər əlavə bilik alınmışdır. Onda 1-ci dövrdən sonra tədqiqatçının iqtisadi sistem haqqında məcmu biliyi

$$f_1 = f + \Delta f_1$$

qədər olacaqdır.

Əgər bu bilik optimal idarəetmə qərarı qəbul etmək üçün kifayət deyilsə, onda f_1 biliyi əsasında ikinci dövr başlanır. Bu dövrlər o vaxta qədər davam etdirilir ki, sonlu k sayda dövrlərdən sonra əldə edilən

$$f_k = f_{k-1} + \Delta f_k$$

məcmu bilik optimal idarəetmə strategiyasını qurmağa imkan versin.

Burada f_{k-1} – additiv funksiya olub, iqtisadi sistem haqqında $K-1$ dövr ərzində əldə edilən məcmu biliyi, Δf_k isə $K-$ cı dövr ərzində əldə edilən əlavə biliyi əks etdirir.

İqtisadi-riyazi modelləri müxtəlif əlamətlərə görə təsnifata ayırmaq olar.

Funksional xüsusiyyətlərinə görə iqtisadi-riyazi modellər *tənzimləmə modellərinə, mühasibat uçotu və statistika modellərinə, maliyyə-kredit əməliyyatlarının modellərinə, daxili və xarici ticarət modellərinə* və s. ayrılırlar.

Ölçülərinə görə iqtisadi-riyazi modellər *makro modellərə, lokal modellərə və mikro modellərə* ayrılırlar. Makromodellər bütövlükdə makro iqtisadiyyat səviyyəsində tərtib edilir. Bütün makromodellərin əsasını aşagıdakı balans tənliyi təşkil edir:

$$X - F(X) - V = Z$$

Burada: X – makroiqtisadi sistemin hüdudları daxilində istehsal edilmiş məcmu məhsulu;

$F(X)$ – istehsal funksiyası olub, X qədər məhsul istehsal etmək üçün sərf edilmiş məcmu məhsul hissəsini;

V – məcmu məhsulun istehlaka gedən hissəsini;

Z – isə məcmu məhsulun yığıma gedən hissəsini göstərir.

Lokal modellər makroiqtisadiyyatın ayrı-ayrı funksional alt sistemləri (maddi istehsal sahələri, sahə birlikləri, iri korporasiyalar və s.) səviyyəsində tərtib edilir və həmin alt sistemlər səviyyəsində optimal idarəetmə strategiyaları qurmağa imkan verir.

Mikromodellər isə ayrı-ayrı müəssisələr, firmalar, istehsal bölmələri səviyyəsində tərtib edilərək bu mikrosistemlərdə istehsal-təsərrüfat fəaliyyətinin optimallaşdırılmasına yönəldilmiş idarəetmə qərarları qəbul etməyə imkan verir.

İstifadə edilən riyazi aparatın xarakterinə görə iqtisadi-riyazi modellər aşağıdakı kimi təsnifata ayrılır:

1. *Xətti optimallaşdırma modelləri;*
2. *Qeyri-xətti optimallaşdırma modelləri;*
3. *Dinamik proqramlaşdırma tipli modellər;*
4. *Şəbəkə planlaşdırılması və idarə edilməsi modelləri;*
5. *Ehtiyatların optimal idarə edilməsi modelləri;*
6. *Kütləvi xidmət modelləri;*
7. *Korrelyasiya və reqressiya təhlili modelləri;*
8. *Tələb və təklifin bazar tarazlığı modelləri;*
9. *İqtisadi qeyri-müəyyənlik və risk şəraitində optimal qərarların qəbulu modelləri (iqtisadiyyatın oyun modelləri) və s.*

Zaman faktorunu əks etdirmə səviyyəsinə görə iqtisadi-riyazi modellər *statik və dinamik modellərə* ayrılırlar.

Statik modellərdə iqtisadi sistemlərə xas olan bütün asılılıqlar qeyd edilmiş müəyyən bir dövrə aid olur. Dinamik modellərdə isə iqtisadi sistemin zamana görə dəyişməsi (inkişafı) təhlil edilir. Belə modellərdə inkişafa zamanın törəməsi kimi baxılır.

Alınacaq həllin qarşısına qoyulan tələblər baxımından (daha doğrusu təyinatlarına görə) iqtisadi-riyazi modellər *balans modellərinə, optimallaşdırma modellərinə və imitasiya modellərinə* ayrılırlar.

İqtisadi sistemlərdə mövcud olan qeyri-müəyyənliklərin nəzərə alınması səviyyəsinə görə iqtisadi-riyazi modellər *determinik və stoxastik modellərə* ayrılırlar.

Öyrənilən iqtisadi sistemlərə yanaşmanın xarakterinə görə isə iqtisadi-riyazi modelləri *diskreptiv və normativ modellərə* ayırmaq olar. Diskreptiv modellər «Bu necə baş verir? Bu gələcəkdə necə inkişaf edəcək?» suallarına cavab verir. Normativ modellər isə «Bu necə olmalıdır?» sualını cavablandırır.

İqtisadi-riyazi modelləri başqa əlamətlərə görə də təsnifata ayırmaq olar. Lakin təsnifləşdirmə əlamətlərindən asılı olmayaraq bütün iqtisadi-riyazi modellərin obyekti, predmeti və məqsədi dəyişməz qalır. Onların obyekti – mürəkkəb, dinamik, stoxastik xarakterli iqtisadi sistemlər, predmeti – bu sistemlər və onların elementləri arasında obyektiv olaraq mövcud olan kəmiyyət asılılıqlarıdır. Iqtisadi-riyazi modellərin məqsədi isə iqtisadi sistemlərin qarşıya qoyulmuş məqsəd baxımından səmərəli davranışını və ya inkişafını təmin edəcək optimal idarəetmə strategiyaları qurmaqdır.

1.2. İqtisadi proseslərin riyazi modellərinin qurulmasına aid nümunələr

İndi isə müxtəlif təyinatlı iqtisadi sistemlər üzrə optimal idarəetmə qərarlarının qəbulunu təmin edəcək konkret iqtisadi-riyazi modellərin qurulmasına aid nümunələrə baxaq.

►**Məsələ 1.1.** Yeni yol qovşağı tikmək üçün 1500 m^3 -lik bünövrə qazılmalıdır. Tikinti işlərində 3 ədəd ekskovatordan istifadə edilir. 1-ci ekskovator 1 saatda 30,2 m^3 torpaq qaza bilir və bu işə 12 litr yanacaq sərf edir. İkinci ekskovatorun məhsuldarlığı 26,4 m^3/saat, yanacaq sərfi 10 litr, ücüncü ekskovatorun məhsuldarlığı 32,5 m^3/ saat, yanacaq sərfi isə 15 litrdir. Ekskovatorlar bir-birinə mane olmadan eyni

zamanda işləyə bilirlər. Qazıntı işinə ayrılmış yanacaq ehtiyatı məhduddur və 540 litr təşkil edir. Ekskovatorlar üçün elə bir iş rejimi seçmək lazımdır ki, bünövrəni minimum vaxta qazmaq mümkün olsun.

Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini qurmaq üçün aşağıdakı endogen parametrlərdən istifadə edək:

x_1 – bünövrənin qazılması müddətində 1-ci ekskovatorun iş vaxtı;

x_2 – bünövrənin qazılması müddətində 2-ci ekskovatorun iş vaxtı;

x_3 – bünövrənin qazılması müddətində 3-cü ekskovatorun iş vaxtı;

x_4 – bünövrənin qazılması müddətidir.

Hər bir ekskovatorun məhsuldarlığı məlum olduğu üçün asanlıqla müəyyən etmək olar ki, bünövrənin qazılma müddətində görülən torpaq işlərinin həcmi

$$30{,}2x_1 + 26{,}4x_2 + 32{,}5x_3$$

m^3 təşkil edəcəkdir. Məsələnin şərtinə görə bu kəmiyyət 1500 m^3 – ə bərabər olmalıdır, yəni:

$$30{,}2x_1 + 26{,}4x_2 + 32{,}5x_3 = 1500$$

Hər bir ekskovatorun yanacaq sərfi norması məlum olduğu üçün onların sərf edəcəkləri yanacağın ümumi miqdarını hesablaya bilərik:

$$12x_1 + 10x_2 + 15x_3$$

Yanacaq ehtiyatı 540 litr təşkil etdiyi üçün, təbii ki bu kəmiyyət 540 litrdən çox ola bilməz, yəni:

$$12x_1 + 10x_2 + 15x_3 \le 540$$

Şərtə görə bünövrənin qazılma müddəti x_4 saat təşkil edir. Onda aydındır ki, ayrı-ayrı ekskovatorların işlədiyi saatların sayı x_4 – dən çox ola bilməz, yəni:

$$x_1 \le x_4$$

$$x_2 \le x_4$$

$$x_3 \le x_4$$

şərtləri ödənməlidir.

Məqsədimiz bünövrənin qazılma müddətini minimum etmək olduğu üçün

$$Z(x) = x_4 \to \min$$

olmalıdır. Beləliklə, yuxarıdakı mülahizələrə əsaslanaraq, baxılan məsələnin aşağıdakı iqtisadi-riyazi modelini alırıq:

$$Z(x) = x_4 \to \min \qquad (1.1)$$

$$\begin{cases} 30{,}2x_1 + 26{,}4x_2 + 32{,}5x_3 = 1500 \\ 12x_1 + 10x_2 + 15x_3 \le 540 \\ x_1 \le x_4 \\ x_2 \le x_4 \\ x_3 \le x_4 \end{cases} \qquad (1.2)$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0 \qquad (1.3)$$

Göründüyü kimi, aldığımız (1.1)-(1.3) modeli riyazi aparatına görə xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsi şəklində ifadə edilmiş xətti model, konkret təyinatına görə optimallaşdırma modeli, ölçüsünə görə mikromodel, parametrlərinin dəqiqliyi baxımından determinik model, zaman faktorunu əhatə etmə dərəcəsinə görə isə statik modeldir.◄

►**Məsələ 1.2.** İnvestorun 100.000 manat vəsaiti vardır və o bu vəsaiti səmərəli şəkildə yerləşdirmək istəyir. İnvestisiya qoyuluşu üçün 6 obyekt seçilə bilər. Bu potensial investisiya obyektlərinin xarakteristikaları aşağıdakı cədvəldə əks etdirilmişdir.

Potensial investisiya obyektləri	**Gəlirlilik %**	**Ödəmə müddəti (il)**	**Etibarlılıq (balla)**
1	6,5	2011	5
2	7,0	2015	4
3	8,0	2013	2
4	7,5	2012	3
5	5,5	2010	5
6	5,5	2020	4

İnvestor aktivlərin yerləşdirilməsi haqqında qərar qəbul edən zaman nəzərə almalıdır ki, bir obyektə qoyulan vəsait bütün investisiya məbləğinin 25%-dən çox ola bilməz, bütün vəsaitin yarıdan çoxu uzunmüddətli aktivlərə (tutaq ki, 2014-cü ildən sonra ödənəcək aktivlərə) qoyulmalıdır və nəhayət, etibarlılığı 4 baldan aşağı olan aktivlərə qoyulacaq vəsaitin payı bütün vəsaitin üçdə birindən çox olmamalıdır. Bu şərtlər daxilində investor üçün kapitalının yerləşdirilməsi ilə əlaqədar (aktivlər portfeli üçün) elə bir strategiya

hazırlamaq lazımdır ki, həmin strategiyaya görə onun əldə edəcəyi məcmu mənfəət maksimum olsun.

Aktivlər portfelinin idarə edilməsi məsələsi adlanan bu məsələnin iqtisadi-riyazi modelini tərtib etmək üçün aşağıdakı endogen parametrlərdən istifadə edək:

x_1 – 1-ci firmaya qoyulacaq vəsaitin miqdarı;

x_2 – 2-ci firmaya qoyulacaq vəsaitin miqdarı;

x_3 – 3-cü firmaya qoyulacaq vəsaitin miqdarı;

x_4 – 4-cü firmaya qoyulacaq vəsaitin miqdarı;

x_5 – 5-ci firmaya qoyulacaq vəsaitin miqdarı;

x_6 – 6-cı firmaya qoyulacaq vəsaitin miqdarı.

Onda investorun aktivlərinin məcmu həcmi üzrə

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 100000$$

şərti ödənməlidir.

Şərtə görə hər bir firmaya ən çoxu 25.000 manat investisiya qoyula bilər, yəni:

$$x_1 \le 25.000, x_2 \le 25.000, x_3 \le 25.000, x_4 \le 25.000, x_5 \le 25.000, x_6 \le 25.000$$

şərtləri ödənməlidir.

Şərtə görə investor ən azı 50.000 manat vəsaiti uzunmüddətli aktivlər şəklində yerləşdirməlidir. Cədvəldən göründüyü kimi, bu firmalar 2-ci və 6-cı firmalardır. Odur ki, alırıq:

$$x_2 + x_6 \ge 50.000$$

Şərtə görə 2-ci və 3-cü firmaların etibarlılıq göstəriciləri qoyulmuş normativdən aşağıdır. Odur ki, bu firmalara yerləşdiriləcək aktivlərin məbləği 33.000 manatdan çox ola bilməz, yəni:

$$x_3 + x_4 \le 33.000$$

Beləliklə, biz qoyulmuş məsələnin məhdudiyyətlər şərtlərini formalaşdırdıq. İndi isə məqsəd funksiyasını formalaşdıraq. Qarşıya qoyulmuş məqsədə görə investorun məcmu mənfəəti maksimum olmalıdır. Odur ki, hər bir potensial investisiya obyekti üzrə vəsaitin gəlirlilik göstəricisinə əsaslanaraq aşağıdakı məqsəd funksiyasını yaza bilərik:

$$Z(X) = 0{,}065x_1 + 0{,}07x_2 + 0{,}08x_3 + 0{,}075x_4 + 0{,}055x_5 + 0{,}055x_6 \to \max$$

Beləliklə, modelin qurulmasında istifadə etdiyimiz endogen parametrlərin qeyri-mənfiliyi şərtini də nəzərə alsaq, onda baxılan məsələnin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı kimi alınacaqdır:

$$Z(x) = 0{,}065x_1 + 0{,}07x_2 + 0{,}08x_3 + 0{,}075x_4 +$$
$$+ 0{,}055x_5 + 0{,}055x_6 \to \max \qquad (1.4)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 100000 \\ x_2 + x_6 \geq 50000 \\ x_3 + x_4 \leq 33000 \\ x_1 \leq 25000 \\ x_2 \leq 25000 \\ x_3 \leq 25000 \\ x_4 \leq 25000 \\ x_5 \leq 25000 \\ x_6 \leq 25000 \end{cases} \qquad (1.5)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0 \qquad (1.6)$$

Göründüyü kimi, alınmış (1.4)-(1.6) modeli də xətti optimallaşdırma modelidir.◄

►**Məsələ 1.3.** Aqrofirmanın m sayda $S_1, S_2, ..., S_m$ əkin sahəsi vardır. Əkin sahələri bir-birindən ya yerləşdiyi ərazi ilə, ya da torpağın xarakteri ilə fərqlənir. Bu əkin sahələrindən hər birində n sayda $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ kənd təsərrüfatı bitkisi əkilə bilər. Ayrı-ayrı əkin sahələrində bu kənd təsərrüfatı bitkilərinin məhsuldarlığını əks etdirən a_{ij} kəmiyyətləri ekzogen təbiətli hesab edilir və aşağıdakı məhsuldarlıq matrisi ilə verilir:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Əkin sahələrinin əraziləri uyğun olaraq $a_1, a_2, ..., a_m$ hektardır. Aqrofirma j nömrəli kənd təsərrüfatı bitkisi üzrə b_j qədər məhsul əldə etmək istəyir. Q_j kənd təsərrüfatı bitkisinin bazarda satış qiymətinin c_j manat olacağı gözlənilir. Əkin sahələrini kənd təsərrüfatı bitkiləri

arasında elə bölüşdürmək lazımdır ki, aqrofirmanın məhsulların satışından əldə edəcəyi gəliri maksimum olsun.

Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini quraq.

Fərz edək ki, aqrofirmada Q_j kənd təsərrüfatı bitkisi üçün S_i – ci əkin sahəsində x_{ij} hektar ərazi ayrılacaqdır. Deməli, aqrofirmada əkin sahəsinin kənd təsərrüfatı bitkiləri arasında bölüşdürülməsi strategiyası aşağıdakı matris şəklində axtarılacaqdır:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Onda məsələnin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı şəkildə alınacaqdır:

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} \to \max \qquad (1.7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = \overline{1,m}) \qquad (1.8)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} \geq b_j \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad (1.9)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}) \qquad (1.10)$$

Modelin məqsəd funksiyası olan (1.7) aqrofirmanın istehsal ediləcək bütün kənd təsərrüfatı məhsullarının satışından əldə edəcəyi məcmu gəlirin maksimum olmasını nəzərdə tutur.

(1.8) xətti tənliklər sistemi hər bir əkin sahəsinin ərazisinin məhdud olduğunu göstərir və bu ərazidən tam istifadəni təmin edir.

(1.9) xətti bərabərsizliklər sistemi hər bir kənd təsərrüfatı bitkisi üzrə istehsal tapşırığının ən azı nəzərdə tutulan həcmdə yerinə yetirilməsini təmin edir.

(1.10) xətti bərabərsizliklər sistemi isə modelin endogen parametrlərinin mənfi olmaması şərtləridir.◄

Mövzu üzrə praktikum

Məsələ 1.4. İnvestor 400000 man. vəsaitə üç sirkətin səhmlərini almaq istəyir. Aparılmış tədqiqatlar göstərir ki, F_1 firmasının səhmlərinin gəlirliliyi ildə 14% təşkil edir. F_2 və F_3 firmaları üzrə bu göstərici 11% və 22% -dir. İnvestor F_3 firmasının səhmlərinin alınmasını böyük riskə malik əməliyyat hesab edir. Odur ki, investor özünü mümkün risklərdən sığortalamaq üçün bu firmanın səhmlərinə F_1 və F_2 firmalarının səhmlərinə sərf etdiyi vəsaitin 15%-dən çox pul xərcləmək istəmir. F_2 firmasının fəaliyyətinə isə bazarda yüksək etibarlılığa malik olan bir hal kimi yanaşılır. Odur ki, investor özünün məcmu vəsaitinin ən azı 10%-nə bu firmanın səhmlərini almağı qərarlaşdırıb. İnvestor üçün elə bir investisiya strategiyası tərtib edin ki, bu strategiyaya görə onun illik gəliri maksimum olsun.

Məsələ 1.5. Çörək zavodu əsas məhsul olan çörəklə yanaşı həm də iki növ unun-ağ və kəpəkli (qara) unun qatışığından qida əlavəsi istehsal edir. Qida əlavəsinin istehsal həcmi 800 kq-dan az olmamalıdır. Mövcud texnoloji normalara görə qida əlavəsində 25% zülal və 4% birləşdirici maddə olmalıdır. 1kq ağ unda 0,04 kq zülal və 0,01 kq birləşdirici maddə vardır. 1 kq kəpəkli unda isə 0,3 kq zülal və 0,03 kq birləşdirici maddə vardır. 1 kq ağ unun satış qiyməti 2 man, 1 kq kəpəkli unun satış qiyməti isə 3 manatdır. Qarışığın tərkibində hər növ undan nə qədər olmalıdır ki, qida əlavəsi diyetik baxımdan normativə uyğun olsun və dəyəri minimum olsun?

Məsələ 1.6. Şəhərin dəmiryol vağzalından sürət qatarları və sərnişin qatarları yola salınır. Dəmiryolu qovşağı deposunun sərnişin tutumu və vaqonların sayı haqqında məlumatlar aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

Vaqonun tipi		**Yük vaqonu**	**Poçt vaqonu**	**Plaskart vaqon**	**Kupeli vaqon**	**Yataq vaqonu**
Qatarda vaqonların sayı	**Sürət qatarı**	1	1	8	4	1
	Sərnişin qatarı	1	0	5	6	3
Sərnişin tutumu				58	40	32
Depoda vaqonların sayı		14	8	90	80	30

Dəmiryol vağzalı hər gün neçə sürət qatarı və neçə sərnişin qatarı yola salmalıdır ki, maksimal sayda sərnişin daşınmasını təmin etsin?

Məsələ 1.7. **"**Nuş olsun" restoranı səhər saat 8^{00} – dan axşam saat 22^{00} – a qədər müştərilərə xidmət edir. Restoranın işçi heyətinin bir hissəsi işə səhər saat 7^{00} – da gəlib, hazırlıq işləri görməlidir. İşçilərin digər hissəsi isə restoran bağlandıqdan sonra daha bir saat işdə qalaraq yır-yığış edirlər. Beləliklə, işçi heyətinin real iş günü saat 7^{00} – dan saat 23^{00} – a qədər davam edir.

Restoran daimi işçilərlə yanaşı, saat hesabı ödəniş qaydasında tələbələri də xidmət üçün işə cəlb edə bilər.

Əlavə işçilər 4 saatlıq iş vaxtı hesabı ilə işə götürülür və onlara bir iş gününə görə 10 man əmək haqqı verilir. Daimi işçilərə isə 8 saatlıq iş gününə görə 20 man əmək haqqı verilir. İşçi heyətini idarə edən menecerin fikrinə görə restoranda hər an ən azı 1 nəfər daimi işçi olmalıdır. Onun fikrinə görə hər növbə ərzində 3 nəfərdən artıq daimi işçinin işdə olması məqsədəuyğun deyil.

İşçi heyətinin idarə edilməsi xidmətinin apardığı araşdırmalar nəticəsində iş günü 8 növbəyə bölünərək, müxtəlif növbələrdə işçilərin optimal sayı müəyyən edilmişdir (cədvəl 1.1):

Növbələr	1	2	3	4	5	6	7	8
Vaxt	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23
Tələb edilən işçilərin sayı	5	10	22	16	12	20	17	6

Restoran üçün optimal ştat cədvəli tərtib edin. Daha doğrusu, hər növbəyə neçə daimi işçi və neçə əlavə işçi təyin edilməlidir ki, müştərilərə səmərəli xidməti minimal əmək haqqı məsrəfləri ilə təmin etmək mümkün olsun?

Mövzu üzrə testlər

1. İqtisadi-riyazi model dedikdə:
A) İqtisadi sistemin xüsusiyyətlərinin cədvəllər, diaqramlar, sxemlər şəklində təsviri başa düşülür;
B) İqtisadi sistemin qarşıya qoyulmuş məqsəd baxımından mühüm xüsusiyyətlərinin formal-riyazi təsviri başa düşülür;
C) İqtisadi sistemin girişlərinin riyazi təsviri başa düşülür;
D) İqtisadi sistemin çıxışlarının riyazi təsviri başa düşülür;
E) İqtisadi sistemlər haqqında mövcud biliklər başa düşülür.

2. İqtisadi-riyazi modellərin ekzogen parametrləri dedikdə:
A) Qiymətləri modeldən kənarda hesablanan və modelə hazır şəkildə daxil edilən parametrlər başa düşülür;
B) Qiymətləri model həll edildikdən sonra müəyyən edilən parametrlər başa düşülür;
C) Təsadüfi qiymətlərə malik olan parametrlər başa düşülür;
D) Determinik qiymətlərə malik olan parametrlər başa düşülür;
E) Ehtimallı qiymətlərə malik olan parametrlər başa düşülür.

3. İqtisadi-riyazi modellərin endogen parametrləri dedikdə:
A) Qiymətləri modeldən kənarda hesablanan və modelə hazır şəkildə daxil edilən parametrlər başa düşülür;
B) Qiymətləri model həll edildikdən sonra müəyyən edilən parametrlər başa düşülür;
C) Təsadüfi qiymətlərə malik olan parametrlər başa düşülür;
D) Determinik qiymətlərə malik olan parametrlər başa düşülür;
E) Ehtimallı qiymətlərə malik olan parametrlər başa düşülür.

4. İqtisadi-riyazi modelin adekvatlığı dedikdə:
A) Modelin iqtisadi sistemə tam uyğunluğu başa düşülür;
B) Modelin həll metodunun mövcud olması başa düşülür;
C) Modelin iqtisadi sistemə tədqiqat baxımından vacib olan xüsusiyyətlərə görə uyğun olması başa düşülür;
D) Modelin şərtlərinin ziddiyətli olmaması başa düşülür;
E) Modelin şərtlərinin ziddiyətli olması başa düşülür.

5. Aşağıdakı əməliyyatlardan hansılarını modelləşdirmə prosesinin mərhələləri hesab etmək olmaz?
A) Modelin qurulması;
B) Model eksperimentlərinin aparılması;
C) Biliklərin modeldən obyekti ötürülməsi;
D) Model vasitəsi ilə alınmış biliklərin yoxlanması və istifadəsi;
E) İdarəetmə məsələsinin formalaşdırılması və məqsədin seçilməsi.

6. Modelləşdirmənin dövrü proses olması dedikdə:

A) 4 mərhələli 1-ci dövrün arxasınca 2-ci, 3-cü və s. dövrlərin təkrar oluna bilməsi başa düşülür;
B) Hər bir mərhələnin ən azı 2 dəfə təkrarlanması başa düşülür;
C) Modeldə iştirak edən parametrlərin fasiləsiz dövrü əlaqəsi başa düşülür;
D) Modeldə iştirak edən parametrlərin diskret dövrü əlaqəsi başa düşülür;
E) Modeldə iştirak edən parametrlərin zamandan asılı olması başa duşulur.

7. İqtisadi sistemin sistemli şəkildə təhlilinə 3 mərhələli proses kimi baxılır:

1.Məsələnin qoyuluşu, məqsədlərin və qiymətləndirmə kriteriyalarının müəyyən edilməsi;
2.Öyrənilən sistemin təhlili;
3.Sistemin inkişaf konsepsiyasının yaradılması və mümkün həll variantlarının hazırlanması.

Bazar iqtisadiyyatı şəraitində bu mərhələlərdən hansılarını iqtisadi-riyazi üsullardan və modellərdən istifadə etmədən reallaşdırmaq obyektiv olaraq mümkün deyildir?

A) 1,2 və 3
B) 1 və 2
C) 1 və 3
D) 2 və 3
E) 1

8. İqtisadi-riyazi modellərin statik və dinamik modellərə ayrılışı hansı təsnifat əlamətinə uyğun gəlir?

A) Qeyri-müəyyənlik faktorunun nəzərə alınmasına görə;
B) Riyazi apparatın xarakterinə görə;
C) Zaman amilinin nəzərə almasına görə;
D) Obyektlərin aqreqasiyası səviyyəsinə görə;
E) Ümumi məqsədli təyinatına görə.

9. İqtisadi-riyazi modellərin determinik və stoxastik modellərə ayrılışı hansı təsnifat əlamətinə uyğun gəlir?

A) Qeyri-müəyyənlik faktorunun nəzərə alınmasına görə;
B) Riyazi apparatın xarakterinə görə;
C) Zaman faktorunu nəzərə almasına görə;
D) Obyektlərin aqreqasiyasına görə;
E) Ümumi məqsədli təyinatına görə.

10. Aşağıdakı modellərdən hansıları iqtisadi-riyazi modellərin konkret təyinatına görə təsnifat qrupuna aid edilə bilər:

Balans modelləri;
Optimallaşdırma modelləri;

İmitasiya modelləri;
Dinamik modellər;

A) 1 və 2;
B) 1,2 və 3;
C) 1 və 4;
D) 2,3 və 4;
E) 3 və 4.

11.Hansı təsnifat əlamətinə görə modellər makro, lokal və mikro modellərə ayrılır?

A) Zaman faktoruna görə;
B) Ölçülərinə görə;
C) Parametrlərin sayına görə;
D) Təyinatına görə;
E) Adekvatlıq dərəcəsinə görə.

12. Aşağıdakılardan hansıları iqtisadi-riyazi modellərin qurulması prinsipləri hesab edilə bilər:

A)Modelin öyrənilən sistemə kafi adekvatlığı və riyazi aparatın kifayət qədər sadəliyi;
B) Parametrlərin sayının çox olması və xətti olması;
C) Parametrlərin sayının az olması və xətti olması;
D) Parametrlərin ekzogen xarakterdə olması və xətti olması;
E) Parametrlərin endogen xarakterdə olması və xətti olması.

13.Modelin optimallıq kriteriyası dedikdə:

A) Endogen parametrlərin riyazi ifadəsi başa düşülür;
B) Ekzogen parametrlərin riyazi ifadəsi başa düşülür;
C) Qarşıya qoyulmuş məqsədin riyazi ifadəsi başa düşülür;
D) Modelin həll alqoritminin riyazi ifadəsi başa düşülür;
E) Modelin qurulması mərhələlərinin riyazi ifadəsi başa düşülür.

14. Çoxkriteriyalı model nədir?

A) Müxtəlif məhdudiyyət şərtlərinə görə eyni bir məqsəd funksiyasının ekstremumunun tapılması;
B) Eyni bir məhdudiyyət şərtlərinə görə müxtəlif məqsəd funksiyalarının ekstremumlarının tapılması;
C) Müxtəlif modellərin eyni bir həll metodu üzrə həll olunması;
D) Eyni bir modelin müxtəlif metodlarla həll olunması;
E) Modelin məqsəd funksiyası ilə məhdudiyyət şərtlərinin eyni riyazi xarakter daşımaması.

15. Birkriteriyalı model nədir?

A) Modeldə optimallaşdırmanın yalnız bir məqsəd funksiyasına görə aparılması;
B) Modeldə optimallaşdırmanın yalnız xətti məqsəd funksiyasına görə aparılması;
C) Modeldə optimallaşdırmanın yalnız qeyri-xətti məqsəd funksiyasına görə aparılması;
D) Modeldə optimallaşdırmanın yalnız xətti məhdudiyyətlər sisteminə görə aparılması;
E) Modeldə optimiallaşdırmanın yalnız qeyri-xətti məhdudiyyətlər sisteminə görə aparılması.

16. Modellərin parametrlərinin ekzogen və endogen parametrlərə ayrılması nə ilə əlaqədardır?

A) Onların qiymətlərinin bir-birindən asılılığı ilə;
B) Onların qiymətlərinin determiniklik dərəcəsi ilə;
C) Onların qiymətlərinin modeldən kənarda və ya modelin daxilində müəyyən edilməsi ilə;
D) Onların qiymətlərinin ehtimallılıq dərəcəsi ilə;
E) Onların qiymətlərinin məqsəd funksiyasına təsir dərəcəsi ilə.

17. «İqtisadi-riyazi model – iqtisadi sistemin sadələşdirilmiş təsviridir» dedikdə nə başa düşülür?

A) İqtisadi sistemin determinik xarakterli xüsusiyyətlərinin saxlanması, ehtimallı xarakterli xüsusiyyətlərinin isə atılması;
B) İqtisadi sistemin ehtimallı xarakterli xüsusiyyətlərinin saxlanması, determinik xarakterli xüsusiyyətlərinin isə atılması;
C) İqtisadi sistemin tədqiqatın məqsədi baxımından mühüm xüsusiyyətlərinin saxlanması, qeyri-mühümlərin isə atılması;
D) İqtisadi sistemin xətti xarakter daşıyan xüsusiyyətlərinin saxlanması, qeyri-xətti xarakter daşıyan xüsusiyyətlərinin isə atılması;
E) İqtisadi sistemin qeyri-xətti xarakter daşıyan xüsusiyyətlərinin saxlanması, xətti xarakter daşıyan xüsusiyyətlərinin isə atılması.

I BÖLMƏ
RİYAZİ PROQRAMLAŞDIRMA

- **Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin qoyuluşu;**
- **Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həll üsulları;**
- **Xətti proqramlaşdırmada qoşmalıq;**
- **Xətti proqramlaşdırmanın nəqliyyat məsələsi;**
- **Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsi;**
- **Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsi;**
- **Parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsi;**
- **Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsi.**

FƏSİL 2

XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMANIN ƏSAS MƏSƏLƏSİNİN QOYULUŞU

2.1.Xətti cəbrin elementləri

Tərif: *n* ***sayda*** $x_1, x_2, ...x_n$ ***həqiqi ədədlərin nizamlı düzülüşünə*** *n* ***ölçülü vektor deyilir*** və $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ kimi göstərilir. Burada $x_1, x_2, ..., x_n$ - *vektorun komponentləri və ya koordinatları* adlanır. Vektorun komponentlərinin sayı onun ölçüsünü müəyyən edir. Bütün koordinatları sıfır olan vektor ***sıfır vektoru*** adlanır. Misallara baxaq:

$X = (30,\ 50)$ - iki ölçülü vektor;

$X = (40,\ 20,\ 0,\ ,-5,\ 60) - 5$ ölçülü vektor;

$X = (0,\ 0,\ ...,\ 0) -$ sıfır vektoru.

Bütün *n* ölçülü vektorlar çoxluğu $R^{\{n\}} - n$ ölçülü vektorlar fəzasını əmələ gətirir.

Tutaq ki, *n* ölçülü vektorlar fəzasında *X* və *Y* vektorları verilmişdir. İki vektorun cəmi (fərqi) dedikdə elə bir üçüncü vektor başa düşülür ki, bu vektorun hər bir komponenti həmin vektorların uyğun komponentlərinin cəmi (fərqi) kimi hesablansın. Yəni

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

və

$$Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

olarsa, onda

$$Z = X \pm Y = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, ..., x_n \pm y_n)$$

Məsələn, əgər

$$X = (6,\ 4,\ 7); \qquad Y = (8,\ 3,\ 0)$$

olarsa, bu vektorlar üçün alırıq:

$$X + Y = (6+8,\ 4+3,\ 7+0) = (14,\ 7,\ 7)$$

$$X - Y = (6-8,\ 4-3,\ 7-0) = (-2,\ 1,\ 7)$$

İki vektorun skalyar hasili dedikdə isə bu vektorların uyğun komponentlərinin hasillərinin cəbri cəmi kimi hesablanan sonlu ədəd başa düşülür.

$$Z = X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

Məsələn, yuxarıdakı X və Y vektorları üçün alırıq;

$$Z = X \cdot Y = 6 \cdot 8 + 4 \cdot 3 + 7 \cdot 0 = 48 + 12 = 60$$

Fərz edək ki, n ölçülü vektorlar fəzasında X_1, X_2 və Y vektorları verilmişdir. Əgər,

$$\left.\begin{array}{l} Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 \\ \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \beta_1 \geq 0, \ \ \beta_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

şərtlərini ödəyən β_1 və β_2 həqiqi ədədlər mövcuddursa, onda Y vektoruna X_1 və X_2 vektorlarının ***qabarıq xətti kombinasiyası*** deyilir.

Tərif: Çoxluq üzərində götürülmüş istənilən iki nöqtənin qabarıq xətti kombinasiyası tamamilə həmin çoxluğa daxildirsə, onda belə çoxluq qabarıq çoxluqdur.

İki nöqtənin qabarıq xətti kombinasiyası həndəsi olaraq həmin nöqtələri birləşdirən düz xətt parçasını verir. Odur ki, qabarıq çoxluqlara aşağıdakı kimi də tərif vermək olar:

Tərif: Çoxluq üzərində götürülmüş ixtiyarı iki nöqtəni birləşdirən düz xətt parçası tamamilə həmin çoxluq üzərindədirsə, onda belə çoxluq qabarıq çoxluqdur.

İki və daha artıq qabarıq çoxluğun ortaq elementlərindən düzəldilmiş çoxluğa bu çoxluqların kəsişməsi və ya hasili deyilir. Məsələn

$$A = \{3,7,6,8\}$$

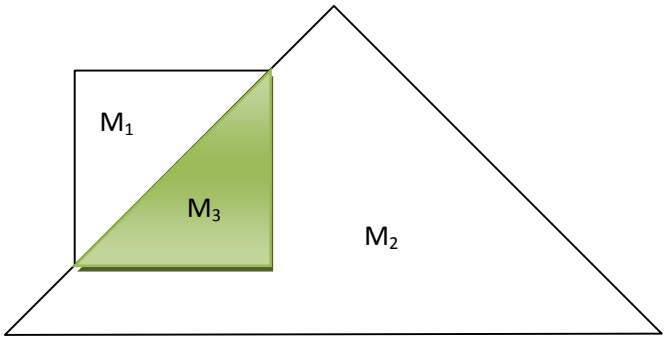
$$B = \{7,9,3\}$$

çoxluqları verilmişdirsə, onda onların kəsişməsi $C = \{3,7\}$ çoxluğunu verəcəkdir.

Əgər çoxluqların heç bir ortaq elementi yoxdursa, onda belə çoxluqların kəsişməsi boş çoxluq verir.

Teorem: İki və daha artıq qabarıq çoxluğun kəsişməsi həmişə qabarıq çoxluq verir.

Bu teoremə görə M_1 və M_2 çoxluqları qabarıq çoxluqlardırsa, onda onların kəsişməsi olan M_3 çoxluğu da həmişə qabarıq çoxluqdur (Şəkil 2.1).



Şəkil 2.1.

Əgər qabarıq çoxluğun hər hansı bir nöqtəsini onun digər nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyası kimi göstərmək mümkün deyilsə, onda belə nöqtəyə qabarıq çoxluğun təpə nöqtəsi deyilir.

İndi isə xətti cəbrin Jordan Əvəzetmələrini nəzərdən keçirək.

Tutaq ki, aşağıdakı xətti tənliklər sistemi verilmişdir:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_r = a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rs}x_s + \ldots + a_{rn}x_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{ms}x_s + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases} \qquad (2.1)$$

Burada $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sərbəst dəyişənlər, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ asılı dəyişənlər, a_{ij} - isə verilmiş sabit kəmiyyətlərdir. (2.1) sistemini cədvəl formasında göstərək. Bu məqsədlə asılı dəyişənləri cədvəlin sol tərəfində, sərbəst dəyişənləri cədvəlin yuxarısında yerləşdirək və a_{ij} əmsallarını i -ci sətirlə j -cu sütunun kəsişməsində əks etdirək:

	x_1	$\ldots$	x_s	$\ldots$	x_n
$y_1 =$	a_{11}	$\ldots$	a_{1s}	$\ldots$	a_{1n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$		$\ldots$	$\ldots$
$y_r =$	a_{r1}	$\ldots$	a_{rs}	$\ldots$	a_{rn}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots.$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$y_m =$	a_{m1}	$\ldots$	a_{ms}	$\ldots$	a_{mn}

(2.1)

Tutaq ki, müəyyən məqsədlər üçün (2.1) cədvəli ilə verilmiş xətti tənliklər sistemində asılı dəyişənlərdən birini sərbəst dəyişənlərdən biri ilə əvəz etmək lazımdır.

Fərz edək ki, y_r asılı dəyişən x_s sərbəst dəyişənlə əvəz edilir. Onda $r-$ci sətir əsas sətir, $s-$ ci sütun əsas sütun, onların kəsişməsində yerləşən a_{rs} elementi isə əsas element olacaqdır.

(2.1) cədvəli üzərində uyğun əvəzetmə aparıldıqdan sonra bu sistem aşağıdakı şəklə düşəcəkdir:

	x_1	...	y_r	...	x_n	
$y_1 =$	b_{11}	...	a_{1s}	...	b_{1n}	
...	...	...	...	...	...	
$x_s =$	$-a_{r1}$	...	1	...	$-a_{rn}$	$:a_{rs}$
...	...	....	...	...	...	
$y_m =$	b_{m1}	...	a_{ms}	...	b_{mn}	

(2.2)

(2.2) cədvəlində (2.1) cədvəlindəki x_s sərbəst dəyişən asılı dəyişən olmuş, y_r asılı dəyişən isə sərbəst dəyişənə çevrilmişdir. (2.1) sistemindən (2.2) sisteminə keçid Adi Jordan Əvəzetmələrinin (əvəzetməsinin) bir addımı ilə aparılmışdır. Xətti tənliklər sistemində asılı dəyişənlərdən birini sərbəst dəyişənlərin biri ilə əvəz etməyə xidmət edən Adi Jordan Əvəzetmələrinin bir addımı aşağıdakı beş mərhələdən ibarətdir:

1) əsas element vahidlə əvəz edilir;

2) əsas sətirin qalan elementləri öz işarələrini dəyişir;

3) əsas sütunun qalan elementləri olduğu kimi qalır;

4)əsas sətirə və əsas sütuna daxil olmayan elementlərin yeni qiymətləri çarpaz vurma qaydası ilə tapılır, yəni:

$$b_{ij} = a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{is} \cdot a_{rj} \qquad (i \neq r, j \neq s),$$

burada a_{rs} *-əsas elementdir.*

5) yeni cədvəlin bütün elementləri əsas elementə bölünür.

Bəzən praktik hesablamalar zamanı əsas sətirin işarəsini olduğu kimi saxlamaq sərfəli olur. Bu halda müvafiq əvəzetməni aparmaq üçün Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetməsi addımlarından istifadə edilir. Xətti tənliklər sistemində asılı dəyişənlərdən birini sərbəst dəyişənlərdən biri

ilə əvəz edən Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetməsinin bir addımı da beş mərhələdən ibarətdir:

1),4) və 5)-ci mərhələlər yuxarıdakı mərhələrlə eynidir;

2) əsas sətirin qalan elementləri olduğu kimi qalır;

3) əsas sütunun qalan elementləri öz işarələrini dəyişir.

Jordan əvəzetmələrindən xətti cəbrdə tərs matrislərin qurulması, matrisin ranqının hesablanması və tənliklər sistemlərinin həll edilməsi məqsədi ilə istifadə edilir.

►**Məsələ 2.1.** Xətti tənliklər sisteminin Jordan əvəzetmələrinin köməyi ilə həllinə aid misala baxaq. Fərz edək ki, aşağıdakı xətti tənliklər sistemi verilmişdir:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Əvvəlcə bu sistemi «0 tənlikləri» sistemi şəklində göstərək:

$$\begin{cases} 0 = x_1 + x_2 + 2x_3 - 9 \\ 0 = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3 \\ 0 = 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2 \end{cases}$$

İndi isə sistemi cədvəl formasında təsvir edək.

	x_1	x_2	x_3	1
$0 =$	1	1	2	-9
$0 =$	-2	1	1	-3
$0 =$	3	-2	1	-2

Adi Jordan əvəzetmələrinin köməyi ilə cədvəlin solunda yerləşmiş 0-rı ardıcıl olaraq cədvəlin yuxarısına keçirək və hər dəfə yuxarı kecmiş 0-a uyğun gələn sütunu silək:

	x_1	x_2	x_3	1
$0 =$	$\langle 1 \rangle$	1	2	-9
$0 =$	-2	1	1	-3
$0 =$	3	-2	1	-2

	0	x_2	x_3	1
$x_1 =$	1	-1	-2	9
$0 =$	-2	$\langle 3 \rangle$	5	-21
$0 =$	3	-5	-5	25

	0	x_3	
$x_1 =$	-1	-1	6
$x_2 =$	1	-5	21
$0 =$	-1	10	-30

$: (3)$

	x_3	1
$x_1 =$	$-1/3$	2
$x_2 =$	$-5/3$	7
$0 =$	$\langle 10/3 \rangle$	-10

	0	1
$x_1 =$	$-1/3$	$10/3$
$x_2 =$	$-5/3$	$20/3$
$x_3 =$	1	10

$: (10/3)$

	1
$x_1 =$	1
$x_2 =$	2
$x_3 =$	3

Sonuncu cədvəldən tapırıq:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$$

Yoxlama: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 + 2 + 2 \cdot 3 = 9 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \cdot 1 + 2 + 3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 = 2 \end{cases}$

Cavab: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ ◄

Qeyd edək ki, Jordan Əvəzetmələri əsasında xətti tənliklər sisteminin bu həll alqoritmi Qaus üsulunun modifikasiyası olduğu üçün həmin üsula çox zaman Jordan-Qaus üsulu və ya dəyişənlərin tamamilə yox edilməsi üsulu deyilir.

2.2. Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin riyazi təsviri

Xətti proqramlaşdırma nəzəriyyəsinin tədqiqat obyekti onun əsas məsələsidir. Bu məsələ aşağıdakı kimi yazılır:

Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \to \max(\min) \qquad (2.2)$$

Məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le a_2 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le a_m \end{cases} \qquad (2.3)$$

Dəyişənlərin mənfi olmaması şərtləri

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad ..., \quad x_n \ge 0 \qquad (2.4)$$

Burada $p_j (j = \overline{1,n})$, $a_i (i = \overline{1,m})$, $a_{ij} (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ verilmiş sabit kəmiyyətlərdir, $x_j (j = \overline{1,n})$ isə məchul kəmiyyətlərdir.

Xətti proqramlaşdırmanın (2.2)-(2.4) əsas məsələsi aşağıdakı kimi ifadə olunur:

- *$x_1, x_2, ..., x_n$ məchulları üçün mənfi olmayan elə qiymətlər tapmaq lazımdır ki, bu qiymətlər (2.3) xətti məhdudiyyətlər*

sistemini ödəsinlər və (2.2) məqsəd funksiyasına ən böyük və ya ən kiçik qiymət versinlər.

Qeyd 1. *(2.3) sistemində xətti məhdudiyyətlər* $\geq, \leq, =$ *formasında ola bilər.*

Qeyd 2. *Bəzi ədəbiyyatlarda (2.3) sisteminin xətti məhdudiyyətlərinin xarakterindən asılı olaraq (2.2)-(2.4) məsələsinə*

- *Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsi;*
- *Xətti proqramlaşdırmanın ümumi məsələsi;*
- *Xətti proqramlaşdırmanın kanonik məsələsi;*
- *Xətti proqramlaşdırmanın standart məsələsi*

və s. kimi müxtəlif adlar verilir.

Bütün bu adlar şərti xarakter daşıyır və bir formanı digər formaya gətirmək həmişə mümkündür. Odur ki, biz gələcəkdə bütün məsələləri xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsi adlandıracağıq.

Tərif 1. $x_1, x_2, ..., x_n$ ***məchullarının mənfi olmayan və (2.3) sistemini ödəyən qiymətlərinə xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həlli və ya planı (mümkün həlli və ya mümkün planı) deyilir.***

Tərif 2. $x_1, x_2, ..., x_n$ ***məchullarının mənfi olmayan, (2.3) sistemini ödəyən və (2.2) məqsəd funksiyasına ən böyük və ya ən kiçik qiymət verən kəmiyyətlərinə xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin optimal həlli və ya optimal planı deyilir.***

Beləliklə, xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həll edilməsi dedikdə bütün hallarda onun optimal planının tapılması başa düşülür.

Xətti proqramlaşdırmanın (2.2)-(2.4) əsas məsələsinin aşağıdakı yazılış formaları vardır:

1.Vektor yazılış forması;

2.Matris yazılış forması;

3.Məsələnin cəm işarəsinin köməyi ilə yazılışı.

Vektor formasında (2.2)-(2.4) xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsi aşağıdakı kimi yazılır:

$$Z = PX \to \max(\min)$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + ... + A_n x_n \leq A_0$$

$$X \geq 0$$

Burada $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ və $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – n ölçülü vektorlardır. PX isə bu vektorların skalyar hasilidir.

$A_1, A_2, ..., A_n, A_0$ isə aşağıdakı struktura malik sütun vektorlarıdır:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Matris formasında (2.2)-(2.4) xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsi aşağıdakı kimi yazılır:

$$Z = PX \to \max(\min)$$

$$AX \le A_0$$

$$X \ge 0$$

Burada $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ - sətir matrisi;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - sütun matrisidir.

A (2.3) sisteminin əsas matrisi olub, aşağıdakı şəkildədir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A_0 isə sərbəst hədlərdən ibarət sütun matrisidir, yəni:

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Cəm işarələrinin köməyi ilə (2.2)-(2.4) xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsi aşağıdakı kimi yazılır:

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max(\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_i \qquad (i=\overline{1,m})$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j=\overline{1,n})$$

İndi isə xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin yazılış formalarına aid misalları nəzərdən keçirək.

►Məsələ 2.1. Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini matris və vektor yazılış formasında göstərin:

$$Z(x)=2x_1+5x_2-x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1+5x_3 \le 30 \\ x_1-3x_2+2x_3 \le 50 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0, \qquad x_3 \ge 0$$

Həlli:

- Matris yazılış forması:

$$Z=(2,\ 5,\ -1)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \max$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \ge 0$$

- Vektor yazılış forması:

$$Z(x)=(2,\ 5,\ -1)\cdot(x_1,\ x_2,\ x_3) \to \max$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} x_3 \le \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$(x_1,\ x_2,\ x_3) \ge 0$$

◄

►Məsələ 2.2. Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini cəm işarələrinin köməyi ilə yazın:

$$Z(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le a_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le a_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \le a_4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

Həlli:

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{3} p_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j \le a_i \quad (i = \overline{1,4})$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,3}) \ ◄$$

2.3. Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həndəsi mənası

Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həndəsi mənasını araşdıraq.

Tutaq ki, (2.2)-(2.4) xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsində $n = 2$ -dir, yəni məsələyə 2 dəyişən daxildir. Onda bu məsələ aşağıdakı şəkilə düşəcəkdir:

$$Z(x) = p_1x_1 + p_2x_2 \to \max(\min) \qquad (2.5)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le a_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le a_m \end{cases} \qquad (2.6)$$

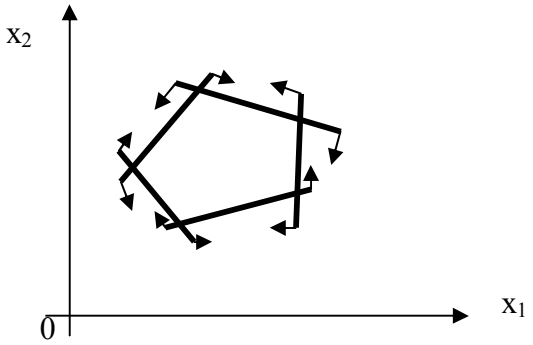
$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0 \qquad (2.7)$$

Tutaq ki, (2.6) sistemi ziddiyyətli deyil, yəni onun heç olmazsa bir həlli vardır. (2.6) sisteminin hər bir xətti bərabərsizliyi həndəsi olaraq müstəvi üzərində bir yarımmüstəvi verir və bu yarımmüstəvilər müstəvidən

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = a_i \qquad (i = \overline{1,m})$$

sərhəd düz xətləri ilə ayrılır.

(2.6) sistemi ziddiyyətli olmadığından bu yarımmüstəvilər müstəvi üzərində $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ yarımmüstəviləri ilə kəsişərək məsələnin mümkün həllər oblastını əmələ gətirirlər. Bu mümkün həllər oblastına məsələnin həllər çoxbucaqlısı da deyilir. Aşağıdakı şəkildə həllər çoxbucaqlısının mümkün variantlarından biri göstərilmişdir (şəkil 2.2).



Şəkil 2.2

$n = 3$ olduqda bu həllər çoxbucaqlısı 3 ölçülü fəzada həllər çoxüzlüsünə çevrilir. Bu çoxüzlünün hüdudları isə $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = a_i \qquad (i = \overline{1,m})$ müstəviləri olur.

$n > 3$ olduqda isə məsələnin həllər çoxüzlüsü n ölçülü fəzada alınır və onun hüdudları

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = a_i \qquad (i = \overline{1,m})$$

hiper müstəviləri ilə təyin edilir.

Beləliklə, xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həndəsi mənası dedikdə məsələnin həllər çoxüzlüsünün elə bir nöqtəsinin tapılması başa düşülür ki, bu nöqtənin koordinatları məsələnin məqsəd funksiyasına maksimum və ya mininimum qiymət versinlər. Bu zaman nəzərə alınmalıdır ki, həllər çoxüzlüsünün hər bir nöqtəsinin koordinatları məsələnin mümkün həlləri hesab edilir.

Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həllər çoxüzlüsünün aşağıdakı xassələri vardır.

Teorem 1: Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həllər çoxüzlüsü qabarıq çoxluqdur.

Teorem2: Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin məqsəd funksiyası özünün ən böyük və ya ən kiçik qiymətini həllər

çoxüzlüsünün təpə nöqtələrinin birində alır. Əgər funksiya özünün ən böyük və ya ən kiçik qiymətini eyni zamanda iki təpə nöqtəsində alarsa, onda funksiyanın bu qiyməti həmin təpə nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyası olan bütün nöqtələrdə də alınacaqdır.

Qeyd: *Teoremlərin isbatı bir çox ədəbiyyatlarda ətraflı verildiyi üçün biz onların isbatı üzərində dayanmayacağıq.*

2.4. Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin iqtisadi mənası

İndi isə (2.2)-(2.4) xətti proqramlaşdırma məsələsinin iqtisadi mənasını araşdıraq. Aşağıdakı sadə iqtisadi məsələyə baxaq.

Tutaq ki, firma n sayda məhsul istehsal edir və bu məqsədlə m sayda xammaldan istifadə edir. Xammalların məhdudluğu $A=(a_1,a_2,...,a_m)$ vektoru ilə təyin edilir. Bu vektorun a_i komponenti firmada olan i - ci xammalın məhdud miqdarıdır. Məhsul vahidi istehsalına xammal sərfi normaları isə $B=\|b_{ij}\|_{m,n}$ texnoloji matrislə xarakterizə edilir, burada b_{ij} -bir vahid j -cu məhsul istehsal etmək üçün sərf ediləcək i -ci xammalın miqdarıdır. Məhsul vahidlərinin firmaya verdiyi mənfəət isə $P=(p_1,p_2,...,p_n)$ vektoru ilə xarakterizə edilir. Burada p_j - bir vahid j - cu məhsulun satışından alınan mənfəətdir. Müəssisə üçün elə bir istehsal proqramı tapmaq tələb edilir ki, bütün məhsulların satışından əldə ediləcək məcmu mənfəət maksimum olsun.

Baxılan iqtisadi məsələnin riyazi ifadəsini verək. Tutaq ki, firma x_1 ədəd 1- ci məhsul, x_2 ədəd 2-ci məhsul, ..., x_n ədəd n - ci məhsul istehsal edəcək. Yəni firmanın istehsal proqramı $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ vektoru ilə ifadə ediləcəkdir.

Bu məhsulları istehsal etmək üçün tələb edilən 1-ci xammalın məcmu miqdarını hesablayaq:

$$b_{11}x_1+b_{12}x_2+...+b_{1n}x_n$$

Müəssisədə birinci xammalın miqdarı məhduddur və a_1 -ə bərabərdir. Odur ki, bu iqtisadi göstərici birinci xammalın məhdud həcmindən çox ola bilməz, yəni

$$b_{11}x_1+b_{12}x_2+...+b_{1n}x_n \le a_1$$

şərti ödənməlidir.

Müvafiq bərabərsizlikləri digər xammal növləri üçün də tərtib etsək, aşağıdakı bərabərsizliklər sistemini alarıq:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1n}x_n \le a_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + ... + b_{2n}x_n \le a_2 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + ... + b_{mn}x_n \le a_m \end{cases} \qquad (2.8)$$

$x_1, x_2, ..., x_n$ dəyişənləri firmada istehsal ediləcək məhsul növlərinin miqdarını göstərdiyi üçün, təbii ki, mənfi kəmiyyət ola bilməzlər, yəni:

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0, \qquad ..., \qquad x_n \ge 0 \qquad (2.9)$$

İndi isə, firmada istehsal edilən bütün məhsulların satışından əldə ediləcək məcmu mənfəəti hesablayaq:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$$

Məqsədimizə görə firmanın məcmu mənfəəti maksimum olmalıdır. Odur ki, bu mənfəətə istehsal edilən məhsulların həcminin funksiyası kimi baxsaq, yaza bilərik;

$$Z(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \to \max \qquad (2.10)$$

Göründüyü kimi, (2.8)-(2.10) xətti proqramlaşdırmanın maksimum məsələsini aldıq. Yəni, $x_1, x_2, ..., x_n$ məchulları üçün mənfi olmayan elə qiymətlər tapılmalıdır ki, bu qiymətlər (2.8) sistemini ödəsin və (2.10) xətti funksiyaya maksimum qiymət versinlər.

İndi isə xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin iqtisadi mənasına aid konkret misala baxaq.

Tutaq ki, müəssisə 3 növ məhdud ehtiyatdan istifadə etməklə A və B məhsulları istehsal edir. Bir ədəd A məhsulu istehsal etmək üçün

- 1-ci ehtiyatdan 3vahid
- 2-ci ehityatdan 6 vahid
- 3-cü ehtiyatdan 2 vahid

tələb olunur.

Bir ədəd B məhsulunu istehsal etmək üçün isə bu ehtiyatlardan uyğun olaraq 4, 2 və 5 vahid tələb olunur. Müəssisədə 200 vahid birinci ehtiyat, 300 vahid ikinci ehtiyat və 100 vahid üçüncü ehtiyat vardır.

Bir ədəd A məhsulunun satışından müəssisə 50 manat, bir ədəd B məhsulunun satışından 45 manat mənfəət əldə edir. Müəssisə üçün

elə bir istehsal proqramı tapmaq lazımdır ki, bu proqrama görə müəssisənin əldə edəcəyi məcmu mənfəət maksimum olsun.

Baxılan iqtisadi məsələnin riyazi ifadəsini verək. Tutaq ki, müəssisə x_1 ədəd A məhsulu və x_2 ədəd B məhsulu istehsal edəcək. Yəni müəssisənin istehsal proqramı $X=(x_1,x_2)$ vektoru ilə təyin ediləcəkdir. x_1 qədər A məhsulu və x_2 qədər B məhsulu istehsal etmək üçün tələb edilən I ehityatın miqdarını hesablasaq, alarıq:

$$3x_1+4x_2$$

Təbii ki, bu kəmiyyət müəssisədə olan I növ ehtiyatın miqdarından çox ola bilməz, yəni;

$$3x_1+4x_2\le 200$$

Qalan ehtiyat növləri üçün də uyğun bərabərsizlikləri tərtib etsək aşağıdakı xətti bərabərsizliklər sistemi alarıq:

$$\begin{cases}3x_1+4x_2\le 200\\6x_1+2x_2\le 300\\2x_1+5x_2\le 100\end{cases}$$

x_1 və x_2 kəmiyyətləri A və B məhsullarının istehsal həcmini göstərdiyindən təbii ki, onlar mənfi kəmiyyət ola bilməzlər. Yəni $x_1\ge 0, x_2\ge 0$ şərtləri ödənməlidir.

İndi isə istehsal edilmiş məhsulların satışından əldə ediləcək məcmu mənfəəti hesablayaq:

$$50x_1+45x_2$$

Məsələdə qoyulmuş məqsədə görə bu mənfəət maksimum olmalıdır. Beləliklə alırıq:

$$Z(x)=50x_1+45x_2\to \max \qquad (2.11)$$

$$\begin{cases}3x_1+4x_2\le 200\\6x_1+2x_2\le 300\\2x_1+5x_2\le 100\end{cases} \qquad (2.12)$$

$$x_1\ge 0,\qquad x_2\ge 0 \qquad (2.13)$$

Göründüyü kimi, baxılan iqtisadi məsələnin riyazi ifadəsi (2.11)-(2.13) xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinə gətirildi. Yəni x_1 və x_2 məhsulları üçün mənfi olmayan elə qiymətlər tapılmalıdır ki, bu qiymətlər (2.12) sisteminin məhdudiyyət şərtlərini ödəsinlər və (2.11) məqsəd funksiyasına maksimum qiymət versinlər.

Beləliklə, xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin iqtisadi mənası dedikdə müəssisə üçün elə bir istehsal proqramının tapılması başa düşülür ki, bu proqrama görə istehsal ehtiyatlarının məhdudluğu şəraitində müəssisənin əldə edəcəyi məcmu mənfəət maksimum olsun.

Bu iqtisadi izaha çox zaman maksimum mənfəət məsələsi deyilir. Qeyd edək ki, xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həndəsi mənasından fərqli olaraq bu iqtisadi izah məsələnin yeganə mümkün iqtisadi izahı deyildir. Belə ki, məsələnin iqtisadi mənasını real həyatdan götürülmüş çoxsaylı misallarla izah etmək olar.

Mövzu üzrə praktikum

2.3. Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini açıq şəkildə yazın:

$$Z = (-2,6,0) \times (x_1, x_2, x_3) \to \min$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_2 + \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot x_3 \le \begin{pmatrix} 120 \\ 160 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

2.4.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini açıq şəkildə yazın:

$$Z = (2,3,4) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \max$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \ge 0$$

2.5.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini matris formasında ifadə edin:

$$Z(x) = -x_1 + 5x_2 - 8x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + \quad 3x_3 + \quad x_4 \le 25 \\ 9x_1 + 2x_2 - 5x_3 \quad \le 70 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0$$

2.6.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini cəm işarələrinin köməyi ilə ifadə edin:

$$Z(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le a_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le a_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \le a_4 \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 \ge a_5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

2.7.Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini vektor və matris formasında yazın:

$$Z(x) = 6x_1 + 5x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 20 \\ -x_1 + 3x_2 \le 60 \\ 8x_1 + 4x_2 \le 100 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

2.8. Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini açıq şəkildə yazın:

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{4} p_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j \le a_i \quad (i = \overline{1,3})$$

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j = a_i \quad (i = \overline{4,6})$$

$$x_j \ge 0 \ (j = (\overline{1,4})$$

Mövzu üzrə testlər

1. Xətti proqramlaşdırma məsələsi hansı formada yazılmışdır?

$$Z = PX \to \max(\min)$$
$$A_1X_1 + A_2X_2 + \ldots + A_nX_n \le A_0$$
$$X \ge 0$$

A) Matris yazılış forması;
B) Vektor yazılış forması;
C) Modelin cəm işarələrinin köməyi ilə yazılış forması;
D) Modelin qarşıq yazılış forması;
E) Modelin kanonik yazılış forması.

2. Xətti proqramlaşdırma məsələsi hansı formada yazılmışdır?

$$Z = PX \to \max(\min)$$
$$AX \le A_0$$
$$X \ge 0$$

A) Matris yazılış forması;
B) Vektor yazılış forması;
C) Cəm işarələrinin köməyi ilə yazılış forması;
D) Qarışıq yazılış forması
E) Modelin kanonik yazılış forması.

3. Xətti proqramlaşdırma məsələsi hansı formada yazılmışdır?

$$Z = \sum_{j=1}^{n} P_j x_j \to \max(\min)$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_i (i = \overline{1,m})$$
$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n})$$

A) Matris yazılış forması;
B) Vektor yazılış forması;
C) Cəm-matris forması;
D) Cəm-vektor forması;
E) Modelin cəm işarələrinin köməyi ilə yazılış forması.

4. Aşağıdakı tərifi tamamlayın.

Tərif: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ məchullarının mənfi olmayan, məhdudiyyət şərtlərini ödəyən və modelin məqsəd funksiyasına ən böyük və ya ən kiçik qiymət verən qiymətlərinə xətti optimallaşdırma modelinin …….. deyilir.

A) Həlli;

B) Optimal həlli;
C) Dayaq həlli;
D) Lokal həlli;
E) Qlobal həlli.

5. **Aşağıdakı tərifi tamamlayın.**
Tərif: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ məchullarının mənfi olmayan, məhdudiyyət şərtlərini ödəyən ixtiyari qiymətlərinə xətti optimallaşdırma modelinin …….. deyilir.
A) Lokal həll;
B) Mümkün həlli;
C) Dayaq həlli;
D) Optimal həlli;
E) Qlobal həlli.

6. «Xətti proqramlaşdırma əsas məsələsinin həlli yoxdur» dedikdə nə başa düşülür:
A) Məsələnin həll üsulu yoxdur;
B) Məsələnin məhdudiyyət şərtləri sistemi ziddiyyətlidir;
C) Məsələnin qoşması mövcud deyil;
D) Məsələnin dayaq həlli var, optimal həlli isə yoxdur;
E) Məsələnin dəyişənlərinin sayı məhdudiyyət şərtlərinin sayından çoxdur.

7. Aşağıdakı mülahizələrdən hansı doğrudur?
A) Məsələnin həllərinin sayı onun dayaq həllərinin sayına bərabərdir;
B) Məsələnin həllərinin sayı onun optimal həllərinin sayına bərabərdir;
C) Məsələnin dayaq həllərinin sayı onun optimal həllərinin sayına bərabərdir;
D) Məsələnin dayaq həllərinin sayı həllər çoxüzlüsünün təpə nöqtələrinin sayına bərabərdir;
E) Məsələnin həllərinin sayı onun dayaq həllərinin sayı ilə optimal həllərinin sayının cəminə bərabərdir.

8. Aşağıdakı tərifdən doğru olanı seçin:
A) Maksimum mənfəət məsələsində müəssisə üçün elə bir istehsal proqramı axtarılır ki, ehtiyatların məhdud olması şəraitində məcmu mənfəət maksimum olsun;
B) Maksimum mənfəət məsələsində minimum xərclərlə məhsulları istehlak məntəqələrinə daşımaq planı axtarılır;
C) Maksimum mənfəət məsələsində istehsal ehtiyatları üçün elə qiymətlər axtarılır ki, istehsal xərcləri minimum olsun;

D) Maksimum mənfəət məsələsində istehsal ehtiyatları üçün elə qiymətlər axtarılır ki, sərf ediləcək ehtiyatların qiymətləri cəmi maksimum olsun;
E) Maksimum mənfəət məsələsində müəssisənin avadanlıqlarının maksimal yüklənməsi variantı axtarılır.

9. Aşağıdakı mülahizələrdən hansı mülahizə səhvdir:
A) Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həllər oblastı qabarıq çoxluqdur;
B) Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin məqsəd funksiyası özünün ən böyük qiymətini həllər çoxüzlüsünün təpə nöqtələrinin birində alır;
C) Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin məqsəd funksiyası özünün ən kiçik qiymətini həllər çoxüzlüsünün təpə nöqtələrinin birində alır;
D) Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin məqsəd funksiyası özünün ekstremal qiymətini eyni zamanda 2 təpə nöqtəsində ala bilər;
E) Əgər xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həllər oblastı qabarıq deyilsə, onda məqsəd funksiyası özünün ekstremal qiymətini bu oblastın daxili nöqtəsində ala bilər.

10. Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həndəsi mənasına aid aşağıdakı təriflərdən hansının doğru olduğunu təyin edin:
A) Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həndəsi mənası dedikdə məsələnin həllər çoxüzlüsünün qurulması başa düşülür;
B) Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həndəsi mənası dedikdə məsələnin həllər çoxüzlüsünün hər hansı bir nöqtəsinin tapılması başa düşülür;
C) Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həndəsi mənası dedikdə məsələnin həllər çoxüzlüsünün elə bir nöqtəsinin tapılması başa düşülür ki, bu nöqtənin koordinatları məsələnin məqsəd funksiyasına ən böyük və ya ən kiçik qiyməti versinlər;
D) Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həndəsi mənası dedikdə həllər çoxüzlüsünün hər hansı bir təpə nöqtəsinin tapılması başa düşülür;
E) Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həndəsi mənası dedikdə həllər çoxüzlüsünün iki təpə nöqtəsinin təyin edilməsi başa düşülür.

FƏSIL 3

XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMANIN ƏSAS MƏSƏLƏSİNİN HƏLL ÜSULLARI

3.1.Qrafik üsulu

Qrafik üsulu xətti proqramlaşdırma məsələlərinin ən sadə həll üsuludur. Bu üsulun əsasını xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həndəsi izahı təşkil edir. Qrafik üsulu ilə yalnız 2 dəyişənli məsələləri səmərəli şəkildə həll etmək mümkün olur.

$n = 3$ olduqda məsələni Qrafik üsulu ilə həll etmək nəzəri cəhətdən mümkün olsa da praktik cəhətdən sərfəli deyil. Çünki 3 ölçülü fəzada məsələnin həllər oblastının qurulması kifayət qədər çətin prosesdir.

$n > 3$ olduqda xətti proqramlaşdırma məsələsinin Qrafik üsulu ilə həlli haqqında danışmaq olmur. Belə ki, Qrafik üsulu həndəsi qurmalara əsaslanır, çoxölçülü fəzaların isə əyani təsviri yoxdur.

Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin Qrafik üsulu ilə həlli aşağıdakı mərhələləri əhatə edir:

- *Məsələnin həllər oblastının qurulması;*
- *Məqsəd funksiyasının artma istiqamətinin təyin edilməsi;*
- *Funksiyanın ekstremumlarının alındığı təpə nöqtələrinin müəyyən edilməsi və onların koordinatlarının tapılması;*
- *Tapılmış optimal planlara görə funksiyanın ekstremumlarının hesablanması.*

Bu alqoritmi daha ətraflı nəzərdən keçirək.

Fərz edək ki, aşağıdakı iki dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələsi verilmişdir:

$$Z(x) = p_1x_1 + p_2x_2 \to \max(\min) \qquad (3.1)$$

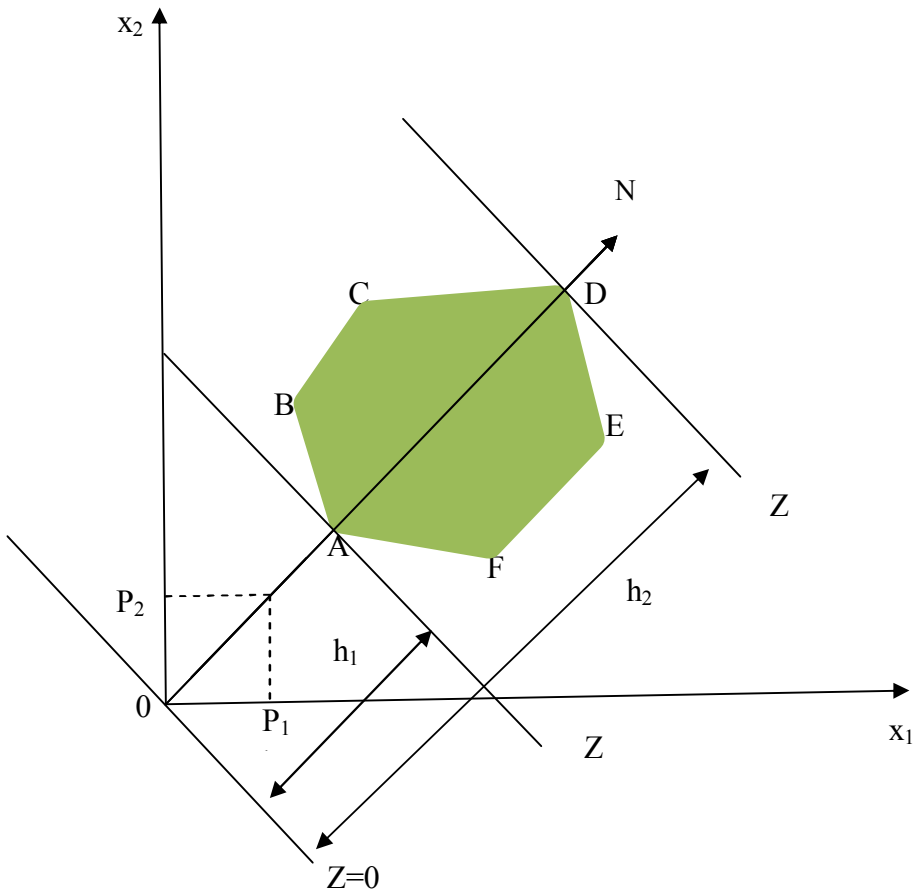
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le a_2 \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le a_m \end{cases} \qquad (3.2)$$

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0 \qquad (3.3)$$

Məlum olduğu kimi (həndəsi mənaya görə) (3.2) sisteminin hər bir xətti bərabərsizliyi müstəvi üzərində bir yarımmüstəvi verir və bu yarımmüstəvilər müstəvidən aşağıdakı sərhəd düz xətləri ilə ayrılır:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = a_i \qquad i = (\overline{1,m}).$$

Əgər (3.2) sistemi ziddiyyətli deyilsə, onda bu yarımmüstəvilər müstəvi üzərində $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ yarımmüstəviləri ilə birlikdə kəsişərək, məsələnin həllər oblastını əmələ gətirirlər. Tutaq ki, məsələnin həllər çoxbucaqlısı şəkil 3.1-dəki kimidir.



Şəkil 3.1.

Məsələnin həllər oblastı qurulduqdan sonra məqsəd funksiyasının artma istiqaməti təyin edilir. Bu məqsədlə funksiyanın qradiyenti qurulmalıdır (funksiyanın qradiyenti dedikdə onun artması istiqamətini təyin edən radius vektor başa düşülür). (3.1) məqsəd funksiyasının dəyişənlərinə görə birinci tərtib törəmələrini hesablayaq:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = p_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = p_2$$

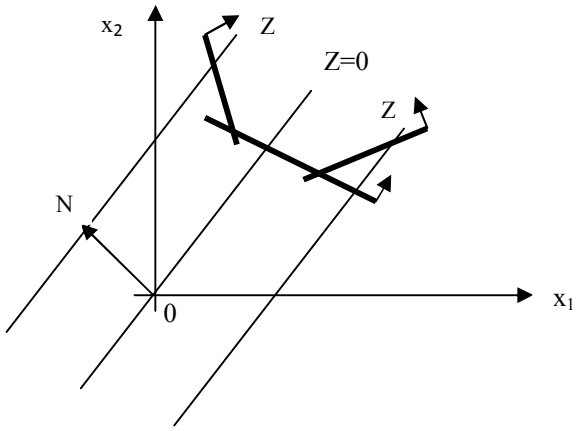
Deməli, funksiyanın qradiyenti $N = (p_1, p_2)$ radius vektorla təyin ediləcəkdir.

Koordinat başlanğıcından radius vektora perpendikulyar düz xətt keçirək. Nəticədə $Z = 0$ səviyyə xəttini alırıq. Həmin düz xətti N vektoru boyunca özünə paralel sürüşdürsək, bu düz xətt həllər çoxbucaqlısının A və D təpə nöqtələrində həmin oblasta dayaq olacaqdır. Deməli, A və D təpə nöqtələri (3.2) və (3.3) şərtləri ilə müəyyən edilən oblastda (3.1) xətti funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətlərinin alındığı nöqtələrdir. Radius vektorun istiqamətini bildiyimizdən və $h_1 < h_2$ olduğundan hökm edə bilərik ki, A təpə nöqtəsində funksiyanın ən kiçik qiyməti, D təpə nöqtəsində isə ən böyük qiyməti alınır.

A və D nöqtələrinin koordinatlarını təyin etmək üçün bu nöqtələri doğuran düz xətlərin tənliklərindən ibarət birgə sistemləri həll etmək kifayətdir. A təpə nöqtəsinin koordinatlarını (3.1) ifadəsində yerinə yazmaqla funksiyanın minimum qiyməti, D təpə nöqtəsinin koordinatlarını (3.1) ifadəsində yerinə yazmaqla isə funksiyanın maksimum qiyməti tapılır.

Qeyd edək ki, yuxarıdakı misalda məsələnin həllər oblastı qapalı oblast idi. Lakin bəzən elə xətti proqramlaşdırma məsələsinə rast gəlinir ki, bu məsələdə həllər oblastı açıq oblast olur. Bu zaman aşağıdakı iki haldan biri mümkündür.

I hal: $Z = 0$ *düz xətti daima həllər oblastını kəssə də heç bir nöqtədə bu oblasta dayaq olmur* (şəkil 3.2)



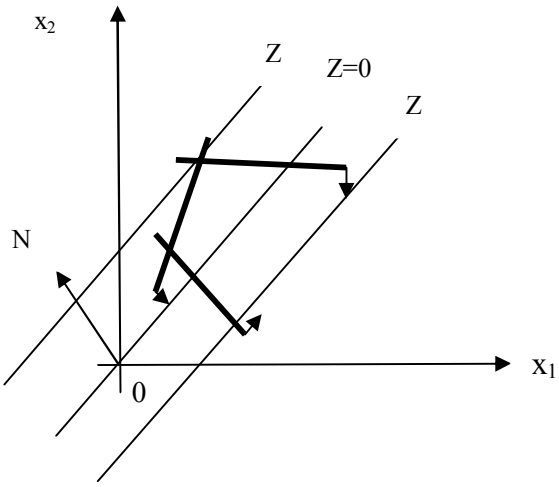
Şəkil 3.2.

Onda məsələnin məqsəd funksiyası baxılan oblastda həm yuxarıdan, həm də aşağıdan qeyri-məhdud olur, yəni

$$\max Z(x) = +\infty; \qquad \min Z(x) = -\infty;$$

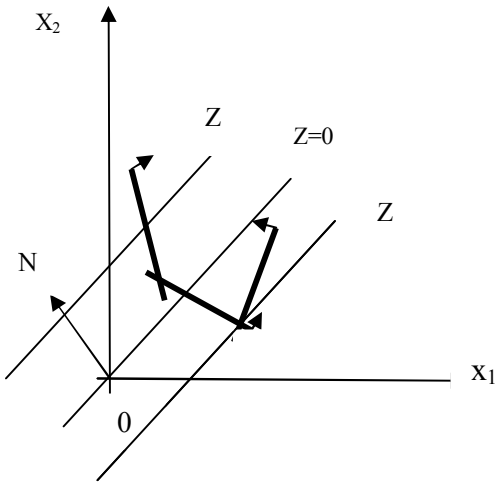
II hal: $Z = 0$ *düz xətti məsələnin həllər oblastını kəssə də, bəzi nöqtələrdə bu oblasta dayaq olur. Onda:*

II (a). Məqsəd funksiyası verilmiş oblasta yuxarıdan məhdud, aşağıdan isə qeyri-məhdud olur (şəkil 3.3).



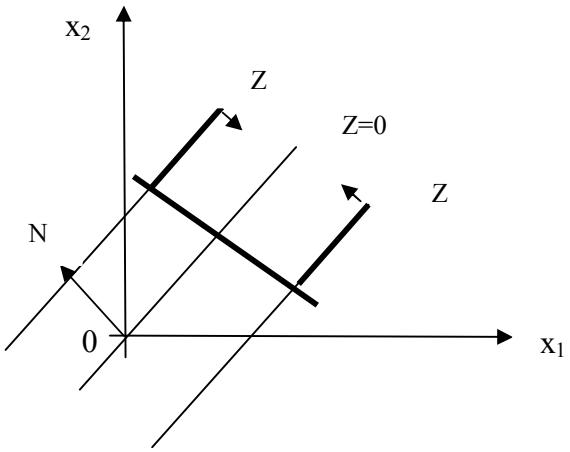
Şəkil 3.3.

II (b). Məqsəd funksiyası aşağıdan məhdud, yuxarıdan isə qeyri – məhdud olur (şəkil 3.4).



Şəkil 3.4.

II (c). Məqsəd funksiyası həm yuxarıdan, həm də aşağıdan məhdud olur.(şəkil 3.5)



Şəkil 3.5.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, Qrafik üsulu yalnız iki dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələlərinin həlli üçün nəzərdə tutulmuşdur. Lakin bəzən müəyyən əlavə şərtlər ödəndikdə çoxdəyişənli məsələləri

də qrafik üsülu ilə həll etmək mümkün olur. Bu əlavə şərtlər aşağıdakılardır:

• *Məsələnin bütün məhdudiyyət şərtləri xətti asılı olmayan tənliklərdən ibarət olmalıdır;*

• *Məsələdə* $n-m=2$ *şərti ödənməlidir, yəni məchulların sayı ilə xətti asılı olmayan tənliklərin sayı arasındakı fərq ikiyə bərabər olmalıdır.*

Belə məsələləri ardıcıl çevirmələrin köməyi ilə iki dəyişənli məsələyə gətirmək və Qrafik üsulu ilə həll etmək mümkün olur.

Aşağıda xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllinə aid nümunələr verilmişdir

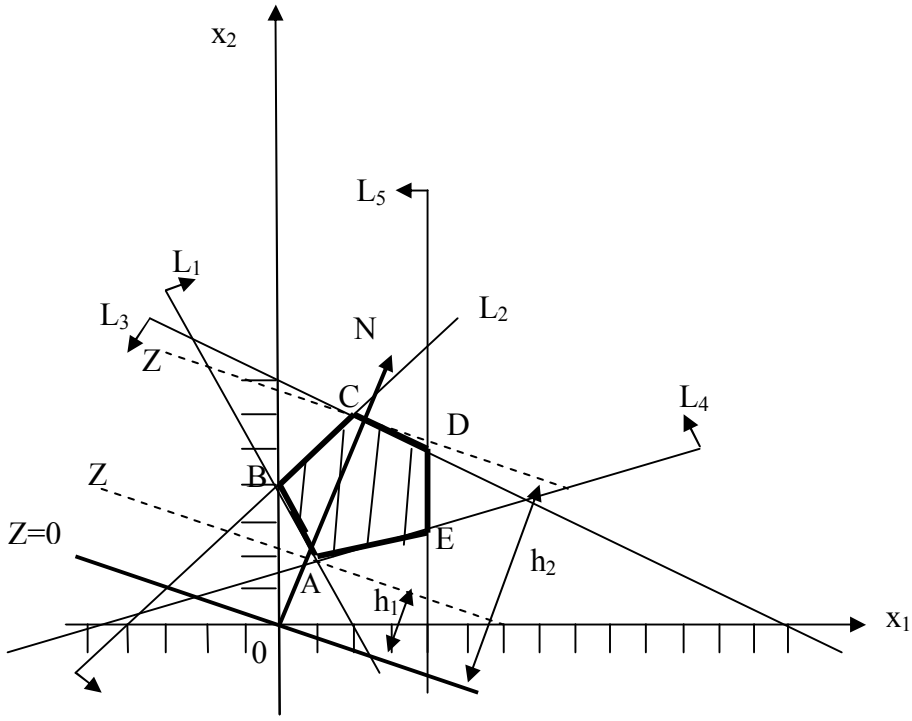
►***Məsələ 3.1. İki dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələsini Qrafik üsulu ilə həll edin (məqsəd funksiyasının həm yuxarıdan, həm də aşağıdan məhdud olması halı).***

$$Z(x)=2x_1+5x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2 \ge 4 \\ -x_1+x_2 \le 4 \\ x_1+2x_2 \le 14 \\ -x_1+3x_2 \ge 5 \\ x_1 \qquad\quad \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0$$

Həlli: Məsələnin həllər oblastını quraq. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllər oblastını qurmaq üçün ayrı-ayrı məhdudiyyət şərtlərinin həllər oblastlarının kəsişməsini müəyyən etmək lazımdır. $x_1 \ge 0$ şərti düzbucaqlı dekart koordinat sistemində ordinat oxunun sağ tərəfini, $x_2 \ge 0$ şərti isə absis oxunun yuxarı tərəfini verdiyindən bu yarımmüstəvilərin kəsişməsi koordinat sisteminin 1-ci kvadrantını (rübünü) müəyyən edir. Deməli, əgər məsələnin şərtləri ziddiyyətli deyilsə, onda bu məsələnin həllər oblastı məhz $x_1 0 x_2$ düzbucaqlı koordinat sisteminin 1-ci kvadrantında alınacaqdır. Məsələnin məhdudiyyət şərtlərinə 1-dən 5-ə qədər nömrələr qoyaq. Əvvəlcə düzbucaqlı koordinat sistemində birinci məhdudiyyət şərtinin həllər oblastını kəsib ayıracaq $2x_1+x_2=4$ (L_1) düz xəttini quraq (şəkil 3.6).



Şəkil 3.6.

Göründüyü kimi, bu düz xətt koordinat müstəvisini iki yarım-müstəviyə ayırır və onlardan hansının (1) bərabərsizliyinin həllər oblastı olduğunu müəyyən etmək üçün həmin düz xəttin üstündə olmayan və koordinatları məlum olan hər hansı bir nöqtənin bu bərabərsizliyin həllər oblastına daxil olub-olmadığını müəyyən etmək kifayətdir. L_1 düz xətti koordinat başlanğıcından keçmədiyi üçün $O(0;\ 0)$ nöqtəsinin koordinatlarını (1) bərabərsizliyində yerinə yazsaq $2\cdot 0+0>4,\quad 0>4$ alınır və bərabərsizlik ödənmir. Deməli, O nöqtəsi (1) bərabərsizliyinin həllər oblastına daxil deyil və bu bərabərsizliyin həllər oblastı L_1 düz xəttindən yuxarıda olan yarımmüstəvidir. (Bu yarımmüstəvi L_1 düz xəttinin üzərindəki oxla göstərilmişdir.) Analoji olaraq

$$-x_1+x_2=4\ (L_2),\ x_1+2x_2=14\ (L_3),\ -x_1+3x_2=5\ (L_4),\ x_1=4\ (L_5)$$

düz xətlərini qururuq və (2), (3), (4), (5) məhdudiyyət şərtlərinin həllər oblastlarını müəyyənləşdiririk. Sonra isə bu həllər oblastlarının kəsişməsindən alınan oblastı təyin edirik. Bu oblast baxılan xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllər oblastı olacaqdır. Şəkil 3.6-dan

göründüyü kimi bu oblast $ABCDE$ çoxbucaqlısıdır. Məsələnin məqsəd funksiyasının artma istiqamətini müəyyən etmək üçün $N=(2,5)$ vektorunu quraq. Koordinat başlanğıcından bu vektora perpendikulyar düz xətt keçirsək $Z=0$ səviyyə xəttini alırıq. Əgər $Z=0$ düz xəttini N vektoru istiqamətində özünə paralel sürüşdürsək, onda həmin düz xətt həllər oblastının A və C təpə nöqtələrində bu oblasta dayaq olacaqdır. N vektorunun istiqaməti məlum olduğu üçün $h_1 < h_2$ şərtini əsas götürərək hökm etmək olar ki, A təpə nöqtəsində Z məqsəd funksiyasının verilmiş oblasta ən kiçik qiyməti, C təpə nöqtəsində isə ən böyük qiyməti alınır.

A təpə nöqtəsinin koordinatlarını tapaq. Bu nöqtə L_1 və L_4 düz xətlərinin kəsişməsi olduğu üçün, onun koordinatlarını hesablamaq üçün L_1 və L_4 düz xətlərinin tənliklərindən ibarət birgə sistemi həll etmək lazımdır:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

$$x_2 = 4 - 2x_1$$

$$-x_1 + 12 - 6x_1 = 5$$

$$-7x_1 = -7$$

$$x_1 = 1;\ \ x_2 = 2$$

Beləklə, $A(1,2)$ olduqda $\min Z(x) = 2\cdot 1 + 5\cdot 2 = 12$ olur.

C nöqtəsinin koordinatlarını tapaq. Bu nöqtə L_2 və L_3 düz xətlərinin kəsişməsi olduğu üçün, alırıq:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 14 \end{cases}$$

$$3x_2 = 18$$

$$x_2 = 6$$

$$x_1 = 2$$

Beləliklə, $C(2,\ 6)$ olduqda $\max Z(x) = 2\cdot 2 + 5\cdot 6 = 34$ olur;

Cavab: a) $X^* = (1,\ 2)$ olduqda $\min Z(x) = 12$ olur.

b) $X^* = (2,\ 6)$ olduqda $\max Z(x) = 34$ olur.◀

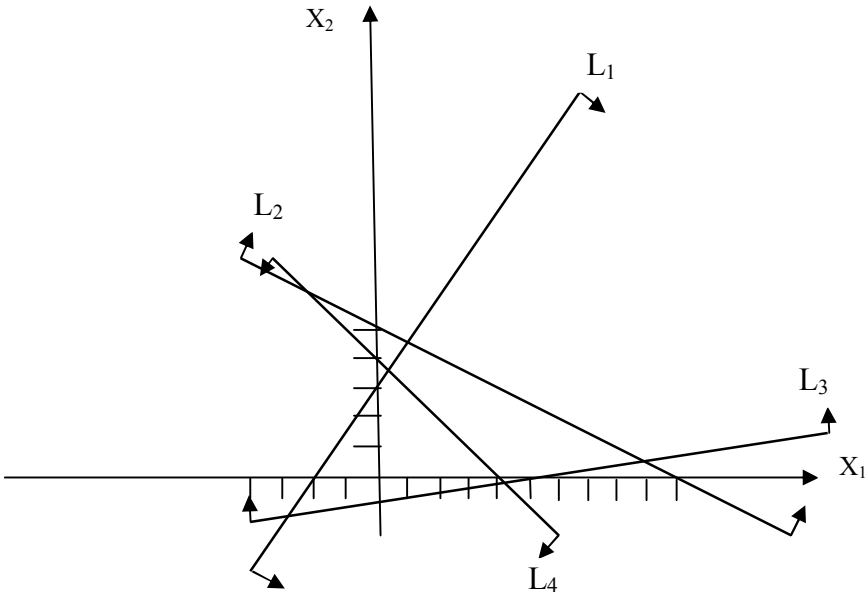
►***Məsələ 3.2. Aşağıdakı iki dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələsini Qrafik üsulu ilə həll edin (məsələnin məhdudiyyət şərtləri sisteminin ziddiyyətli olması halı).***

$$Z(x) = 2x_1 + 4x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ x_1 - 5x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Həlli: Düzbucaqlı koordinat sistemində məsələnin məhdudiyyət şərtləri sisteminə daxil olan ayrı-ayrı bərabərsizliklərin həllər oblastlarını quraq (şəkil 3.7). Şəkildən göründüyü kimi, 1-ci bərabərsizliyin həllər oblastı L_1 düz xəttinin aşağı tərəfi, 2-ci bərabərsizliyin həllər oblastı L_2 düz xəttinin yuxarı tərəfi, 3-cü bərabərsizliyin həllər oblastı L_3 düz xəttinin yuxarı tərəfi, 4-cü bərabərsizliyin həllər oblastı isə L_4 düz xəttinin aşağı tərəfidir. Asanlıqla yəqin etmək olar ki, bu bərabərsizliklərin həllər oblastlarının $x_1 \ge 0$ və $x_2 \ge 0$ yarımmüstəviləri ilə müəyyən edilən koordinat sisteminin 1-ci kvadrantında heç bir ortaq nöqtəsi yoxdur, daha doğrusu onların kəsişməsi boş çoxluq verir.



Şəkil 3.7.

Deməli, məsələnin məhdudiyyət şərtləri sistemi ziddiyyətlidir və onun həlli yoxdur.

Cavab: Məsələnin məhdudiyyət şərtləri sistemi ziddiyyətli olduğu üçün onun həlli yoxdur. ◄

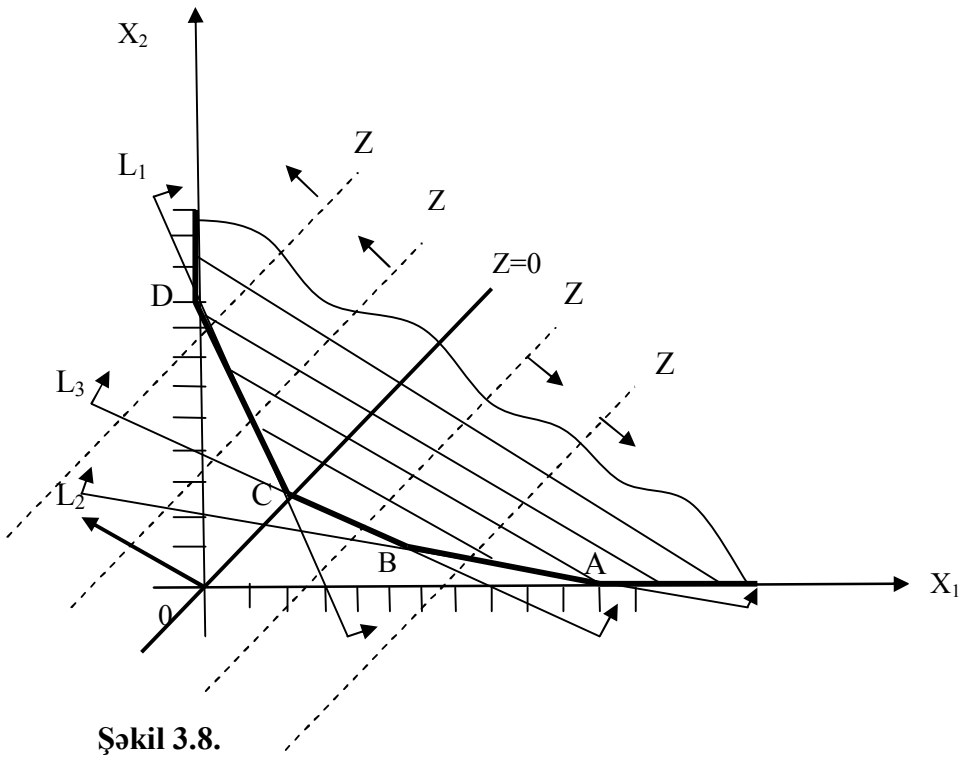
►***Məsələ 3.3. Aşağıdakı iki dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələsini Qrafik üsulu ilə həll edin (həllər oblastının açıq olması və məqsəd funksiyasının həm yuxarıdan, həm də aşağıdan qeyri-məhdud olması halı)***

$$Z(x) = -x_1 + x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

Həlli: Məsələnin həllər oblastını quraq (şəkil 3.8):



Şəkil 3.8.

Göründüyü kimi, məsələnin həllər oblastı *ABCD* təpə nöqtələrinə malik olan qeyri-məhdud oblastdır.

N=(-1, 1) vektorunu və $Z=-x_1+x_2=0$ səviyyə xəttini quraq. Əgər bu düz xətti N vektoru boyunca özünə paralel sürüşdürsək, onda həmin düz xətt daima həllər oblastını kəsəcək, lakin heç bir təpə nöqtəsində bu oblasta dayaq olmayacaqdır.

Deməli, məsələnin məqsəd funksiyası verilmiş oblastda həm yuxarıdan, həm də aşağıdan qeyri-məhdud olacaqdır.

Cavab: a) $\max Z(x) = +\infty$

b) $\min Z(x) = -\infty$ ◄

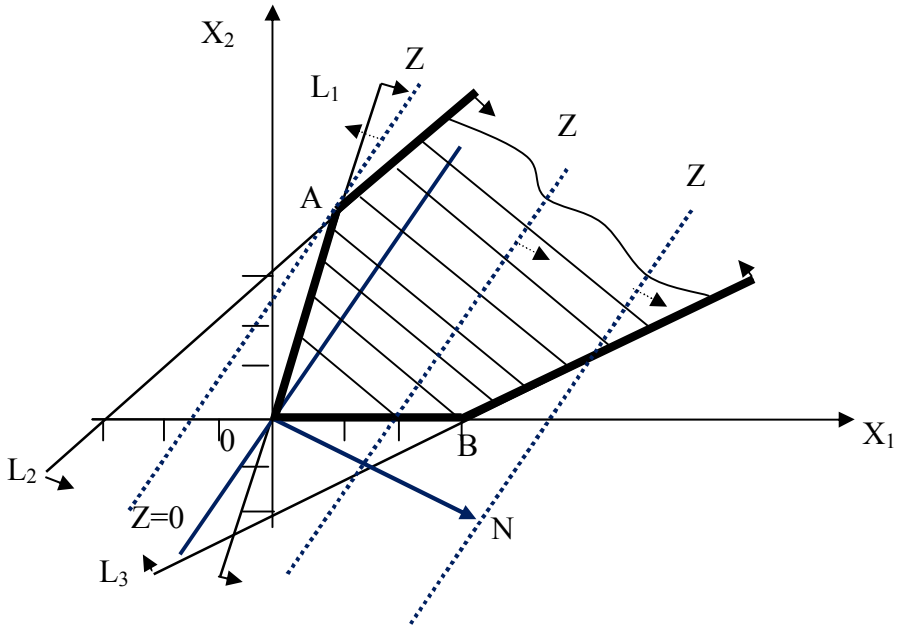
►***Məsələ 3.4. Aşağıdakı iki dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələsini Qrafik üsulu ilə həll edin (həllər oblastının açıq oblast olması və məqsəd funksiyasının aşağıdan məhdud, yuxarıdan isə qeyri-məhdud olması halı)***

$$Z(x) = 5x_1 - 3x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 0 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Həlli: Məsələnin həllər oblastını quraq:



Şəkil 3.9.

Göründüyü kimi, bu oblast A, O, B təpə nöqtələrinə malik olan qeyri-məhdud oblastdır. N=(5, -3) vektorunu və $Z=5x_1-3x_2=0$ səviyyə xəttini quraq. Əgər bu düz xətti N vektorunun əksi istiqamətində özünə paralel hərəkət etdirsək, onda həmin düz xətt həllər oblastının A təpə nöqtəsində ona dayaq olacaqdır. Z=0 düz xəttini N vektoru boyunca hərəkət zamanı isə həmin düz xətt daima həllər oblastını kəsəcək, lakin heç bir nöqtədə bu oblasta dayaq olmayacaqdır. Deməli, məsələnin məqsəd funksiyasının minimum qiyməti A təpə nöqtəsində alınır, maksimum qiyməti isə yuxarıdan qeyri-məhduddur.

A nöqtəsi L_1 və L_2 düz xətlərinin kəsişməsi olduğu üçün alırıq:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

$$x_2 = 4x_1$$

$$-x_1 + 4x_1 = 3$$

$$3x_1 = 3$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 4$$

$$A(1,4)$$

$$\min Z(x) = -7$$

$$\max Z(x) = +\infty$$

Cavab: ***a)*** $X^* = (1,4)$ ***olduqda*** $\min Z(x) = -7$ ***olur;***

b) $\max Z(x) = +\infty$ ◄

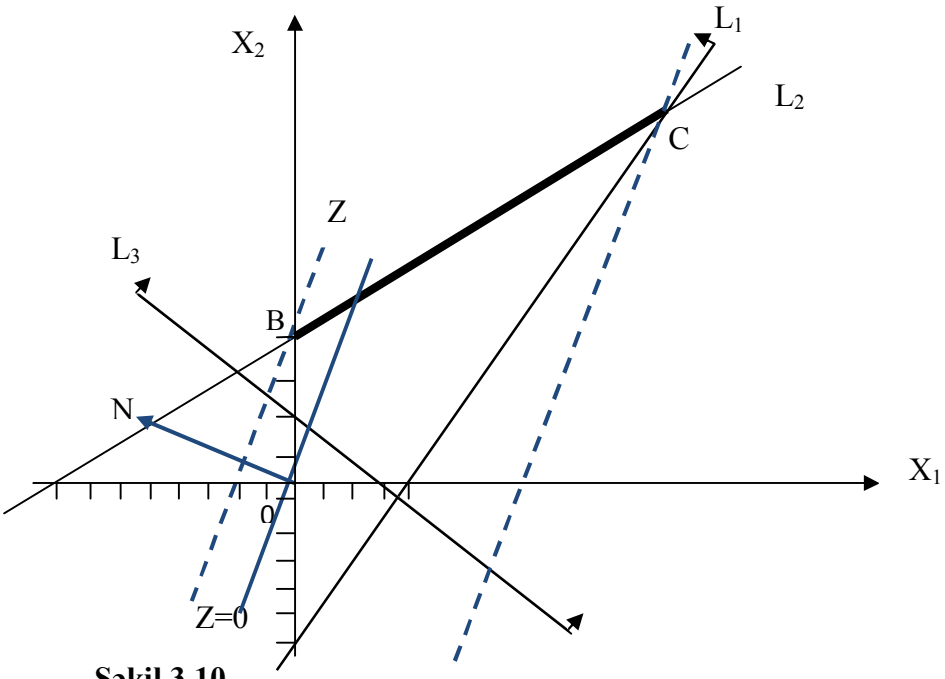
►***Məsələ 3.5. Aşağıdakı iki dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələsini Qrafik üsulu ilə həll edin (həllər oblastının düz xətt parçasından ibarət olması və alternativ optimal həllərin mövcud olması halı):***

$$Z(x) = -2x_1 + x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12 \\ -x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0$$

Məsələnin həllər oblastını quraq (şəkil 3.10):



Şəkil 3.10.

Məsələnin 2-ci məhdudiyyət şərti tənlik olduğu üçün onun həllər oblastı düz xətt parçasından ibarət olacaqdır. Şəkildən göründüyü kimi, bu oblast BC parçasıdır. Parçanın kənar nöqtələri B və C nöqtələri olduğu üçün yəqindir ki, B nöqtəsində məqsəd funksiyasının verilmiş parçada ən böyük qiyməti, C nöqtəsində isə ən kiçik qiyməti alınır.

B təpə nöqtəsinin koordinatları B(0, 4) olduğu üçün alırıq:

$$\max Z(x) = Z(B) = -2 \cdot 0 + 4 = 4$$

C təpə nöqtəsinin koordinatlarını tapaq. Bu nöqtə L_1 və L_2 düz xətlərinin kəsişməsi olduğu üçün alırıq:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ -x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

$$2x_1 = 20$$

$$x_1 = 10 \qquad x_2 = 9$$

$$C(10,\ 9)$$

$$\min Z(x) = Z(C) = -2 \cdot 10 + 9 = -20 + 9 = -11$$

Cavab: a) $X^* = (0,4)$ ***olduqda*** $\max Z(x) = 4$ ***olur;***

b) $X^* = (10,\ 9)$ ***olduqda*** $\min Z(x) = -11$ ***olur.*** ◄

►***Məsələ 3.6. Aşağıdakı çox dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələsini 2 dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirin və Qrafik üsulu ilə həll edin:***

$$Z(x) = 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 = 4 \\ 7x_2 - x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0$$

Həlli: Verilmiş məsələdə

$$n - m = 5 - 3 = 2$$

şərti ödəndiyi və bütün məhdudiyyət şərtləri xətti asılı olmayan tənliklər olduğu üçün bu məsələni 2 dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirmək və Qrafik üsulu ilə həll etmək mümkündür.

Jordan-Qaus metodunu tətbiq edərək məhdudiyyət şərtləri sistemi üzərində 3 əvəzetmə aparsaq, x_3, x_4, x_5 dəyişənlərini bazis dəyişənlərinə, x_1, x_2 dəyişənlərini isə sərbəst dəyişənlərə çevirək:

$$\begin{cases} 0 = x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - 5 \\ 0 = 3x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 - 4 \\ 0 = 7x_2 - x_3 + x_4 - 7 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
$0 =$	1	5	-1	$\langle 1 \rangle$	-1	-5
$0 =$	3	-1	0	1	-2	-4
$0 =$	0	7	-1	1	0	-7

	x_1	x_2	x_3	0	x_5	1
$x_4 =$	-1	-5	1	1	1	5
$0 =$	2	-6	$\langle 1 \rangle$	1	-1	1
$0 =$	-1	2	0	1	1	-2

	x_1	x_2	0	x_5	1
$x_4 =$	-3	1	1	2	4
$x_3 =$	-2	6	1	1	-1
$0 =$	-1	2	0	$\langle 1 \rangle$	-2

	x_1	x_2	0	1
$x_4 =$	-1	-3	2	8
$x_3 =$	-1	4	1	1
$x_5 =$	1	-2	1	2

	x_1	x_2	1
$x_4 =$	-1	-3	8
$x_3 =$	-1	4	1
$x_5 =$	1	-2	2

Göründüyü kimi, məsələnin məhdudiyyət şərtləri sistemi aşağıdakı şəklə düşmüşdür:

$$\begin{cases} x_4 + x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_3 + x_1 - 4x_2 = 1 \\ x_5 - x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

Alınmış sistemdən bazis dəyişənlərinin qiymətini təyin edək:

$$\begin{cases} x_4 = -x_1 - 3x_2 + 8 \\ x_3 = -x_1 + 4x_2 + 1 \\ x_5 = x_1 - 2x_2 + 2 \end{cases}$$

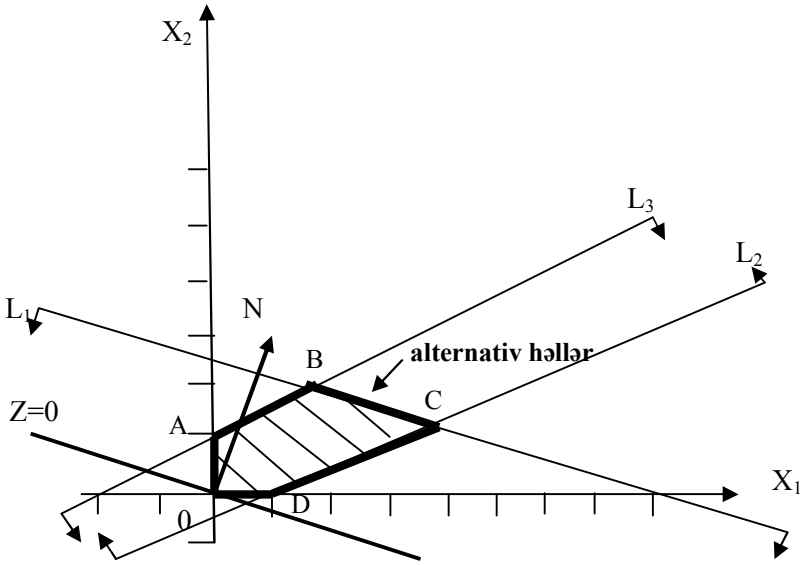
Bazis dəyişənlərinin qiymətlərini məqsəd funksiyasında yerinə yazaq və funksiyanı yalnız sərbəst dəyişənlər vasitəsi ilə ifadə edək:

$$Z(x) = 2x_1 + 7x_2 + 2(-x_1 + 4x_2 + 1) + 2(-x_1 - 3x_2 + 8) + 3(x_1 - 2x_2 + 2) =$$
$$= x_1 + 3x_2 + 24$$

Bütün bazis dəyişənləri qeyri-mənfi olduğu üçün yuxarıdakı sistemdən onları atsaq, onda bu sistem "≤" xarakterli bərabərsizliklərdən ibarət məhdudiyyətlər sistemi şəklinə düşəcəkdir. Beləliklə, aşağıdakı 2 dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələsi alınır:

$$Z(x) = x_1 + 3x_2 + 24 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 8 \\ x_1 - 4x_2 \le 1 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0$$

Məsələnin həllər oblastını quraq (şəkil 3.11):



Şəkil 3.11.

Göründüyü kimi, məsələnin həllər oblastı *OABCD* çoxbucaqlısıdır. N (1, 3) vektorunu və $Z = x_1 + 3x_2 = 0$ səviyyə xəttini quraq. Əgər Z=0 səviyyə xəttini N vektoru boyunca özünə paralel sürüşdürsək görərik ki, bu düz xətt həllər oblastının BC tərəfi ilə üst-üstə düşür. Deməli, məsələnin optimal həlli BC düz xətt parçasının bütün nöqtələrində alınır. Daha doğrusu, bu parçanın bütün nöqtələrinin koordinatları məsələnin alternativ optimal həlləri olur. Dəqiqlik üçün

həm B, həm də C təpə nöqtələrində məqsəd funksiyasının qiymətini hesablayaq. B təpə nöqtəsi L_1 və L_3 düz xətlərinin kəsişməsi olduğu üçün alırıq:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

$$5x_2 = 10$$

$$x_2 = 2 \qquad x_1 = 2$$

C təpə nöqtəsi L_1 və L_2 düz xətlərinin kəsişməsi olduğu üçün alırıq:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 - 4x_2 = 1 \end{cases}$$

$$7x_2 = 7$$

$$x_2 = 1 \qquad x_1 = 5$$

Beləliklə, $B(2,\ 2)$ təpə nöqtəsi üçün alırıq:

$$Z(x) = Z(B) = 2 + 6 + 24 = 32$$

$C(5,\ 1)$ təpə nöqtəsi üçün də

$$Z(x) = Z(C) = 5 + 3 + 24 = 32$$

alırıq.

Göründüyü kimi,

$$\max Z(x) = Z(B) = Z(C) = 32$$

x_1 və x_2 dəyişənlərinin optimal qiymətlərini bazis dəyişənlərinin ifadələrində yerinə yazsaq alarıq:

$$\begin{cases} x_4 = -x_1 - 3x_2 + 8 = -2 - 6 + 8 = 0 \\ x_3 = -x_1 + 4x_2 + 1 = -2 + 8 + 1 = 7 \\ x_5 = x_1 - 2x_2 + 2 = 2 - 4 + 2 = 0 \end{cases}$$

və ya

$$\begin{cases} x_4 = -x_1 - 3x_2 + 8 = -5 - 3 + 8 = 0 \\ x_3 = -x_1 + 4x_2 + 1 = -5 + 4 + 1 = 0 \\ x_5 = x_1 - 2x_2 + 2 = 5 - 2 + 2 = 5 \end{cases}$$

Beləliklə, verilmiş çoxdəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələsinin optimal həlli:

$$X^{(1)*} = (x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 7,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0)$$

və ya

$$X^{(2)*} = (x_1 = 5,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 5)\text{-dir.}$$

$$\max Z(X^*) = 32$$

Yoxlama: $Z(X^{(1)*}) = 2\cdot 2 + 7\cdot 2 + 2\cdot 7 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 = 32$ və ya

$$Z(X^{(2)*}) = 2\cdot 5 + 7\cdot 1 + 2\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot 5 = 32$$

Cavab: $X^{(1)*} = (x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 7,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0)$ **,** $X^{(2)*} = (x_1 = 5,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 5)$ **olduqda** $\max Z(X^*) = 32$ **olur.**◄

3.2. Simpleks metod

Qrafik üsuldan fərqli olaraq Simleks[1] metod xətti proqramlaşdırma məsələlərinin universal həll metodudur. (Bəzi ədəbiyyatlarda bu metoda planın ardıcıl yaxşılaşdırılması üsulu da deyilir). Simpleks metodu 1947-ci ildə amerika riyaziyyatçısı Corc Dansiq təklif etmişdir. Bu metodun universallığı onunla bağlıdır ki, dəyişənlərin sayından və xətti məhdudiyyətlərin xarakterindən asılı olmayaraq istənilən xətti proqramlaşdırma məsələsini həmişə bu metodla həll etmək mümkündür.

Simpleks metodun alqoritminin yaradılmasının əsasını xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həllər çoxüzlüsündə məqsəd funksiyasının ekstremumunun alınması haqqında məlum teorem təşkil edir (bax 2-ci fəsil §2.3.) Yəni əgər xətti proqramlaşdırma məsələsinin optimal həlli varsa, onda bu optimal həll məsələnin həllər oblastının təpə nöqtələrində alınan dayaq həllərdən ən azı biri ilə üst-üstə düşür. Bu teoremə görə optimal həlli tapmaq üçün sonsuz sayda mümkün həlləri tədqiq etməkdənsə, sonlu sayda dayaq həllərini tədqiq etmək kifayətdir. Həmin teoremə istinadən deyə bilərik ki, məsələnin optimal həlli həmişə yeganə olmur və bir neçə dayaq optimal (alternativ optimum) planlar da mövcud ola bilər.

---

[1] Simpleks termini latın mənşəli «simplekx” sözündən götürülmüşdür və dilimizə “sadə” kimi tərcümə edilir. Simpleks dedikdə n ölçülü fəzada n+1 təpəyə malik sadə qabarıq çoxüzlü başa düşülür.

Deməli, xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həllinin prinsipial sxemini aşağıdakı kimi təsvir etmək olar:

- *Məsələnin bütün dayaq həlləri təyin edilməlidir;*
- *Bu dayaq həllərinin hər biri üçün Z(x) məqsəd funksiyasının qiyməti hesablanmalıdır;*
- *Bu qiymətlərin içərisindən Z(x)-in ekstremal qiyməti seçilməlidir.*

Qeyd edək ki, xətti proqramlaşdırma məsələsinin dayaq həllərinin sayı həddən artıq çox ola bilər və buna görə də dayaq həllərinin nizamlanmış seçimi məsələsi həll edilməlidir. Daha doğrusu, bu seçim hər addımda Z(x) məqsəd funksiyasının monoton dəyişməsinin (artması və ya azalması) təmin edilməsi istiqamətində aparılmalıdır.

Simpleks metodun əsasını məhz bu nizamlanmış seçimin təmin edilməsi təşkil edir.

Maksimum məsələ üçün Simpleks metodun alqoritmini izləyək. Fərz edək ki, aşağıdakı xətti proqramlaşdırmanın maksimum məsələsi verilmişdir.

$$Z(x) = p_1x_1 + ... + p_sx_s + ... + p_nx_n \to \max \qquad (3.4)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1s}x_s + ... + a_{1n}x_n \le a_1 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{r1}x_1 + ... + a_{rs}x_s + ... + a_{rn}x_n \le a_r \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{ms}x_s + ... + a_{mn}x_n \le a_m \end{cases} \qquad (3.5)$$

$$x_1 \ge 0, \quad ..., \quad x_s \ge 0, \quad ..., \quad x_n \ge 0 \qquad (3.6)$$

Bu məsələnin Simpleks metodla həlli aşağıdakı mərhələləri əhatə edir.

1. Bazis dəyişənlərinin seçilməsi və Simpleks cədvəlinin qurulması;

2. Dayaq həllinin tapılması;

3. Optimal həllin tapılması.

I mərhələ: Mənfi olmayan $y_1 \ge 0,...,y_r \ge 0,...,y_m \ge 0$ əlavə dəyişənlərin köməyi ilə (3.5) sisteminin məhdudiyyətlərini tənliklərə çevirək:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1s}x_s + ... + a_{1n}x_n + y_1 = a_1 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{r1}x_1 + ... + a_{rs}x_s + ... + a_{rn}x_n + y_r = a_r \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{ms}x_s + ... + a_{mn}x_n + y_m = a_m \end{cases} \qquad (3.7)$$

(3.7) xətti tənliklər sisteminin əsas matrisini yazaq:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{r1} & \dots & a_{rs} & \dots & a_{rn} & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{ms} & \dots & a_{mn} & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Bu matrisə istinad edərək asanlıqla görmək olar ki, $y_1, y_2, \dots, y_m$ dəyişənləri (3.7) sistemində vahid bazis yaradırlar. Deməli, bu dəyişənlər bazis dəyişənlərdir. (3.7) sistemini bazis dəyişənləri ilə ifadə edək.

$$\begin{cases} y_1 = -a_{11}x_1 - \dots - a_{1s}x_s - \dots - a_{1n}x_n + a_1 \geq 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_r = -a_{r1}x_1 - \dots - a_{rs}x_s - \dots - a_{rn}x_n + a_r \geq 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m = -a_{m1}x_1 - \dots - a_{ms}x_s - \dots - a_{mn}x_n + a_m \geq 0 \end{cases} \qquad (3.8)$$

(3.8) sistemi və (3.4) məqsəd funksiyası əsasında aşağıdakı cədvəli tərtib edək:

	$-x_1 \quad \dots \quad -x_s \quad \dots \quad -x_n$	1
$y_1 =$	$a_{11} \quad \dots \quad a_{1s} \quad \dots \quad a_{1n}$	a_1
$\dots$	$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$	$\dots$
$y_r =$	$a_{r1} \quad \dots \quad a_{rs} \quad \dots \quad a_{rn}$	a_r
$\dots$	$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$	$\dots$
$y_m =$	$a_{m1} \quad \dots \quad a_{ms} \quad \dots \quad a_{mn}$	a_m
$Z(x) =$	$-p_1 \quad \dots \quad -p_s \quad \dots \quad -p_n$	0

(3.1)

(3.1) cədvəlinə ***Simpleks cədvəli*** deyilir.

II mərhələ: Bu mərhələdə məsələnin dayaq həlli tapılır. Həndəsi cəhətdən dayaq həlli dedikdə məsələnin mümkün həllər oblastının (həllər coxüzlüsünün) hər hansı bir təpə nöqtəsinin koordinatları başa düşülür. Məsələnin dayaq həllinin tapılması əlamətini riyazi şəkildə ifadə edək.

Tutaq ki, (3.1) Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda hec bir mənfi element yoxdur. Yəni $a_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m})$ şərtləri ödənir. Onda cədvəlin yuxarısında yerləşən qeyri-bazis dəyişənlərin sıfır qiymətlərində, yəni $x_1 = 0,...,x_s = 0,...,x_n = 0$ olduqda (3.1) cədvəlindən

$$y_1 = a_1 \geq 0$$
$$\dots \quad \dots$$
$$y_r = a_r \geq 0$$
$$\dots \quad \dots$$
$$y_m = a_m \geq 0$$

alınır və (3.8) sisteminin bütün məhdudiyyətləri ödənir. Beləliklə, əgər (3.1) cədvəlinin sərbəst hədlər sütununda heç bir mənfi element yoxdursa, onda qeyri bazis dəyişənlərin sıfır qiymətlərində məsələnin dayaq həlli alınır. Yəni:

$$X_{day} = (x_1 = 0,\ x_2 = 0,...,x_n = 0)$$

və

$$Z(X_{day}) = 0$$

Həndəsi baxımdan bu dayaq həlli n ölçülü fəzanın koordinat sisteminin başlanğıcı deməkdir. Daha doğrusu koordinat başlanğıcı məsələnin həllər oblastının təpə nöqtələrindən biri olur.

Tutaq ki, sərbəst hədlərdən hec olmazsa biri mənfidir, yəni $a_r < 0$. Onda qeyri-bazis dəyişənlərin sıfır qiymətində (3.1) cədvəlindən $y_r = a_r < 0$ alınır və (3.8) sisteminin r -ci bərabərsizliyi ödənmir. Deməli, əgər sərbəst hədlərdən heç olmazsa biri mənfidirsə, onda qeyri-bazis dəyişənlərin sıfır qiymətləri məsələnin dayaq həllini vermir və yeni bazisə keçmək yolu ilə elə bir bazis yaratmaq lazımdır ki, bu bazisdə sərbəst hədlərin heç biri mənfi olmasın. Əgər belə bir bazis mövcud deyilsə, onda məsələnin şərtləri ziddiyyətlidir və onun həlli yoxdur.

Bir bazisdən digərinə keçid Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetmələri vasitəsi ilə həyata keçirilir. Əsas element aşagıdakı qayda üzrə seçilir:

Tutaq ki, (3.1) cədvəlində $a_r < 0$-dır. Onda r-ci sətirə baxılır və bu sətirdə hər hansı bir mənfi element tapılır. Əgər bu halda $a_{rj} \geq 0$ $(j = \overline{1,n})$ olarsa, daha dogrusu r -ci sətirdə heç bir mənfi element yoxdursa, onda yeni bazisə keçid qeyri mümkündür. Daha dogrusu, elə bir bazis mövcud deyildir ki, bu bazisdə baxılan mənfi sərbəst həddi yox etmək mümkün olsun. Bu isə o deməkdir ki, məsələnin şərtləri

ziddiyyətlidir və onun həlli yoxdur. Tutaq ki, baxılan sətirdə heç olmazsa bir mənfi element var, $a_{rs} < 0$ olsun. Onda bu elementin yerləşdiyi s -ci sütun əsas sütun olacaqdır. Əsas sətiri tapmaq üçün sərbəst hədlərin əsas sütunun elementlərinə mənfi olmayan nisbətləri düzəldilir və bu nisbətlərin ən kiçiyi seçilir. Yəni:

$$\min_s \left\{ \frac{a_1}{a_{1s}} \geq 0, \ldots, \frac{a_r < 0}{a_{rs} < 0} > 0, \ldots, \frac{a_m}{a_{ms}} \geq 0 \right\}$$

Tapılmış nisbət əsas sətiri müəyyən edəcəkdir. Əsas sətir ilə əsas sütunun kəsişməsində yerləşən elementi əsas element qəbul edib, (3.1) cədvəli üzərində Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetmələrinin bir addımını atmaqla yeni bazisə keçilir. Bu zaman aşağıdakı iki haldan biri mümkündür:

- *Əsas element r -ci sətirə düşür, yəni a_{rs} - əsas element olur. Onda yeni bazisə keçdikdə Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununun baxılan mənfi elementi müsbətə çevriləcəkdir. Belə ki:*

$$b_r = \frac{a_r < 0}{a_{rs} < 0} > 0$$

- *Əsas element r -ci sətirə deyil, istənilən başqa sətirə düşür. Bu halda yeni bazisdə r -ci sətirin sərbəst həddi kəmiyyətcə dəyişsə də (böyüsə də) işarəsi mənfi olaraq qalır. Onda yenidən həmin sətirə baxılır, burada hər hansı bir mənfi element seçilir və bütün yuxarıda deyilənlər təkrarlanır.*

Proses o vaxta qədər davam edir ki, ya əsas element r -ci sətrə düşür, ya da bu sətirdə heç bir mənfi element qalmır. Bu hallar yuxarıda nəzərdən keçirilmişdir.

Sərbəst hədlər sütununda olan bütün mənfi elementlər bu qayda üzrə yox edilir və məsələnin dayaq həlli tapılır. Beləliklə, Simpleks metodun 2-ci mərhələsi ya dayaq həllin tapılması ilə başa çatır, ya da məsələnin şərtlərinin ziddiyyətli olduğu müəyyən edilir.

III mərhələ: Bu mərhələdə məsələnin məqsəd funksiyasına maksimum qiymət verən optimal həll tapılır. Tutaq ki, 2-ci mərhələ başa çatdıqdan sonra aşağıdakı Simpleks cədvəli alınmışdır. (Sadəlik üçün fərz edəcəyik ki, (3.1) Simpleks cədvəlində yalnız bir mənfi sərbəst hədd ($a_r < 0$) var idi və bu mənfi sərbəst hədd bir addıma yox edilmişdir)

	$-x_1$	...	$-y_r$	...	$-x_n$	1
$y_1 =$	b_{11}	...	b_{1s}	...	b_{1n}	b_1
...	...	...	...	...	...	....
$x_s =$	b_{r1}	...	b_{rs}	...	b_{rn}	b_r
...	...	....	...	...	...	...
$y_m =$	b_{m1}	...	b_{ms}	...	b_{mn}	b_m
$Z(x) =$	q_1	...	q_s	...	q_n	Q

(3.2)

Optimal həllin tapılması əlamətini müəyyən edək. Şərtə görə (3.2) cədvəlində məsələnin dayaq həlli tapılmışdır. Yəni sərbəst hədlərin heç biri mənfi deyil ($b_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$) və qeyri-bazis dəyişənlərin sıfır qiymətlərində, yəni $x_1 = 0,...,y_r = 0,...,x_n = 0$ olduqda:

$$X_{day} = (x_1 = 0,...,x_s = b_r,...,x_n = 0)$$

alınır və

$$Z(X_{day}) = Q$$

olur.

(3.2) cədvəlindən məqsəd funksiyası üçün aşağıdakı analitik ifadə alınır

$$Z(x) = -q_1x_1 - ... - q_sy_r - ... - q_nx_n + Q \qquad (3.9)$$

Fərz edək ki, Z sətir elementlərindən heç biri mənfi deyil. Onda qeyri-bazis dəyişənlərin sıfır qiymətində (3.9) ifadəsindən $Z(x) = Q$ alınır. İstənilən bazis dəyişikliyi zamanı isə (tutaq ki, $y_r \neq 0$).

$$Z(x) = -[(q_s > 0)(y_r > 0)] + Q < Q$$

olur və funksiyanın qiyməti azalır. Deməli, (3.2) cədvəlinin Z sətrində heç bir mənfi element yoxdursa istənilən bazis dəyişikliyi funksiyanın qiymətini azaldır.

Tutaq ki, Z sətirində heç olmazsa bir mənfi element var, $q_s < 0$ olsun. Onda $y_r \neq 0$ olduqda (3.9) ifadəsindən

$$Z(x) = -[(q_s < 0)(y_r > 0)] + Q > Q$$

alınır və funksiyanın qiyməti artır. Deməli, əgər Simpleks cədvəlin Z sətirində mənfi element varsa, onda məqsəd funksiyasının artma meyli hələ tükənməmişdir və yeni bazisə keçməklə onu artırmaq imkanı mövcuddur.

Beləliklə, xətti proqramlaşdırmanın maksimum məsələsi Simpleks metodla həll edilən zaman dayaq həllin optimallıq əlaməti ondan ibarətdir ki, Z sətirində heç bir mənfi element olmasın. Əgər bu əlamət ödənmirsə, onda yeni bazisə keçmək yolu ilə bu əlamətin ödəndiyi bazis qurulur.

Bir bazisdən digərinə keçid Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetmələrinin köməyi ilə aparılır. $q_s < 0$ halı üçün əsas elementin seçilməsi qaydasını müəyyən edək:

- *s -ci sütun əsas sütun olur. Əsas sətiri tapmaq üçün sərbəst hədlərin əsas sütun elementlərinə mənfi olmayan nisbətlərin ən kiçiyi seçilir. Yəni:*

$$\min_s \left\{ \frac{b_1}{b_{1s}} \geq 0, \ldots, \frac{b_r}{b_{rs}} \geq 0, \ldots, \frac{b_m}{b_{ms}} \geq 0 \right\}$$

Tapılmış nisbət əsas sətiri müəyyən edəcəkdir. Bu halda əsas element hökmən s -ci sütuna düşür və yeni bazisdə Z sətirinin baxılan mənfi elementi yox edilir. Belə ki, alırıq:

$$q'_s = \frac{-(q_s < 0) > 0}{b_{rs} > 0} > 0$$

Z sətirində olan bütün mənfi elementlər bu qayda üzrə yox edilir. Əgər $q_s < 0$ halında cədvəldə $b_{is} \leq 0$ $(i = \overline{1, m})$ olarsa, (yəni bu sütunda heç bir müsbət element olmazsa), onda heç bir bazisdə Z sətirinin baxılan mənfi elementini yox etmək olmur. Bu halda məsələnin məqsəd funksiyası yuxarıdan qeyri məhduddur, yəni

$$\max Z(x) = +\infty$$

Qeyd: *Əgər ən kiçik nisbət sərbəst həddin sıfır olması halında yaranırsa, onda yalnız $a_{ij} > 0$ halında bu elementi əsas element kimi qəbul etmək məqsədəuyğundur.*

Xətti proqramlaşdırmanın ***minimum məsələsi*** Simpleks metodla iki yolla həll edilir:

- *minimum məsələnin maksimum məsələsinə gətirilməklə həlli*
- *minimum məsələnin bilavasitə Simpleks metodla həlli*

Birinci yolla məsələni həll etmək üçün $F(x) = -Z(x)$ şərtini ödəyən (yəni (3.4) məqsəd funksiyası «-1»-ə vurulur) yeni xətti funksiya qurulur. Yuxarıdakı alqoritmə əsasən verilmiş şərtlər daxilində bu yeni funksiyanın maksimum qiyməti tapılır. Tutaq ki, məsələnin həlli başa çatmışdır və X^* optimal plan tapılmışdır, $\max F(X^*) = Q$ olsun.

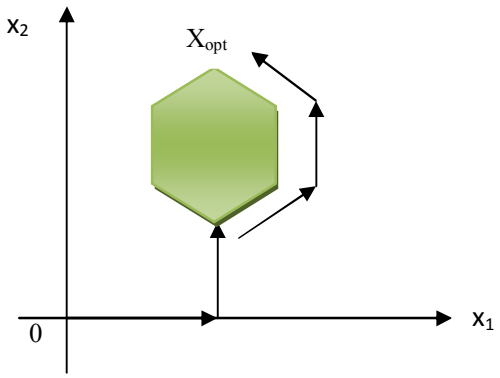
Onda bu optimal həll eyni zamanda minimum məsələnin də optimal həlli olacaqdır və $Z(x)$ məqsəd funksiyasının minimum qiyməti:

$$\min Z(X^*) = -\max F(X^*) = -Q \text{ -yə}$$

bərabər olacaqdır.

Minimum məsələni bilavasitə Simpleks metodla həll edən zaman isə maksimum məsələsi üçün verilmiş alqoritmin 3 mərhələsi icra edilməlidir. 1 və 2 mərhələlərin məzmunu maksimum məsələ üçün verdiyimiz alqoritmin uyğun mərhələləri ilə eynidir. 3-cü mərhələdə isə optimal planın tapılması əlaməti Z sətirində müsbət elementin olmamasından ibarətdir (əlamət maksimum məsələdə olduğu kimi əsaslandırılır) Yeni bazisə keçid qaydası maksimum məsələdə olduğu kimidir.

İsbat edilir ki, Simpleks metodun alqoritmi monoton və sonlu alqoritmdir. Alqoritmin monotonluğu onunla əsaslandırılır ki, hər dəfə yeni bazisə keçdikdə (bir təpə nöqtəsindən digərinə keçdikdə) funksiyanın qiyməti pisləşmir (maksimum məsələdə artır və ya bərabər qalır, minimum məsələ üçün azalır və ya bərabər qalır). Alqoritmin sonlu olması onunla əsaslandırılır ki, məsələnin həllər oblastının təpə nöqtələrinin sayı məhdud olduğundan sonlu sayda bazis çevirmələrindən sonra məsələnin optimal həlli tapılır. Həndəsi baxımdan Simpleks metod məsələnin həllər çoxüzlüsünün bir təpə nöqtəsindən digərinə keçid alqoritmidir (şəkil 3.12).



Şəkil 3.12

Indi isə xətti proqramlaşdırma məsələsinin Simpleks metodla həllinə aid misallara baxaq:

►Məsələ 3.7. Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks metodla həll edin (məhdudiyyət şərtləri yalnız bərabərsizliklərdən ibarət olan xətti proqramlaşdırma məsələsi):

$$Z(x) = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \to \max(\min) \qquad (3.10)$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge -4 \end{cases} \qquad (3.11)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \qquad (3.12)$$

Həlli: a) Fərz edək ki, (3.10)-(3.12) xətti proqramlaşdırma məsələsində məqsəd funksiyasının maksimum qiyməti axtarılır. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi bu məsələnin Simpleks metodla həlli 3 mərhələdə aparılır.

1-ci mərhələ: Mənfi olmayan $y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0$ əlavə dəyişənlərin köməyi ilə (3.11) sisteminin məhdudiyyət şərtlərini tənliklərə çevirək (2-ci bərabərsizlik (-1)-ə vurularaq «$\le$» şəklinə gətirilmişdir):

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + y_1 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + y_2 = 4 \end{cases} \qquad (3.13)$$

$y_1,\ y_2$ dəyişənlərinin əmsalları vahid matris əmələ gətirdiyi üçün bu dəyişənlər bazis dəyişənləridir. (4) sistemini bazis dəyişənləri vasitəsilə ifadə edək:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3 \ge 0 \\ y_2 = -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4 \ge 0 \end{cases} \qquad (3.14)$$

(3.14) sistemi və (3.10) məqsəd funksiyası əsasında Simpleks cədvəli tərtib edək:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-1	2	3	3
$y_2 =$	2	-3	-1	4
$Z(x) =$	-2	3	-5	0

(3.3)

2-ci mərhələ: Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi dayaq həllin tapılması əlaməti ondan ibarətdir ki, Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda heç bir mənfi element olmasın. (3.3) Simpleks cədvəlində hər iki sərbəst hədd müsbətdir. Odur ki, cədvəlin yuxarısında yerləşmiş

qeyri bazis dəyişənlərin sıfır qiymətlərində, yəni $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ olduqda məsələnin aşağıdakı dayaq həlli tapılır:

$$X_{day}^{(1)} = (x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0); \qquad Z(X_{day}^{(1)}) = 0$$

3-cü mərhələ: Bu mərhələdə məsələnin optimal həlli tapılır. Bu optimal həll (3.10) məqsəd funksiyasına maksimum qiymət verəcəkdir. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, əgər məsələdə məqsəd funksiyasının maksimum qiyməti axtarılırsa, onda optimal həllin tapılması əlaməti Simpleks cədvəlin məqsəd funksiyası sətirində mənfi elementin olmamasından ibarətdir. (3.3) Simpleks cədvəlində mənfi elementlər var. Deməli 2-ci mərhələdə tapdığımız dayaq həlli optimal həll deyil. Odur ki, Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetmələrinin köməyi ilə bir bazisdən digərinə keçmək yolu ilə optimallıq şərtinin ödəndiyi bazisi tapmaq lazımdır.

Yuxarıda təsvir etdiyimiz qaydalara əsaslanaraq (3.3) Simpleks cədvəlinin $Z(x)$ sətirindəki mənfi elementləri yox edək. Əvvəlcə bu sətirdəki (-2) elementini yox edək. (-2)-nin sütununda cəmi bir müsbət element olduğu üçün əsas element kimi $a_{21} = 2$ elementini seçəcəyik.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-1	2	3	3
$y_2 =$	$\langle 2 \rangle$	-3	-1	4
$Z(x) =$	-2	3	-5	0

	$-y_2$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	1	5	10
$x_1 =$	1	-3	-1	4
$Z(x) =$	2	0	-12	8

: (2)

	$-y_2$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	$1/2$	$1/2$	$5/2$	5
$x_1 =$	$1/2$	$-3/2$	$-1/2$	2
$Z(x) =$	1	0	-6	4

Sonuncu Simpleks cədvəldən alınan

$$X_{day}^{(2)} = (x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0)$$

dayaq planı da optimal plan deyil, çünki $Z(x)$ sətirində (-6) elementi var. Bu mənfi elementi də yox edək:

	$-y_2$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	$1/2$	$1/2$	$\langle 5/2 \rangle$	5
$x_1 =$	$1/2$	$-3/2$	$-1/2$	2
$Z(x) =$	1	0	-6	4

	$-y_2$	$-x_2$	$-y_1$	1	
$x_3 =$	$1/2$	$1/2$	1	5	
$x_1 =$			$1/2$	$15/2$	:(5/2)
$Z(x) =$	$11/2$	3	6	40	

	$-y_2$	$-x_2$	$-y_1$	1
$x_3 =$				2
$x_1 =$				3
$Z(x) =$	$11/5$	$6/5$	$12/5$	16

Sonuncu Simpleks cədvəlin $Z(x)$ sətirində heç bir mənfi element qalmamışdır. Deməli, bu cədvəldə məsələnin optimal həlli tapılmışdır. (Məhz buna görə də cədvəlin bütün elementlərinin qiymətlərini hesablamağa ehtiyac yoxdur). Əgər $y_2 = 0,\ x_2 = 0,\ y_1 = 0$ qəbul etsək, aşağıdakı optimal həlli alırıq:

$$X_{opt}^{*} = (x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2)$$

$$\max Z(X^{*}) = 16$$

Yoxlama: $Z(x) = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2 \cdot 3 - 0 + 5 \cdot 2 = 6 + 10 = 16$

b) Fərz edək ki, (3.10)-(3.12) məsələsində məqsəd funksiyasının minimum qiyməti axtarılır. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, bu məsələnin həll alqoritmi maksimum məsələnin həll alqoritmindən yalnız 3-cü mərhələ ilə fərqlənir. Yəni 1-ci və 2-ci mərhələlər a) halındakı uyğun mərhələlərlə eyni olacaqdır və $X_{day}^{(1)} = (x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0)$ planı bu məsələ üçün də dayaq həlli olacaqdır.

3-cü mərhələ: Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, xətti proqramlaşdırmanın minimum məsələsi Simpleks metodla həll edilən zaman optimal həllin tapılması əlaməti məqsəd funksiyası sətirində müsbət elementin olmamasından ibarətdir. (3.3) Simpleks cədvəlində Z sətirində (+3) elementi olduğu üçün 2-ci mərhələnin sonunda aldığımız dayaq planı optimal deyil. Odur ki, Dəyişdirilmiş Jordan əvəzetmələrinin köməyi ilə yeni bazisə keçməklə Z sətirindəki bu müsbət elementi yox edək:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-1	$\langle 2 \rangle$	3	3
$y_2 =$	2	-3	-1	4
$Z(x) =$	-2	3	-5	0

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	1
$x_2 =$	-1	1	3	3
$y_2 =$		3		17
$Z(x) =$	-1	-3	-19	-9

: (2)

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	1
$x_2 =$				$3/2$
$y_2 =$				$17/2$
$Z(x) =$	$-1/2$	$-3/2$	$-19/2$	$-9/2$

Sonuncu Simpleks cədvəlin $Z(x)$ sətirində heç bir müsbət element qalmamışdır. Deməli, bu cədvəldə məsələnin optimal həlli tapılmışdır və $x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ x_3 = 0$ qəbul etsək, aşağıdakı optimal həlli alırıq:

$$X^*_{opt} = (x_1 = 0,\ x_2 = 3/2,\ x_3 = 0)$$

$$\min Z(X^*) = -9/2$$

Yoxlama: $Z(x) = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 - 3\cdot 3/2 + 0 = -9/2$

Cavab:a) $X^*_{opt} = (x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2)$ *olduqda* $\max Z(X^*) = 16$ *olur*

b) $X^*_{opt} = (x_1 = 0,\ x_2 = 3/2,\ x_3 = 0)$ *olduqda* $\min Z(X^*) = -9/2$ *olur*.◄

►Məsələ 3.8. Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks metodla həll edin (optimal həllin yeganə olmaması halı):

$$Z(x) = 2x_1 - x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ 2x_1 - x_2 \ge 2 \\ -x_1 - 2x_2 \ge -10 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0$$

Həlli: Məsələni Simpleks metodla həll edək:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + y_1 = -4 \\ -2x_1 + x_2 + y_2 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + y_3 = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 4 \ge 0 \\ y_2 = 2x_1 - x_2 - 2 \ge 0 \\ y_3 = -x_1 - 2x_2 + 10 \ge 0 \end{cases}$$

	$-x_1$	$-x_2$	1
$y_1 =$	-1	-1	-4
$y_2 =$	-2	1	-2
$y_3 =$	1	2	10
$Z(x) =$	-2	1	0

Məsələnin dayaq planını tapaq. Əvvəlcə (-4) sərbəst həddi yox edək:

$$\min\left\{\frac{-4}{-1};\ \frac{10}{2}\right\} = \frac{-4}{-1}$$

olduğu üçün əsas element olaraq $a_{12} = -1$ elementini seçib yeni bazisə keçirik:

	$-x_1$	$-x_2$	1
$y_1 =$	-1	$\langle -1 \rangle$	-4
$y_2 =$	-2	1	-2
$y_3 =$	1	2	10
$Z(x) =$	-2	1	0

	$-x_1$	$-y_1$	1
$x_2 =$	-1	1	-4
$y_2 =$	3	-1	6
$y_3 =$	1	-2	-2
$Z(x) =$	3	-1	4

: (-1)

	$-x_1$	$-y_1$	1
$x_2 =$	1	-1	4
$y_2 =$	-3	1	-6
$y_3 =$	-1	2	2
$Z(x) =$	-3	1	-4

Sonuncu Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda (-6) elementi olduğu üçün məsələnin dayaq həlli tapılmamışdır və bu mənfi sərbəst hədd yox edilməlidir:

$\min\left\{\frac{4}{1};\ \frac{-6}{-3}\right\} = \frac{-6}{-3}$ olduğu üçün əsas element olaraq $b_{21} = -3$ elementini seçib yeni bazisə keçirik:

	$-x_1$	$-y_1$	1
$x_2 =$	1	-1	4
$y_2 =$	$\langle -3 \rangle$	1	-6
$y_3 =$	-1	2	2
$Z(x) =$	-3	1	-4

	$-y_2$	$-y_1$	1	
$x_2 =$	-1	2	-6	
$x_1 =$	1	1	-6	: (-3)
$y_3 =$	1	-5	-12	
$Z(x) =$	3	0	-6	

	$-y_2$	$-y_1$	1
$x_2 =$	$1/3$	$-2/3$	2
$x_1 =$	$-1/3$	$-1/3$	2
$y_3 =$	$-1/3$	$5/3$	4
$Z(x) =$	-1	0	2

Sonuncu Simpleks cədvəlində sərbəst hədlərin heç biri mənfi deyil. Odur ki, $y_2 = 0,\ \ y_1 = 0$ qiymətlərində aşağıdakı dayaq həlli alırıq:

$$X_{day} = (x_1 = 2,\ \ x_2 = 2); \qquad Z(X_{day}) = 2$$

Məsələnin optimal həllini tapaq. Cədvəlin $Z(x)$ sətirində heç bir müsbət element olmadığı üçün bu dayaq həll həmçinin optimal həlldir və $Z(x) = 2$ məqsəd funksiyasının minimum qiymətidir.

Sonuncu Simpleks cədvəlin $Z(x)$ sətirində "0" elementinin olması göstərir ki, tapdığımız $X^*_{opt} = (x_1 = 2,\ x_2 = 2)$ optimal həlli məsələnin yeganə optimal həlli deyildir və alternativ optimal həllər mövcuddur. Bu planları tapaq:

	$-y_2$	$-y_1$	1
$x_2 =$	$1/3$	$-2/3$	2
$x_1 =$	$-1/3$	$-1/3$	2
$y_3 =$	$-1/3$	$\langle 5/3 \rangle$	4
$Z(x) =$	-1	0	2

	$-y_2$	$-y_3$	1	
$x_2 =$	$1/3$	$2/3$	6	
$x_1 =$	$-2/3$	$1/3$	$14/3$	: (5/3)
$y_1 =$	$-1/3$	1	4	
$Z(x) =$	$-5/3$	0	$10/3$	

	$-y_2$	$-y_3$	1
$x_2 =$	$1/5$	$2/5$	$18/5$
$x_1 =$	$-2/5$	$1/5$	$14/5$
$y_1 =$	$-1/5$	$3/5$	$12/5$
$Z(x) =$	-1	0	2

Sonuncu Simpleks cədvəldən $y_2 = 0,\ y_3 = 0$ olduqda yeni optimal plan tapılır:

$$X^{(2)*} = (x_1 = 14/5\ ,\ x_2 = 18/5); \qquad \min Z(X^*) = 2$$

Prosesi davam etdirək və yeni alternativ optimal plan tapaq:

$$\min\left\{\frac{18}{5}:\frac{2}{5};\ \frac{14}{5}:\frac{1}{5};\ \frac{12}{5}:\frac{3}{5}\right\} = \frac{12}{5}:\frac{3}{5}$$

olduğu üçün əsas element olaraq $b_{23} = 3/5$ elementini götürürük:

	$-y_2$	$-y_3$	1
$x_2 =$	$1/5$	$2/5$	$18/5$
$x_1 =$	$-2/5$	$1/5$	$14/5$
$y_1 =$	$-1/5$	$\langle 3/5 \rangle$	$12/5$
$Z(x) =$	-1	0	2

	$-y_2$	$-y_1$	1	
$x_2 =$	$1/5$	$-2/5$	$6/5$	
$x_1 =$	$-1/5$	$-1/5$	$6/5$	
$y_3 =$	$-1/5$	1	$12/5$	: (3/5)
$Z(x) =$	$-3/5$	0	$6/5$	

	$-y_2$	$-y_1$	1
$x_2 =$	$1/3$	$-2/3$	2
$x_1 =$	$-1/3$	$-1/3$	2
$y_3 =$	$-1/3$	$5/3$	4
$Z(x) =$	-1	0	2

Göründüyü kimi, sonuncu Simpleks cədvəli ilkin optimal planın alındığı Simpleks cədvəlin təkrarıdır və buradan $X^{(1)*} = (x_1 = 2,\ x_2 = 2)$ optimal həlli tapılır. Deməli, məsələnin 2 alternativ optimal həlli vardır və məqsəd funksiyasının minimum qiyməti 2-ə bərabərdir.

Cavab: $X^{(1)*} = (x_1 = 2,\ x_2 = 2)$ və $X^{(2)*} = (x_1 = 14/5\ ,\ x_2 = 18/5)$ **olduqda** $\min Z(X^*) = 2$ **olur.**◄

3.3. Qarışıq şərtli və sərbəst dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələlərinin Simpleks metodla həll alqoritmi

Bəzən elə xətti proqramlaşdırma məsələlərinə rast gəlinir ki, bu məsələlərin məhdudiyyət şərtlərinə həm bərabərsizliklər, həm də tənliklər daxil olur. Belə məsələlərə ***qarışıq şərtli xətti proqramlaşdırma məsələləri*** deyilir. Bu tip məsələlər Simpleks metodla həll edilən zaman tənliklərə daxil edilən əlavə dəyişənlər «0» qiymətli olduğu üçün vahid bazis yaranmır. Odur ki, vahid bazis olmadan Simpleks cədvəlinə keçmək lazım gəlir. Bu halda Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetmələrinin köməyi ilə həmin «0»-lar ardıcıl olaraq cədvəlin yuxarısına keçirilir və hər dəfə yuxarı keçmiş «0»-a uyğun gələn sütun silinir. Bütün «0»-ı bu qayda ilə cədvəlin solundan yuxarı keçirib müvafiq sütunlar silindikdən sonra cədvəlin solunda vahid bazis yaranır və bundan sonra məsələnin həllini adi qayda üzrə davam etdirmək lazımdır.

Bəzi xətti proqramlaşdırma məsələlərində sərbəst dəyişənlər iştirak edə bilər (yəni: $x_j >=< 0$). Belə məsələlərə ***sərbəst dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələləri*** deyilir. Bu məsələlərin Simpleks metodla həlli zamanı bir sıra hazırlıq işləri görülməlidir. Belə ki. Simpleks cədvələ keçdikdən sonra bu sərbəst dəyişənlər Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetməsinin köməyi ilə ardıcıl olaraq cədvəlin sol tərəfinə keçirilir və hər dəfə bu dəyişənin analitik ifadəsi tapılaraq uyğun sətirlər cədvəldən silinir. Sonra məsələ adi qayda ilə həll edilərək sərbəst olmayan (mənfi olmayan) dəyişənlər ücün optimal qiymətlər tapılır. Daha sonra bu qiymətlər sərbəst dəyişənlərin analitik ifadəsində yerinə yazılaraq, həmin dəyişənlərin konkret ədədi qiymətləri tapılır.

Bu tip xətti proqramlaşdırma məsələlərinin Simpleks metodla həllinə aid misallara baxaq.

►Məsələ 3.9. Aşağıdakı qarışıq şərtli xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks metodla həll edin:

$$Z(x) = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 \le -2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 \qquad + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$$

Həlli: Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, əgər məsələnin məhdudiyyət şərtləri içərisində tənliklər varsa, onda bu məhdudiyyət şərtlərinə daxil edilən əlavə dəyişənlər $y_i = 0$ qiymətli olur və əlavə edilən y_i dəyişənlərinin əmsalları vahid matris əmələ gətirmir. Bu halda Simpleks cədvəlinə keçdikdə cədvəlin sol tərəfində "0" yaranır.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 + y_1 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + y_2 = 4 \\ x_1 \qquad + 2x_3 + 0 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 - 2 \ge 0 \\ y_2 = x_1 - 2x_2 - x_3 + 4 \ge 0 \\ 0 = -x_1 \qquad - 2x_3 + 2 \end{cases}$$

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-1	-1	2	-2
$y_2 =$	-1	2	1	4
$0 =$	1	0	2	2
$Z(x) =$	-3	-2	-3	0

Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetməsinin 1 addımını tətbiq etməklə Simpleks cədvəlin solunda yerləşmiş 0-ı x_1 dəyişəni ilə əvəz edək və yuxarı keçmiş "0"-a uyğun gələn 1-ci sütunu silək[2]:

[2] Bu halda "0"-ı x_3 dəyişəni ilə də əvəz etmək olar. x_2 dəyişəni 3-cü məhdudiyyət şərtində iştirak etmədiyi üçün "0"-ı x_2 dəyişəni ilə əvəz etmək mümkün deyil.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-1	-1	2	-2
$y_2 =$	-1	2	1	4
$0 =$	$\langle 1 \rangle$	0	2	2
$Z(x) =$	-3	-2	-3	0

	0	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	-1	4	0
$y_2 =$	1	2	3	6
$x_1 =$	1	0	2	2
$Z(x) =$	3	-2	3	6

	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-1	4	0
$y_2 =$	2	3	6
$x_1 =$	0	2	2
$Z(x) =$	-2	3	6

Asanlıqla görmək olar ki, sonuncu Simpleks cədvəlin solunda y_1, y_2, x_1 dəyişənlərinin əmsalları vahid matris verir, deməli vahid bazis yaranmışdır və məsələnin həllini adi qaydada davam etdirmək olar. Sərbəst hədlərin heç biri mənfi olmadığı üçün $x_2 = 0,\ x_3 = 0$ qiymətlərində $X_{day} = (x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0)$ dayaq həlli tapılır və $Z(X_{day}) = 6$ olur. Məsələnin optimal həllini tapmaq üçün $Z(x)$ sətirində olan (-2) elementini yox edək:

	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-1	4	0
$y_2 =$	$\langle 2 \rangle$	3	6
$x_1 =$	0	2	2
$Z(x) =$	-2	3	6

	$-y_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	1		6
$x_2 =$	1	3	6
$x_1 =$	0		4
$Z(x) =$	2	12	24

: (2)

	$-y_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$			3
$x_2 =$			3
$x_1 =$			2
$Z(x) =$	1	6	12

Sonuncu Simpleks cədvəlin $Z(x)$ sətirində heç bir mənfi element qalmamışdır. Odur ki, cədvəlin yuxarısında yerləşmiş qeyri-bazis dəyişənlərinin sıfır qiymətlərində, daha doğrusu $y_2 = 0,\ x_3 = 0$ olduqda məsələnin optimal həllini alırıq:

$$X^*_{opt} = (x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 0)$$

$$\max Z(X^*) = 12$$

Yoxlama: $Z(x) = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 0 = 6 + 6 = 12$

Cavab: $X^*_{opt} = (x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 0)$ *olduqda* $\max Z(X^*) = 12$ *olur*

Qeyd edək ki, qarışıq şərtli xətti proqramlaşdırma məsələsini başqa yolla, yəni məhdudiyyətlər sistemində tənlikləri bərabərsizliklərlə əvəz etməklə də həll etmək olar. Belə ki:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

xətti tənliyi

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i \end{cases}$$

şəklində iki bərabərsizliklə əvəz etmək mümkündür. Yuxarıda həll etdiyimiz qarışıq şərtli xətti proqramlaşdırma məsələsini bu qayda ilə həll edək:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 \le -2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 \qquad + 2x_3 \ge 2 \\ x_1 \qquad + 2x_3 \le 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 \le -2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4 \\ -x_1 \qquad - 2x_3 \le -2 \\ x_1 \qquad + 2x_3 \le 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 + y_1 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + y_2 = 4 \\ -x_1 \qquad - 2x_3 + y_3 = -2 \\ x_1 \qquad + 2x_3 + y_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 - 2 \ge 0 \\ y_2 = x_1 - 2x_2 - x_3 + 4 \ge 0 \\ y_3 = x_1 \qquad + 2x_3 - 2 \ge 0 \\ y_4 = -x_1 \qquad - 2x_3 + 2 \ge 0 \end{cases}$$

Simpleks cədvəli tərtib edək:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-1	-1	2	-2
$y_2 =$	-1	2	1	4
$y_3 =$	-1	0	-2	-2
$y_4 =$	1	0	2	2
$Z(x) =$	-3	-2	-3	0

Məsələnin dayaq həllini tapaq. Əvvəlcə $a_1 = -2$ mənfi sərbəst həddi yox edək:

$$\min\left\{\frac{-2}{-1};\ \frac{-2}{-1};\ \frac{2}{1}\right\} = \frac{-2}{-1}$$

olduğu üçün əsas element olaraq $a_{11} = -1$ elementini seçirik (qeyd edək ki, əsas element olaraq $a_{31} = -1$ və $a_{41} = 1$ elementlərini də götürə bilərik, belə ki, aldığımız bu nisbətlər bərabərdir):

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	$\langle -1 \rangle$	-1	2	-2
$y_2 =$	-1	2	1	4
$y_3 =$	-1	0	-2	-2
$y_4 =$	1	0	2	2
$Z(x) =$	-3	-2	-3	0

	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$x_1 =$	1	-1	2	-2
$y_2 =$	1	-3	1	-6
$y_3 =$	1	-1	4	0
$y_4 =$	-1	1	-4	0
$Z(x) =$	3	-1	9	-6

: (-1)

	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$x_1 =$	-1	1	-2	2
$y_2 =$	-1	3	-1	6
$y_3 =$	-1	1	-4	0
$y_4 =$	1	-1	4	0
$Z(x) =$	-3	1	-9	6

Sonuncu Simpleks cədvəldə sərbəst hədlərin heç biri mənfi deyil. Odur ki, cədvəlin yuxarısında yerləşən qeyri-bazis dəyişənlərin sıfır qiymətlərində ($y_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$) aşağıdakı dayaq həlli alırıq:

$$X_{day} = (x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0)$$

$$Z(X_{day}) = 6$$

Məsələnin optimal həllini tapmaq üçün sonuncu Simpleks cədvəlin Z sətirində olan mənfi elementləri yox edək. Əvvəlcə bu sətirdəki $q_1 = -3$ elementini yox edək. Asanlıqla yəqin etmək olar ki, əsas element olaraq $a_{41} = 1$ elementi seçilməlidir.

	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$x_1 =$	-1	1	-2	2
$y_2 =$	-1	3	-1	6
$y_3 =$	-1	1	-4	0
$y_4 =$	$\langle 1 \rangle$	-1	4	0
$Z(x) =$	-3	1	-9	6

	$-y_4$	$-x_2$	$-x_3$	1
$x_1 =$	1	0	2	2
$y_2 =$	1	2	3	6
$y_3 =$	1	0	0	0
$y_1 =$	1	-1	4	0
$Z(x) =$	3	-2	3	6

Z sətirindəki $q_2 = -2$ elementini yox etmək üçün əsas element olaraq $a_{22} = 2$ elementinin seçiləcəyi şübhəsizdir. Beləliklə, alırıq:

	$-y_4$	$-x_2$	$-x_3$	1
$x_1 =$	1	0	2	2
$y_2 =$	1	$\langle 2 \rangle$	3	6
$y_3 =$	1	0	0	0
$y_1 =$	1	-1	4	0
$Z(x) =$	3	-2	3	6

	$-y_4$	$-y_2$	$-x_3$	1
$x_1 =$		0		4
$x_2 =$	1	1	3	6
$y_3 =$		0		0
$y_1 =$		1		6
$Z(x) =$	8	2	12	24

: (2)

	$-y_4$	$-y_2$	$-x_3$	1
$x_1 =$				2
$x_2 =$				3
$y_3 =$				0
$y_1 =$				3
$Z(x) =$	4	1	6	12

Sonuncu Simpleks cədvəlin $Z(x)$ sətirində heç bir mənfi element qalmamışdır. Deməli, məsələnin optimal həlli alınmışdır. $y_4 = 0,\ \ y_2 = 0,\ \ x_3 = 0$ olduqda məsələnin optimal həllini tapırıq:

$$X^*_{opt} = (x_1 = 2,\ \ x_2 = 3,\ \ x_3 = 0)$$

$$\max Z(X^*) = 12$$

Göründüyü kimi, tapılmış optimal həll qarışıq şərtli məsələnin bilavasitə həllindən alınan optimal həllə üst-üstə düşür. ◄

►Məsələ 3.10. Aşağıdakı sərbəst dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks metodla həll edin:

$$Z(x) = x_1 - 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ -3x_1 - 2x_2 \ge 2 \end{cases}$$

$$x_1 >=< 0, \qquad x_2 \ge 0$$

Həlli: Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, əgər məsələdə sərbəst dəyişən varsa, onda Simpleks cədvələ keçdikdən sonra bu sərbəst dəyişən Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetməsinin 1 addımının köməyi ilə

cədvəlin sol tərəfinə keçirilir və onun üçün analitik ifadə müəyyən edilir. Sonra isə bu sərbəst dəyişənə uyğun gələn sətir cədvəldən silinir. İlk əvvəl y_1, y_2, y_3 əlavə dəyişənlərinin köməyi ilə məsələnin məhdudiyyət şərtlərini tənliklərə çevirək.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + y_1 = 6 \\ x_1 + x_2 + y_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + y_3 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = -2x_1 - 3x_2 + 6 \geq 0 \\ y_2 = -x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ y_3 = -3x_1 - 2x_2 - 2 \geq 0 \end{cases}$$

Simpleks cədvəlinə keçək. $a_{31} = 3$ elementini əsas element kimi götürərək x_1 sərbəst dəyişəni Simpleks cədvəlin sol tərəfinə keçirək (qeyd edək ki, əsas element kimi $a_{11} = 2$ və ya $a_{21} = 1$ elementlərini də götürə bilərik):

	$-x_1$	$-x_2$	1
$y_1 =$	2	3	6
$y_2 =$	1	1	2
$y_3 =$	$\langle 3 \rangle$	2	-2
$Z(x) =$	-1	2	0

	$-y_3$	$-x_2$	1
$y_1 =$	-2	5	22
$y_2 =$	-1	1	8
$x_1 =$	1	2	-2
$Z(x) =$	1	8	-2

: (3)

	$-y_3$	$-x_2$	1
$y_1 =$	$-2/3$	$5/3$	$22/3$
$y_2 =$	$-1/3$	$1/3$	$8/3$
$x_1 =$	$1/3$	$2/3$	$-2/3$
$Z(x) =$	$1/3$	$8/3$	$-2/3$

Sonuncu Simpleks cədvəldən x_1 sərbəst dəyişən üçün aşağıdakı analitik ifadə alırıq:

$$x_1 = -\tfrac{1}{3}y_3 - \tfrac{2}{3}x_2 - \tfrac{2}{3}$$

Cədvəldən x_1 sərbəst dəyişənə uyğun gələn 3-cü sətiri sildikdən sonra bu cədvəl aşağıdakı şəklə düşəcəkdir:

	$-y_3$	$-x_2$	1
$y_1 =$	$-\tfrac{2}{3}$	$\tfrac{5}{3}$	$\tfrac{22}{3}$
$y_2 =$	$-\tfrac{1}{3}$	$\tfrac{1}{3}$	$\tfrac{8}{3}$
$Z(x) =$	$\tfrac{1}{3}$	$\tfrac{8}{3}$	$-\tfrac{2}{3}$

Bu Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda mənfi element yoxdur. Deməli, məsələnin dayaq həlli tapılmışdır. Digər tərəfdən, cədvəlin məqsəd funksiyası sətirində də heç bir mənfi element yoxdur. Deməli, bu dayaq həll həm də məsələnin optimal həlli olacaqdır. Odur ki, $y_3 = 0,\ x_2 = 0$ qiymətlərində aşağıdakı optimal həll alınır:

$$X^*_{opt} = (x^*_2 = 0,\ y^*_1 = \tfrac{22}{3},\ y^*_2 = \tfrac{8}{3}, y^*_3 = 0)$$

Dəyişənlərin optimal qiymətlərini x_1 sərbəst dəyişənin ifadəsində yerinə yazsaq, bu sərbəst dəyişən üçün aşağıdakı qiymət alınacaqdır:

$$x_1 = -\tfrac{1}{3}y_3 - \tfrac{2}{3}x_2 - \tfrac{2}{3} = -\tfrac{1}{3}\cdot 0 - \tfrac{2}{3}\cdot 0 - \tfrac{2}{3} = -\tfrac{2}{3}$$

Beləliklə, sərbəst dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələsi üçün aşağıdakı optimal plan alınır:

$$X^*_{opt} = (x_1 = -\tfrac{2}{3},\ x_2 = 0)$$

$$\max Z(X^*) = -\tfrac{2}{3}$$

Cavab: $X^*_{opt} = (x_1 = -\tfrac{2}{3},\ x_2 = 0)$ *olduqda* $\max Z(X^*) = -\tfrac{2}{3}$ *olur* ◄

►Məsələ 3.11. Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks metodla həll edin (məqsəd funksiyasının məhdud olmaması halı):

$$Z(x) = x_1 + x_2 - 4x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le -3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$$

Biz yuxarıda qarışıq şərtli xətti proqramlaşdırma məsələsinin həlinin izahını verdiyimiz üçün bu məsələnin həllini şərhsiz icra edəcəyik:

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_3 + y_1 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + y_2 = 5 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 0 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3 \ge 0 \\ y_2 = x_1 - 2x_2 - x_3 + 5 \ge 0 \\ 0 = -x_1 + x_2 + 3x_3 + 7 \end{cases}$$

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-1	-3	2	-3
$y_2 =$	-1	2	1	5
$0 =$	$\langle 1 \rangle$	-1	-3	7
$Z(x) =$	-1	-1	4	0

	0	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	-4	-1	4
$y_2 =$	1	1	-2	12
$x_1 =$	1	-1	-3	7
$Z(x) =$	1	-2	1	7

	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-4	-1	4
$y_2 =$	1	-2	12
$x_1 =$	-1	-3	7
$Z(x) =$	-2	1	7

Sonuncu cədvəldə y_1, y_2, x_1 dəyişənləri bazis dəyişənləridir və məsələnin həllini adi qaydada davam etdirmək olar. Sərbəst hədlərdən heç biri mənfi deyil, deməli, cədvəlin yuxarısında yerləşən x_2, x_3 qeyri-bazis dəyişənlərinin sıfır qiymətlərində aşağıdakı dayaq həlli alırıq:

$$X_{day} = (x_1 = 7,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0); \qquad Z(X_{day}) = 7$$

$Z(x)$ sətirində müsbət element olduğu üçün bu dayaq həll optimal həll deyil və yeni bazisə keçərək bu müsbət elementi (yəni 1-i) yox etmək lazımdır. Lakin həmin elementin yerləşdiyi 2-ci sütunda heç bir müsbət element yoxdur. Deməli, yeni bazisə keçmək və bu müsbət elementi yox etmək mümkün deyil. Bu isə o deməkdir ki, məsələnin məhdudiyyət şərtləri ilə müəyyən edilən oblastda bu məsələnin məqsəd funksiyası aşağıdan məhdud deyil, $\min Z(X) = -\infty$.

Cavab: Məqsəd funksiyası aşağıdan məhdud olmadığı üçün məsələnin optimal həlli yoxdur.

Məsələ 3.12. Aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks metodla həll edin (məhdudiyyət şərtlərinin ziddiyyətli olması halı):

$$Z(x) = 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -8 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 16 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

Həlli: Məsələni qarışıq şərtli xətti proqramlaşdırma məsələsi kimi həll edək:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 0 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + y_2 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + y_3 = -16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -x_1 + x_2 - x_3 + 6 \\ y_2 = x_1 - 2x_2 - x_3 + 8 \geq 0 \\ y_3 = -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 16 \geq 0 \end{cases}$$

Simpleks cədvəli quraq və bərabərlik şərtinə uyğun gələn “0”-ı cədvəlin yuxarısına keçirib müvafiq sütunu silək:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$0=$	$\langle 1\rangle$	-1	1	6
$y_2=$	-1	2	1	8
$y_3=$	2	-1	-2	-16
$Z(x)=$	-5	-7	-9	0

	0	$-x_2$	$-x_3$	1
$x_1=$	1	-1	1	6
$y_2=$	1	1	2	14
$y_3=$	-2	1	-4	-28
$Z(x)=$	5	-12	-4	30

	$-x_2$	$-x_3$	1
$x_1=$	-1	1	6
$y_2=$	1	2	14
$y_3=$	1	-4	-28
$Z(x)=$	-12	-4	30

Göründüyü kimi, sonuncu Simpleks cədvəlin sol tərəfindəki x_1, y_2, y_3 dəyişənləri bazis dəyişənləridir və məsələnin həllini adi qaydada davam etdirmək olar. Əvvəlcə sərbəst hədlər sütunundakı (-28) elementini yox edək:

$$\min\left\{\frac{6}{1};\ \frac{14}{2};\ \frac{-28}{-4}\right\}=\frac{6}{1}$$

olduğu üçün x_1 dəyişəni bazisdən çıxacaq və qeyri-bazis dəyişəni olacaqdır. x_3 dəyişəni isə sol tərəfə keçərək bazis dəyişəni olacaqdır.

	$-x_2$	$-x_3$	1
$x_1=$	-1	$\langle 1\rangle$	6
$y_2=$	1	2	14
$y_3=$	1	-4	-28
$Z(x)=$	-12	-4	30

	$-x_2$	$-x_1$	1
$x_3 =$	-1	1	6
$y_2 =$	3	-2	2
$y_3 =$	-3	4	-4
$Z(x) =$	-16	4	54

Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda mənfi element olduğu üçün dayaq həll tapılmamışdır və bu mənfi sərbəst hədd yox edilməlidir.

$$\min\left\{\frac{2}{3};\ \frac{-4}{-3}\right\} = \frac{2}{3}$$

olduğu üçün y_2 dəyişəni bazisdən çıxacaq, x_2 dəyişəni isə sol tərəfə keçərək bazis dəyişəni olacaqdır.

	$-x_2$	$-x_1$	1
$x_3 =$	-1	1	6
$y_2 =$	$\langle 3 \rangle$	-2	2
$y_3 =$	-3	4	-4
$Z(x) =$	-16	4	54

	$-y_2$	$-x_1$	1
$x_3 =$	1	1	20
$x_2 =$	1	-2	2
$y_3 =$	3	6	-6
$Z(x) =$	16	-20	194

: (3)

	$-y_2$	$-x_1$	1
$x_3 =$	$1/3$	$1/3$	$20/3$
$x_2 =$	$1/3$	$-2/3$	$2/3$
$y_3 =$	1	2	-2
$Z(x) =$	$16/3$	$-20/3$	$194/3$

Sonuncu Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda (-2) elementi olduğu üçün dayaq həlli tapılmamışdır. Odur ki, yeni bazisə keçməklə bu mənfi sərbəst həddi yox etmək lazımdır. Lakin (-2) sərbəst həddin yerləşdiyi 3-cü sətirdə heç bir mənfi element yoxdur. Deməli, heç bir bazisdə bu mənfi sərbəst həddi yox etmək mümkün olmayacaqdır. Odur ki, məsələnin şərtləri ziddiyyətlidir və onun həlli yoxdur.

Cavab: Məsələnin məhdudiyyət şərtləri sistemi ziddiyyətlidir və onun həlli yoxdur.◄

►Məsələ 3.13. Aşağıdakı qarışıq şərtli və sərbəst dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks metodla həll edin:

$$Z(x) = 10x_1 + 5x_2 + 11x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 10 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \qquad = 6 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 >=< 0, \quad x_3 \ge 0$$

Həlli: Biz yuxarıda sərbəst dəyişənli və qarışıq şərtli xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllini araşdırmışıq. Odur ki, məsələnin həllini izahsız veririk:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 + y_1 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + y_2 = 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 + y_3 = -2 \\ x_1 + x_2 \qquad + 0 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 8 \ge 0 \\ y_2 = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 10 \ge 0 \\ y_3 = -x_1 + x_2 - x_3 - 2 \ge 0 \\ 0 = -x_1 - x_2 \qquad + 6 \end{cases}$$

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-2	3	1	8
$y_2 =$	1	2	-2	10
$y_3 =$	1	-1	1	-2
$0 =$	1	$\langle 1 \rangle$	0	6
$Z(x) =$	-10	-5	-11	0

	$-x_1$	0	$-x_3$	1
$y_1 =$	-5	-3	1	-10
$y_2 =$	-1	-2	-2	-2
$y_3 =$	2	1	1	4
$x_2 =$	1	1	0	6
$Z(x) =$	-5	5	-11	30

	$-x_1$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-5	1	-10
$y_2 =$	-1	-2	-2
$y_3 =$	2	1	4
$x_2 =$	1	0	6
$Z(x) =$	-5	-11	30

Sonuncu cədvəldən x_2 sərbəst dəyişəninin analitik ifadəsini yazaq:

$$x_2 = -x_1 + 6$$

x_2 -nin yerləşdiyi sətiri cədvəldən silək və məsələnin həllini Simpleks metodla davam etdirək:

	$-x_1$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-5	1	-10
$y_2 =$	-1	-2	-2
$y_3 =$	2	1	4
$Z(x) =$	-5	-11	30

Məsələnin dayaq həllini tapaq. Əvvəlcə sərbəst hədlər sütununda olan (-10) elementini yox edək. Birinci sətirdəki (-5)-in yerləşdiyi 1-ci sütun əsas sütun olacaqdır.

$$\min\left\{\frac{-10}{-5};\ \frac{-2}{-1};\ \frac{4}{2}\right\}=\frac{-2}{-1}$$

olduğu üçün 2-ci sətir əsas sətir, bu sətirlə 1-ci sütunun kəsişməsində yerləşən $a_{21}=-1$ elementi isə əsas element olacaqdır. Bu əsas elementə görə Simpleks cədvəli üzərində Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetməsinin bir addımını tətbiq edərək yeni bazisə keçək.

	$-x_1$	$-x_3$	1
$y_1=$	-5	1	-10
$y_2=$	$\langle -1\rangle$	-2	-2
$y_3=$	2	1	4
$Z(x)=$	-5	-11	30

	$-y_2$	$-x_3$	1	
$y_1=$	5	-11	0	
$x_1=$	1	-2	-2	: (-1)
$y_3=$	-2	3	0	
$Z(x)=$	5	1	-40	

	$-y_2$	$-x_3$	1
$y_1=$	-5	11	0
$x_1=$	-1	2	2
$y_3=$	2	-3	0
$Z(x)=$	-5	-1	40

Sonuncu Simpleks cədvəldə sərbəst hədlərin heç biri mənfi deyil. Odur ki, $y_2=0,\ x_3=0$ qiymətlərində aşağıdakı dayaq həlli alırıq:

$$X_{day}=(x_1=2,\ x_3=0);\qquad Z(X_{day})=40$$

$Z(x)$ sətirində mənfi elementlər olduğu üçün bu dayaq həlli optimal həll deyil və yeni bazisə keçərək bu mənfi elementləri yox etmək lazımdır.

	$-y_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-5	11	0
$x_1 =$	-1	2	2
$y_3 =$	$\langle 2 \rangle$	-3	0
$Z(x) =$	-5	-1	40

	$-y_3$	$-x_3$	1
$y_1 =$	5	7	0
$x_1 =$	1	1	4
$y_2 =$	1	-3	0
$Z(x) =$	5	-17	80

: (2)

	$-y_3$	$-x_3$	1
$y_1 =$	$5/2$	$\langle 7/2 \rangle$	0
$x_1 =$	$1/2$	$1/2$	2
$y_2 =$	$1/2$	$-3/2$	0
$Z(x) =$	$5/2$	$-17/2$	40

	$-y_3$	$-y_1$	1
$x_3 =$	$5/2$	1	0
$x_1 =$		$-1/2$	7
$y_2 =$		$3/2$	0
$Z(x) =$	$60/2$	$17/2$	140

: (7/2)

	$-y_3$ $\quad$ $-y_1$	1
$x_3 =$		0
$x_1 =$		2
$y_2 =$		0
$Z(x) =$	$60/7$ $\quad$ $17/7$	40

Sonuncu Simpleks cədvəlin $Z(x)$ sətirində heç bir mənfi element qalmamışdır. Deməli, bu cədvəldə $y_3 = 0,\ y_1 = 0$ qəbul etsək, sərbəst olmayan x_1 və x_3 dəyişənləri üçün aşağıdakı optimal qiymətlər alırıq:

$$x_1^* = 2,\ x_3^* = 0$$

Bu qiymətləri x_2 sərbəst dəyişəninin analitik ifadəsində yerinə yazsaq:

$$x_2 = -x_1 + 6 = -2 + 6 = 4$$

alarıq.

Deməli, məsələnin optimal həlli

$$X^* = (x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 0)$$

şəklindədir və bu optimal həll məsələnin məqsəd funksiyasına $\max Z(X^*) = 40$ qiymətini verir.

Yoxlama: $Z(x) = 10x_1 + 5x_2 + 11x_3 = 10 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 0 = 20 + 20 = 40$

Cavab: $X^* = (x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 0)$ *olduqda* $\max Z(X^*) = 40$ *olur* ◀

Mövzu üzrə praktikum

3.14-3.73 xətti proqramlaşdırma məsələlərini Qrafik üsulu ilə həll edin			
3.14	$Z(x)=2x_1+x_2\to\max(\min)$ $\begin{cases} x_1+x_2\le 12 \\ 2x_1-x_2\le 12 \\ 2x_1-x_2\ge 0 \\ 2x_1+x_2\ge 4 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$	3.15	$Z(x)=3x_1+x_2\to\max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1+x_2\ge -4 \\ x_1+x_2\ge 0 \\ x_1+2x_2\ge 2 \\ x_1-x_2\le 2 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$
3.16	$Z(x)=x_1-3x_2\to\max(\min)$ $\begin{cases} -x_1+x_2\le 6 \\ -2x_1+x_2\le 6 \\ x_1+3x_2\ge -3 \\ x_1-2x_2\le 2 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$	3.17	$Z(x)=3x_1+5x_2\to\min$ $\begin{cases} x_1+x_2\ge 0 \\ 3x_1+x_2\le 3 \\ 5x_1+4x_2\ge 20 \\ x_1-x_2\ge 0 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$
3.18	$Z(x)=4x_1-3x_2\to\max(\min)$ $\begin{cases} -x_1+x_2\le 5 \\ 5x_1-2x_2\le 20 \\ 8x_1-3x_2\ge 0 \\ 5x_1-6x_2\le 0 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$	3.19	$Z(x)=2x_1+5x_2\to\max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1-x_2\ge 0 \\ 2x_1+x_2\le 16 \\ -2x_1+5x_2\ge 3 \\ -x_1+2x_2\le 2 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$
3.20	$Z(x)=-x_1+4x_2\to\max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 24 \\ -8x_1+3x_2\le 24 \\ 2x_1-3x_2\le 12 \\ 4x_1+3x_2\ge -12 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$	3.21	$Z(x)=x_1+3x_2\to\max$ $\begin{cases} -2x_1+x_2\le 2 \\ -x_1+2x_2\le 7 \\ x_1+3x_2\le 18 \\ 4x_1-3x_2\le 12 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$
3.22	$Z(x)=x_1+2x_2\to\max$ $\begin{cases} x_2\le 6 \\ -3x_1+x_2\le 12 \\ x_1+x_2\ge 0 \\ x_1-x_2\le 0 \\ x_1+2x_2\le 12 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$	3.23	$Z(x)=x_1+4x_2\to\max(\min)$ $\begin{cases} -4x_1+x_2\le 4 \\ -x_1+x_2\le 5 \\ -x_1+2x_2\le 2 \\ 3x_1+4x_2\ge 12 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$

3.24	$Z(x)=3x_1+4x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases}4x_1-x_2\ge 0\\ -x_1+x_2\le 3\\ 3x_1+2x_2\ge 6\\ 2x_1-5x_2\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$	3.25	$Z(x)=-3x_1+2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases}-3x_1+2x_2\le 12\\ 3x_1-2x_2\le 6\\ 3x_1+x_2\ge 3\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$
3.26	$Z(x)=2x_1-4x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases}5x_1-2x_2\ge 0\\ -x_1+2x_2\le 8\\ x_1-3x_2\le 3\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$	3.27	$Z(x)=2x_1-x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases}-x_1+x_2\le 2\\ 2x_1+3x_2\ge 16\\ x_1+x_2\le 10\\ 2x_1-x_2\le 8\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$
3.28	$Z(x)=2x_1+3x_2 \to \max$ $\begin{cases}-2x_1+x_2\le 2\\ x_1-3x_2\ge -9\\ 4x_1+3x_2\le 24\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$	3.29	$Z(x)=3x_1+2x_2 \to \max$ $\begin{cases}2x_1-x_2\ge 0\\ -x_1+2x_2\le 3\\ x_2\le 3\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$
3.30	$Z(x)=2x_1+3x_2 \to \max$ $\begin{cases}-6x_1+x_2\le 3\\ -5x_1+9x_2\le 45\\ x_1-3x_2\le 3\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$	3.31	$Z(x)=2x_1+4x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases}2x_1+x_2\ge 9\\ x_1+2x_2\le 15\\ x_1+2x_2\ge 9\\ 2x_1+x_2\le 15\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$
3.32	$Z(x)=2x_1+2x_2 \to \max$ $\begin{cases}-3x_1+2x_2\le 4\\ -x_1+2x_2\le 8\\ x_1+x_2\le 10\\ 4x_1-x_2\le 20\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$	3.33	$Z(x)=x_1-3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases}-x_1+2x_2\le 12\\ 2x_1-x_2\le 6\\ -x_1+x_2\le 3\\ 2x_1+x_2\le 6\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$
3.34	$Z(x)=15x_1+10x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases}6x_1-x_2\ge 3\\ -x_1+2x_2\le 8\\ 3x_1+2x_2\le 24\\ x_1-x_2\le 3\\ x_1+2x_2\ge 2\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$	3.35	$Z(x)=3x_1-x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases}-3x_1+2x_2\le 6\\ 2x_1-3x_2\le 6\\ x_1\le 6\\ x_2\le 6\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$

3.36	$Z(x)=3x_1+2x_2 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1-x_2 \ge 0 \\ x_1-x_2 \ge -2 \\ 4x_1-x_2 \le 16 \\ 2x_1-x_2 \le 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$	3.37	$Z(x)=x_1-2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1-x_2 \ge -2 \\ -x_1+2x_2 \le 7 \\ -4x_1+3x_2 \ge -12 \\ x_1+3x_2 \ge 18 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$
3.38	$Z(x)=3x_1+6x_2 \to \max$ $\begin{cases} -4x_1+x_2 \ge 0 \\ x_1-x_2 \ge -3 \\ 2x_1-3x_2 \le 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$	3.39	$Z(x)=4x_1+6x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 4x_1-5x_2 \ge 0 \\ 2x_1-3x_2 \le 0 \\ 2x_1+3x_2 \ge 6 \\ 2x_1+x_2 \ge 2 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$
3.40	$Z(x)=5x_1+5x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -2x_1+x_2 \le 2 \\ -x_1+3x_2 \ge 9 \\ x_1+x_2 \ge 3 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$	3.41	$Z(x)=-x_1+4x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1-3x_2 \le 6 \\ 3x_1-2x_2 \le 6 \\ 2x_1+3x_2 \ge 0 \\ x_1+x_2 \ge -1 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$
3.42	$Z(x)=-x_1-x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -3x_1+2x_2 \le 4 \\ -x_1+2x_2 \le 8 \\ x_1+x_2 \ge 10 \\ 4x_1-x_2 \le 20 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$	3.43	$Z(x)=x_1+4x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2 \ge 6 \\ -2x_1+3x_2 \ge 6 \\ x_1+x_2 \le 3 \\ 2x_1-3x_2 \le 0 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$
3.44	$Z(x)=5x_1-x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1-3x_2 \le 0 \\ -5x_1+9x_2 \le 45 \\ x_1-2x_2 \le 4 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$	3.45	$Z(x)=x_1-4x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1-3x_2 \le 0 \\ x_1-x_2 \ge 0 \\ 2x_1+x_2 \ge 6 \\ 2x_1+3x_2 \le 18 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$
3.46	$Z(x)=4x_1+2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -3x_1+2x_2 \le 6 \\ x_1+2x_2 \ge 10 \\ x_1-3x_2 \le 6 \\ x_1+x_2 \ge 3 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$	3.47	$Z(x)=-5x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1-3x_2 \ge 0 \\ x_1+3x_2 \ge 9 \\ x_1-3x_2 \le 3 \\ -x_1+3x_2 \le 3 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

3.48	$Z(x) = -3x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0 \\ 2x_1 - x_2 \le 0 \\ x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$	3.49	$Z(x) = 4x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ 3x_1 - x_2 \ge 0 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$
3.50	$Z(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 0 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$	3.51	$Z(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 \le 0 \\ 3x_1 + x_2 \ge 6 \\ 3x_1 - x_2 \ge 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$
3.52	$Z(x) = 3x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ 3x_1 - 2x_2 \ge 0 \\ x_1 - x_2 \le 0 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$	3.53	$Z(x) = 2x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6 \\ 6x_1 - 4x_2 = 12 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$
3.54	$Z(x) = 3x_1 + x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$	3.55	$Z(x) = x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ -3x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$
3.56	$Z(x) = x_1 + 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1 - x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 \ge 0 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$	3.57	$Z(x) = 3x_1 - x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 12 \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$
3.58	$Z(x) = -2x_1 + x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \ge 12 \\ -x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \le 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$	3.59	$Z(x) = -3x_1 + x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

3.60	$Z(x) = -x_1 + 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ -4x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 = 12 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$	3.61	$Z(x) = -x_1 + 2x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1 + x_2 = 8 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 \le 12 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$
3.62	$Z(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 + 3x_2 = 9 \\ x_1 \le 7 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$	3.63	$Z(x) = -x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 12 \\ -3x_1 - x_2 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 \le 4 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$
3.64	$Z(x) = 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min$ $\begin{cases} 13x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 8 \\ -7x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2 \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = 1,2,3,4$	3.65	$Z(x) = 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \max$ $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ 5x_1 - 8x_2 - 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = 1,2,3,4$
3.66	$Z(x) = x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 \to \max$ $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -6x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 = 10 \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = 1,2,3,4$	3.67	$Z(x) = 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -6 \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = 1,2,3,4$
3.68	$Z(x) = 6x_1 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 16 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 34 \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,5}$	3.69	$Z(x) = 3x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -22 \\ -6x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 17 \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,5}$
3.70	$Z(x) = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \to \min$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,5}$	3.71	$Z(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = 1,2,3,4$

3.72	$Z(x)=11x_1-4x_2+2x_3-5x_4+2x_5\to\min$ $\begin{cases}-x_1+7x_2-2x_3-2x_4+x_5=5\\ 2x_1+2x_2-x_3+x_5=18\\ 2x_1-4x_2+x_3+x_4=8\end{cases}$ $x_j\ge 0, j=\overline{1,5}$	3.73	$Z(x)=x_1-6x_2+2x_3-x_4+3x_5\to\max$ $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=14\\ 3x_1-3x_2-x_3+x_5=1\\ 4x_2+x_3+x_4=12\end{cases}$ $x_j\ge 0, j=\overline{1,5}$

3.74-3.121 xətti proqramlaşdırma məsələlərini Simpleks metodla həll edin

3.74	$Z(x)=2x_1-x_2\to\max$ $\begin{cases}6x_1-x_2\le 4\\ 4x_1+x_2\ge 2\\ -x_1+2x_2\le 10\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$	3.75	$Z(x)=2x_1-3x_2-x_3\to\max$ $\begin{cases}3x_1+x_2-x_3\le 3\\ -x_1+2x_2-x_3\ge 2\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
3.76	$Z(x)=2x_1+3x_2+x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1+3x_2+5x_3\le 15\\ x_1+x_2+x_3\le 7\\ 2x_1+x_2+4x_3\le 12\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	3.77	$Z(x)=-4x_1-2x_2+x_3\to\min$ $\begin{cases}3x_1-2x_2+4x_3\le 6\\ 2x_1+x_2+3x_3\le 18\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$
3.78	$Z(x)=3x_1+4x_2+x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3\le 10\\ 2x_1+x_2+2x_3\le 6\\ 3x_1+x_2+2x_3\le 12\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	3.79	$Z(x)=-3x_1-2x_2+x_3\to\min$ $\begin{cases}-3x_1+x_2+2x_3\le 3\\ x_1+2x_2+3x_3\le 14\\ 2x_1+x_2+3x_3\le 16\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
3.80	$Z(x)=x_1+x_2+x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3\le 7\\ 2x_1+x_2+3x_3\le 9\\ 3x_1+x_2+4x_3\le 12\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	3.81	$Z(x)=-x_1+x_2-3x_3\to\min$ $\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3\le 2\\ x_1+3x_2+x_3\le 6\\ x_1+x_2-x_3\le 2\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
3.82	$Z(x)=-3x_1-2x_2-2x_3\to\min$ $\begin{cases}x_2+x_3\le 4\\ 2x_1+x_2+2x_3\le 6\\ 2x_1-x_2+2x_3\le 2\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	3.83	$Z(x)=6x_1+7x_2+9x_3\to\min$ $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3\ge 5\\ x_1+x_2+x_3\ge 2\\ x_1+2x_2+6x_3\ge 4\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$

3.84	$Z(x) = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 \qquad - x_3 \ge -4 \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	3.85	$Z(x) = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$
3.86	$Z(x) = -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 \ge -4 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	3.87	$Z(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$
3.88	$Z(x) = x_1 - x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \le 24 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	3.89	$Z(x) = 4x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \le 12 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$
3.90	$Z(x) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 12 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	3.91	$Z(x) = x_1 - 3x_2 - 2x_3 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 13 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 11 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$
3.92	$Z(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \ge 11 \\ x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -23 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \ge -2 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	3.93	$Z(x) = x_1 - 8x_2 - 3x_3 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le -4 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$
3.94	$Z(x) = -x_1 - 3x_2 - x_3 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \ge 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le -2 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	3.95	$Z(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 \le -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 \qquad + x_3 \le 1 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$

3.96	$Z(x)=x_1+4x_2+3x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1-3x_2+2x_3=3\\2x_1+4x_2+x_3\le 18\\-x_1+x_2+3x_3\ge 10\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	3.97	$Z(x)=2x_1+x_2+2x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3\ge 2\\-2x_1+x_2+2x_3=2\\-2x_1-x_2+2x_3\ge -6\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
3.98	$Z(x)=-2x_1-2x_2-2x_3\to\min$ $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3\le 4\\x_1-x_2+x_3=2\\3x_1+x_2+2x_3\ge 6\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	3.99	$Z(x)=2x_1+2x_2-3x_3\to\max$ $\begin{cases}3x_1+x_2+3x_3\ge 6\\x_1+x_2+x_3=4\\3x_1-3x_2+x_3\ge -4\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
3.100	$Z(x)=x_1+3x_2+x_3\to\min$ $\begin{cases}3x_1+x_2+x_3\ge 6\\x_1+3x_2+x_3=10\\x_1-3x_2+x_3\ge -6\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	3.101	$Z(x)=-3x_1-2x_2-2x_3\to\min$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3\ge 3\\x_1\qquad+x_3\le 2\\x_1-x_2-x_3=-1\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
3.102	$Z(x)=2x_1+3x_2+2x_3\to\max$ $\begin{cases}2x_1+3x_2-2x_3=2\\-3x_1-6x_2+3x_3\ge -5\\4x_1+3x_2-x_3=3\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	3.103	$Z(x)=-2x_1+8x_2+3x_3\to\min$ $\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3\ge 12\\x_1+x_2+x_3=8\\2x_1-3x_2+x_3\ge -8\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
3.104	$Z(x)=2x_1+2x_2-5x_3\to\min$ $\begin{cases}2x_1-2x_2+3x_3\ge 12\\x_1-x_2+x_3\ge -2\\2x_1-x_2+2x_3=24\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	3.105	$Z(x)=6x_1+7x_2+9x_3\to\min$ $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3\ge 5\\-x_1+x_2+x_3=2\\-x_1-x_2+x_3\ge -2\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$

3.106	$Z(x) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min$ $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 4x_3 \le -1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	3.107	$Z(x) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \ge 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 12 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$
3.108	$Z(x) = 6x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \ge -7 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	3.109	$Z(x) = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 \le -6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 12 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$
3.110	$Z(x) = -11x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 \quad + 5x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0, \ x_4 \ge 0$	3.111	$Z(x) = x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 \quad + x_4 = 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0, \ x_4 \ge 0$
3.112	$Z(x) = 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5 \to \min$ $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 \le 18 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \ge 2 \\ x_1 + 2x_2 \quad \le 4 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 >=< 0$	3.113	$Z(x) = 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5 \to \max$ $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 \le 18 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \ge 2 \\ x_1 + 2x_2 \quad \le 4 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 >=< 0$
3.114	$Z(x) = 6x_2 + 5x_3 - 8 \to \min$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 12 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \le 13 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 4 \end{cases}$ $x_1 >=< 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	3.115	$Z(x) = 2x_1 + 7x_2 + 11 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 12 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 \le 4 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 >=< 0, \quad x_3 \ge 0$

3.116	$Z(x)=2x_1+5x_2+x_3\to\max$ $\begin{cases}-3x_1-x_2+x_3\le 5\\ 2x_1+4x_2-4x_3\le 3\\ 3x_1+5x_2+x_3\le 6\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3 >=< 0$	3.117	$Z(x)=4x_2-2x_3+8\to\min$ $\begin{cases}-2x_1+3x_2+x_3\ge 3\\ 6x_1-2x_2+x_3\le 11\\ -x_1+x_2+2x_3\le 9\\ x_1-4x_2+2x_3\le 8\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3 >=< 0$
3.118	$Z(x)=4x_2-2x_3+8\to\max$ $\begin{cases}-2x_1+3x_2+x_3\ge 3\\ 6x_1-2x_2+x_3\le 11\\ -x_1+x_2+2x_3\le 9\\ x_1-4x_2+2x_3\le 8\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3 >=< 0$	3.119	$Z(x)=2x_1+7x_2+11\to\min$ $\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3\ge 2\\ x_1+3x_2+x_3\le 6\\ 2x_1-x_2+2x_3\le 12\\ 4x_1+x_2-x_3\le 4\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2 >=< 0,\quad x_3\ge 0$
3.120	$Z(x)=5x_1\qquad+2x_3+12\to\min$ $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3\le 3\\ x_1+4x_2+x_3\ge 11\\ 2x_1-x_2+3x_3\le 7\\ \qquad x_2+x_3=5\end{cases}$ $x_1 >=< 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	3.121	$Z(x)=4x_1+2x_2-x_3+3\to\min$ $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3\le 8\\ -x_1+2x_2+4x_3\ge 3\\ x_1-x_2+2x_3\le 7\\ x_1+\qquad x_3=5\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3 >=< 0$
3.122	$Z(x)=2x_1+x_2-3x_3+1\to\min$ $\begin{cases}-x_1+x_2+x_3\le 10\\ x_1-2x_2-x_3\ge 5\\ x_1-3x_2+2x_3\le 7\\ \qquad x_2+x_3=6\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2 >=< 0,\quad x_3\ge 0$	3.123	$Z(x)=4x_1-10x_2+9\to\max$ $\begin{cases}3x_1-x_2+2x_3\le 8\\ 2x_1+3x_2-x_3\le 6\\ x_1-2x_2+3x_3\le 10\\ x_1+x_2\qquad=4\end{cases}$ $x_1 >=< 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$

Mövzu üzrə testlər

1.Xətti proqramlaşdırma məsələsinin qrafik üsulu ilə həll alqoritminə aid aşağıdakı mülahizələrdən hansının doğru olduğunu təyin edin:

A) Qrafik üsulu ilə ixtiyari xətti optimallaşdırma modelini həll etmək olar;

B) Qrafik üsulu ilə yalnız 1 dəyişənli xətti optimallaşdırma modeli həll edilir;

C) Qrafik üsulu ilə yalnız 2 dəyişənli xətti optimallaşdırma modelini həll etmək olar;

D) Qrafik üsulu ilə yalnız 3 dəyişənli xətti optimallaşdırma modelini həll etmək olar;

E) Qrafik üsulu ilə 2 və 3 dəyişənli xətti optimallaşdırma modelini həll etmək olar, lakin bu üsul əsasən 2 dəyişənli məsələlərin həllinə tətbiq edilir.

2.Xətti proqramlaşdırma məsələsinin qrafik üsulu ilə həllinə aid aşağıdakı mülahizələrdən hansının doğru olduğunu təyin edin:

A) Modelin həllər çoxluğunu qurmaq üçün düz xətlərin əmələ gətirdiyi üçbucağı tapmaq lazımdır;

B) Modelin həllər çoxluğu ayrı-ayrı şərtlərin həllər oblastlarının kəsişməsindən alınır;

C) Modelin həllər çoxluğunu qurmaq üçün düz xətlərin əmələ gətirdiyi dördbucaqlını tapmaq lazımdır;

D) Modelin həllər çoxluğunu qurmaq üçün düz xətlərin əmələ gətirdiyi çoxbucaqlını tapmaq lazımdır;

E) Modelin həllər çoxluğunu qurmaq üçün onun qoşmasını yazmaq lazımdır.

3.Xətti proqramlaşdırma məsələsinin qrafik üsulu ilə həllinə aid aşağıdakı mülahizələrdən doğru olanını seçin:

A) Modelin həllər çoxluğu həmişə məhdud çoxluq olur;

B) Modelin həllər çoxluğu həmişə qeyri-məhdud çoxluq olur;

C) Modelin həllər çoxluğu həm məhdud, həm də qeyri-məhdud çoxluq ola bilər;

D) Modelin həllər çoxluğu həm məhdud, həm də qeyri-məhdud çoxluq ola bilər, lakin heç vaxt qabarıq olmur;

E) Modelin həllər çoxluğu həm məhdud, həm də qeyri-məhdud çoxluq ola bilər, lakin həmişə qabarıq çoxluqdur.

4.Xətti proqramlaşdırma məsələsinin qrafik üsulu ilə həllinə aid aşağıdakı sualın doğru cavabını tapın.

- *Əgər modelin həllər çoxbucaqlısı qeyri-məhdud oblastdırsa və Z=0 düz xətti daima bu oblastı kəsərək, heç bir nöqtədə ona dayaq olmursa, onda:*

A) Modelin məqsəd funksiyası verilmiş oblastda aşağıdan məhdud, yuxarıdan isə qeyri-məhduddur;
B) Modelin məqsəd funksiyası verilmiş oblastda yuxarıdan məhdud, aşağıdan isə qeyri-məhduddur;
C) Modelin məqsəd funksiyası verilmiş oblastda həm yuxarıdan, həm də aşağıdan qeyri-məhduddur;
D) Modelin məqsəd funksiyası verilmiş oblastda həm aşağıdan, həm də yuxarıdan məhduddur;
E) Məsələnin şərtləri ziddiyyətlidir və onun həlli yoxdur.

5.Aşağıdakı sualın doğru cavabını tapın.

- *n>3 halında xətti optimallaşdırma modelinin Qrafik üsulla həllinin mümkünlüyü üçün aşağıdakı şərtlər ödənməlidir:*

A) Modelin məhdudiyyət şərtləri də üçdən artıq olmalıdır;
B) Modelin məhdudiyyət şərtləri yalnız bərabərliklərdən ibarət olmalıdır;
C) Modelin məhdudiyyət şərtləri yalnız xətti asılı olmayan tənliklərdən ibarət olmalı, məchulların sayı ilə məhdudiyyət şərtlərinin sayı arasındakı fərq isə 2-yə bərabər olmalıdır;
D) Modelin məchulların sayı ilə məhdudiyyət şərtlərinin sayı arasındakı fərq 2-yə bərabər olmalıdır;
E) Modelin məchulların sayı ilə məhdudiyyət şərtlərinin sayı arasındakı fərq 2-yə bərabər olmalı, məhdudiyyət şərtlərindən isə heç olmazsa biri tənlik şəklində olmalıdır.

6.Xətti proqramlaşdırma məsələsinin qrafik üsulu ilə həllinə aid aşağıdakı mülahizələrdən doğru olanını seçin:

A) Modelin мəqsəd funksiyasının ən böyük qiyməti həllər çoxbucaqlısının koordinat başlanğıcından ən uzaq təpə nöqtəsində alınır;
B) Modelin мəqsəd funksiyasının ən böyük qiyməti həllər çoxbucaqlısının koordinat başlanğıcına nəzərən ən yaxın təpə nöqtəsində alınır;
C) Modelin мəqsəd funksiyasının əmsallarından asılı olaraq funksiyanın ən böyük qiyməti həllər çoxbucaqlısının istənilən təpə nöqtəsində alına bilər;
D) Modelin мəqsəd funksiyasının ən böyük qiyməti həllər çoxbucaqlısının ixtiyari nöqtəsində alına bilər;

E) Modelin şərtləri ziddiyyətli deyilsə, onda məqsəd funksiyasının maksimum qiyməti uyğun fəzanın istənilən nöqtəsində alına bilər.

7. $Z \to \max$ **və** $Z \to \min$ **halları üçün xətti proqramlaşdırma məsələlərinin Simpleks üsulla həll alqoritmlərinin müqayisəli izahına aid aşağıdakı cavablardan doğru olanını seçin:**

A) Bu alqoritmlər tamamilə üst-üstə düşür;
B) Alqoritmlərin yalnız birinci mərhələləri üst-üstə düşür;
C)Alqoritmlərin 1-ci və 2-ci mərhələləri üst-üstə düşür;
D) Alqoritmlərin yalnız 3 mərhələləri üst-üstə düşür;
E) Alqoritmlərin heç bir mərhələsi üst-üstə düşmür.

8. $Z \to \max$ **və** $Z \to \min$ **halları üçün xətti proqramlaşdırma məsələlərinin Simpleks üsulla həlli zamanı optimal planın alınması əlamətlərinin müqayisəsinə aid aşağıdakı cavablardan doğru olanını seçin:**

A) Həm maksimum, həm də minimum halı üçün dayaq planın optimallıq əlaməti eynidir;
B) Maksimum halı üçün dayaq planın optimallıq əlaməti Simpleks cədvəlin Z sətirində mənfi elementin olmamasından, minimum halı üçün isə müsbət elementin olmamasından ibarətdir;
C) Maksimum halı üçün dayaq planın optimallıq əlaməti Simpleks cədvəlin Z sətirində müsbət elementin olmamasından, minimum halı üçün isə mənfi elementin olmamasından ibarətdir;
D) Maksimum halı üçün dayaq planın optimallıq əlaməti Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda mənfi elementin olmaması, minimum halı üçün isə Z sətirində müsbət elementin olmamasından ibarətdir;
E) Maksimum halı üçün dayaq planın optimallıq əlaməti Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda müsbət elementin olmaması, minimum halı üçün isə Z sətirində mənfi elementin olmamasından ibarətdir.

9. $Z \to \max$ **halında xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks üsulla həll edən zaman əgər sərbəst hədd mənfidirsə, onda yeni bazisə keçmək üçün əsas element aşağıdakı qayda üzrə seçilir.**

- Simpleks cədvəlində mənfi sərbəst həddin yerləşdiyi sətirdə hər hansı bir mənfi element tapılır. Bu mənfi elementin yerləşdiyi sütun əsas sütun olur. Əsas sətiri tapmaq üçün sərbəst hədlərin əsas sütun elementlərinə …… nisbətləri düzəldilir və bu nisbətlərin ..... əsas sətiri müəyyən edəcəkdir.

A) Mənfi olmayan, ən böyüyü;
B) Mənfi olmayan, ən kiçiyi;

C) Müsbət olmayan, ən kiçiyi;
D) Sıfırdan fərqli, ən böyüyü;
E) Tam ədədli, ən kiçiyi.

10. $Z \to \min$ **halında xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks üsulla həll edən zaman əgər sərbəst hədd mənfidirsə, onda yeni bazisə keçmək üçün əsas element aşağıdakı qayda üzrə seçilir.**

- Mənfi sərbəst həddin yerləşdiyi sətirdə hər hansı bir ..... element tapılır. Bu elementin durduğu sütun əsas sütun olur. Əsas sətiri tapmaq üçün sərbəst hədlərin əsas sütun elementlərinə ..... nisbətlərinin ən kiçiyi seçilir və bu nisbət əsas sətiri göstərəcəkdir:

A) müsbət; müsbət;
B) kəsr ədədli; mənfi olmayan;
C) hər hansı; müsbət;
D) tam ədədli; mənfi olmayan;
E) mənfi; mənfi olmayan.

11. $Z \to \max$ **halında xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks üsulla həll edən zaman əgər Simpleks cədvəldə mənfi sərbəst həddin yerləşdiyi sətirdə heç bir mənfi element yoxdursa, onda:**

A) Modelin məqsəd funksiyası yuxarıdan qeyri məhduddur;
B) Modelin şərtləri ziddiyyətlidir və onun həlli yoxdur;
C) Modelin məqsəd funksiyası aşağıdan qeyri məhduddur;
D) Modelin dayaq həlli mövcud deyildir, odur ki, üçüncü mərhələyə keçib optimal həll axtarmaq lazımdır;
E) Modeli Qoşma Simpleks üsulla həll etmək lazımdır.

12. $Z \to \min$ **halında xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks üsulla həll edildikdə dayaq planın optimallıq əlaməti məqsəd funksiyası sətirində müsbət elementin olmamasından ibarətdir.**

- Əgər məqsəd funksiyası sətirindəki müsbət elementin yerləşdiyi sütunda heç bir müsbət element yoxdursa, onda:

A) Modelin məqsəd funksiyası aşağıdan qeyri-məhduddur;
B) Modelin məqsəd funksiyası yuxarıdan qeyri məhduddur;
C) Modelin şərtləri ziddiyyətlidir və onun həlli yoxdur;
D) Modelin dayaq həlli yoxdur;
E) Modelin optimal həlli yoxdur.

13.Xətti proqramlaşdırma məsələsi Simpleks üsulla həll edilən zaman sərbəst hədlər sütunundakı bütün mənfi elementlərin yox edilməsi həndəsi baxımdan …….. deməkdir:

A) Modelin həllər çoxüzlüsünün qurulması;

B) Həllər çoxüzlüsünün məhdud olub olmamasının yoxlanılması;
C) Həllər çoxüzlüsünün hər hansı bir təpə nöqtəsinin tapılması;
D) Həllər çoxüzlüsünə daxil olan ixtiyari nöqtənin tapılması;
E) Həllər çoxüzlüsünün qabarıq olub-olmamasının yoxlanması.

14.Qarışıq şərtli xətti proqramlaşdırma məsələsinin Simpleks üsulla həll alqoritmi ilə əlaqədar aşağıdakı mülahizələrdən doğru olanı seçin:

A) Qarışıq şərtli modelin Simpleks üsulla həll qaydası maksimum məsələnin Simpleks üsulla həll alqoritmi ilə eynidir
B) Qarışıq şərtli modelin Simpleks üsulla həll qaydası minimum məsələnin Simpleks üsulla həll alqoritmi ilə eynidir
C) Qarışıq şərtli modelin Simpleks üsulla həll etmək üçün əvvəlcə bu məsələnin qoşmasını tərtib etmək lazımdır
D) Qarışıq şərtli modeli Simpleks üsulla həll etmək üçün əvvəlcə Simpleks cədvəlin sol tərəfindəki sıfırları cədvəlin yuxarısına keçirib, hər bir sıfıra uyğun gələn sütunu silmək lazımdır
E) Qarışıq şərtli modeli Simpleks üsulla həll etmək ümumiyyətlə mümkün deyildir.

FƏSIL 4

XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMADA QOŞMALIQ

4.1. Qoşma məsələlərin tərtibi qaydaları və iqtisadi izahı

Xətti proqramlaşdırma məsələlərinin xarakterik xüsusiyyətlərindən biri odur ki, hər bir məsələyə onun qoşması adlanan başqa bir məsələ uyğun gəlir.

Tutaq ki, aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsi verilmişdir:

$$Z(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \to \max \qquad (4.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le a_2 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le a_m \end{cases} \qquad (4.2)$$

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0, \qquad ..., \qquad x_n \ge 0 \qquad (4.3)$$

Bu məsələ ilə yanaşı aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsinə də baxaq:

$$F(y) = a_1y_1 + a_2y_2 + ... + a_my_m \to \min \qquad (4.4)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge p_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge p_2 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge p_n \end{cases} \qquad (4.5)$$

$$y_1 \ge 0, \qquad y_2 \ge 0, \qquad ..., \qquad y_m \ge 0 \qquad (4.6)$$

(4.4)-(4.6) məsələsi (4.1)-(4.3) məsələsinin qoşma məsələsi adlanır.

Bu halda (4.1)-(4.3) məsələsinə ilkin məsələ, (4.4)-(4.6) məsələsinə isə onun qoşması deyilir.

(4.4)-(4.6) qoşma məsələ (4.1)-(4.3) ilkin məsələdən aşağıdakı şərtlər daxilində alınmışdır.

1. İlkin məsələnin məqsəd funksiyasının əmsalları qoşma məsələdə məhdudiyyət şərtlərinin sərbəst hədləri olur. İlkin məsələnin məhdudiyyət şərtlərinin sərbəst hədləri isə qoşma məsələnin məqsəd funk-

siyasının əmsalları olur. Deməli qoşma məsələnin məchullarının sayı ilkin məsələnin şərtlərinin sayına, qoşma məsələnin məhdudiyyət şərtlərinin sayı isə ilkin məsələnin məchullarının sayına bərabərdir.

2. Qoşma məsələnin məhdudiyyət şərtlərinin əmsallarından düzəldilmiş matris ilkin məsələnin uyğun matrisinin transponirə edilməsi (sətirlərin sütunlarla əvəz edilməsi) yolu ilə alınır.

3. İlkin məsələnin məhdudiyyət şərtləri «≤»-sə, qoşma məsələdə «≥» olur.

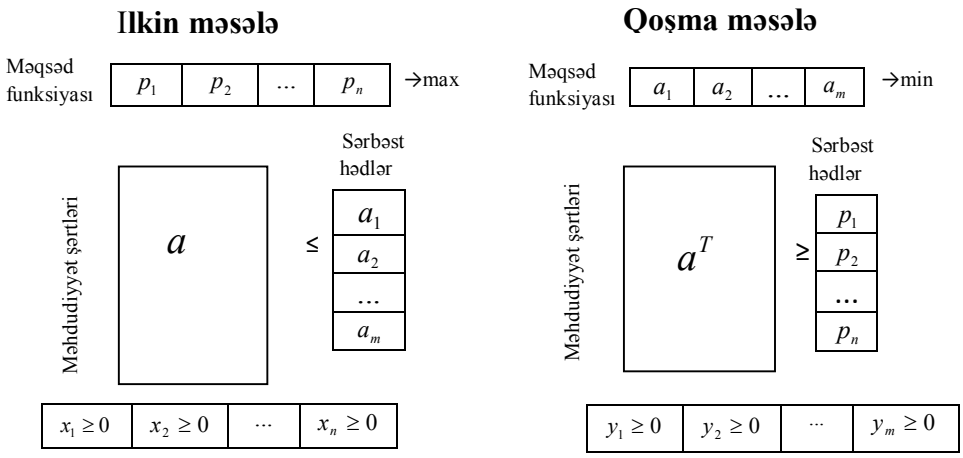
4. Qoşma məsələdə dəyişənlərin mənfi olmaması şərtləri saxlanılır.

5. Əgər ilkin məsələdə «=» şəklində məhdudiyyət şərti iştirak edirsə, onda qoşma məsələdə uyğun dəyişən sərbəst dəyişən olur.

6. Əgər ilkin məsələnin hər hansı bir dəyişəni sərbəst dəyişənirsə, onda qoşma məsələdə uyğun məhdudiyyət şərti «=» şəklində olur.

7. Əgər ilkin məsələdə məqsəd funksiyasının maksimum qiyməti axtarılırsa, qoşma məsələdə məqsəd funksiyasının minimum qiyməti axtarılır.

Aşağıda (4.1)-(4.3) ilkin məsələ bazasında (4.4)-(4.6) qoşma məsələnin tərtib edilməsinin blok-sxemi verilmişdir:



Əgər (4.4)-(4.6) məsələsini ilkin məsələ hesab edib onun qoşmasını tərtib etsək, onda (4.1)-(4.3) məsələsini alarıq. Odur ki, (4.1)-(4.3) və (4.4)-(4.6) məsələsi ***bir cüt qarşılıqlı qoşma məsələ*** hesab edilir.

Qeyd: *Əgər ilkin məsələ maksimum məsələdirsə, onda onun bərabərsizlik olan məhdudiyyət şərtləri «≤» şəklində olmalıdır. Əgər ilkin məsələ minimum məsələdirsə, onda onun bərabərsizlik olan*

məhdudiyyət şərtləri «≥» şəklində olmalıdır.

Əgər həm ilkin məsələnin, həm də onun qoşmasının bütün məhdudiyyət şərtləri yalnız bərabərsizliklərdən ibarətdirsə, onda belə məsələlərə ***simmetrik qoşma məsələlər*** deyilir. Əks halda məsələlər qeyri-simmetrik hesab edilir.

Aşağıda simmetrik və qeyri-simmetrik qoşma məsələlərinin tərtibinə aid nümunələr verilmişdir.

Simmetrik məsələlər:

1) İlkin məsələ

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_i \qquad (i=\overline{1,m})$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j=\overline{1,n})$$

Qoşma məsələ

$$F(y)=\sum_{i=1}^{m} a_i y_i \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge p_j \qquad (j=\overline{1,n})$$

$$y_i \ge 0 \qquad (i=\overline{1,m})$$

2) İlkin məsələ

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge a_i \qquad (i=\overline{1,m})$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j=\overline{1,n})$$

Qoşma məsələ

$$F(y)=\sum_{i=1}^{m} a_i y_i \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le p_j \qquad (j=\overline{1,n})$$

$$y_i \ge 0 \qquad (i=\overline{1,m})$$

Qeyri- simmetrik məsələlər:

1) İlkin məsələ

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_i \qquad (i=\overline{1,m})$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j=\overline{1,n})$$

Qoşma məsələ

$$F(y)=\sum_{i=1}^{m} a_i y_i \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge p_j \qquad (j=\overline{1,n})$$

$$y_i >=< 0 \qquad (i=\overline{1,m})$$

2) İlkin məsələ

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_i \qquad (i=\overline{1,m})$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j=\overline{1,n})$$

Qoşma məsələ

$$F(y)=\sum_{i=1}^{m} a_i y_i \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le p_j \qquad (j=\overline{1,n})$$

$$y_i >=< 0 \qquad (i=\overline{1,m})$$

Qoşmalığın iqtisadi mənasını nəzərdən keçirək. Tutaq ki, bir cüt simmetrik qoşma məsələyə baxılır. Yəni (4.1)-(4.3) və (4.4)-(4.6) məsələləri simmetrik qoşma məsələlərdir. (4.1)-(4.3) ilkin məsələnin iqtisadi mənasının yuxarıda (bax fəsil 2 §2.4) nəzərdən keçirdiyimiz maksimum mənfəət məsələsi ilə eyni olduğunu şərtləşək. Yəni burada müəsisə üçün elə bir X^* optimal istehsal proqramı axtarılır ki, bu proqrama görə müəssisənin əldə edəcəyi məcmu mənfəət maksimum olsun. Onda bu məsələnin *qoşma məsələsinin iqtisadi mənası müəsisədə istifadə edilən ehtiyat növlərinin bir vahidləri üçün elə* $y_1, y_2, ... y_m$ *şərti qiymətlərin tapılması olacaqdır ki, bu qiymətlərə görə sərf ediləcək ehtiyatların şərti qiymətləri cəmi minimum olsun.* (4.4)-(4.6) məsələsinin (4.4) məqsəd funksiyası məhz bu məqsədi ifadə edəcəkdir.

$$F(y) = a_1 y_1 + a_2 y_2 + ... + a_m y_m \to \min \qquad (4.7)$$

(4.5) sisteminin məhdudiyyətləri göstərir ki, hər bir məhsul vahidi üzrə sərf edilən ehtiyatların şərti qiymətləri cəmi həmin məhsul vahidinin verdiyi mənfəətdən az ola bilməz.

(4.6) sistemi isə ehtiyatların şərti qiymətlərinin mənfi olmaması şərtləridir. (4.4)-(4.6) qoşma məsələnin $Y^* = (y_1^*,\ y_2^*, ..., y_m^*)$ optimal həllinə müəssisənin ehtiyatlarının qoşma qiymətləri vektoru, kölgə qiymətləri vektoru və ya sövdələşmə qiymətləri vektoru deyilir.

4.2. Qoşmalıq teoremləri və onların iqtisadi izahı

Xətti proqramlaşdırmada qoşmalığın aşağıdakı teoremləri isbat edilir.

Qoşmalığın I (əsas) teoremi: *Fərz edək ki, bir cüt qarşılıqlı qoşma məsələyə baxılır. Əgər bu məsələlərdən birinin optimal həlli varsa, onda digər məsələnin də optimal həlli var və bu məsələlərin məqsəd funksiyasının ekstremumları bir-birinə bərabərdir:*

$$\max Z(X^*) = \min F(Y^*) \qquad (4.8)$$

Əgər bu məsələlərdən birinin məqsəd funksiyası məhdud deyilsə, onda digər məsələnin şərtləri ziddiyyətlidir və onun həlli yoxdur.

Qoşmalığın II teoremi: *Fərz edək ki, bir cüt qarşılıqlı qoşma məsələyə baxılır.* X^* *və* Y^* *vektorların ilkin və qoşma məsələlərin optimal həlləri olması üçün zəruri və kafi şərt aşağıdakı məhdudiyyətlərin ödənməsidir.*

$$\text{I.}\quad x_j^*(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i^* - p_j) = 0 \qquad (j = \overline{1,n})$$

$$\text{II.}\quad y_i^*(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^* - a_i) = 0 \qquad (i = \overline{1,m})$$

Qoşmalığın birinci teoreminin iqtisadi mənasını araşdıraq. Tutaq ki, ilkin məsələdə X^* optimal istehsal proqramı, qoşma məsələdə isə Y^* optimal qoşma qiymətlər vektoru axtarılır. Onda *qoşmalığın birinci teoreminə görə əgər məhsul istehsal etmək üçün optimal istehsal proqramı varsa, onda ehtiyatların optimal qoşma qiymətləri vektoru da var və bu optimal planlara görə müəssisənin əldə etdiyi məcmu mənfəət şərf edilən ehtiyatların qoşma qiymətləri cəminə bərabərdir.* Təbii ki, bu halda ilkin və qoşma məsələlərin mümkün həllər oblastlarından götürülmüş istənilən başqa X və Y vektorları üçün

$$Z(x) \le F(y)$$

şərti ödənəcəkdir. Bu bərabərsizliyə ***qoşmalığın əsas bərabərsizliyi*** deyilir.

Qoşmalığın ikinci teoreminin iqtisadi mənasına baxaq.

Əvvəlcə II teoremin 1-ci qrup şərtlərini təhlil edək.

Tutaq ki, $x_j^* \ne 0$; Onda 2-ci vuruq 0-a bərəbər olmalıdır:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - p_j = 0; \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = p_j$$

Əgər $x_j^* = 0 -$ sa, onda alırıq:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - p_j > 0; \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > p_j$$

($\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* < p_j$ halının iqtisadi mənası yoxdur)

Deməli, müəssisədə j nömrəli məhsul vahidi istehsalına sərf edilən bütün ehtiyatların qoşma qiymətlərinin cəmi (yəni $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$) həmin məhsul vahidinin verdiyi mənfəətə (yəni p_j) bərabərdirsə, onda bu məhsul növünü istehsal etmək müəssisə üçün sərfəlidir və buna görə də X^* optimal istehsal proqramında həmin məhsul növünün həcmini göstərən dəyişənin qiyməti sıfırdan fərqlidir (deməli sıfırdan böyükdür). Əgər j nömrəli məhsul vahidi üzrə qoşma qiymət göstəricisi mənfəət

göstəricisindən çoxdursa, onda bu məhsul növünü istehsal etmək iqtisadi cəhətdən sərfəli deyil və buna görə də uyğun dəyişənin qiyməti sıfıra bərabərdir. Beləliklə, *qoşmalığın ikinci teoreminin birinci qrup şərtləri müəssisəyə hansı məhsul növlərinin istehsalının sərfəli olduğunu müəyyən etməyə imkan verir.*

Qoşmalığın ikinci teoreminin ikinci qrup şərtlərinə görə isə:

$y_i^* \neq 0$ olduqda $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = a_i$, $y_i^* = 0$ olduqda isə $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < a_i$

alınır.

($\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* > a_i$ halının iqtisadi mənası yoxdur)

Deməli, əgər müəssisədə X^* optimal istehsal proqramı üzrə istehsal ediləcək bütün məhsulların istehsalına sərf edilən i – ci ehtiyatın məcmu miqdarı həmin ehtiyatın məhdud həcminə bərabərdirsə, daha doğrusu i -ci ehtiyat istehsal prosesində tam (qalıqsız) sərf edilirsə, onda bu ehtiyat növü defisit (qıt) ehtiyat hesab edilir və buna görə də onun qoşma qiyməti sıfırdan fərqli olur (sıfırdan böyük olur). i nömrəli ehtiyatın bir qismi sərf edilməmiş qaldıqda isə ehtiyat bol ehtiyat hesab edilir və buna görə də onun qoşma qiyməti sıfıra bərabər olur. Beləliklə, *qoşmalığın ikinci teoreminin ikinci qrup şərtləri müəssisənin ehtiyatlarının defisitlik dərəcəsini qiymətləndirməyə imkan verir.* Bütün defisit ehtiyatların qoşma qiymətləri sıfırdan böyük olur, bütün bol ehtiyatların qoşma qiymətləri isə sıfıra bərabər olur.

4.3.Qoşmalıq nəzəriyyəsi əsasında iqtisadi-riyazi modellərin dayanıqlılığının və həssaslığının təhlili

Xətti proqramlaşdırma məsələsi bazasında tərtib edilmiş iqtisadi-riyazi modellərin optimal həlləri statik vəziyyətdə olan iqtisadi sistemləri xarakterizə edir və ətraf mühitin vəziyyətində baş verə biləcək dəyişiklikləri nəzərə almır. Ətraf mühitin xarakteristikalarında baş verə biləcək belə dəyişikliklərə misal olaraq tələbin dəyişməsini, inflyasiyanın təsiri altında məhsulun qiymətinin dəyişməsini, ehtiyat tədarükündə baş verən kənarlaşmaları və s. göstərmək olar. Əgər bu dəyişikliklər qarşıya qoyulmuş məqsədə bilavasitə təsir edirsə, onda məqsədə çatmanın riyazi ifadəsi olan məqsəd funksiyasında müəyyən

dəyişikliklər edilməlidir. Yox, əgər bu dəyişikliklər istehsal prosesinin (və ya hər hansı bir iqtisadi fəaliyyətin) ehtiyat təminatı ilə bağlıdırsa, onda modelin məhdudiyyət şərtləri sistemində dəyişikliklər baş verəcəkdir. Odur ki, iqtisadi-riyazi modellərin optimal həllərinin tapılmasını iqtisadi sistemlərin optimal idarə edilməsi strategiyalarının qurulmasında son mərhələ hesab etmək olmaz və dəyişikliklərin verəcəyi nəticələri müəyyən etmək lazımdır. Beləliklə, riyazi aparatlarına görə xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsi şəklində tərtib edilmiş xətti optimallaşdırma modellərinin (xüsusən də gələcəkdə nəzərdən keçirəcəyimiz müəssisələr və firmalar səviyyəsində istehsal-təsərrüfat fəaliyyətinin optimallaşdırılmasına xidmət edən mikromodellərin) optimal həlləri tapıldıqdan sonra qarşıya aşağıdakı problemlər çıxır:

1. Modelin təsvir etdiyi iqtisadi prosesdə məqsəd funksiyası ilə bağlı dəyişikliklər baş verərsə, məsələn, bazarda məhsula olan tələbin artması və ya azalması ilə əlaqədar məhsul vahidinin qiymətində dəyişiklik baş verərsə statik vəziyyət üçün tapılmış optimal həlldə hansı dəyişikliklər baş verəcək və bu optimal strategiyada dəyişikliklər etmək lazımdırmı? Yəni:

- Bazar konyukturasının konkret determinik vəziyyəti üçün (yəni iqtisadi sistemin parametrlərinin sabitliyi şəraitində) tərtib edilmiş iqtisadi-riyazi modelin optimal həlli bu modelə daxil olan parametrlərin, xüsusən də məqsəd funksiyasının əmsallarının dəyişməsinə nə dərəcədə dayanıqlıdır?

2. Əgər tərtib edilmiş iqtisadi-riyazi modelin məhdudiyyət şərtləri sisteminin sağ tərəflərində (sərbəst hədlərdə) dəyişikliklər baş verərsə, başqa sözlə desək iqtisadi sistemlərin ehtiyat təminatında dəyişikliklər baş verərsə, məqsəd funksiyasının qiyməti dəyişəcəkmi? Yəni:

- Modelin optimal həlli iqtisadi sistemin ehtiyat təminatında baş verən dəyişikliklərə nə dərəcədə həssaslıq göstərir?

3. İqtisadi sistemin ehtiyatlarının alternativ «davranış variantlarını kəmiyyətcə qiymətləndirmək mümkündürmü?». Daha doğrusu iqtisadi sistemin ehtiyatlarından hansılarını azaltmaq və onların həcmlərinin ixtisar edilməsi nəticəsində qazanılan əlavə vəsaitləri hansı ehtiyatların əlavə olaraq alınmasına sərf etmək lazımdır ki, bu ehtiyatlar defisit ehtiyatlar kimi çıxış etsin və iqtisadi sistemin gəlirliliyini daha çox artırsın? Yəni:

- İqtisadi sistemin hər bir ehtiyat növünün ümumi gəlirin formalaşdırılmasındakı payını necə qiymətləndirmək lazımdır?

Qeyd edək ki, formalaşdırdığımız bu suallara cavabların verilməsi məhz iqtisadi-riyazi modellərin dayanıqlığının və həssaslığının təhlili əsasında mümkündür. Beləliklə, iqtisadi-riyazi modellərin ***optimal həllərinin dayanıqlılığı*** dedikdə modelin məqsəd funksiyasının əmsallarının dəyişməsi halında bu optimal həllərin dəyişməz qalması, ***həssaslığı*** dedikdə isə modelin məhdudiyyət şərtlərinin sağ tərəflərinin dəyişməsinin məqsəd funksiyasına göstərdiyi təsirin dərəcəsi başa düşülür. Deməli, iqtisadi-riyazi modellərin optimal həllərinin dayanıqlılığının və həssaslığının təhlilini modelləşdirmə prosesində bu modellərin optimal həllərinin özlərinin tapılması qədər vacib və əhəmiyyətli mərhələlər hesab etmək olar.

Əvvəlcə iqtisadi-riyazi modellərin optimal həllərinin dayanıqlılığı məsələsinin, daha doğrusu məqsəd funksiyasının əmsallarının dəyişməsinin optimal həllə göstərdiyi təsiri təhlil edək. Fərz edək ki, $n = 2$ halında xətti optimallaşdırma modelinin məqsəd funksiyası

$$Z(x) = p_1x_1 + p_2x_2 \to \max \qquad (4.9)$$

şəklindədir və bu model üçün $X_{opt} = (x_1^* = \alpha,\ x_2^* = b)$ optimal həll alınmışdır:

$$\max Z(X^*) = Q$$

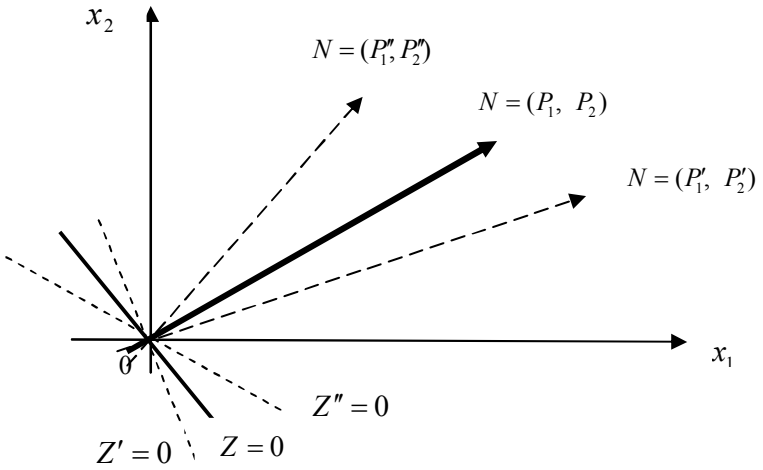
Bu optimal həllin dayanıqlılığının təhlili dedikdə (4.9) məqsəd funksiyasının p_1 və p_2 əmsallarının p_1' və p_2' qiymətlər cütü, eləcə də p_1'' və p_2'' qiymətlər cütü və s. üçün bu optimal həllin dəyişib-dəyişmədiyini oyrənmək başa düşüləcəkdir. Daha doğrusu:

$$Z(x) = p_1x_1 + p_2x_2 \neq Z(x) = p_1'x_1 + p_2'x_2 \neq Z(x) = p_1''x_1 + p_2''x_2$$

olduğunu qəbul etsək, dəyişənlərin $x_1^* = \alpha$ və $x_2^* = b$ qiymətlərində dəyişikliklər baş verəcək ya yox?

Xətti optimallaşdırma modellərinin riyazi əsası olan xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həndəsi izahını və Qrafik üsulu ilə həll alqoritmini verən zaman qeyd etmişdik ki, (bax fəsil 3, §3.1) (4.9) məqsəd funksiyasının p_1 və p_2 əmsalları $N = (p_1,\ p_2)$ radius-vektorunu müəyyən edir və bu vektora görə $Z(x)$ funksiyasının artma istiqaməti müəyyən edilir. Deməli, (4.9) məqsəd funksiyasının x_1 və x_2 məchullarının əmsallarının yuxarıda nəzərdən keçirdiyimiz 3 alternativ qiymət cütü variantları üçün $\left[(p_1,\ p_2),\ (p_1',\ p_2'),\ (p_1'',\ p_2'')\right]$ məqsəd funksiyasının 3 müxtəlif artma istiqaməti mövcud olacaqdır. $Z = 0$ səviyyə xətti bütün hallarda N radius vektora perpendikulyar olduğu

üçün hər bir hal üçün səviyyə xəttinin meyli və Z funksiyasının artma istiqaməti fərqli olacaqdır (şəkil 4.1)

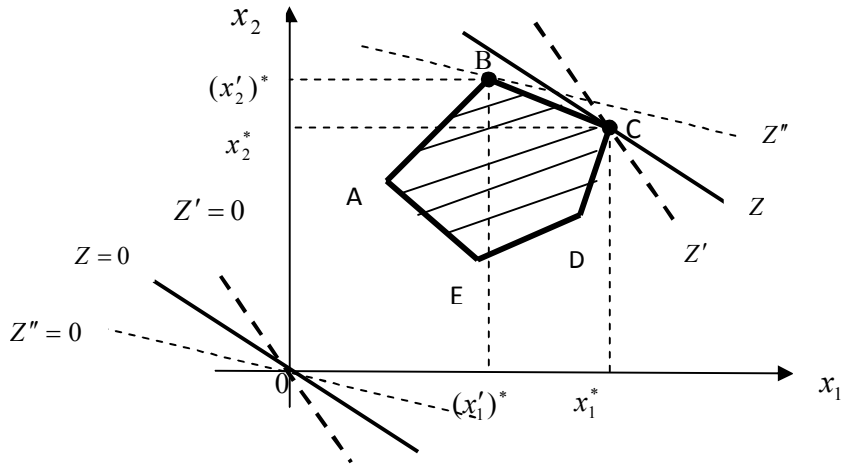


Şəkil 4.1.

İndi isə modelin mümkün həllər oblastının məqsəd funksiyasının davranışında baş verən bu dəyişikliklərə bağlılığının kəmiyyət təhlilini aparaq. İlk növbədə qeyd edək ki, yuxarıda nəzərdən keçirdiyimiz bütün alternativ hallar üçün modelin mümkün həllər oblastı dəyişməz qalır.

Fərz edək ki, xətti optimallaşdırma modelinin mümkün həllər oblastı *ABCDE* çoxbucapqlısıdır və modelin optimal həlli *C* təpə nöqtəsində alınmışdır (şəkil 4.2)

Sadə təhlil nəticəsində yəqin etmək olur ki, (4.9) məqsəd funksiyasının əmsalları dəyişərək p_1' və p_2' olduqda da $Z(x)$ məqsəd funksiyasının maksimal qiyməti əvvəlki kimi yenə də həllər çoxbucaqlısının *C* təpə nöqtəsində alınacaqdır, yəni $Z(x)=p_1x_1+p_2x_2$ məqsəd funksiyası əsasında qurulmuş model üçün tapılmış $X^*=(x_1^*,x_2^*)$ optimal həll $Z(x)=p_1'x_1+p_2'x_2$ məqsəd funksiyası əsasında qurulmuş modelin də optimal həlli olacaqdır. $Z(x)=p_1''x_1+p_2''x_2$ məqsəd funksiyası əsasında qurulmuş modelin optimum nöqtəsi isə həllər çoxbucaqlısının başqa təpə nöqtəsinə (*B* təpə nöqtəsi) sürüşmüşdür. Deməli, modelin optimal həlli artıq əvvəlki $X^*=(x_1^*,x_2^*)$ həlli olmayacaq və *B* təpə nöqtəsinin koordinatları şəklində müəyyən ediləcəkdir.



Şəkil 4.2

Beləliklə:

1. Hər bir iqtisadi-riyazi modeldə optimal həllin məqsəd funksiyasının əmsallarına görə dayanıqlılıq diapozonu mövcuddur və məqsəd funksiyasının əmsallarının bu diapozon daxilində dəyişməsi $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ optimal həldə heç bir dəyişiklik doğurmur.

2. Modelin optimal həllinin dayanıqlılıq diapozonunun hüdudları həm mümkün həllər oblastından, həm də məqsəd funksiyasından asılı olaraq təyin edilir.

3. Əgər modelin məqsəd funksiyasının əmsallarının qiymətlərinin dəyişməsi dayanıqlılıq diapozonundan kənara çıxırsa, onda optimal həll dəyişir və həllər oblastının başqa təpə nöqtəsinə keçir.

Qeyd edək ki, $n = 2$ halı üçün modelin optimal həllinin dayanıqlılıq sərhədlərinin müəyyən edilməsi ilə əlaqədar yuxarıda verdiyimiz izahı və aldığımız nəticələri $n > 2$ halları üçün də ümumiləşdirmək olar.

İndi isə modellərin optimal həllərinin məhdudiyyətlərin dəyişməsinə göstərdiyi həssaslığı təhlil edək. Yuxarıda nəzərdən keçirdiyimiz iqtisadi interpretasiyalardan göründüyü kimi xətti optimallaşdırma modellərindən bir çoxunda məhdudiyyət şərtlərinin sağ tərəfləri iqtisadi sistemlərdə ehtiyatların həcmini xarakterizə edir. Odur ki, bu ehtiyatlardan hər hansı birinin həcminin dəyişməsinin optimal həllə göstərdiyi təsiri öyrənək. Konkret iqtisadi-riyazi modellər əsasında aparılmış

tədqiqatlar göstərir ki, iqtisadi sistemlərin malik olduqları ehtiyatların həcmlərinin məqsəd funksiyasına təsiri müəyyən hüdudlarda məhdudlaşır. Daha doğrusu, hər bir ehtiyat növü üzrə elə bir artım və azalma hüdudlarını müəyyən etmək olar ki, həmin ehtiyatın həcminin dəyişməsinin bu artım və ya azalma zonasına düşdüyü bütün hallarda məqsəd funksiyasının qiymətində dəyişiklik baş verir (məsələn, ehtiyatların həcminin dəyişməsi müəsisənin gəlirini artıra və ya azalda bilər). Ehtiyatın həcminin dəyişməsinin konkret ifadələrininin bu hüdudlardan kənara çıxması halında həmin dəyişikliklər məqsəd funksiyasında heç bir dəyişiklik doğurmur (yəni müəssisənin ehtiyatlarının həcmi dəyişsə də gəlirin həcmi dəyişmir). Bu isə o deməkdir ki, həmin ehtiyat defisit ehtiyat olmaqdan çıxaraq, bol ehtiyat sırasına daxil olur.

Beləliklə:

1. Modelin məqsəd funksiyasının qiymətinin məhdudiyyət şərtlərinin sağ tərəflərinin dəyişməsindən asılı olaraq dəyişməsi daima baş vermir və bu dəyişmə müəyyən diapozon daxilində müşahidə edilir.
2. Modelin məhdudiyyət şərtlərinin sağ tərəflərinin dəyişməsi bu diapozondan kənara çıxdıqda həmin dəyişikliklər məqsəd funksiyasında heç bir dəyişiklik doğurmur.
3. İqtisadi sistemin yalnız defisit resurslarının artması və ya azalması modelin məqsəd funksiyasının qiymətində dəyişiklik doğurur.

İndi isə qoşmalıq nəzəriyyəsinə əsaslanaraq iqtisadi sistemin hər bir ehtiyatının modelin məqsəd funksiyasının artması və ya azalmasına göstərdiyi təsiri təhlil edək.

Qoşma məsələnin iqtisadi mənasının izahından belə bir nəticə çıxır ki, iqtisadi sistemin ehtiyatlarının $y_1, y_2, ..., y_m$ qoşma qiymətləri vasitəsi ilə ehtiyatların bir vahid artması və ya azalması nəticəsində modelin məqsəd funksiyasının hansı kəmiyyət qədər dəyişəcəyini müəyyən etmək mümkün olur. Bir daha bu məsələnin üzərinə qayıdaq. Fərz edək ki, bir cüt simmetrik qoşma modelə baxılır və ilkin modeldə müəssisə üçün X^* optimal istehsal proqramı axtarılır, qoşma modeldə isə ehtiyatların optimal qoşma (kölgə) qiymətləri tapılır. Bir daha qeyd edək ki, qoşmalığın əsas teoreminə görə əgər X^* optimal istehsal proqramı mövcuddursa, onda Y^* optimal qoşma qiymətlər vektoru da mövcuddur və bu vektorlara görə :

$$\max Z(X^*) = \min F(Y^*) \qquad (4.10)$$

olacaqdır.

(4.10) ifadəsinə görə yaza bilərik:

$$\max Z(X^*) = \min F(y^*) = a_1 y_1 + a_2 y_2 + ... + a_m y_m$$

və ya:

$$\max Z(X^*) = a_1 y_1 + a_2 y_2 + ... + a_m y_m \qquad (4.11)$$

Əgər iqtisadi sistemin ehtiyatlarının $y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*$ optimal qoşma qiymətləri məlumdursa, onda (4.11) ifadəsinə görə ehtiyatların həcmlərinin dəyişməsinin müəssisənin əldə edəcəyi məcmu mənfəətə nə dərəcədə təsir edəcəyini, eləcə də mənfəətin formalaşması baxımından hər bir ehtiyatın əhəmiyyətliliyini qiymətləndirmək mümkündür.

Fərz edək ki, iqtisadi sistemin istehsal-təsərrüfat fəaliyyətində iştirak edən a_i ehtiyatının həcmi Δb_i qədər dəyişmişdir (artmışdır və ya azalmışdır):

$$a_i' = a_i \pm \Delta b_i$$

Əgər bu halda iqtisadi sistemin digər ehtiyatlarında heç bir dəyişiklik baş verməmişdirsə, onda $i-$ci ehtiyatda baş verən bu dəyişikliyin məcmu mənfəətdə doğurduğu dəyişikliyi kəmiyyətcə qiymətləndirə bilərik:

$$\Delta \max Z(x) = \Delta b_i y_i \qquad (4.12)$$

Qeyd edək ki, əgər iqtisadi sistemin $i-$ci ehtiyatı Δb_i qədər artmışdırsa, onda $\Delta Z(x) > 0$, azalmışdırsa, onda $\Delta Z(x) < 0$ olacaqdır.

(4.12) ifadəsindən $i-$ci ehtiyatın qoşma qiymətini təyin etsək, yaza bilərik:

$$y_i = \Delta \max Z(x) / \Delta b_i$$

Deməli, iqtisadi sistemin $i-$ci ehtiyatının y_i qoşma qiyməti bu ehtiyatın həcminin 1 vahid artması və ya azalması ilə məcmu mənfəətin neçə vahid artacağı və ya azalacağını müəyyən etməyə imkan verir.

Beləliklə, qoşmalıq nəzəriyyəsi xətti optimallaşdırma modellərinin optimal həllərini yeni imkanlarla zənginləşdirməyə şərait yaradır. Belə ki, xətti optimallaşdırma modelinin qoşma modelinin həlli nəticəsində tapılan Y^* qoşma qiymətlər vektoru iqtisadi sistemin hər bir ehtiyatının gəlirin formalaşmasına göstərdiyi təsiri kəmiyyətcə qiymətləndirməyə və ehtiyatın bir vahid dəyişməsi ilə məcmu mənfəətin neçə vahid dəyişdiyini müəyyən etməyə imkan verir.

İqtisad-riyazi modelin optimal həllinin dayanıqlığının təhlilinə aid misala baxaq.

►**Məsələ 4.1.** Fərz edək ki, müəssisənin istehsal gücləri 3 növ məhsul istehsalına imkan verir. Istehsal prosesində 4 növ məhdud

istehsal ehtiyatından istifadə edilir. Ehtiyatların məhdudluğu B=(18, 16, 8, 6) vektoru ilə müəyyən edilir. Müəssisədə məhsul vahidi istehsalına ehtiyat sərfi normaları aşağıdakı texnoloji matrislə müəyyən edilir:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Məhsul vahidlərinin maya dəyərləri vektoru C= (5, 8, 4) şəklindədir. Məhsul vahidlərinin gözlənilən bazar qiymətləri vektoru isə P= (8, 12, 6) şəklindədir.

- Müəssisə üçün elə bir istehsal proqramı tərtib edilməlidir ki, bu proqrama görə onun əldə edəcəyi məcmu mənfəət maksimum olsun;
- Müəssisənin hər bir ehtyat növünün qıtlıq dərəcəsi qiymətləndirilməlidir;
- Müəssisənin 1-ci növ ehtiyatının 6 ton artması, 2-ci növ ehtiyatının 3 ton azalması, 3-cü və 4-cü növ ehtiyatlarn isə 2 ton artmasının məcmu mənfəətə göstərdiyi fərdi və birgə təsirləri müəyyən etmək lazımdır;
- 1 vahidini istehsal etmək üçün uyğun olaraq 1 ton 1-ci ehtiyat, 2 ton 2-ci və 3-cü ehtiyat tələb edilən, 4-cü ehtiyat isə ümumiyyətlə istifadə edilməyəcək, hər vahidi müəssisəyə 15 vahid mənfəət verəcək 4-cü növ yeni məhsulun istehsalının təşkil edilməsinin müəssisəyə nə dərəcədə sərfəli olması qiymətləndirilməlidir.

Həlli: Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini tərtib edək. Tutaq ki, müəssisədə x_1 vahid 1-ci məhsul, x_2 vahid 2-ci məhsul və x_3 vahid 3-cü məhsul istehsal edilməlidir. Onda baxılan iqtisadi məsələnin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı şəkildə alınacaqdır:

$$Z(x) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max \qquad (4.13)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 16 \\ x_1 + x_2 \qquad \le 8 \\ \qquad x_2 + x_3 \le 6 \end{cases} \qquad (4.14)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0 \qquad (4.15)$$

Modelin qoşma modelini yazaq:

$$F(y) = 18y_1 + 16y_2 + 8y_3 + 6y_4 \to \min \qquad (4.16)$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \qquad \geq 3 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 4 \\ y_1 + y_2 + \qquad y_4 \geq 2 \end{cases} \qquad (4.17)$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0, \quad y_4 \geq 0 \qquad (4.18)$$

Burada y_1 - müəssisənin 1-ci ehtiyatının qoşma qiyməti, y_2 - müəssisənin 2-ci ehtiyatının qoşma qiyməti, y_3 - müəssisənin 3-cü ehtiyatının qoşma qiyməti və y_4 - müəssisənin 4-cü ehtiyatının qoşma qiymətidir. (Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, bu qoşma qiymətlər ehtiyat vahidləri səviyyəsində müəyyən edilir.)

(4.13)-(4.15) modelini Simpleks metodla həll edək:

1-ci mərhələ: $t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0,\ t_3 \geq 0,\ t_4 \geq 0$ əlavə dəyişənlər daxıl etməklə (4.14) sisteminin bərabərsizliklərini tənliklərə çevirək və bazis dəyişənlərini seçək:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + t_1 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + t_2 = 16 \\ x_1 + x_2 \qquad + t_3 = 8 \\ \qquad x_2 + x_3 + t_4 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = -x_1 - 2x_2 - x_3 + 18 \geq 0 \\ t_2 = -2x_1 - x_2 - x_3 + 16 \geq 0 \\ t_3 = -x_1 - x_2 \qquad + 8 \geq 0 \\ t_4 = \qquad - x_2 - x_3 + 6 \geq 0 \end{cases}$$

Simpleks cədvəlinə keçək:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$t_1 =$	1	2	1	18
$t_2 =$	2	1	1	16
$t_3 =$	1	1	0	8
$t_4 =$	0	1	1	6
$Z(x) =$	-3	-4	-2	0

(4.1)

2-ci mərhələ: (4.1) Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda heç bir mənfi element olmadığı üçün məsələnin dayaq həlli tapılmışdır. Odur ki, cədvəlin yuxarısında yerləşmiş qeyri-bazis dəyişənlərin sıfır

qiymətlərində, yəni $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ olduqda məsələnin aşağıdakı dayaq həlli tapılır:

$$X_{day} = (x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0); \qquad Z(X_{day}) = 0$$

3-cü mərhələ: Bu mərhələdə məsələnin optimal həlli tapılır. Məsələdə məqsəd funksiyasının maksimum qiyməti axtarıldığı üçün optimal həllin tapılması əlaməti Simpleks cədvəlin $Z(x)$ sətirində mənfi elementlərin olmamasından ibarətdir. Odur ki, (4.1) Simpleks cədvəlin $Z(x)$ sətirində yerləşən mənfi elementlər yox edilməlidir. (Prosesin gedişi haqqında əvvəlki mövzularda ətraflı izahat verildiyi üçün əlavə şərhə ehtiyac yoxdur).

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$t_1 =$	1	2	1	18
$t_2 =$	2	1	1	16
$t_3 =$	1	1	0	8
$t_4 =$	0	$\langle 1 \rangle$	1	6
$Z(x) =$	-3	-4	-2	0

	$-x_1$	$-t_4$	$-x_3$	1
$t_1 =$	1	-2	-1	6
$t_2 =$	2	-1	0	10
$t_3 =$	$\langle 1 \rangle$	-1	-1	2
$x_2 =$	0	1	1	6
$Z(x) =$	-3	4	2	24

	$-t_3$	$-t_4$	$-x_3$	1
$t_1 =$	-1	-1	0	4
$t_2 =$	-2	1	$\langle 2 \rangle$	6
$x_1 =$	1	-1	-1	2
$x_2 =$	0	1	1	6
$Z(x) =$	3	1	-1	30

	$-t_3$	$-t_4$	$-t_2$	1
$t_1 =$			0	8
$x_3 =$	-2	1	1	6
$x_1 =$			1	10
$x_2 =$			-1	6
$Z(x) =$	4	3	1	66

: (2)

	$-t_3$	$-t_4$	$-t_2$	1
$t_1 =$				4
$x_3 =$				3
$x_1 =$				5
$x_2 =$				3
$Z(x) =$	2	$3/2$	$1/2$	33

Bu Simpleks cədvəldən aşağıdakı optimal həll alınır:

$$X^* = (x_1 = 5,\ x_2 = 3,\ x_3 = 3)$$

$$\max Z(X^*) = 33$$

Yoxlama: $Z(X^*) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3\cdot 5 + 4\cdot 3 + 2\cdot 3 = 15 + 12 + 6 = 33$

Bu Simpleks cədvəldən (4.16)-(4.18) modelinin optimal həllini tapaq:

$$Y^* = (y_1 = 0,\ y_2 = 1/2,\ y_3 = 2,\ y_4 = 3/2)$$

$$\min F(Y^*) = 33$$

Yoxlama:

$$F(Y^*) = 18y_1 + 16y_2 + 8y_3 + 6y_4 = 18\cdot 0 + 16\cdot 1/2 + 8\cdot 2 + 6\cdot 3/2 = 8 + 16 + 9 = 33$$

Göründüyü kimi, (4.13)-(4.15) və (4.16)-(4.18) modelləri üçün aldığımız X^* və Y^* optimal həllər üçün qoşmalığın 1-ci teoremi ödənir, yəni:

$$\max Z(X^*) = \min F(Y^*) = 33$$

alınır.

Beləliklə:

- Müəssisə 5 ədəd 1-ci məhsul, 3 ədəd 2-ci məhsul və 3 ədəd 3-cü məhsul istehsal etməlidir. Onda bu müəssisənin məcmu mənfəəti 33

vahid təşkil edəcəkdir ki, bu da bütün mümkün davranış variantları içərisində ən böyük mənfəətdir;

• Müəssisənin 1-ci ehtiyat vahidinin qoşma qiymətinin 0-a bərabər olması göstərir ki, bu ehtiyat növü ümumiyyətlə, qıt ehtiyat deyildir. Müəssisənin ən qıt ehtiyatı 3-cü ehtiyatdır. Belə ki, həmin ehtiyat vahidinin qoşma qiyməti 2-yə bərabərdir. 2-ci ehtiyat 3-cü ehtiyatla müqayisədə daha az, 4-cü ehtiyat isə 2-ci ehtiyatdan bir qədər çox defisitlik dərəcəsinə malikdir.

• Məlum olduğu kimi, (4.16)-(4.18) qoşma modelin endogen parametrlərinin y_i^* optimal qiymətləri (4.13)-(4.15) ilkin modelin məhdudiyyət şərtlərinin sərbəst hədlərinin bu modelin məqsəd funksiyasına təsirinin qiymətini xarakterizə edir, yəni:

$$y_i^* = \frac{\partial F_i}{\partial b_i}$$

əgər $\partial F_i \approx \Delta F_i$ və $\partial b_i \approx \Delta b_i$ qəbul etsək, onda

$$\Delta F_i = \Delta b_i y_i^*$$

olacaqdır.

Nəzərdən keçirdiyimiz müəssisə modeli çərçivəsində bu tənlik göstərir ki, i-ci ehtiyatın dəyişməsi zamanı optimal səmərə həmin ehtiyatın artmasının xətti funksiyası olur və bu halda əmsal rolunu məhz (4.16)-(4.18) qoşma modelin Y^* optimal həllinin i-ci komponenti olan y_i^* oynayır.

- Əgər $y_i^* = 0$ olarsa, onda bu ehtiyatın artımı optimal mənfəəti (X^* optimal istehsal proqramına görə müəyyən edilən mənfəət) dəyişdirmir və həmin ehtiyatın mənfəət baxımından qiymətliliyi 0-a bərabərdir.

- Əgər $y_i^* > 0$ -sa, lakin bu dəyişənin qiyməti çox da böyük deyilsə, onda i-ci ehtiyatın böyük həcmdə dəyişməsi nəticəsində müəssisənin mənfəəti az artacaqdır. Bu isə o deməkdir ki, i-ci ehtiyatın qiymətliliyi yüksək deyildir.

- Əgər $y_i^* > 0$ -sa və bu qiymət əhəmiyyətlidirsə (kifayət qədər böyükdürsə), onda müəssisənin mənfəəti i-ci ehtiyatın dəyişməsinə çox çevik reaksiya verəcəkdir, yəni ehtiyatın həcminin azacıq belə artması optimal mənfəəti əhəmiyyətli dərəcədə artıracaqdır.

Qeyd edək ki, müəssisədə i-ci ehtiyatın 1 vahid artması ($\Delta b_i = 1$) ilə optimal mənfəət

$$\Delta F_i = \Delta b_i y_i^* = 1 \cdot y_i^* = y_i^*$$

qədər artdığı üçün biz y_i^* -a i-ci ehtiyat vahidinin şərti qiyməti, qoşma qiyməti və ya sövdələşmə qiyməti kimi baxmışıq. Həm də qeyd edək ki, y_i^* kəmiyyəti optimal mənfəətin i-ci ehtiyata görə məxsusi törəməsi olduğu üçün bu kəmiyyət mənfəətin həmin ehtiyata görə dəyişməsi sürətini xarakterizə edir.

Müəssisənin ehtiyatlarının optimal mənfəətə təsirinin səviyyəsini qiymətləndirməzdən əvvəl qoşma qiymətlərin dayanıqlılıq intervallarını müəyyən edək.

Bu məqsədlə sonuncu Simpleks cədvəlində (4.13)-(4.15) modelinin optimal həllində iştirak edən x_1, x_2, x_3, t_1 bazis dəyişənlərinin əmsallarından düzəldilmiş matrisin tərs matrisini quraq. Bu dəyişənlərin (4.14) məhdudiyyət şərtləri sistemi üzrə əmsallarından düzəldilmiş matrisi yazaq:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu matrisin tərs matrisini quraq[3]:

$$A = a^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

---

[3] Ən sadə yanaşmada A tərs matrisi qurmaq üçün $A = (a)^{-1} = \frac{1}{|a|} \cdot \left\| c_{ij} \right\|^T$ düsturundan istifadə etmək olar . Burada $c_{ij} - a$ matrisinin $\{i, j\}$ indeksli elementinin cəbri tamamlayıcısı olub $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ kimi hesablanır (M_{ij} - həmin elementin minorudur). Bu haqda sonrakı fəsillərdə ətraflı izahat veriləcəkdir.

a^{-1} tərs matrisin elementlərini d_{ij} ilə qeyd edəcəyimizi şərtləşək. Əgər:

$$b_i^{aşağı} = \min\left(\frac{x_j^*}{d_{ij}}\right)$$

$$b_i^{yuxarı} = \max\left(\frac{x_j^*}{d_{ij}}\right)$$

ifadələrinə əsasən müəssisənin istifadə etdiyi ehtiyatların hüdud qiymətlərini hesablasaq, alarıq:

1-ci ehtiyat üzrə:

$$\begin{cases} \Delta b_1^{aşağı} = 6 \\ \Delta b_1^{yuxarı} = 8 \end{cases}$$

2-ci ehtiyat üzrə:

$$\begin{cases} \Delta b_2^{aşağı} = 3 \\ \Delta b_2^{yuxarı} = 6 \end{cases}$$

3-cü ehtiyat üzrə:

$$\begin{cases} \Delta b_3^{aşağı} = 6 \\ \Delta b_3^{yuxarı} = 3 \end{cases}$$

4-cü ehtiyat üzrə:

$$\begin{cases} \Delta b_4^{aşağı} = 5 \\ \Delta b_4^{yuxarı} = 3 \end{cases}$$

İndi isə ehtiyatlar üzrə Y^* optimal şərti qiymətlərin dəyişməz qalacağı intervalları müəyyən edək:

1-ci ehtiyat üzrə:

$(b_1 - b_1^{aşağı};\ b_1 + b_1^{yuxarı}) = (18-6;\ 18+8) = (12;\ 26)$

2-ci ehtiyat üzrə:

$(b_2 - b_2^{aşağı};\ b_2 + b_2^{yuxarı}) = (16-3;\ 16+6) = (13;\ 22)$

3-cü ehtiyat üzrə:

$(b_3 - b_3^{aşağı};\ b_3 + b_3^{yuxarı}) = (8-6;\ 8+3) = (2;\ 11)$

4-cü ehtiyat üzrə:

$(b_4 - b_4^{aşağı};\ b_4 + b_4^{yuxarı}) = (6-5;\ 6+3) = (1;\ 9)$

• Məsələnin şərtinə görə 1-ci ehtiyat 6 vahid artır. Onda 1-ci ehtiyatın həcmi 18+6=24 vahid təşkil edəcəkdir. 2-ci ehtiyatın 3 vahid azalması ilə onun həcmi 16-3=13 vahid olacaqdır. 3-cü və 4-cü ehtiyatların 2 vahid artması ilə onların həcmi uyğun olaraq 10 vahid və

8 vahid təşkil edəcəkdir. Bu dəyişikliklər ehtiyatların dayanıqlılıq intervallarını aşmadıqları üçün onların mənfəətə göstərdikləri təsirləri:

$$F_i = b_i y_i^*$$

ifadəsinə görə hesablamaq olar:

$$F_1^{\max} = b_1 y_1^* = 6 \cdot 0 = 0$$
$$F_2^{\max} = b_2 y_2^* = -3 \cdot 1/2 = -3/2$$
$$F_3^{\max} = b_3 y_3^* = 2 \cdot 2 = 4$$
$$F_4^{\max} = b_4 y_4^* = 2 \cdot 3/2 = 3$$

Ehtiyatların həcmlərində baş verən dəyişikliklərin mənfəətə birgə təsirini müəyyən edək:

$$F^{\max} = \sum_{i=1}^{4} F_i^{\max} = 0 - 3/2 + 4 + 3 = 11/2$$

Beləliklə, 1-ci ehtiyatın 6 vahid artması məcmu mənfəətə heç bir təsir göstərmir. 2-ci ehtiyatın 3 vahid azalması isə məcmu mənfəəti $2/3$ vahid azaldır. 3-cü ehtiyatın 2 vahid artması ilə mənfəət 4 vahid, 4-cü ehtiyatın 2 vahid artması ilə isə məcmu mənfəət 3 vahid artır.

Qeyd edək ki, ehtiyatların miqdarlarında baş verən dəyişikliklər qoşma qiymətlərin dayanıqlılıq intervallarına daxil olmasaydı, onda ehtiyat vahidləri üçün yeni şərti qiymətlər tapmaq lazım gələcəkdir.

• Məlum olduğu kimi, müəssisənin optimal istehsal proqramına yalnız o halda yeni məhsul daxil etmək olar ki, onun

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - \beta_j$$

şəklində hesablanan qiymətliliyi sıfırdan kiçik olsun, yəni:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - \beta_j < 0$$

Əgər $\Delta_j > 0$ olarsa, onda bu məhsulu istehsal proqramına daxil etmək sərfəli deyil. Məsələnin şərtində nəzərdə tutulan 4-cü məmulat üzrə qiymətliliyi hesablayaq:

$$\Delta_4 = \sum_{i=1}^{4} a_{ij} y_i^* - \beta_j = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1/2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3/2 - 15 = -11 < 0$$

Göründüyü kimi, baxılan məsələdə mənfəət məsrəfləri üstələyir. Odur ki, 4-cü məmulatın müəssisənin istehsal proqramına daxil edilməsi məqsədəuyğundur.◄

4.4. Qoşma Simpleks metod – xətti proqramlaşdırma məsələsinin alternativ həll üsulu kimi

Fərz edək ki, bir cüt simmetrik qoşma məsələ verilmişdir və bu məsələlər Simpleks metodla həll edilməlidir. Birinci mərhələdə ilkin məsələyə $U_i \geq 0 \quad (i=\overline{1,m})$ və qoşma məsələyə $V_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,n})$ əlavə dəyişənlər daxil edilərək vahid bazisin yaradıldığını şərtləşək. Bu məsələləri bir Simpleks cədvəlində əks etdirək:

		$V_1 =$	...	$V_s =$	...	$V_n =$	$F(y) =$	
		$-x_1$	...	$-x_s$	...	$-x_n$	1	
y_1	$U_1 =$	a_{11}	...	a_{1s}	...	a_{1n}	a_1	
...	...	...	...	...	...	...	....	
y_r	$U_r =$	a_{r1}	...	a_{rs}	...	a_{rn}	a_r	(4.2)
...	...	...	....	...	...	...	...	
y_m	$U_m =$	a_{m1}	...	a_{ms}	...	a_{mn}	a_m	
1	$Z(x) =$	$-p_1$	...	$-p_s$	...	$-p_n$	0	

Bu cədvələ ***Qoşma Simpleks cədvəli*** deyilir.

Tutaq ki, (4.2) cədvəli əsasında ilkin məsələ (maksimum məsələ) Simpleks metodla həll edilir. Məsələnin həllinin başa çatdığını və X^* optimal planın tapıldığını şərtləşək, $\max Z(X^*) = Q$ olsun. Onda qoşmalığın birinci teoreminə görə bu məsələnin qoşma məsələsinin də Y^* optimal həlli alınmışdır və $\min F(Y^*) = Q$ olur.

Indi isə Qoşma Simpleks cədvəlinin tərtibi və məsələlərin paralel həllinə aid misala baxaq.

►**Məsələ 4.2.** Fərz edək ki, aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsi verilmişdir:

$$Z(x) = -6x_1 - 3x_2 + 4x_3 \to \max \qquad (4.19)$$

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad + 2x_3 \geq 8 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 4 \end{cases} \qquad (4.20)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \qquad (4.21)$$

(4.20) sisteminin 1-ci bərabərsizliyinin (-1)-ə vurularaq $-2x_1 - 2x_3 \le -8$ şəklinə gətirildiyini şərtləşək.

Onda (4.19)-(4.21) xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoşma məsələsi aşağıdakı şəkildə alınacaqdır:

$$F(y) = -8y_1 + 6y_2 + 4y_3 \to \min \qquad (4.22)$$

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 \ge -6 \\ \qquad -y_2 - y_3 \ge -3 \\ -2y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 4 \end{cases} \qquad (4.23)$$

$$y_1 \ge 0, y_2 >=< 0, y_3 \ge 0 \qquad (4.24)$$

Göründüyü kimi, alınmış məsələlər qeyri-simmetrik qoşma məsələlərdir.

(4.19)-(4.21) və (4.22)-(4.24) bir cüt qoşma məsələni bir Simpleks cədvəlində yerləşdirək. Bu məqsədlə (4.19)-(4.21) məsələsinin (4.20) məhdudiyyətlər sisteminə $S_i \ge 0$ $(i = \overline{1,3})$ əlavə dəyişənlər, (4.22)-(4.24) məsələsinin məhdudiyyətlər sisteminə isə $t_j \ge 0$ $(j = \overline{1,3})$ əlavə dəyişənlər daxil edərək bu sistemlərin bərabərsizliklərini tənliklərə çevirək.

$$\begin{cases} -2x_1 \qquad -2x_3 + S_1 = -8 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 0 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 + S_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 = 2x_1 \qquad + 2x_3 - 8 \ge 0 \\ 0 = x_1 + x_2 - 2x_3 + 6 \\ S_3 = -x_1 + x_2 + x_3 + 4 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 - t_1 = -6 \\ \qquad -y_2 - y_3 - t_2 = -3 \\ -2y_1 + 2y_2 - y_3 - t_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = -2y_1 - y_2 + y_3 + 6 \ge 0 \\ t_2 = \qquad -y_2 - y_3 + 3 \ge 0 \\ t_3 = -2y_1 + 2y_2 - y_3 - 4 \ge 0 \end{cases}$$

İndi isə bu məsələləri Simpleks cədvəlinə daxil edək (Bu halda ilkin məsələnin dəyişənlərini mənfi işarə ilə, qoşma məsələnin dəyişənlərini isə müsbət işarə ilə daxil edəcəyik):

	$t_1 =$	$t_2 =$	$t_3 =$	$F(y) =$
	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 \quad S_1 =$	-2	0	-2	-8
$y_2 \quad 0 =$	-1	-1	2	6
$y_3 \quad S_3 =$	1	-1	-1	4
$1 \quad Z(x) =$	6	3	-4	0

(4.3)

(4.3) Simpleks cədvəli əsasında (4.19)-(4.21) xətti proqramlaşdırma məsələsini maksimum məsələ kimi Simpleks metodla həll edək. Əvvəlcə solda yerləşən 0 elementini cədvəlin yuxarısına keçirib, müvafiq sütunu cədvəldən silək.

	$t_1 =$	$t_2 =$	$t_3 =$	$F(y) =$
	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 \quad S_1 =$	-2	0	-2	-8
$y_2 \quad 0 =$	-1	-1	$\langle 2 \rangle$	6
$y_3 \quad S_3 =$	1	-1	-1	4
$1 \quad Z(x) =$	6	3	-4	0

	$t_1 =$	$t_2 =$	$y_2 =$	$F(y) =$
	$-x_1$	$-x_2$	0	1
$y_1 \quad S_1 =$	-6	-2	2	-4
$t_3 \quad x_3 =$	-1	-1	1	6
$y_3 \quad S_3 =$	1	-3	1	14
$1 \quad Z(x) =$	8	2	4	24

: (2)

	$t_1 =$	$t_2 =$	$y_2 =$	$F(y) =$
	$-x_1$	$-x_2$	0	1
$y_1 \quad S_1 =$	$-6/2$	$-2/2$	$2/2$	$-4/2$
$t_3 \quad x_3 =$	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	$6/2$
$y_3 \quad S_3 =$	$1/2$	$-3/2$	$1/2$	$14/2$
$1 \quad Z(x) =$	$8/2$	$2/2$	$4/2$	$24/2$

(4.4)

İndi (4.4) Simpleks cədvəlindən 0-a uyğun gələn 3-cü sütun silinməlidir. Lakin bu halda (4.22)-(4.24) qoşma məsələnin y_2 dəyişəninə uyğun gələn sətir də silinir. Odur ki, sütun silinməzdən əvvəl cədvəldən y_2 dəyişənin analitik ifadəsini yazaq:

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}t_3 + \frac{1}{2}y_3 + 2$$

İndi isə (4.4) Simpleks cədvəlin 3-cü sütununu silək:

	$t_1 =$	$t_2 =$	$F(y) =$
	$-x_1$	$-x_2$	1
$y_1 \quad S_1 =$	$-6/2$	$-2/2$	$-4/2$
$t_3 \quad x_3 =$	$-1/2$	$-1/2$	$6/2$
$y_3 \quad S_3 =$	$1/2$	$-3/2$	$14/2$
$1 \quad Z(x) =$	$8/2$	$2/2$	$24/2$

Məsələnin dayaq həllini tapaq. Yeni bazisə keçmək üçün əsas element olaraq $a_{22} = -2/2$ elementini seçirik.

	$t_1 =$ $-x_1$	$t_2 =$ $-x_2$	$F(y) =$ 1
$y_1 \quad S_1 =$	$-6/2$	$\langle -2/2 \rangle$	$-4/2$
$t_3 \quad x_3 =$	$-1/2$	$-1/2$	$6/2$
$y_3 \quad S_3 =$	$1/2$	$-3/2$	$14/2$
$1 \quad Z(x) =$	$8/2$	$2/2$	$24/2$

	$t_1 =$ $-x_1$	$y_1 =$ $-S_1$	$F(y) =$ 1
$t_2 \quad x_2 =$	-3	1	-2
$t_3 \quad x_3 =$		$1/2$	-4
$y_3 \quad S_3 =$		$3/2$	-10
$1 \quad Z(x) =$	-1	-1	-10

: (-1)

	$t_1 =$ $-x_1$	$y_1 =$ $-S_1$	$F(y) =$ 1
$t_2 \quad x_2 =$			2
$t_3 \quad x_3 =$			4
$y_3 \quad S_3 =$			10
$1 \quad Z(x) =$	1	1	10

(4.5)

(4.5) Simpleks cədvəlindən $x_1 = 0,\ S_1 = 0$ qiymətlərində (4.19)-(4.21) xətti proqramlaşdırma məsələsi üçün aşağıdakı optimal plan alınır:

$$X^* = (x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4)$$

$$\max Z(X^*) = 10$$

Yoxlama: $Z(X^*) = -6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -6 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = -6 + 16 = 10$.

(4.5) cədvəlindən $t_2 = 0, t_3 = 0, y_3 = 0$ qiymətlərində (4.22)-(4.24) xətti proqramlaşdırma məsələsinin sərbəst olmayan dəyişənləri üçün aşağıdakı optimal qiymətlər alınır:

$$y_1^* = 1, y_3^* = 0$$

Tapılmış bu qiymətləri y_2 sərbəst dəyişəninin analitik ifadəsində yerinə yazsaq, alarıq:

$$y_2 = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 0 + \tfrac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 3$$

Beləliklə (4.22)-(4.24) məsələsi üçün aşağıdakı optimal həll alındı:

$$Y^* = (y_1 = 1,\ y_2 = 3,\ y_3 = 0)$$

$$\min\ F(Y^*) = 10$$

Yoxlama: $F(Y^*) = -8y_1 + 6y_2 + 4y_3 = -8 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 0 = -8 + 18 = 10$.

Göründüyü kimi, bu məsələnin Qoşma Simpleks cədvəli üzərində həllinin nəticəsi qoşmalığın 1-ci teoreminin həqiqiliyini isbat etdi. Belə ki, (4.19)-(4.21) ilkin məsələ üçün $X^*_{opt} = (x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4)$ optimal həll varsa, onda onun qoşması olan (4.22)-(4.24) xətti proqramlaşdırma məsələsi üçün də $Y^*_{opt} = (y_1 = 1,\ y_2 = 3,\ y_3 = 0)$ optimal həll var və bu optimal həllərə görə məsələlərin məqsəd funksiyalarının ekstremumları bir-birinə bərabərdir, yəni: $\max Z(X^*) = \min F(Y^*) = 10$

Cavab: $X^*_{opt} = (x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4)$ **olduqda** $\max Z(X^*) = 10$

$Y^*_{opt} = (y_1 = 1,\ y_2 = 3,\ y_3 = 0)$ **olduqda** $\min F(Y^*) = 10$ ◀

Əgər (4.3) cədvəlindən qoşma məsələnin həllini izləsək, onda yəqin etmək olar ki, bu məsələ ilkin məsələyə nəzərən əks ardıcıllıqla həll edilir. Yəni əvvəlcə əməliyyat qoşma məsələ üçün məqsəd funksiyası sətirində, sonra isə sərbəst hədlər sütununda gedir. Buradan da xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həlli üçün Simpleks metodun yeni bir versiyası alınır. Bu versiya Qoşma Simpleks metod adlanır.

Xətti proqramlaşdırmanın maksimum məsələsinin Qoşma Simpleks metodla həlli aşağıdakı mərhələləri əhatə edir:

1. Bazis dəyişənlərin seçilməsi və Simpleks cədvəlin tərtibi;

2. Məsələnin şərti optimal planının tapılması;

3. Məsələnin həqiqi optimal planının tapılması.

Birinci mərhələnin məzmunu Simpleks metodun birinci mərhələsi ilə eynidir.

İkinci mərhələdə məsələnin şərti optimal planının tapılması əlaməti ondan ibarətdir ki, Simpleks cədvəlin Z sətrində $p_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n})$ şərtləri ödənsin, yəni bu sətirdə heç bir mənfi element olmasın. Əgər bu şərt ödənməzsə, onda Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetmələrinin köməyi ilə bir bazisdən digərinə keçməklə tələb olunan bazisi qurmaq lazımdır. (Qeyd edək ki, Qoşma-Simpleks metod alqoritmini Adi Jordan Əvəzetmələrinin köməyi ilə də qurmaq olar. Bu halda Simpleks cədvəlin yuxarısındakı qeyri-bazis dəyişənləri «+» işarə ilə götürülür. Odur ki, həm şərti optimal planın, həm də həqiqi optimal planın tapılması əlamətlərində müvafiq dəyişikliklər etmək lazımdır) Bir bazisdən digərinə keçid qaydasını müəyyən edək.

Tutaq ki, Simpleks cədvəlində Z sətrinin s-ci elementi mənfidir, yəni $(-P_s) < 0$. Onda s-ci sütuna baxılır və bu sütunda hər hansı bir müsbət element axtarılır. Əgər bu halda $a_{is} \leq 0 \quad (i = \overline{1,m})$ olarsa, onda yeni bazisə keçid mümkün deyildir. Bu isə o deməkdir ki, ya məsələnin məqsəd funksiyası yuxarıdan məhdud deyil, ya da məsələnin şərtləri ziddiyyətlidir və onun həlli yoxdur. Bu hallardan hansının doğru olduğunu müəyyən etmək üçün 3-cü mərhələyə keçib hər hansı bir dayaq həlli tapmaq lazımdır. Əgər dayaq həlli mövcuddursa, onda məsələnin məqsəd funksiyası yuxarıdan məhdud deyil. Əgər dayaq həlli mövcud deyilsə, onda məsələnin şərtləri ziddiyyətlidir və onun həlli yoxdur.

Tutaq ki, baxılan sütunda heç olmazsa bir müsbət element var. $a_{rs} > 0$ olsun. Onda bu elementin yerləşdiyi r-ci sətir əsas sətir olur. Əsas sütunu tapmaq üçün Z sətirinin əmsallarının əsas sətir əmsallarına müsbət olmayan nisbətləri düzəldilir və onların içərisində ən böyüyü seçilir.

$$\max_r \left\{ \frac{-p_1}{a_{r1}} \leq 0, \ldots, \frac{-p_s < 0}{a_{rs} > 0} < 0, \ldots, \frac{-p_n}{a_{rn}} \leq 0 \right\}$$

Seçilmiş ən böyük nisbət əsas sütunu göstərəcəkdir. Bu zaman iki hal mümkündür:

1) Əsas element s-ci sütuna düşür, yəni a_{rs} əsas element olur. Bu halda yeni bazisdə Z sətirinin baxılan mənfi elementi müsbət olacaqdır, yəni:

$$q_s = \frac{-(-p_s < 0) > 0}{a_{rs} > 0} > 0$$

2) Əsas element s-ci sütuna deyil, istənilən başqa sütuna düşür. Bu halda yeni bazisdə Z sətirinin baxılan mənfi elementi kəmiyyətcə dəyişsə də (böyüsə də), işarəsi mənfi olaraq qalır. Bu halda yenidən s-ci sütunda hər hansı bir müsbət element axtarılır və bütün yuxarıda deyilənlər təkrar edilir. Proses o vaxta qədər davam etdirilir ki, ya əsas element s-ci sütuna düşür, ya da bu sütunda heç bir müsbət element qalmır. Bu hallar yuxarıda nəzərdən keçirilmişdir.

Z sətirində olan bütün mənfi elementlər bu qayda ilə yox edilərək şərti optimal həll tapılır və ya hər hansı bir mənfi elementin yox edilməsinin mümkün olmadığı aşkar edilir.

Üçüncü mərhələdə ikinci mərhələdən sonra tapılmış şərti optimal həll həqiqi optimal həllə çevrilir. Bu məqsədlə Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda olan bütün mənfi sərbəst hədlər yox edilməlidir, daha doğrusu $b_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m})$ şərtləri ödənməlidir. Əgər sərbəst hədlərdən heç olmazsa biri mənfidirsə, onda Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetmələrinin köməyi ilə bir bazisdən digərinə keçmək yolu ilə tələb olunan bazisi qurmaq lazımdır.

Tutaq ki, ikinci mərhələdən sonra alınmış Simpleks cədvəldə $b_r < 0 -$dır, yəni r- ci sətirin sərbəst həddi mənfidir. Onda yeni bazisə keçid aşağıdakı qaydada aparılır:

r- ci sətir əsas sətir olur. Əgər bu halda $b_{rj} \geq 0 \quad (j = \overline{1,n})$ olarsa, daha doğrusu bu sətirdə heç bir mənfi element olmazsa, onda yeni bazisə keçmək mümkün deyildir. Yəni elə bir bazis mövcud deyildir ki, həmin bazisdə bu mənfi sərbəst həddi yox etmək mümkün olsun. Bu halda məsələnin şərtləri ziddiyyətlidir və onun həlli yoxdur. Tutaq ki, r-ci sətirdə heç olmazsa bir mənfi element var, $b_{rs} < 0$ olsun. Onda əsas sütunu seçmək üçün Z sətir elementlərinin əsas sətir elementlərinə müsbət olmayan nisbətlərinin ən böyüyü seçilir.

$$\max_r \left\{ \frac{q_1}{b_{r1}} \le 0, \ldots, \frac{q_s > 0}{b_{rs} < 0} < 0, \ldots, \frac{q_n}{b_{rn}} \le 0 \right\}$$

Bu halda əsas element hökmən r-ci sətirə düşür və yeni bazisdə baxılan mənfi sərbəst hədd yox edilir; yəni:

$$b_r^{/} = \frac{b_r < 0}{b_{rs} < 0} > 0$$

Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda olan bütün mənfi sərbəst hədlər bu qayda ilə yox edilərək məsələnin optimal həlli tapılır.

İsbat edilir ki, Qoşma Simpleks metodun alqoritmi monoton və sonlu alqoritmdir.

►Məsələ 4.3. Aşağıdakı xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsini Qoşma Simpleks metodla həll edin.

$$Z(x) = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \to \max \qquad (4.25)$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge -4 \end{cases} \qquad (4.26)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \qquad (4.27)$$

Həlli: 1-ci mərhələ: Mənfi olmayan $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$ əlavə dəyişənlərin köməyi ilə (4.26) sisteminin bərabərsizlik şərtlərini tənliklərə çevirək.(Fərz edəcəyik ki, 2-ci bərabərsizlik (-1)-ə vurulmuşdur).

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + y_1 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + y_2 = 4 \end{cases} \qquad (4.28)$$

y_1 və y_2 dəyişənləri (4.28) sistemində vahid bazisi formalaşdırdıqları üçün bu dəyişənlər bazis dəyişənləridir. (4.28) sistemini bazis dəyişənləri vasitəsi ilə ifadə edək.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3 \ge 0 \\ y_2 = -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4 \ge 0 \end{cases} \qquad (4.29)$$

Simpleks cədvəlini tərtib edək:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-1	2	3	3
$y_2 =$	2	-3	-1	4
$Z(x) =$	-2	3	-5	0

(4.6)

2-ci mərhələ: Bu mərhələdə $Z(x)$ sətirində olan mənfi elementlər yox edilərək məsələnin şərti optimal planı tapılır. Biz Qoşma-Simpleks metod alqoritmində Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetmələri tətbiq etdiyimiz üçün şərti optimal planın tapılması əlaməti $Z(x)$ sətirində mənfi elementin olmamasından ibarətdir. Odur ki, $Z(x)$ sətirində olan mənfi elementləri yox edək.

Əvvəlcə bu sətirdəki (-2) elementini yox edirik.

$$\max\left\{-\frac{2}{2};\ -\frac{3}{3}\right\}=\left\{-1;\ -1\right\}$$

olduğu üçün yeni bazisə keçidi $a_{21}=2$ və ya $a_{22}=-3$ elementlərindən hər hansı birinə görə aparmaq olar. Əsas element olaraq $a_{21}=2$ elementini seçək.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1=$	-1	2	3	3
$y_2=$	$\langle 2\rangle$	-3	-1	4
$Z(x)=$	-2	3	-5	0

	$-y_2$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1=$	1	1	5	10
$x_1=$	1	-3	-1	4
$Z(x)=$	2	0	-12	8

: (2)

	$-y_2$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1=$	$1/2$	$1/2$	$5/2$	$10/2$
$x_1=$	$1/2$	$-3/2$	$-1/2$	$4/2$
$Z(x)=$	1	0	-6	4

(4.7)

$Z(x)$ sətirində olan (-6) elementini yox edək. Əsas element olaraq $a_{13} = 5/2$ elementini götürəcəyik. (Z sətir əmsallarının əsas sətir olan 1-ci sətir elementlərinə müsbət olmayan nisbətləri içərisində ən böyüyü olan $(0 : 1/2)$ nisbətinə görə $a_{12} = 1/2$ elementinin əsas element kimi götürülməsi məqsədəuyğun deyil. Çünki bu dövrələmə halına gətirib çıxardır və 2 dəfə bazis dəyişikliyindən sonra təkrarən (4.7) Simpleks cədvəli alınır).

	$-y_2$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	$1/2$	$1/2$	$\langle 5/2 \rangle$	$10/2$
$x_1 =$	$1/2$	$-3/2$	$-1/2$	$4/2$
$Z(x) =$	1	0	-6	4

	$-y_2$	$-x_2$	$-y_1$	1	
$x_3 =$	$1/2$	$1/2$	1	$10/2$	
$x_1 =$	$3/2$	$-7/2$	$1/2$	$15/2$	: (5/2)
$Z(x) =$	$11/2$	3	6	40	

	$-y_2$	$-x_2$	$-y_1$	1	
$x_3 =$	$1/5$	$1/5$	$2/5$	2	(4.8)
$x_1 =$	$3/5$	$-7/5$	$1/5$	3	
$Z(x) =$	$11/5$	$6/5$	$12/5$	16	

(4.8) Simpleks cədvəlinin $Z(x)$ sətirində heç bir mənfi element yoxdur. Odur ki, $y_2 = 0, x_2 = 0, y_1 = 0$ olduqda Simpleks cədvəldən aşağıdakı şərti optimal həll alınır.

$$X_{s.opt} = (x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 2)$$

3-cü mərhələ: Bu mərhələdə $X_{s.opt}$ həll həqiqi optimal həllə çevrilir. Bu məqsədlə Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda olan mənfi elementlər yox edilməlidir. Lakin (4.8) Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda heç bir mənfi element yoxdur. Odur ki, 2-ci mərhələnin sonunda alınmış şərti optimal həll avtomatik olaraq məsələnin optimal həlli olur:

$$X^*_{opt} = (x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2)$$

$$\max Z(X^*) = 16$$

Yoxlama: $Z(x) = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2 \cdot 3 + 0 + 5 \cdot 2 = 6 + 10 = 16$

Cavab: $X^*_{opt} = (x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2)$ **olduqda** $\max Z(X^*) = 16$ ◄

Xətti proqramlaşdırmanın minimum məsələsinin Qoşma Simpleks metodla həll alqoritmi maksimum məsələ üçün verdiyimiz alqoritmdən müəyyən qədər fərqlidir.

• 2-ci mərhələdə şərti optimal həllin tapılması zamanı Simpleks cədvəlin Z -sətirində olan bütün müsbət elementlər yox edilməlidir. Z sətirinin müsbət elementini yox etmək üçün əsas element aşağıdakı qayda üzrə seçilir:

- Z sətirinin müsbət elementi yerləşən sütunda hər hansı bir müsbət element seçilir. Əgər bu sütunda müsbət element yoxdursa, onda ya məsələnin məqsəd funksiyası aşağıdan məhdud deyil, ya da məsələnin həlli yoxdur. Tutaq ki, baxılan sütunda müsbət element var. Onda bu elementə uyğun gələn sətir əsas sətir olacaqdır. Əsas sütunu tapmaq üçün Z sətir əmsallarının əsas sətir əmsallarına mənfi olmayan nisbətlərinin ən kiçiyi seçilir. Bu nisbət əsas sütunu müəyyən edəcəkdir. Seçilmiş əsas elementə görə Simpleks cədvəli üzərində Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetmələrinin bir addımını yerinə yetirərək yeni bazisə keçirik. Əgər bu halda əsas element Z sətirinin baxılan müsbət elementi yerləşən sütuna düşərsə, onda bu yeni bazisdə həmin müsbət element yox ediləcəkdir. Əks halda proses təkrarlanır və əsas elementin tələb olunan sütuna düşməsi halına qədər davam etdirilir.

• 3-cü mərhələdə məsələnin həqiqi optimal planının tapılması üçün sərbəst hədlər sütunundakı mənfi elementlər yox edilir. Mənfi sərbəst həddi yox etmək üçün yeni bazisə keçid zamanı əsas element aşağıdakı qayda üzrə seçilir:

-Mənfi sərbəst həddin yerləşdiyi sətir əsas sətir olur. Əsas sütunu seçmək üçün Z sətir əmsallarının əsas sətir əmsallarına mənfi olmayan nisbətlərinin ən kiçiyi seçilir. Bu nisbət əsas elementi müəyyən

edəcəkdir. Bu halda əsas element hökmən Simpleks cədvəlin baxılan mənfi sərbəst həddin yerləşdiyi sətirə düşür (Simpleks cədvəlin Z sətirində $q_j \le 0$ $(j=\overline{1,n})$ olduğu üçün əsas elementin işarəsi hökmən mənfi olacaqdır)[4] və Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetmələrinin bir addımı ilə keçdiyimiz yeni bazisdə bu mənfi sərbəst hədd yox ediləcəkdir.

►**Misal 4.4. Aşağıdakı xətti proqramlaşdırmanın minimum məsələsini Qoşma Simpleks metodla həll edin:**

$$Z(x) = -4x_1 + 4x_2 + 12x_3 \to \min \qquad (4.30)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \le -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \le -1 \end{cases} \qquad (4.31)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \qquad (4.32)$$

Həlli: 1-ci mərhələ: $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$ əlavə dəyişənlərin köməyi ilə (4.31) sisteminin bərabərsizliklərini tənliklərə çevirək:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + y_1 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + y_2 = -1 \end{cases} \qquad (4.33)$$

y_1 və y_2 bazis dəyişənləri olduğu üçün (4.33) sistemini bu dəyişənlər vasitəsi ilə ifadə edək:

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 + x_2 - x_3 - 1 \ge 0 \\ y_2 = -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 1 \ge 0 \end{cases} \qquad (4.34)$$

Simpleks cədvəlini tərtib edək:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	
$y_1 =$	1	-1	1	-1
$y_2 =$	2	1	-2	-1
$Z(x) =$	4	-4	-12	0

(4.9)

[4] Əgər ən kiçik nisbət 0-a bərabərdirsə, onda bu nisbəti doğuran b_{rs} elementinin yalnız mənfi olması halında əsas element kimi qəbul etmək məqsədəuyğundur.

2-ci mərhələ: Məsələnin şərti optimal planını tapmaq üçün $Z(x)$ sətirində olan müsbət element (+4) yox edilməlidir. Bazis dəyişikliyi aparmaq üçün yuxarıda göstərdiyimiz qayda üzrə əsas elementi seçək:

- $Z(x)$ sətirində (+4) elementinin durduğu 1-ci sütunda (+2) elementinə uyğun gələn 2-ci sətiri əsas sətir kimi götürək.

$$\min\left\{4/2;\ -12/-2\right\}=4/2$$

olduğu üçün 1-ci sütun əsas sütün, $a_{21}=2$ elementi isə əsas element olacaqdır.

Göründüyü kimi, əsas element $Z(x)$ sətirinin müsbət elementi yerləşən sütuna düşdü. Odur ki, bu əsas elementə görə (4.9) Simpleks cədvəli üzərində Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetməsinin 1 addımını atmaqla yeni bazisə keçsək, həmin bazisdə $Z(x)$ sətirinin baxılan müsbət elementi yox ediləcəkdir:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1=$	1	-1	1	-1
$y_2=$	$\langle 2\rangle$	1	-2	-1
$Z(x)=$	4	-4	-12	0

	$-y_2$	$-x_2$	$-x_3$	1	
$y_1=$	-1	-3	4	-1	
$x_1=$	1	1	-2	-1	: (2)
$Z(x)=$	-4	-12	-16	4	

	$-y_2$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	$-1/2$	$-3/2$	$4/2$	$-1/2$
$x_1 =$	$1/2$	$1/2$	$-2/2$	$-1/2$
$Z(x) =$	-2	-6	-8	2

Sonuncu Simpleks cədvəlin $Z(x)$ sətirində heç bir müsbət element yoxdur. Odur ki, $y_2 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ olduqda Simpleks cədvəldən aşağıdakı şərti optimal həll alınır:

$$X_{s.opt} = (x_1 = -1/2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0)$$

3-cü mərhələ: Şərti optimal həldən həqiqi optimal həllə keçək. Bu məqsədlə sonuncu Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda olan mənfi sərbəst hədlər yox edilməlidir. Əvvəlcə $a_1 = -1/2$ sərbəst həddi yox edək.

$$\min\{(-2):(-1/2);\ (-6):(-3/2)\} = \{4;\ 4\} = 4$$

olduğu üçün əsas element olaraq $a_{12} = -3/2$ elementini götürmək olar. Bu əsas elementə görə Simpleks cədvəli üzərində Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetməsinin bir addımını ataraq yeni bazisə keçək:

	$-y_2$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	$-1/2$	$\langle -3/2 \rangle$	$4/2$	$-1/2$
$x_1 =$	$1/2$	$1/2$	$-2/2$	$-1/2$
$Z(x) =$	-2	-6	-8	2

	$-y_2$	$-y_1$	$-x_3$	1
$x_2 =$	$-1/2$	1	$4/2$	$-1/2$
$x_1 =$	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	1
$Z(x) =$	0	6	24	-6

: (-3/2)

	$-y_2$	$-y_1$	$-x_3$	1
$x_2 =$	$1/3$	$-2/3$	$-4/3$	$1/3$
$x_1 =$	$1/3$	$1/3$	$-1/3$	$-2/3$
$Z(x) =$	0	-4	-16	4

Sonuncu Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda olan $a_2 = -2/3$ mənfi sərbəst həddi yox etmək lazımdır. Bu məqsədlə

$$\min\left\{ 0 : 1/3;\ (-16) : (-1/3) \right\} = \{0;\ 48\}$$

olduğu üçün əsas element kimi $a_{23} = -1/3$ elementini götürmək lazımdır[5].

	$-y_2$	$-y_1$	$-x_3$	1
$x_2 =$	$1/3$	$-2/3$	$-4/3$	$1/3$
$x_1 =$	$1/3$	$1/3$	$\langle -1/3 \rangle$	$-2/3$
$Z(x) =$	0	-4	-16	4

[5] Qeyd: $\left\{ 0 : 1/3 \right\}$ nisbəti mənfi olmayan kiçik nisbət olsa da $a_{21} = 1/3 > 0$ olduğu üçün əsas element kimi götürülə bilməz.

	$-y_2$	$-y_1$	$-x_1$	1
$x_2 =$			$4/3$	-1
$x_3 =$	$1/3$	$1/3$	1	$-2/3$
$Z(x) =$	$16/3$	$20/3$	16	$-36/3$

$: (-1/3)$

	$-y_2$	$-y_1$	$-x_1$	1
$x_2 =$				3
$x_3 =$				2
$Z(x) =$	-16	-20	-48	36

Beləliklə, Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda $a_i \geq 0 \quad (i=\overline{1,2})$ şərtləri, Z sətirində isə $q_j \leq 0 \quad (j=\overline{1,2,3})$ şərtləri ödənir. Deməli, məsələnin optimal həlli alınmışdır və $y_2 = 0, y_1 = 0, x_1 = 0$ olduqda

$$X^*_{opt} = (x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = 2)$$

və $\min Z(X^*) = 36$ alırıq.

Yoxlama: $\min Z(x) = -4x_1 + 4x_2 + 12x_3 = 4 \cdot 3 + 12 \cdot 2 = 36$

Cavab: $X^*_{opt} = (x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = 2)$ **olduqda** $\min Z(X^*) = 36$ **olur.**◀

Bəzən konkret xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllində Simpleks metodla Qoşma Simpleks metodun birgə tətbiqi optimal həllin tapılması prosesini xeyli asanlaşdırır.

Aşağıdakı hala baxaq. Tutaq ki, xətti proqramlaşdırmanın maksimum məsələsi Simpleks metodla həll edilir. İkinci mərhələdə, məsələnin dayaq həlli qurulan zaman elə bir Simpleks cədvəli alına bilər ki, sərbəst hədlərdən bəziləri mənfi olsa da Z sətirində heç bir mənfi element olmasın (yəni maksimum məsələ üçün optimallıq şərti ödənsin). Onda Qoşma-Simpleks metoda keçmək və qalan mənfi sərbəst hədləri bu alqoritmlə yox etmək sərfəli olur. Çünki bu halda Z sətirində artıq

mənfi element yaranmır və ikinci mərhələdən sonra alınan dayaq həlli avtomatik olaraq məsələnin optimal həlli olur.

Bu halı aşağıdakı konkret misal üzərində nəzərdən keçirək.

►Məsələ 4.5. Aşağıdakı xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin optimal həllini tapın:

$$Z(x) = -2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \geq 6 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \geq 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

Həlli: Məsələni Simpleks metodla həll edək:

1-ci mərhələ: Simpleks cədvəli tərtib edək:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + y_1 = -6 \\ 2x_1 - 4x_2 + y_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + y_3 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - 3x_2 - 6 \geq 0 \\ y_2 = -2x_1 + 4x_2 + 5 \geq 0 \\ y_3 = x_1 - x_2 - 2 \geq 0 \end{cases}$$

	$-x_1$	$-x_2$	1
$y_1 =$	-2	3	-6
$y_2 =$	2	-4	5
$y_3 =$	-1	1	-2
$Z(x) =$	2	-1	0

2- ci mərhələ: Məsələnin dayaq həllini tapaq. Bu məqsədlə Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda olan mənfi elementləri yox edək:

	$-x_1$	$-x_2$	1
$y_1 =$	-2	3	-6
$y_2 =$	2	-4	5
$y_3 =$	$\langle -1 \rangle$	1	-2
$Z(x) =$	2	-1	0

	$-y_3$	$-x_2$	1
$y_1 =$	2	-1	2
$y_2 =$	-2	2	-1
$x_1 =$	1	1	-2
$Z(x) =$	-2	-1	4

: (-1)

	$-y_3$	$-x_2$	1
$y_1 =$	-2	1	-2
$y_2 =$	2	-2	1
$x_1 =$	-1	-1	2
$Z(x) =$	2	1	-4

Sonuncu Simpleks cədvəldə $Z(x)$ sətir əmsallarının hər ikisi müsbətdir, daha doğrusu maksimum məsələ üçün optimallıq şərti ödənir. Lakin sərbəst hədlər sütununda $b_1 = -2$ mənfi elementi olduğu üçün məsələnin dayaq həlli tapılmamışdır. Əgər həll prosesini davam etdirsək və Simpleks metodla bu mənfi sərbəst həddi yox etsək, onda Simpleks cədvəlin $Z(x)$ sətirində $q_1 = -1$ elementi əmələ gəlir, yəni maksimum məsələ üçün optimallıq şərti pozulur. Odur ki, Qoşma Simpleks metoda keçək və Simpleks cədvəldə olan mənfi sərbəst həddi bu alqoritm üzrə yox edək:

	$-y_3$	$-x_2$	1
$y_1 =$	$\langle -2 \rangle$	1	-2
$y_2 =$	2	-2	1
$x_1 =$	-1	-1	2
$Z(x) =$	2	1	-4

	$-y_1$	$-x_2$	1
$y_3 =$	1	1	-2
$y_2 =$	-2	2	2
$x_1 =$	1	3	-6
$Z(x) =$	-2	-4	12

: (-2)

	$-y_1$	$-x_2$	1
$y_3 =$	$-1/2$	$-1/2$	1
$y_2 =$	1	$\langle -1 \rangle$	-1
$x_1 =$	$-1/2$	$-3/2$	3
$Z(x) =$	1	2	-6

	$-y_1$	$-y_2$	1	
$y_3 =$		$1/2$	$-3/2$	
$x_2 =$	1	1	-1	: (-1)
$x_1 =$		$3/2$	$-9/2$	
$Z(x) =$	-3	-2	8	

	$-y_1$	$-y_2$	1
$y_3 =$			$3/2$
$x_2 =$			1
$x_1 =$			$9/2$
$Z(x) =$	3	2	-8

Sonuncu Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda heç bir mənfi element yoxdur. Odur ki, məsələnin dayaq həlli tapılmışdır. Digər tərəfdən, cədvəlin məqsəd funksiyası sətirində də heç bir mənfi element yoxdur. Odur ki, bu dayaq həlli avtomatik olaraq optimal həll olacaqdır:

$$X^*_{opt} = (x_1 = 9/2,\ x_2 = 1)$$

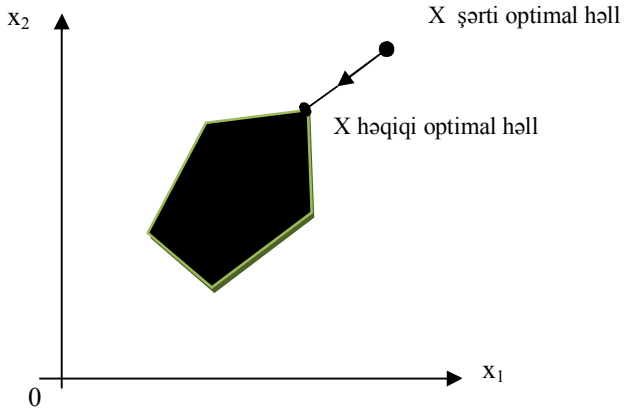
$$\max Z(X^*) = -8$$

Yoxlama: $Z(x) = -2x_1 + x_2 = -2 \cdot 9/2 + 1 = -8$

Göründüyü kimi, Simpleks metodla Qoşma-Simpleks metodun birgə tətbiqi optimal həllin tapılması ilə bağlı hesablama işlərinin həcmini xeyli azaltdı.

Cavab: $X^*_{opt} = (x_1 = 9/2,\ x_2 = 1)$ **olduqda** $\max Z(X^*) = -8$ **olur.**◄

Qoşma Simpleks metodun həndəsi izahını aşağıdakı kimi vermək olar:



Şəkil 4.1

İkinci mərhələdə şərti optimal həllin tapılması həllər oblastının hüdudları xaricində, lakin gələcəkdə optimal həllin alınacağı təpə nöqtəsinin yaxın ətrafında hər hansı bir nöqtənin tapılması deməkdir (əgər bu nöqtə həllər çoxüzlüsünün təpə nöqtəsi olarsa, onda məsələnin optimal həlli məhz həmin təpə nöqtəsində alınacaqdır).

Üçüncü mərhələdə isə bu kənar nöqtədən məqsəd funksiyasının ekstremum qiymətinin alındığı təpə nöqtəsinə keçilir.

Mövzu üzrə praktikum

4.6-4.15 xətti proqramlaşdırma məsələlərinin qoşmasını tərtib edin			
4.6	$Z(x) = x_1 \quad - x_3 + x_4 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \quad + 4x_4 \le 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le -5 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0$	4.7	$Z(x) = x_1 - x_2 - 7x_3 \to \min$ $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 4x_3 \ge 11 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 8 \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 \ge 15 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$
4.8	$Z(x) = -3x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 \le 8 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 7 \\ \quad -4x_2 + x_3 \ge -10 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	4.9	$Z(x) = -2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \min$ $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 9x_3 \le -8 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \le 0 \\ 4x_1 \quad + x_3 \ge 9 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$
4.10	$Z(x) = -3x_1 + 2x_2 \quad \to \max$ $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 6 \\ 8x_1 - 3x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	4.11	$Z(x) = 5x_1 - x_2 + x_3 \to \min$ $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 0 \\ \quad -x_2 + x_3 = 11 \\ -x_1 + 2x_2 \quad \le 0 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$
4.12	$Z(x) = 7x_1 - 3x_2 - 4x_3 \to \max$ $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 0 \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 \le -6 \\ 4x_1 - 3x_2 \quad = 8 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	4.13	$Z(x) = \quad 4x_2 - x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 8x_2 - x_3 \le 9 \\ -x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 = 15 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$
4.14	$Z(x) = 2x_1 \quad - 5x_3 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 6x_3 \ge -8 \\ 7x_1 \quad - 3x_3 = 12 \\ -8x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 6 \end{cases}$ $x_1 >=< 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	4.15	$Z(x) = x_1 + 3x_2 \quad - x_4 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 13 \\ -x_1 \quad + 4x_3 - 9x_4 \le 18 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 >=< 0, \quad x_4 \ge 0$

4.16-4.39 xətti proqramlaşdırma məsələlərini Qoşma Simpleks metodla həll edin			
4.16	$Z(x)=7x_1+3x_2+6x_3\to\min$ $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3\ge 3\\ 2x_1+x_2+x_3\ge 4\\ x_1+3x_2+2x_3\ge 6\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	4.17	$Z(x)=4x_1+6x_2+2x_3\to\min$ $\begin{cases} 2x_2+2x_3\ge 3\\ x_1+x_2-x_3\ge 2\\ x_1+2x_2+2x_3\ge 2\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
4.18	$Z(x)=15x_1+2x_2+12x_3\to\min$ $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3\ge 2\\ 3x_1+x_2+x_3\ge 3\\ 5x_1+x_2+4x_3\ge 5\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	4.19	$Z(x)=x_1+x_2+3x_3\to\min$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3\ge 4\\ x_1+x_2-x_3\ge 3\\ x_2+2x_3\ge 1\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
4.20	$Z(x)=2x_1+5x_2+x_3\to\min$ $\begin{cases} -x_1+x_2+x_3\ge 6\\ 3x_1+2x_2-x_3\le 12\\ x_1-2x_2-3x_3\ge 3\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	4.21	$Z(x)=x_1+2x_2+x_3\to\min$ $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3\ge 6\\ -x_1+2x_2+x_3\ge 2\\ 2x_1-x_2+x_3\ge 2\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
4.22	$Z(x)=4x_1+10x_2+2x_3\to\min$ $\begin{cases} 5x_1+3x_2+2x_3\ge 2\\ -3x_1-x_2+x_3\le 3\\ -2x_1+2x_2+x_3\ge 7\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	4.23	$Z(x)=2x_1+6x_2+2x_3\to\min$ $\begin{cases} -x_1+x_2+x_3\ge 1\\ -2x_1-3x_2-x_3\le 1\\ x_1+x_2-x_3\ge 3\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
4.24	$Z(x)=4x_1+3x_2+5x_3\to\min$ $\begin{cases} -2x_1-x_2+2x_3=2\\ x_1+x_2-3x_3\ge 3\\ x_1+3x_2+2x_3\ge 6\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	4.25	$Z(x)=6x_1+2x_2+3x_3\to\min$ $\begin{cases} -2x_1+2x_2-3x_3\ge 4\\ x_1+x_3\ge 2\\ 3x_1+x_2+2x_3\ge 10\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
4.26	$Z(x)=x_1+x_2+2x_3\to\min$ $\begin{cases} x_1-x_2-x_3\ge 1\\ -2x_1+3x_2\ge 1\\ -3x_1+4x_2-2x_3\le 1\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	4.27	$Z(x)=x_1+x_2-x_3\to\max$ $\begin{cases} -x_1+2x_2-3x_3\ge -1\\ x_1-3x_2+4x_3\ge -1\\ x_1-2x_3\ge -2\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$

4.28	$Z(x)=2x_1+6x_2+12x_3\to\min$ $\begin{cases}-x_1+x_2+x_3\ge 1\\ 2x_1-2x_2+x_3\ge 0\\ x_1+3x_2+3x_3\ge -2\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	4.29	$Z(x)=3x_1+2x_2+2x_3\to\max$ $\begin{cases}-x_2-x_3\ge -4\\ -2x_1-x_2-2x_3\ge -6\\ -2x_1+x_2-2x_3\ge -2\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
4.30	$Z(x)=4x_1+3x_2+x_3\to\max$ $\begin{cases}-2x_1-x_2\ge -1\\ -x_1-x_2-x_3\ge -1\\ -2x_1+x_2-2x_3\ge -3\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	4.31	$Z(x)=6x_1+2x_2+2x_3\to\max$ $\begin{cases}-x_1+x_2-2x_3\ge -1\\ -2x_1-2x_2+x_3\ge -2\\ -2x_1-x_2-x_3\ge -1\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
4.32	$Z(x)=3x_1+4x_2+5x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=4\\ -x_1+x_2+2x_3\le 8\\ -3x_1+x_2+2x_3\ge 12\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	4.33	$Z(x)=3x_1-5x_2-x_3\to\max$ $\begin{cases}-3x_1+x_2-x_3\ge -1\\ -x_1+3x_2+3x_3\ge -1\\ -x_1+x_2-x_3\ge -1\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
4.34	$Z(x)=x_1-2x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1-2x_2-x_3\ge -2\\ -x_1+2x_2-3x_3\ge -6\\ -x_1-x_2-3x_3\ge -12\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	4.35	$Z(x)=x_1+2x_2-4x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=8\\ -x_1+4x_2-4x_3\ge 18\\ x_1+4x_2-5x_3\le 18\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
4.36	$Z(x)=-x_1+x_2+2x_3\to\min$ $\begin{cases}2x_1+x_3\ge 2\\ -x_1+x_2+x_3\le 6\\ -3x_1+2x_2+x_3\le 8\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	4.37	$Z(x)=5x_1-x_2-11x_3\to\max$ $\begin{cases}2x_1+x_2-3x_3\ge -2\\ -x_1-x_2+2x_3\ge -3\\ -2x_1-x_2+x_3\ge -1\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
4.38	$Z(x)=-3x_1+x_2+2x_3\to\max$ $\begin{cases}-x_1+x_2+2x_3=2\\ x_1+x_3\le 4\\ x_1+x_2+x_3\ge 6\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	4.39	$Z(x)=2x_1+x_2+x_3\to\max$ $\begin{cases}-x_1+x_2-2x_3\le 4\\ 3x_1+2x_2+x_3\le 2\\ x_1-x_2+x_3\ge 1\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$

4.40-4.51 xətti proqramlaşdırma məsələlərinin qoşmasını tərtib edin və bu məsələlər üçün qoşmalıqın birinci teoreminin ödəndiyini yoxlayın			
4.40	$Z(x)=3x_1+7x_2+10x_3\to\min$ $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3\ge 5\\ x_1+x_2\ge 1\\ 2x_1+3x_2+7x_3\le 7\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	4.41	$Z(x)=15x_1+7x_2+12x_3\to\min$ $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3\ge 2\\ 3x_1+x_2+x_3\ge 3\\ 5x_1+x_2+4x_3\ge 1\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
4.42	$Z(x)=4x_1+3x_2+x_3\to\min$ $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3\ge 7\\ -x_1+3x_2+x_3\ge 1\\ 11x_1+7x_2+4x_3\le 27\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	4.43	$Z(x)=2x_1+5x_2+x_3\to\min$ $\begin{cases}-3x_1-2x_2+x_3\ge 5\\ 2x_1+4x_2-4x_3\ge 3\\ 3x_1+5x_2+x_3\ge 6\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
4.44	$Z(x)=3x_1+x_2+2x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3\\ x_1+x_2\le 1\\ x_1-x_2+x_3\ge 1\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	4.45	$Z(x)=2x_1+2x_2-5x_3\to\min$ $\begin{cases}2x_1-2x_2+3x_3\ge 12\\ x_1-x_2+x_3\ge -2\\ 2x_1-x_2+2x_3=24\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
4.46	$Z(x)=2x_1+x_2+6x_3+3\to\min$ $\begin{cases}x_1-3x_2+2x_3=1\\ -2x_1-4x_2-x_3\ge -7\\ -x_1+x_2+3x_3\ge 6\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	4.47	$Z(x)=3x_1+2x_2+3x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3\ge 2\\ -x_1+2x_2+x_3\le 4\\ x_1+2x_3=2\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
4.48	$Z(x)=2x_1+x_2+2x_3\to\min$ $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3\ge 2\\ -2x_1+x_2+2x_3=2\\ 2x_1+x_2-2x_3\le 6\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	4.49	$Z(x)=-3x_1+2x_2-4x_3-1\to\max$ $\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3\le 7\\ 2x_1+4x_2-x_3\le 6\\ x_1+x_2\le 3\\ -3x_1+x_2-2x_3\le -2\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
4.50	$Z(x)=2x_1+x_2-x_3\to\min$ $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3\ge 5\\ -x_1-2x_2-x_3\ge -7\\ x_1-x_2+x_3\ge 1\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	4.51	$Z(x)=x_1+4x_2+x_3\to\max$ $\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3\le 4\\ 3x_1+x_2+2x_3\le 9\\ 2x_1+3x_2+x_3\ge 6\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$

Mövzu üzrə testlər

1.Xətti optimallaşdırma modelinin qoşmasının məhdudiyyət şərtlərinin əmsallarından düzəldilmiş matrislə ilkin modelin uyğun matrisi arasında hansı əlaqə vardır?

A) Bu matrislər arasında heç bir əlaqə yoxdur;
B) Bu matrislər tamamilə üst-üstə düşür;
C) Qoşma modelin matrisi ilkin modelin müvafiq matrisinin transponirə edilmiş formasıdır;
D) Qoşma modelin matrisinin şərtlərinin sayı ilkin modelin matrisinin şərtlərinin sayından 2 dəfə çoxdur;
E) Qoşma modelin matrisinin sütunlarının sayı ilkin modelin matrisinin sütunlarının sayından 2 dəfə çoxdur.

2.Fərz edək ki, xətti optimallaşdırma modelində n sayda dəyişən və m sayda məhdudiyyət şərti (dəyişənlərin mənfi olmaması şərtləri nəzərə alınmır) iştirak edir. Bu modelin qoşma modelində neçə dəyişən və neçə məhdudiyyət şərti iştirak edəcəkdir?

A) n dəyişən və m məhdudiyyət şərti;
B) n dəyişən və $m+n$ məhdudiyyət şərti;
C) $n+m$ dəyişən və m məhdudiyyət şərti;
D) m dəyişən və n məhdudiyyət şərti;
E) $n+m-1$ dəyişən və $n+m$ məhdudiyyət şərti.

3.Bir cüt qoşma modelin simmetrik olması üçün hansı şərt ödənməlidir:

A) Bu modellərin məchullarının sayı bərabər olmalıdır;
B) Bu modellərin məhdudiyyət şərtlərinin sayı bərabər olmalıdır;
C)Bu modellərin məhdudiyyət şərtləri yalnız bərabərsizliklərdən ibarət olmalıdır;
D) Bu modellərin hər ikisində məqsəd funksiyasının maksimum qiyməti axtarılmalıdır;
E) Bu modellərin hər ikisində məqsəd funksiyasının minimum qiyməti axtarılmalıdır.

5.Xətti optimallaşdırma modelinin qoşmasının iqtisadi mənası ilə əlaqədar aşağıdakı cavablardan hansının doğru olduğunu müəyyən edin.

- *Əgər ilkin modeldə müəssisə üçün maksimum mənfəət təmin edən optimal istehsal proqramı axtarılırsa, onda qoşma modeldə:*

A) Məhsulların istehlak məntəqələrinə daşınması üçün optimal plan axtarılır;

B) İstehsal ehtiyatı vahidləri üçün optimal qoşma qiymətlər axtarılır;
C) Müəssisə üçün hansı məhsulların istehsalının sərfəli olduğu müəyyən edilir;
D) Müəssisə üçün hansı ehtiyatlardan istifadənin sərfəli olduğu müəyyən edilir;
E) Müəssisənin əmək ehtiyatlarından istifadə üçün optimal plan axtarılır.

6.Qoşmalığın birinci teoreminə görə ilkin və qoşma modellərin məqsəd funksiyalarının ekstremumları arasında aşağıdakı münasibət ödənir:

A) max Z(x) > min F(u)
B) max Z(x) < min F(u)
C) max Z(x) = min (u)
D) max Z(x) $\leq$ min F(u)
E) max Z(x) $\geq$ min F(u)

7.Qoşmalığın birinci teoreminin iqtisadi mənasına aid aşağıdakı cavablardan hansının doğru olduğunu tapın.

- *Əgər məhsul istehsalı üçün optimal plan varsa, onda ehtiyatların qoşma qiymətləri üçün də optimal plan var və bu planlara görə müəssisənin məcmu mənfəəti:*

A) Sərf edilən ehtiyatların qoşma qiymətləri cəmindən çoxdur;
B) Sərf edilən ehtiyatların qoşma qiymətləri cəminə bərabərdir;
C) Sərf edilən ehtiyatların qiymtələri cəmindən azdır;
D) Məhsulların daşınması xərclərinin cəminə bərabərdir;
E) Məhsulların daşınma xərclərinin cəmindən böyükdür.

8.Qoşmalığın 2-ci teoreminin iqtisadi mənası ilə əlaqədar aşağıdakı cavablardan doğru olanını seçin.

- *Qoşmalığın 2-ci teoreminin* $x_j^*(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* - p_j) = 0 \quad (j = \overline{1,n})$ *şərti:*

A) Müəssisədə istehsal ediləcək məhsulların satış qiymətlərini təyin etməyə imkan verir;
B) Müəssisəyə hansı məhsulların istehsalının sərfəli olduğunu müəyyən etməyə imkan verir;
C) Müəssisədə istehsal edilən məhsullara ehtiyat sərfi normalarını müəyyən etməyə imkan verir;
D) Müəssisədə istehsal edilən məhsulların maya dəyərini müəyyən etməyə imkan verir;
E) Müəssisənin ehtiyatlarının defisitlik dərəcəsini qiymətləndirməyə imkan verir.

9.Qoşma Simpleks cədvəlin təyinatı ilə əlaqədar aşağıdakı cavablardan hansının doğru olduğunu seçin:

A) Qoşma Simpleks cədvəl yalnız qoşma məsələlərdən birini həll etməyə imkan verir;

B) Qoşma Simpleks cədvələ görə ilkin və qoşma məsələlər Simpleks üsulla eyni ardıcıllıqla həll edilir;

C) Qoşma Simpleks cədvələ görə ilkin məsələ Simpleks üsulla həll edildikdə qoşma məsələ ilkin məsələyə görə əks ardıcıllıqla həll edilir;

D) Qoşma Simpleks cədvəl həm ilkin, həm də qoşma məsələnin paralel həllinə imkan vermir;

E) Qoşma Simpleks cədvəl yalnız nəqliyyat məsələsini həll etməyə imkan verir.

10. $Z \to \max$ **halında xətti optimallaşdırma modelinin Qoşma Simpleks üsulla həlli zamanı (fərz edilir ki, Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetmələrindən istifadə olunur) şərti optimal planın tapılması qaydası ilə əlaqədar aşağıdakı cavablardan hansının doğru olduğunu tapın.**

- *Qoşma Simpleks üsulla şərti optimal plan tapmaq üçün Simpleks cədvəlin:*

A) Sərbəst hədlər sütununda olan mənfi elementlər yox edilir;

B) Z sətirində olan mənfi elementlər yox edilir;

C) Sərbəst hədlər sütunundakı müsbət elementlər yox edilir;

D) Z sətirində olan müsbət elementlər yox edilir;

E) Z sətirində olan kəsr ədədlər yox edilir.

11. $Z \to \max$ **halında xətti optimallaşdırma modelinin Qoşma Simpleks üsulla həlli zamanı (fərz edilir ki, Dəyişdirilmiş Jordan Əvəzetmələrindən istifadə olunur) şərti optimal planın optimal plana çevrilməsi qaydası ilə bağlı aşağıdakı cavablardan doğru olanını seçin.**

- *Şərti optimal plandan optimal plana keçmək üçün:*

A) Simpleks cədvəlin Z sətirində olan mənfi elementlər yox edilir

B) Simpleks cədvəlin Z sətirində olan müsbət elementlər yox edilir

C) Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda olan mənfi elementlər yox edilir

D) Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda olan müsbət elementlər yox edilir

E) Simpleks cədvəlin Z sətirində olan kəsr ədədlər yox edilir.

FƏSİL 5
NƏQLİYYAT MƏSƏLƏSİ

5.1. Nəqliyyat məsələsinin qoyuluşu və iqtisadi-riyazi modeli

Nəqliyyat məsələsi xətti proqramlaşdırmanın ən çox tətbiq edilən praktik məsələlərindən biridir. Məsələnin qoyuluşu aşağıdakı şəkildədir. Fərz edək ki, m sayda istehsal müəssisəsində bircins məhsul vardır. Bu müəssisələrdə olan məhsulun miqdarı uyğun olaraq $a_1, a_2, ..., a_m$ vahiddir. Bu məhsullar n sayda istehlakçılara daşınmalıdır. İstehlakçıların tələbləri məlumdur və uyğun olaraq $b_1, b_2, ..., b_n$ vahiddir. Məhsul vahidini $\{i, j\}$ kommunikasiyası üzrə (marşrutu üzrə) daşımaq üçün c_{ij} manat nəqliyyat xərci tələb edilir. Fərz edilir ki, qadağan olunmuş kommunikasiyalar yoxdur və bütün kommunikasiyalar üzrə c_{ij} -rın qiymətləri məlumdur. Bu ekzogen parametrləri aşağıdakı matris şəklində göstərək:

$$C = \left\| c_{ij} \right\|_{m,n} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

C matrisinə ***nəqliyyat xərcləri matrisi*** deyilir.

Nəqliyyat məsələsi aşağıdakı kimi ifadə edilir:

Məhsulları istehsalçılardan istehlakçılara daşımaq üçün elə bir daşınma variantı tapmaq lazımdır ki, bu varianta (plana) görə hər bir istehsalçıda olan məhsulun tam daşınması və hər bir istehlakçının tələblərinin tam ödənməsi şərti ilə bütün daşınmalara sərf ediləcək nəqliyyat xərclərinin cəmi minimum olsun.

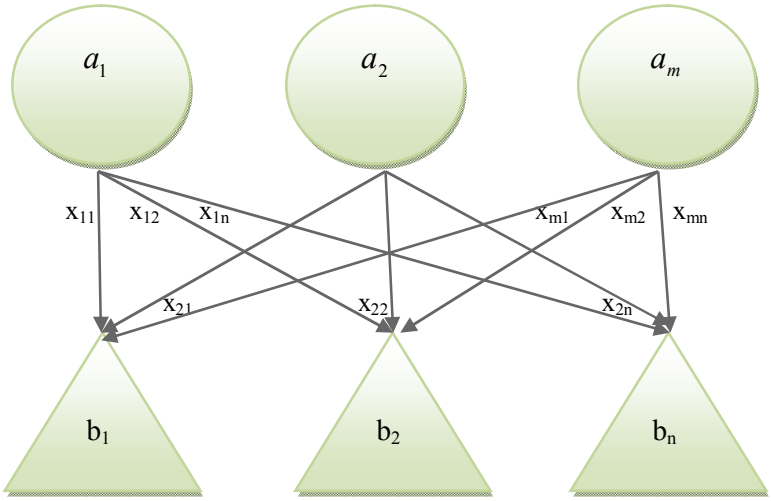
Məsələni riyazi dilə çevirək.Tutaq ki, $\{i, j\}$ kommunikasiyası üzrə x_{ij} vahid məhsul daşınacaqdır. Başqa sözlə, nəqliyyat məsələsinin daşınmalar planı aşağıdakı matris şəklində axtarılacaqdır.

$$X = \left\| x_{ij} \right\|_{m,n} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Bu matrisə nəqliyyat məsələsinin **daşınmalar planı və ya daşınmalar matrisi** deyilir. Nəqliyyat məsələsinin qoyuluşunu aşağıdakı cədvəl şəklində verək:

Müəssisələr	**İstehlak məntəqələri**				**Təklif**
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Tələb	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ / $\sum_{j=1}^{n} b_j$

Bu cədvələ nəqliyyat məsələsinin planlaşdırma matrisi deyilir. Nəqliyyat məsələsinin qoyuluşunu aşağıdakı blok-sxem şəklində də göstərmək olar:



İndi isə məsələnin riyazi təsvirinə keçək:

- Şərtə görə hər bir müəssisənin məhsulu tam daşınmalıdır. Yəni:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} = a_2 \\ ... \quad ... \quad ... \\ x_{m1} + x_{m2} + ... + x_{mn} = a_m \end{cases} \qquad (5.1)$$

və ya

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, m)$$

- Şərtə görə hər bir istehlakçının tələbi tam ödənməlidir. Yəni:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + ... + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + ... + x_{m2} = b_2 \\ ... \quad ... \quad ... \\ x_{1n} + x_{2n} + ... + x_{mn} = b_n \end{cases} \qquad (5.2)$$

və ya

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = \overline{1, n})$$

- x_{ij} endogen kəmiyyətləri müxtəlif kommunikasiyalar üzrə daşınan məhsulların həcmini göstərdiyindən, təbii ki, mənfi kəmiyyət ola bilməzlər. Yəni:

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, ..., x_{1n} \geq 0, ..., x_{mn} \geq 0 \qquad (5.3)$$

- Qarşıya qoyulmuş məqsədə görə nəqliyyat xərclərinin cəmi minimum olmalıdır. Odur ki, bu xərclərə daşınacaq məhsulların miqdarının funksiyası kimi baxsaq, alarıq:

$$Z(x) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + ... + c_{2n}x_{2n} +$$
$$+ ... + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + ... + c_{mn}x_{mn} \to \min \qquad (5.4)$$

Göründüyü kimi, baxılan iqtisadi məsələnin riyazi ifadəsi (5.1)-(5.4) xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirildi. Yəni, x_{ij} dəyişənləri üçün mənfi olmayan elə qiymətlər tapmaq lazımdır ki, bu qiymətlər (5.1)-(5.2) məhdudiyyət şərtləri sistemlərini ödəsinlər və (5.4) xətti funksiyaya ən kiçik qiymət versinlər.

(5.1)-(5.4) məsələsinə nəqliyyat məsələsinin iqtisadi-riyazi modeli deyilir. Biz gələcəkdə onu sadəcə nəqliyyat məsələsi adlandıracağıq. (5.1)-(5.4) nəqliyyat məsələsini cəm işarələrinin köməyi ilə yazaq.

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (5.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = \overline{1,m}) \qquad (5.6)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad (5.7)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \begin{pmatrix} i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n} \end{pmatrix} \qquad (5.8)$$

5.2. Qapalı və açıq nəqliyyat məsələləri

(5.5)-(5.8) nəqliyyat məsələsinin həll olunması şərti aşağıdakı teoremə görə müəyyən edilir.

Teorem: (5.5)-(5.8) nəqliyyat məsələsinin həll edilməsi üçün zəruri və kafi şərt

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (5.9)$$

şərtinin ödənməsidir, yəni məcmu təklifin məcmu tələbə bərabər olmasıdır.

(5.9) şərtinə tarazlıq şərti deyilir. Teoremi zərurilik şərti üçün isbat edək.

Tutaq ki, (5.5)-(5.8) nəqliyyat məsələsinin X^* optimal həlli vardır. İsbat edək ki, (5.9) şərti ödənir. Bunun üçün (5.6) sistemini i indeksinə görə, (5.7) sistemini isə j indeksinə görə cəmləyək. Onda alarıq:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^* = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Alınmış ifadələrin sol tərəfləri bir-birinə bərabər olduğundan, sağ tərəfləri də bərabər olmalıdır. Yəni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Teorem isbat olundu.

(5.9) tarazlıq şərti ödənən nəqliyyat məsələsinə ***qapalı balanslı nəqliyyat məsələsi və ya sadəcə qapalı nəqliyyat məsələsi*** deyilir. Yuxarıdakı teoremə görə deyə bilərik ki, yalnız qapalı nəqliyyat məsələsini həll etmək mümkündür.

Bəzən nəqliyyat məsələsində (5.9) tarazlıq şərti ödənmir. Yəni məcmu təklif məcmu tələbdən çox, yəni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (5.10)$$

və ya az, yəni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (5.11)$$

ola bilər.

(5.10) və ya (5.11) şərtləri ödənən nəqliyyat məsələsinə ***açıq nəqliyyat məsələsi*** deyilir.

(5.10) şərti ödənən açıq nəqliyyat məsələsini quraq:

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \qquad (i = \overline{1,m})$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = \overline{1,n})$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad \begin{pmatrix} i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n} \end{pmatrix}$$

(5.11) şərti ödənən açıq nəqliyyat məsələsi isə aşağıdakı şəkildə yazılacaqdır:

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = \overline{1,m})$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \qquad (j = \overline{1,n})$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad \begin{pmatrix} i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n} \end{pmatrix}$$

Yuxarıdakı teoremə görə açıq nəqliyyat məsələsini həll etmək mümkün deyil. Odur ki, onları qapalı şəklə gətirmək lazımdır.

Tutaq ki, açıq nəqliyyat məsələsində (5.10) şərti ödənir, yəni məcmu təklif məcmu tələbdən çoxdur. Bu halda məsələni qapalı şəkilə gətirmək üçün həmin məsələyə $(n+1)-$ ci şərti istehlakçı daxil edilir və onun tələbi aşağıdakı kimi hesablanır:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Bu halda məsələnin ölçüləri böyüdüyü üçün həm C nəqliyyat xərcləri matrisinə, həm də X daşınmalar matrisinə $(n+1)$ -ci sütun əlavə edilir. (C matrisində bu sütuna ya "0"-lar, ya da bu matrisin digər elementləri ilə müqayisədə kifayət qədər böyük ədədlər yazılır). Onda baxılan açıq nəqliyyat məsələsi

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j \qquad (5.10')$$

tarazlıq şərti daxilində qapalı məsələyə çevrilir.

Tutaq ki, açıq nəqliyyat məsələsində (5.11) şərti ödənir. Yəni məcmu tələb məcmu təklifdən çoxdur. Bu halda məsələni qapalı şəkilə gətirmək üçün $(m+1)-$ci şərti istehsal müəssisəsindən istifadə edilir və bu müəssisədə olan məhsulun miqdarı aşağıdakı kimi müəyyən edilir:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Məsələnin ölçüləri dəyişdiyi üçün C və X matrislərinə uyğun olaraq $(m+1)-$ ci sətir əlavə edilir. Onda baxılan açıq nəqliyyat məsələsi

$$\sum_{i=1}^{m+1} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (5.11')$$

tarazlıq şərti daxilində qapalı məsələyə çevrilir.

Alınmış yeni qapalı nəqliyyat məsələsi həll edilərək optimal həll tapıldıqdan sonra bu optimal həlldə $(m+1)-$ ci əlavə sətir və ya $(n+1)-$ ci əlavə sütun silinir və baxılan açıq nəqliyyat məsələsinin optimal həlləri tapılır. Əgər C matrisinə əlavə edilmiş $(m+1)-$ ci sətirə və ya $(n+1)-$ ci sütuna "0"lar yazılmışdırsa, onda açıq nəqliyyat məsələsi ilə onun gətirildiyi qapalı nəqliyyat məsələsinin məqsəd funksiyalarının minimum qiymətləri üst-üstə düşür. Əgər C

matrisinə əlavə edilmiş $(m+1)-$ ci sətirə və ya $(n+1)-$ ci sütuna sıfırdan fərqli böyük ədədlər yazılmışdırsa, onda açıq nəqliyyat məsələsinin məqsəd funksiyasının minimum qiymətini tapmaq üçün bu məsələnin gətirildiyi qapalı nəqliyyat məsələsinin nəqliyyat xərclərinin cəmindən X daşınmalar matrisində silinmiş sətir və ya sütunla bağlı nəqliyyat xərclərinin cəmini çıxmaq lazımdır.

5.3. Nəqliyyat məsələsinin həll üsulları

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi nəqliyyat məsələsi riyazi ifadəsinə görə xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsidir. Odur ki, bu məsələni Simpleks metodla həll etmək mümkündür. Lakin nəqliyyat məsələsinin indiyə qədər baxdığımız xətti proqramlaşdırma məsələlərindən bir sıra fərqli cəhətləri vardır. Bu fərqli cəhətlər aşağıdakılardır:

1. *Nəqliyyat məsələsinin dəyişənləri iki indekslidir;*
2. *Məsələnin bütün məhdudiyyət şərtləri tənliklərdən ibarətdir;*
3. *Hər bir dəyişən yalnız iki məhdudiyyət şərtində iştirak edir;*
4. *Məsələnin məhdudiyyət şərtlərində iştirak edən bütün dəyişənlərin əmsalları vahidə bərabərdir.*

Bu fərqli cəhətlər ona gətirib çıxardır ki, nəqliyyat məsələsini Simpleks metodla həll etmək nəzəri cəhətdən mümkün olsa da, praktik baxımdan sərfəli olmur (hesablama işlərinin həcmi həddən artıq çox alınır).

Odur ki, nəqliyyat məsələsini həll etmək üçün bu fərqli cəhətləri nəzərə alan və optimal həllin tapılması prosesini asanlaşdıran bir sıra sonlu həll metodları hazırlanmışdır. Bu metodlara misal olaraq potensiallar metodunu, macar metodunu, bölgü metodunu, diferensial renta metodunu, Fogelin approksimasiyası metodunu və s. göstərmək olar.

Nəqliyyat məsələsinin həllində ən çox tətbiq edilən metod potensiallar metodudur.

Potensiallar metodunun alqoritmi ***hazırlıq mərhələsindən və sonlu sayda eyni tipli yaxınlaşmalardan*** ibarətdir. Hazırlıq mərhələsində məsələnin hər hansı bir başlanğıc daşınmalar matrisi[6] tərtib edilir və onun optimal olub-olmaması yoxlanılır.

Hər bir yaxınlaşma iki mərhələdən ibarətdir (birinci və sonuncu

---

[6] *Biz alqoritmin izahında iqtisadi baxımdan "X daşınmalar planı" anlayışından, riyazi baxımdan "X daşınmalar matrisi" anlayışından istifadə edəcəyik. Məzmun baxımından bu anlayışlar sinonimdirlər.*

yaxınlaşmalardan başqa. Birinci yaxınlaşma yalnız ikinci mərhələdən, sonuncu yaxınlaşma isə yalnız birinci mərhələdən ibarətdir). Yaxınlaşmanın birinci mərhələsində əvvəlki yaxınlaşmada tərtib edilmiş daşınmalar planının optimal olub-olmaması yoxlanılır. İkinci mərhələdə isə optimal olmayan plan yaxşılaşdırılaraq daha az (ən pis halda ona bərabər) nəqliyyat xərclərinə malik yeni daşınmalar planı tərtib edilir.

Hazırlıq mərhələsinin məzmunu. Bu mərhələdə məsələnin X daşınmalar matrisi ilə verilmiş başlanğıc daşınmalar planı tərtib edilir və onun optimal olub-olmaması yoxlanılır. İlkin daşınmalar matrisini aşağıdakı üsullardan biri ilə tərtib etmək olar:

1. Şimal-qərb bucağı üsulu;

2. Ən kiçik element üsulu;

3. İki dəfə nəzərə alma üsulu;

4. Foqelin approksimasiya üsulu.

Ən kiçik element üsulu timsalında nəqliyyat məsələsinin başlanğıc daşınmalar planının qurulması alqoritmini ətraflı şəkildə nəzərdən keçirək. Ən kiçik element üsulu ilə X dayaq daşınmalar matrisini qurmaq üçün C nəqliyyat xərcləri matrisində ən kiçik element tapılır. Tutaq ki:

$$\min_{i;j}\{c_{ij}\} = c_{i_0 j_0} - \text{dır.}$$

Bu elementə X daşınmalar matrisində $x_{i_0 j_0}$ elementi uyğun gəlir. Həmin elementin qiyməti aşağıdakı məntiqi müqayisə mexanizmi vasitəsi ilə təyin edilir:

$$x_{i_0 j_0} = \min_{i;j}\{a_{i_0}; b_{j_0}\}$$

burada $a_{i_0} - i_0 -$ cı müəssisənin (sətrin) ehtiyatı;

$b_{j_0} - j_0 -$ cı istehlakçının (sütunun) tələbidir.

Bu zaman aşağıdakı 3 haldan biri mümkündür:

1) $a_{i_0} < b_{j_0}$. Onda $x_{i_0 j_0} = a_{i_0}$ olur və X daşınmalar matrisinin $i_0 -$cı sətirinin qalan bütün elementlərinin qiymətləri 0-a bərabər olur. Bu sətrin qalıq ehtiyatı «0»-a bərabər olur. j_0-cı sütunun qalıq tələbi isə

$$b'_{j_0} = b_{j_0} - a_{i_0}$$

kimi hesablanır.

2) $a_{i_0} > b_{j_0}$. Onda $x_{i_0 j_0} = b_{j_0}$ olur və X daşınmalar matrisinin $j_0 -$cı sütunun qalan bütün elementlərinin qiymətləri «0»-a bərabər

olur. Bu sütunun qalıq tələbi «0»-a bərabər olur. i_0 – cı sətirin qalıq ehtiyatı isə

$$a'_{i_0} = a_{i_0} - b_{j_0}$$

kimi hesablanır.

3) $a_{i_0} = b_{j_0}$. Onda $x_{i_0 j_0} = a_{i_0} = b_{j_0}$ olur. X daşınmalar matrisinin həm i_0 – cı sətrinin, həm də j_0 – cı sütununun qalan bütün elementləri «0» qiymətləri alır. Həm i_0 – cı sətrin qalıq ehtiyatı, həm də j_0 – cı sütununun qalıq tələbi «0»-a bərabər olur.

Beləliklə, X daşınmalar matrisinin $x_{i_0 j_0}$ elementinin qiyməti təyin edilən zaman paralel olaraq bu matrisin ya i_0 – cı sətrinin, ya j_0 – cı sütununun, ya da hər ikisinin bütün elementlərinin qiymətləri tapılmış olur. Bu sətir və ya sütun (ya da bunların hər ikisi) bağlı hesab edilir. Sonra C nəqliyyat xərcləri matrisində bu bağlı sətir və ya sütuna uyğun gələn sətir və ya sütun silinir. Daha sonra C matrisinin qalan elementləri içərisində yenidən ən kiçiyi seçilir və proses təkrarlanır. Bu proses X daşınmalar matrisinin bütün elementlərinin qiymətləri təyin edilənə qədər davam etdirilir.

Yuxarıda sadaladığımız digər üsullar ən kiçik element üsulundan yalnız X daşınmalar matrisinin təyin ediləcək elementinin seçilməsi ardıcıllığı ilə fərqlənir. Belə ki, X daşınmalar matrisini şimal-qərb bucağı üsulu ilə tərtib edən zaman hər dəfə bu matrisin təyin edilməmiş elementlərindən şimal-qərb küncündə yerləşən elementin qiyməti tapılır. Əvvəlcə bu element x_{11} elementi olacaqdır. Sonrakı addımda x_{12} və ya x_{21}, ya da x_{22} elementi təyin edilir və s.

X daşınmalar matrisini iki dəfə nəzərə alma üsulu ilə təyin etmək üçün isə, C matrisinin hər bir sətirində ən kiçik element tapılır və qeyd edilir. Sonra bu matrisin hər bir sütununda ən kiçik element tapılır və qeyd edilir. Nəticədə C nəqliyyat xərcləri matrisinin bəzi elementləri iki dəfə, bəziləri isə bir dəfə qeyd edilmiş olur. Bu matrisin bəzi elementləri isə ümumiyyətlə qeyd edilməmiş qalır. X matrisinin elementlərinin qiymətlərinin təyin edilməsinə C matrisində iki dəfə qeyd edilmiş elementlərin mövqeyindən başlanılır. Sonra C matrisində bir dəfə qeyd edilmiş mövqelərə keçilir. C matrisinin qeyd edilməmiş elementləri üçün isə ən kiçik element qaydası tətbiq edilir.

X daşınmalar matrisini Foqelin approksimasiya üsulu ilə tərtib etmək üçün C nəqliyyat xərcləri matrisinin hər bir sətirində və sütununda iki ən kiçik elementin fərqi hesablanır. X daşınmalar matrisinin elementlərinin qiymətlərinin təyin edilməsinə C nəqliyyat xərcləri matrisində bu fərqin ən böyük olduğu sətir və ya sütundan başlanır və bu proses bütün elementlərin qiymətlərinin təyin edilməsinə qədər davam etdirilir.

Indi isə nəqliyyat məsələsinin ilkin daşınmalar matrisinin tərtibinə aid konkret misala baxaq.

►**Məsələ 5.1.** Tutaq ki, 4 müəssisədə uyğun olaraq $a_1 = 220$ vahid, $a_2 = 340$ vahid, $a_3 = 410$ vahid və $a_4 = 230$ vahid məhsul vardır. Bu məhsulları 5 istehlak məntəqəsinə daşımaq lazımdır. 1-ci istehlakçının tələbi $b_1 = 250$ vahid, 2-ci istehlakçının tələbi $b_2 = 150$ vahid, 3-cü istehlakçının tələbi $b_3 = 250$ vahid, 4-cü istehlakçının tələbi $b_4 = 150$ vahid və 5-ci istehlakçının tələbi $b_5 = 400$ vahiddir. Məhsul vahidlərinin daşınma xərcləri aşağıdakı nəqliyyat xərcləri matrisi ilə verilmişdir:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 5 & 9 \\ 9 & 4 & 3 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 9 & 4 & 7 \\ 7 & 2 & 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Nəqliyyat məsələsinin iqtisadi-riyazi modelini qurun və müxtəlif üsullarla başlanğıc daşınmalar matrisini tərtib edin.

Həlli: Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini quraq. Tutaq ki, $\{i, j\}$ kommunikasiyası üzrə x_{ij} vahid məhsul daşınacaqdır. Onda alırıq:

$$Z(x) = 3x_{11} + 2x_{12} + 6x_{13} + 5x_{14} + 9x_{15} + 9x_{21} + 4x_{22} +$$
$$+ 3x_{23} + 8x_{24} + 6x_{25} + 2x_{31} + x_{32} + 9x_{33} + 4x_{34} + 7x_{35} + 7x_{41} +$$
$$+ 2x_{42} + 6x_{43} + 6x_{44} + 8x_{45} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 220 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 340 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 410 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 230 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=250 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=150 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=250 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=150 \\ x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}=400 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i=\overline{1,4}; \qquad j=\overline{1,5})$$

Məsələdə $\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j = 1200$ olduğu üçün bu məsələ qapalı nəqliyyat məsələsidir.

Məsələ üçün X_0 başlanğıc daşınmalar matrisi qurulmalıdır. Baxılan nəqliyyat məsələsi 4×5 ölçülü olduğu üçün bu daşınmalar matrisi aşağıdakı 4×5 ölçülü matris şəklində axtarılacaqdır:

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \end{pmatrix}$$

X_0 başlanğıc daşınmalar matrisinin qurulması dedikdə bu matrisin x_{ij} elementləri üçün elə mənfi olmayan qiymətlərin tapılması başa düşülür ki, 1-ci sətir elementlərinin cəmi 220-yə, 2-ci sətir elementlərinin cəmi 340-a, 3-cü sətir elementlərinin cəmi 410-a, 4-cü sətir elementlərinin cəmi 230-a bərabər olsun. Bu matrisin 1-ci sütun elementlərinin cəmi 250-yə, 2-ci sütun elementlərinin cəmi 150-yə, 3-cü sütun elementlərinin cəmi 250-yə, 4-cü sütun elementlərinin cəmi 150-yə, 5-ci sütun elementlərinin cəmi isə 400-ə bərabər olmalıdır.

a) Şimal-qərb bucağı üsulu ilə nəqliyyat məsələsinin başlanğıc daşınmalar matrisini tərtib edək.

Yuxarıda verdiyimiz alqoritmə görə bu üsulla başlanğıc daşınmalar matrisi tərtib edən zaman C nəqliyyat xərcləri matrisi nəzərə alınmır və ilk növbədə X_0 daşınmalar matrisinin şimal-qərb küncündə yerləşən x_{11} elementinin qiyməti təyin edilir:

$$x_{11} = \min\{a_1;\ b_1\} = \min\{220;\ 250\} = 220$$

$a_1 < b_1$ olduğu üçün X_0 daşınmalar matrisinin 1-ci sətrinin qalan elementlərinin qiymətləri “0”-a bərabər olur:

$$x_{12} = 0,\ \ x_{13} = 0,\ \ x_{14} = 0, x_{15} = 0$$

Göründüyü kimi X_0 daşınmalar matrisinin 1-ci sətrinin qalıq ehtiyatı $a_1' = 0$ olur, 1-ci sütunun qalıq tələbi isə $b_1' = 250 - 220 = 30$ olur. Beləliklə, X_0 daşınmalar matrisinin 1-ci sətrinin bütün elementləri təyin edildi. Odur ki, bu matrisin təyin edilməmiş elementləri içərisində şimal-qərb küncündə yerləşən element x_{21} elementi olacaqdır və bu element təyin edilməlidir:

$$x_{21} = \min\{a_2;\ b_1'\} = \min\{340;\ 30\} = 30$$

$b_1' < a_2$ olduğu üçün X_0 daşınmalar matrisinin 1-ci sütununun qalan elementlərinin qiymətləri “0”-a bərabər olur:

$$x_{31} = 0,\ \ x_{41} = 0$$

Proses X_0 daşınmalar matrisinin bütün elementlərinin qiymətləri təyin edilənə qədər davam etdirilir. Prosesin gedişi aşağıdakı sxemdə təsvir edilmişdir:

$220^{(1)}$	0	0	0	0	~~220~~	0	0	0
$30^{(2)}$	$150^{(3)}$	$160^{(4)}$	0	0	~~340~~	~~310~~	~~160~~	0
0	0	$90^{(5)}$	$150^{(6)}$	$170^{(7)}$	~~410~~	~~320~~	~~170~~	0
0	0	0	0	$230^{(8)}$	~~230~~	0	0	0
~~250~~	~~150~~	~~250~~	~~150~~	~~400~~				
~~30~~	0	~~90~~	0	~~230~~				
0	0	0	0	0				

Qeyd: *Sxemdə mötərizədəki rəqəmlərlə X_0 daşınmalar matrisinin elementlərinin təyin edilməsi ardıcıllığı qeyd edilmişdir. Bu prinsip digər proseslərin tətbiqi prosesində də gözləniləcək.*

Beləliklə, aşağıdakı başlanğıc daşınmalar matrisi aldıq:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 220 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 150 & 160 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 150 & 170 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 230 \end{pmatrix}$$

Bu daşınmalar planı üçün nəqliyyat xərclərinin cəmini hesablayaq:

$$Z(X_0) = 3 \cdot 220 + 9 \cdot 30 + 4 \cdot 150 + 3 \cdot 160 + 9 \cdot 90 + 4 \cdot 150 + 7 \cdot 170 + 8 \cdot 230 =$$
$$= 660 + 270 + 600 + 480 + 810 + 600 + 1190 + 1840 = 6450 \ \ vahid$$

b) *Ən kiçik element üsulu ilə nəqliyyat məsələsinin başlanğıc daşınmalar matrisini tərtib edək.*

Yuxarıda verdiyimiz alqoritmə görə bu üsulla başlanğıc daşınmalar matrisi tərtib edən zaman C nəqliyyat xərcləri matrisində ən kiçik element tapılır. Bu element $c_{32} = 1$ elementidir. X_0 daşınmalar matrisində C matrisinin bu elementinə uyğun gələn element x_{32} olacaqdır. Deməli, ilk növbədə bu elementin qiyməti təyin edilməlidir:

$$x_{32} = \min\{a_3;\ b_2\} = \min\{410;\ 150\} = 150$$

$b_2 < a_3$ olduğu üçün X_0 daşınmalar matrisinin 2-ci sütununun qalan bütün elementlərinin qiymətləri "0"-a bərabər olur:

$$x_{12} = 0,\ \ x_{22} = 0,\ \ x_{42} = 0$$

Göründüyü kimi X_0 daşınmalar matrisinin 2-ci sütunun qalıq tələbi $b_2' = 0$ olur, 3-cü sətirin qalıq ehtiyatı isə $a_3' = 410 - 150 = 260$ olur. Beləliklə, X_0 daşınmalar matrisinin 2-ci sütununun bütün elementləri təyin edildiyi üçün C nəqliyyat xərcləri matrisində 2-ci sütunu silirik. Sonra bu matrisin qalan elementləri içərisində yenidən ən kiçiyini tapırıq. Bu, $c_{31} = 2$ elementidir. Deməli, X_0 daşınmalar matrisinin təyin ediləcək növbəti elementi x_{31} elementi olacaqdır:

$$x_{31} = \min\{a_3';\ b_1\} = \min\{260;\ 250\} = 250$$

$b_1 < a_3'$ olduğu üçün X_0 daşınmalar matrisinin 1-ci sütununun qalan elementlərinin qiymətləri "0"-a bərabər olur:

$$x_{11} = 0,\ \ x_{21} = 0,\ \ x_{41} = 0$$

1-ci sütunun qalıq tələbi $b_1' = 0$ olur, 3-cü sətirin qalıq ehtiyatı isə $a_3'' = a_3' - b_1 = 260 - 250 = 10$ olacaqdır.

X_0 daşınmalar matrisinin 1-ci sütununun da bütün elementlərinin qiymətləri təyin edildiyi üçün C nəqliyyat xərcləri matrisinin 1-ci sütunu silinir və proses bu qayda ilə başlanğıc daşınmalar matrisinin bütün elementlərinin qiymətləri təyin edilənə qədər davam etdirilir. Prosesin gedişi tam şəkildə aşağıdakı sxemdə təsvir edilmişdir:

0	0	0	$140^{(5)}$	$80^{(8)}$	~~220~~	~~80~~	0	0
0	0	$250^{(3)}$	0	$90^{(6)}$	~~340~~	~~90~~	0	0
$250^{(2)}$	$150^{(1)}$	0	$10^{(4)}$	0	~~410~~	~~260~~	~~10~~	0
0	0	0	0	$230^{(7)}$	~~230~~	0	0	0
~~250~~	~~150~~	~~250~~	~~150~~	~~400~~				
0	0	0	~~140~~	~~310~~				
0	0	0	0	~~80~~				
0	0	0	0	0				

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 5^{(5)} & 9^{(8)} \\ 9 & 4 & 3^{(3)} & 8 & 6^{(6)} \\ 2^{(2)} & 1^{(1)} & 9 & 4^{(4)} & 7 \\ 7 & 2 & 6 & 6 & 8^{(7)} \end{pmatrix}$$

Beləliklə, aşağıdakı başlanğıc daşınmalar matrisini aldıq:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 140 & 80 \\ 0 & 0 & 250 & 0 & 90 \\ 250 & 150 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 230 \end{pmatrix}$$

Bu daşınmalar planı üçün nəqliyyat xərclərinin cəmini hesablayaq:

$$Z(X_0) = 5 \cdot 140 + 9 \cdot 80 + 3 \cdot 250 + 6 \cdot 90 + 2 \cdot 250 + 1 \cdot 150 + 4 \cdot 10 + 8 \cdot 230 =$$

$$= 700 + 720 + 750 + 540 + 500 + 150 + 40 + 1840 = 5240 \ vahid$$

b) İki dəfə nəzərə alma üsulu ilə nəqliyyat məsələsinin başlanğıc daşınmalar matrisini quraq.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi bu üsulla başlanğıc daşınmalar matrisi tərtib edən zaman C nəqliyyat xərcləri matrisinin hər bir sətirində ən kiçik element tapılır və qeyd edilir. 1-ci sətirdə ən kiçik element $c_{12} = 2$, 2-ci sətirdə $c_{23} = 3$, 3-cü sətirdə $c_{32} = 1$, 4-cü sətirdə $c_{42} = 2$ olacaqdır. Sonra bu matrisin hər bir sütununda ən kiçik element tapılır və qeyd edilir. 1-ci sütunda ən kiçik element $c_{31} = 2$, 2-ci sütunda $c_{32} = 1$, 3-cü sütunda $c_{23} = 3$, 4-cü sütunda $c_{34} = 4$, 5-ci sütunda isə $c_{25} = 6$ olacaqdır.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2^{\bullet} & 6 & 5 & 9 \\ 9 & 4 & 3^{\bullet\bullet} & 8 & 6^{\bullet} \\ 2^{\bullet} & 1^{\bullet\bullet} & 9 & 4^{\bullet} & 7 \\ 7 & 2^{\bullet} & 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Göründüyü kimi, C nəqliyyat xərcləri matrisində $c_{23} = 3$ elementi və $c_{32} = 1$ elementi həm sətirdə, həm də sütunda ən kiçik element olduğu üçün 2 dəfə, $c_{12} = 2$, $c_{25} = 6$, $c_{31} = 2$, $c_{34} = 4$ və $c_{42} = 2$ elementləri isə sətirdə və ya sütunda ən kiçik element kimi 1 dəfə qeyd edilmişdir. Deməli, X_0 daşınmalar matrisində ilk növbədə C matrisinin 2 dəfə qeyd edilmiş elementlərinə uyğun gələn elementləri təyin edilməlidir.

$\min\{1^{\bullet\bullet},\ 3^{\bullet\bullet}\} = 1$ olduğu üçün əvvəlcə X_0 matrisinin x_{32} elementini təyin edək:

$$x_{32} = \min\{a_3;\ b_2\} = \min\{410;\ 150\} = 150$$

$b_2 < a_3$ olduğu üçün X_0 daşınmalar matrisinin 2-ci sütununun qalan bütün elementlərinin qiymətləri "0"-a bərabər olur:

$$x_{12} = 0,\ \ x_{22} = 0,\ \ x_{42} = 0$$

Göründüyü kimi X_0 daşınmalar matrisinin 2-ci sütununun qalıq tələbi $b_2' = 0$ olur, 3-cü sətirin qalıq ehtiyatı isə $a_3' = 410 - 150 = 260$ olur. Beləliklə, X_0 daşınmalar matrisinin 2-ci sütununun bütün elementləri təyin edildiyi üçün C nəqliyyat xərcləri matrisində 2-ci sütunu silirik. Bu matrisin silinməmiş elementləri içərisində daha bir element 2 dəfə qeyd edilmişdir. Bu, $c_{23} = 3$ elementidir. Deməli, növbəti addımda X_0 daşınmalar matrisinin təyin ediləcək elementi x_{23} elementi olacaqdır:

$$x_{23} = \min\{a_2;\ b_3\} = \min\{340;\ 250\} = 250$$

$b_3 < a_2$ olduğu üçün X_0 daşınmalar matrisinin 3-cü sütununun qalan bütün elementlərinin qiymətləri "0"-a bərabər olur:

$$x_{13} = 0,\ \ x_{33} = 0,\ \ x_{43} = 0$$

3-cü sütunun qalıq tələbi $b_3' = 0$ olur, 2-ci sətirin qalıq ehtiyatı isə $a_2' = a_2 - b_3 = 340 - 250 = 90$ olacaqdır.

X_0 daşınmalar matrisinin 3-cü sütununun da bütün elementlərinin qiymətləri təyin edildiyi üçün C nəqliyyat xərcləri matrisində 3-cü sütunu da silirik. Bu matrisin silinməmiş elementləri içərisində artıq 2 dəfə qeyd edilmiş element yoxdur. Odur ki, 1 dəfə qeyd edilmiş elementlərə keçirik:

$\min\{2^{\bullet};\ 4^{\bullet},\ 6^{\bullet}\} = 2^{\bullet}$ olduğu üçün X_0 matrisinin x_{31} elementinin qiymətini təyin edək:

$$x_{31} = \min\{a_3';\ b_1\} = \min\{260;\ 250\} = 250$$

$b_1 < a_3'$ olduğu üçün X_0 daşınmalar matrisinin 1-ci sütununun qalan bütün elementlərinin qiymətləri "0"-a bərabər olur:

$$x_{11} = 0,\ \ x_{21} = 0,\ \ x_{41} = 0$$

Göründüyü kimi, X_0 daşınmalar matrisinin 1-ci sütununun qalıq tələbi $b_1' = 0$ olur, 3-cü sətirin qalıq ehtiyatı isə $a_3'' = a_3' - b_1 = 260 - 250 = 10$ olur. Beləliklə, X_0 daşınmalar matrisinin 1-ci sütununun bütün elementləri təyin edildiyi üçün C nəqliyyat xərcləri matrisində 1-ci sütunu silirik. Bu matrisin silinməmiş elementləri içərisində bir dəfə qeyd edilmiş elementlərdən ən kiçiyi $c_{34} = 4^{\bullet}$ elementidir. Odur ki, X_0 matrisinin x_{34} elementi təyin edilir.

Proses C matrisində silinməmiş qalan bütün 1 dəfə qeyd edilmiş elementlər üçün analoji qaydada davam etdirildikdən sonra bu matrisin silinməmiş və qeyd edilməmiş elementləri üçün ən kiçik element qaydası tətbiq edilir və X_0 matrisinin bütün elementlərinin qiymətləri təyin edilənə qədər davam etdirilir.

Prosesin gedişi tam şəkildə aşağıdakı sxemdə təsvir edilmişdir:

0	0	0	$140^{(6)}$	$80^{(8)}$	~~220~~	~~80~~	0	0
0	0	$250^{(2)}$	0	$90^{(5)}$	~~340~~	~~90~~	0	0
$250^{(3)}$	$150^{(1)}$	0	$10^{(4)}$	0	~~410~~	~~260~~	~~10~~	0
0	0	0	0	$230^{(7)}$	~~230~~	0	0	0
~~250~~	~~150~~	~~250~~	~~150~~	~~400~~				
0	0	0	~~140~~	~~310~~				
0	0	0	0	~~80~~				
0	0	0	0	0				

Beləliklə, aşağıdakı başlanğıc daşınmalar matrisi aldıq:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 140 & 80 \\ 0 & 0 & 250 & 0 & 90 \\ 250 & 150 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 230 \end{pmatrix}$$

Bu daşınmalar matrisi ən kiçik element üsulu ilə tərtib etdiyimiz daşınmalar matrisi ilə üst-üstə düşdüyü üçün $Z(X_0) = 5240$ *vahid* olacaqdır.

c) Foqelin approksimasiya üsulu ilə nəqliyyat məsələsinin başlanğıc daşınmalar matrisini tərtib edək.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, bu üsulla nəqliyyat məsələsinin başlanğıc daşınmalar matrisini tərtib etmək üçün C nəqliyyat xərcləri matrisinin hər bir sətirində və sütununda iki ən kiçik elementin fərqi tapılır:

1-ci sətirdə: $c_{11} - c_{12} = 3 - 2 = 1$

2-ci sətirdə: $c_{22} - c_{23} = 4 - 3 = 1$

3-cü sətirdə: $c_{31} - c_{32} = 2 - 1 = 1$

4-cü sətirdə: $c_{43} - c_{42} = 6 - 2 = 4$

1-ci sütunda: $c_{11} - c_{31} = 3 - 2 = 1$

2-ci sütunda: $c_{12} - c_{32} = 2 - 1 = 1$

3-cü sütunda: $c_{13} - c_{23} = 6 - 3 = 3$

4-ci sütunda: $c_{14} - c_{34} = 5 - 4 = 1$

5-ci sütunda: $c_{35} - c_{25} = 7 - 6 = 1$

Göründüyü kimi bu fərqlər içərisində ən böyük fərq 4-cü sətirə düşür və 4-ə bərabərdir. Bu sətirdəki elementlər içərisində ən kiçik element $c_{42} = 2$ -dir. Deməli, 1-ci addımda X_0 daşınmalar matrisinin x_{42} elementi təyin edilməlidir.

$$x_{42} = \min\{a_4;\ b_2\} = \min\{230;\ 150\} = 150$$

$b_2 < a_4$ olduğu üçün X_0 daşınmalar matrisinin 2-ci sütununun qalan bütün elementlərinin qiymətləri “0”-a bərabər olur:

$$x_{12} = 0,\ x_{22} = 0,\ x_{32} = 0$$

2-ci sütunun qalıq tələbi $b_2' = 0$ olur, 4-cü sətirin qalıq ehtiyatı isə $a_4' = a_4 - b_2 = 230 - 150 = 80$ vahid təşkil edəcəkdir.

X_0 daşınmalar matrisinin 2-ci sütun elementlərinin qiymətləri təyin edildiyi üçün C nəqliyyat xərcləri matrisində 2-ci sütunu silirik və yenidən bu matrisin hər bir sətir və sütun üzrə 2 ən kiçik elementinin fərqini hesablayırıq. Bu halda sütunlar üzrə fərqlər dəyişməyəcək və yalnız sətirlər üzrə yeni fərqləri hesablamaq lazımdır:

1-ci sətirdə: $c_{14} - c_{11} = 5 - 3 = 2$

2-ci sətirdə: $c_{25} - c_{23} = 6 - 3 = 3$

3-cü sətirdə: $c_{34} - c_{31} = 4 - 2 = 2$

4-cü sətirdə: $c_{44} - c_{43} = 6 - 6 = 0$

Bütün sətirlər və sütunlar üzrə ən böyük fərq 2-ci sətirə və 3-cü sütuna düşür və 3-ə bərabərdir. Odur ki, ya 2-ci sətiri, ya da 3-cü sütunu nəzərdən keçirməliyik. 2-ci sətiri seçək. 2-ci sətirdə qalan elementlər içərisində ən kiçik element $c_{23} = 3$ olduğu üçün 2-ci addımda X_0 daşınmalar matrisinin x_{23} elementi təyin edilməlidir:

$$x_{23} = \min\{a_2;\ b_3\} = \min\{340;\ 250\} = 250$$

$b_3 < a_2$ olduğu üçün X_0 daşınmalar matrisinin 3-cü sütununun qalan bütün elementlərinin qiymətləri "0"-a bərabər olur:

$$x_{13} = 0,\ x_{33} = 0,\ x_{43} = 0$$

3-cü sütunun qalıq tələbi $b_3' = 0$ olur, 2-ci sətirin qalıq ehtiyatı isə $a_2' = a_2 - b_3 = 340 - 250 = 90$ vahid təşkil edəcəkdir.

X_0 daşınmalar matrisinin 3-cü sütun elementlərinin qiymətləri təyin edildiyi üçün C nəqliyyat xərcləri matrisində 3-cü sütunu silmək lazımdır. Bundan sonra yenidən sətirlər üzrə 2 ən kiçik elementin fərqi tapılır və proses yuxarıdakı prosesə analoji olaraq davam etdirilir.

Foqelin approksimasiya üsulu ilə nəqliyyat məsələsinin başlanğıc daşınmalar planının tərtibi prosesi tam şəkildə aşağıdakı sxemdə əks etdirilmişdir:

$220^{(3)}$	0	0	0	0	~~220~~	0	0	0
0	0	$250^{(2)}$	0	$90^{(6)}$	~~340~~	~~90~~	0	0
$30^{(4)}$	0	0	$150^{(5)}$	$230^{(7)}$	~~410~~	~~380~~	~~230~~	0
0	$150^{(1)}$	0	0	$80^{(8)}$	~~230~~	~~80~~	0	0
~~250~~	~~150~~	~~250~~	~~150~~	~~400~~				
~~30~~	0	0	0	0				
0	0	0	0	0				

$$C=\begin{pmatrix} 3^{(3)} & 2 & 6 & 5 & 9 \\ 9 & 4 & 3^{(2)} & 8 & 6^{(6)} \\ 2^{(4)} & 1 & 9 & 4^{(5)} & 7^{(7)} \\ 7 & 2^{(1)} & 6 & 6 & 8^{(8)} \end{pmatrix} \begin{array}{c|c|c|c|c|} 1 & 2 & 2 & - & - \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

1	1	3	1	1
1	–	3	1	1
1	–	–	1	1
5	–	–	2	1
–	–	–	2	1
–	–	–	–	1

Beləliklə, aşağıdakı başlanğıc daşınmalar matrisi aldıq:

$$X_0=\begin{pmatrix} 220 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 250 & 0 & 90 \\ 30 & 0 & 0 & 150 & 230 \\ 0 & 150 & 0 & 0 & 80 \end{pmatrix}$$

Bu daşınmalar planı üçün nəqliyyat xərclərinin cəmini hesablayaq:

$$Z(x_0)=3\cdot 220+3\cdot 250+6\cdot 90+2\cdot 30+4\cdot 150+7\cdot 230+2\cdot 150+8\cdot 80=$$

$$=660+750+540+60+600+1610+300+640=5160 \ \textit{vahid}$$

• Göründüyü kimi, şimal-qərb bucağı üsulu ilə başlanğıc daşınmalar matrisi tərtib edilən zaman C nəqliyyat xərcləri matrisinin elementləri nəzərə alınmadığı üçün alınmış X_0 matrisi üçün daşınma xərclərinin cəmi qalan bütün variantlarla müqayisədə xeyli çoxdur $(Z(X_0)=6450)$

• Ən kiçik element üsulu və iki dəfə nəzərə alma üsulu ilə tərtib edilmiş daşınmalar matrisləri üst-üstə düşür və şimal-qərb bucağı üsulu ilə tərtib edilmiş planla müqayisədə daha az daşınma xərclərinə malikdir $(Z(X_0)=5240)$

• Foqelin approksimasiya üsulu ilə tərtib edilmiş başlanğıc daşınmalar matrisinin daşınma xərclərinin cəmi qalan bütün variantlarla müqayisədə azdır $(Z(X_0) = 5160)$ ◄

Teorem: Nəqliyyat məsələsinin X daşınmalar matrisinin ranqı r=m+n-1-ə bərabərdir.

Burada m -matrisin sətirlərinin sayı (istehsalçıların sayı), $n-$ sütunlarının sayıdır (istehlakçıların sayı).

Bu teoremin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, X daşınmalar matrisində «$m+n-1$» sayda sıfırdan böyük element olmalıdır. Əgər $r' < r$ olarsa, onda daşınmalar matrisi cırlaşmış hesab edilir. Məsələnin həllini davam etdirmək üçün cırlaşma halı aradan qaldırılmalıdır. Bu məqsədlə daşınmalar matrisinin $r - r'$ sayda «0» elementini şərti olaraq «0»-dan böyük elementlər kimi qəbul etmək lazımdır. Şərti olaraq «0»-dan böyük hesab edilən «0» elementinin seçilməsində yeganə məhdudiyyət ondan ibarətdir ki, bu «0» elementi X daşınmalar matrisinin «0»-dan böyük digər elementləri ilə qapalı dövrə təşkil etməsin.

***Qeyd**: Nəzərə almaq lazımdır ki, X daşınmalar matrisinin hər bir $x_{ij} > 0$ elementi üçün $i-$ ci sətirdə və $j-$cu sütunda ən azı daha bir element üçün $x_{ij} > 0$ şərti ödənməlidir.*

Teorem: X daşınmalar matrisinin nəqliyyat məsələsinin optimal həlli olması üçün zəruri və kafi şərt elə $U = (u_1, u_2, ..., u_m)$ və $V = (v_1, v_2, ..., v_n)$ vektorların mövcud olmasıdır ki, bu vektorların komponentləri aşağıdakı şərtləri ödəsinlər:

$$1) v_j - u_i = c_{ij} \quad \textbf{(əgər } x_{ij} > 0 \textbf{ şərti ödənirsə)}$$

$$2) v_j - u_i \le c_{ij} \quad \textbf{(əgər } x_{ij} = 0 \textbf{ şərti ödənirsə)}$$

Burada u_i - $i-$ ci istehsal müəssisəsinin potensialı (i sətrinin potensialı);

v_j - $j-$ cu istehlakçının potensialıdır (j sütununun potensialıdır).

Sətir və sütun potensiallarına şərti olaraq aşağıdakı kimi iqtisadi məna vermək olar:

u_i - $i-$ ci müəssisədə məhsul vahidinin şərti qiyməti;

v_j - $j-$ cu istehlakçıda məhsul vahidinin şərti qiyməti.

Teoremin birinci və ikinci şərtlərini ümumiləşdirsək, aşağıdakı matrisi tərtib etmək olar:

$$C_1 = \left\| c_{ij} - (v_j - u_i) \right\|_{m,n}$$

Onda nəqliyyat məsələsinin optimallıq şərtini aşağıdakı kimi də müəyyən etmək olar:

• *Əgər C_1 matrisinin heç bir elementi mənfi deyilsə, onda baxılan daşınmalar planı optimal plandır. Əgər C_1 matrisində heç olmazsa bir mənfi element varsa, onda bu plan optimal deyil və yaxınlaşmaya keçib daha az nəqliyyat xərclərinə malik yeni daşınmalar planı qurmaq lazımdır.*

Yaxınlaşmanın məzmunu: Tutaq ki, r sayda yaxınlaşma yerinə yetirilmiş və X_r daşınmalar matrisi qurulmuşdur. (r+1) - ci yaxınlaşmanı izah edək. (Deməli, biz ən azı 2-ci yaxınlaşmaya baxırıq. 1-ci yaxınlaşmaya baxmamağımızın səbəbi odur ki, yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, bu yaxınlaşma natamam yaxınlaşmadır və burada 1-ci mərhələ yoxdur)

I mərhələ. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, yaxınlaşmanın 1-ci mərhələsində əvvəlki yaxınlaşmada tərtib edilmiş daşınmalar matrisinin optimal olub-olmaması yoxlanılır. Odur ki, (r+1) - ci yaxınlaşmanın 1-ci mərhələsində r -ci yaxınlaşmada qurulmuş X_r daşınmalar matrisinin optimal olub-olmaması yoxlanılır. Bu məqsədlə C_r matrisindən C_{r+1} matrisinə keçilir. Keçid aşağıdakı ardıcıllıqla icra edilir.

• C_r matrisində X_r daşınmalar matrisinin bütün sıfırdan böyük elementlərinə uygun olan elementlər qeyd edilir (bu elementlərin sayının $(m+n-1)-$ ə bərabər olduğu aydındır). Qeyd edilmiş elementlərdən biri mənfi, qalanları isə sıfır elementləri olacaqdır. Həmin qeyd edilmiş mənfi element onunla bir sətirdə duran qeyd edilmiş sıfırlarla birləşdirilir. Sonra bu sətrin hər bir qeyd edilmiş sıfır elementi onunla bir sütunda duran qeyd edilmiş sıfırlarla birləşdirilir. Sonra yenə sətirlərə keçilir və s. Bu əməliyyat bütün mümkün hallar üçün icra edilir. Nəticədə C_r matrisinin bəzi sətirlərində və sütunlarında oxlar yaranacaqdır. Bu sətir və sütunlar qeyd edilmiş hesab edilir. Sonra C_r matrisinin qeyd edilmiş mənfi elementi bu matrisin qeyd edilmiş sətir elementlərindən çıxılır, qeyd edilmiş sütun elementlərinə əlavə edilir. (Bu elementin mütləq qiyməti qeyd edilmiş sətir elementlərinə əlavə

edilir və qeyd edilmiş sütun elemenlərindən çıxılır). Nəticədə C_{r+1} matrisi yaranır.

Əgər bu matrisin heç bir elementi mənfi deyilsə, onda X_r matrisi baxılan nəqliyyat məsələsinin optimal həllidir[7]. Əgər bu matrisdə heç olmazsa bir mənfi element varsa, onda X_r matrisi optimal daşınmalar planı deyil və 2-ci mərhələyə keçib yeni daşınmalar planı (X_{r+1} matrisi) qurmaq lazımdır.

II mərhələ: Bu mərhələdə optimal olmayan X_r daşınmalar matrisindən yeni X_{r+1} daşınmalar matrisinə keçilir. Keçid aşağıdakı ardıcıllıqla aparılır:

- C_{r+1} matrisində ən kiçik mənfi element tapılır[8]. Bu elementə X_r matrisində sıfır elementi uyğun gəlir. Həmin sıfırdan başlayaraq sətir və sütunlar üzrə hərəkət etməklə sıfırdan böyük elementlərin qapalı dövrəsi qurulur. Bu dövrə dövrənin başlanğıcı hesab edilən sıfır elementi ilə sətirdə və ya sütunda qapanmalıdır. İsbat edilir ki, X_r daşınmalar matrisinin hər bir sıfır elementi üçün sıfırdan böyük elementlərin belə qapalı dövrəsi yeganədir. Sonra bu qapalı dövrənin elementlərinə ardıcıl olaraq «+» və «-» şərti işarələr qoyulur. Dövrənin başlanğıcı hesab edilən sıfır elementinə «+» şərti işarə qoyulur, dövrənin növbəti elementi «-» şərti işarəli olur, sonra yenə «+» və s. X_r daşınmalar matrisinin elementləri aşağıdakı kimi təyin edilir:

---

[7] Asanlıqla yoxlamaq olar ki, C_{r+1} matrisinin heç bir elementinin mənfi olmaması X_r matrisinin $(m+n-1)$ sayda $x_{ij}^{(r)} > 0$ elementləri üçün $v_j - u_i = c_{ij}$ şərtlərinin ödənməsi deməkdir.

[8] Bu matrisdə heç olmazsa bir element üçün $c_{ij}^{(r+1)} < 0$ şərti hökmən ödənir, əks halda X_r matrisi nəqliyyat məsələsinin optimal daşınmalar planı olacaqdır və 2-ci mərhələyə keçib X_{r+1} matrisini qurmağa ehtiyac qalmayacaqdır.

$$x_{ij}^{(r+1)} = \begin{cases} x_{ij}^{(r)} + \theta_r, & \text{əgər bu element qapalı dövrəyə “+” şərti işarə ilə daxildirsə} \\ x_{ij}^{(r)} - \theta_r, & \text{əgər bu element qapalı dövrəyə “-” şərti işarə ilə daxildirsə} \\ x_{ij}^{(r)}, & \text{əgər bu element qapalı dövrəyə daxil deyilsə} \end{cases}$$

Burada $\theta_r - X_r$ matrisində qurulmuş qapalı dövrənin «-» şərti işarəli elementlərinin ən kiçiyidir.

Qurulmuş yeni X_{r+1} daşınmalar matrisi üçün məqsəd funksiyasının qiyməti ya ilkin C nəqliyyat xərcləri matrisi üzrə hesablanır, ya da aşağıdakı formula üzrə təyin edilir:

$$Z(X_{r+1}) = Z(X_r) + \Delta_r \theta_r$$

Burada $\Delta_r - C_{r+1}$ matrisinin ən kiçik mənfi elementidir. $\Delta_r < 0$ olduğu üçün $\theta_r \neq 0$ olduqda

$$Z(X_{r+1}) < Z(X_r)$$

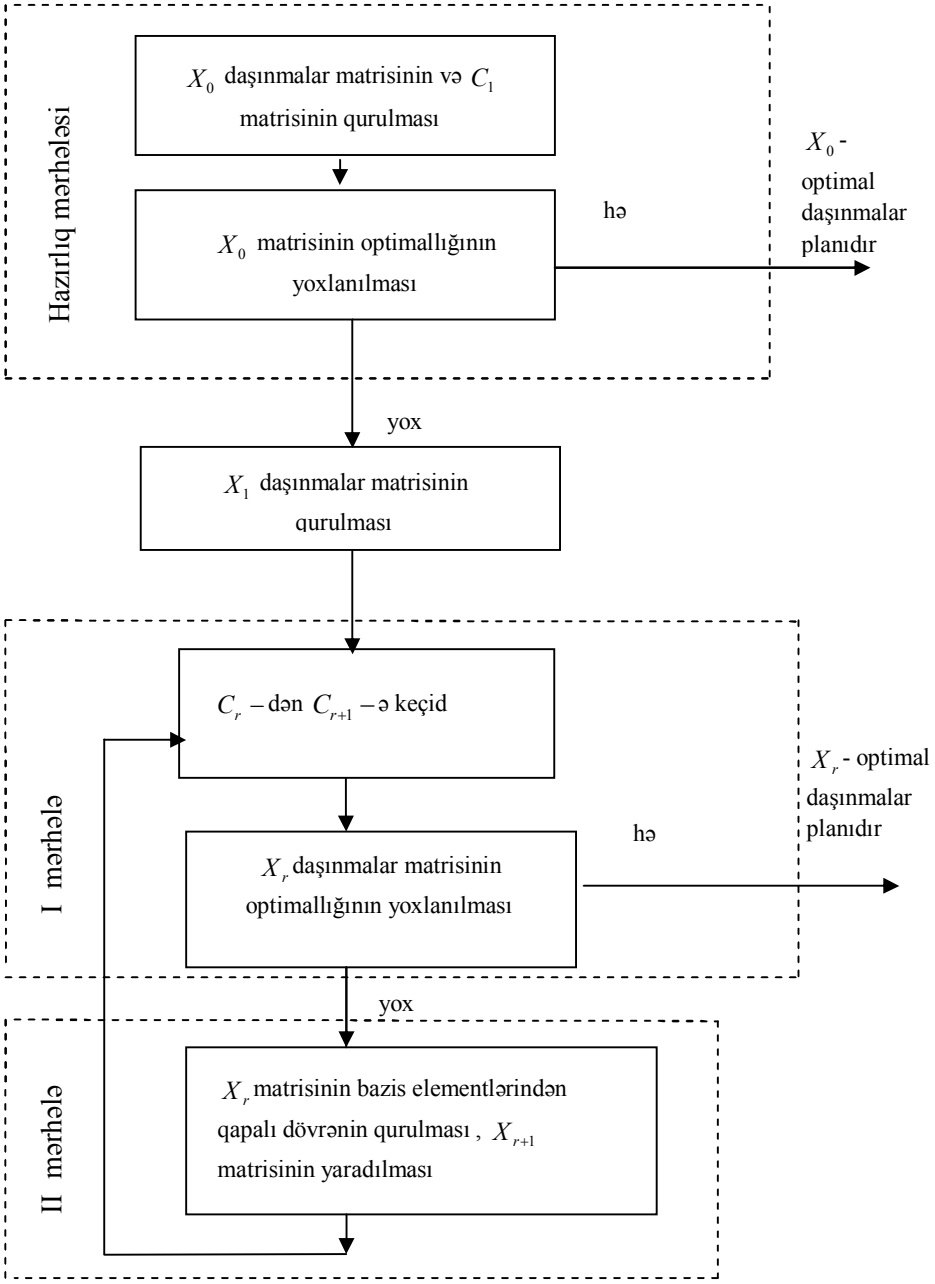
alınır, yəni məqsəd funksiyasının qiyməti azalır[9]. İsbat edilir ki, potensiallar üsulunun alqoritmi monoton və sonlu alqoritmdir. Yəni, bu üsul sonlu sayda yaxınlaşmalardan sonra nəqliyyat xərclərinin cəmini minimum edəcək optimal daşınmalar planını tapmağa həmişə imkan verir. Bunu potensiallar metodunun alqoritminin blok-sxemindən daha aydın görmək olar (şəkil 5.2).

Qapalı nəqliyyat məsələsinin potensiallar üsulu ilə həllini nəzərdən keçirək.

►**Məsələ 5.2.** Fərz edək ki, 3 məntəqədə $a_1 = 200\ t,\ a_2 = 500\ t,\ a_3 = 300\ t$ eyni adlı məhsul vardır. Bu məhsulları 5 istehlakçıya daşımaq lazımdır. Istehlakçıların tələbləri $b_1 = 150\ t,$ $b_2 = 170\ t,\ b_3 = 240\ t\ \ b_4 = 280\ t,\ b_5 = 160\ t$ -dur. Fərz edək ki, qadağan edilmiş kommunikasiyalar yoxdur. Məhsul vahidlərinin müxtəlif kommunikasiyalar üzrə daşınma xərcləri aşağıdakı nəqliyyat xərcləri matrisi ilə verilmişdir:

---

[9] Əgər $\theta_r = 0$ olarsa, onda $Z(x_{r+1}) = Z(x_r)$ olur və məqsəd funksiyasının qiyməti dəyişmir. Bu hal cırlaşma halına uyğun gəlir və bir qayda olaraq növbəti yaxınlaşmada $\theta_{r+1} > 0$ alınır və $Z(x_{r+2}) < Z(x_{r+1})$ şərti təmin edilir.



Şəkil 5.2. Potensiallar metodunun alqoritminin blok-sxemi

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 8 & 3 & 9 \\ 6 & 5 & 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Məhsulları istehlakçılara daşımaq üçün elə bir plan tapmaq lazımdır ki, bu plana görə bütün məntəqələrdə olan məhsullar tam daşınsın, istehlakçıların tələbləri tam ödənsin və daşınmalara sərf ediləcək məcmu nəqliyyat xərcləri minimum olsun.

Həlli: Verilmiş iqtisadi məsələnin riyazi təsvirini verək. Məsələdə $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j = 1000$ olduğu üçün onun riyazi təsviri qapalı nəqliyyat məsələsinə gətiriləcəkdir. Odur ki, $\{i, j\}$ kommunikasiyası üzrə daşınan məhsulun miqdarını x_{ij} ilə işarə etsək, yaza bilərik:

$$Z(x) = 3x_{11} + 7x_{12} + 2x_{13} + 6x_{14} + 4x_{15} + 5x_{21} + 3x_{22} + 8x_{23} + 3x_{24} +$$
$$+ 9x_{25} + 6x_{31} + 5x_{32} + 9x_{33} + 2x_{34} + 7x_{35} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 200 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 500 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 150 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 170 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 240 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 280 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 160 \end{cases}$$

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, ..., x_{35} \geq 0$$

Məsələni potensiallar üsulu ilə həll edək.

Hazırlıq mərhələsi: Əvvəlcə ən kiçik element üsulu ilə nəqliyyat məsələsinin X_0 başlanğıc daşınmalar matrisini tərtib edək:

0	0	200	0	0	~~200~~	0	0	0	0
150	170	40	0	140	~~500~~	~~330~~	~~180~~	~~140~~	0
0	0	0	280	20	~~300~~	~~20~~	0	0	0
~~150~~	~~170~~	~~240~~	~~280~~	~~160~~					
0	0	~~40~~	0	~~140~~					
0	0	0	0	0					

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2^{(1)} & 6 & 4 \\ 5^{(4)} & 3^{(3)} & 8^{(6)} & 3 & 9^{(7)} \\ 6 & 5 & 9 & 2^{(2)} & 7^{(5)} \end{pmatrix}$$

Beləliklə, aşağıdakı X_0 daşınmalar matrisi alındı:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 & 0 & 0 \\ 150 & 170 & 40 & 0 & 140 \\ 0 & 0 & 0 & 280 & 20 \end{pmatrix}$$

X_0 daşınmalar matrisi üçün məqsəd funksiyasının qiymətini hesablayaq:

$Z(X_0) = 2\cdot 200 + 5\cdot 150 + 3\cdot 170 + 8\cdot 40 + 9\cdot 140 + 2\cdot 280 + 7\cdot 20 = 3940$ pul vahidi

X_0 daşınmalar matrisində $r = m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ sayda sıfırdan böyük element olmalıdır. Göründüyü kimi, bu şərt ödənir və X_0 matrisi cırlaşmamış daşınmalar planıdır. Odur ki, məsələnin həllini davam etdirək.

Alınmış X_0 daşınmalar matrisinin optimal olub-olmamasını yoxlamaq üçün C nəqliyyat xərcləri matrisi əsasında

$$C_1 = \left\| c_{ij} - (v_j - u_i) \right\|_{3,5}$$

matrisini tərtib edək. Bu məqsədlə X_0 daşınmalar matrisinin sətir və sütun potensiallarının qiymətlərini hesablamaq lazımdır. Potensialların qiymətlərini hesablamaq üçün X_0 daşınmalar matrisinin $x_{ij} > 0$

elementləri üçün $v_j - u_i = c_{ij}$ tənlikləri tərtib edilir və onların bazasında aşağıdakı tənliklər sistemi qurulur:

$$\begin{cases} v_3 - u_1 = 2 \\ v_1 - u_2 = 5 \\ v_2 - u_2 = 3 \\ v_3 - u_2 = 8 \\ v_5 - u_2 = 9 \\ v_4 - u_3 = 2 \\ v_5 - u_3 = 7 \end{cases}$$

X_0 daşınmalar matrisinin ranqı $r = m + n - 1 = 7$ olduğu üçün bu tənliklər sisteminə 7 xətti tənlik və 8 məchul (3 sətir potensialının qiyməti və 5 sütun potensialının qiyməti) daxildir. Odur ki, bu sistemi birqiymətli həll etmək üçün məchullardan hər hansı birinə ixtiyari qiymət vermək lazımdır. Tutaq ki, $u_2 = 0$-dır. Onda alırıq:

$$\begin{array}{ll} u_1 = 6 & v_1 = 5 \\ u_2 = 0 & v_2 = 3 \\ u_3 = 2 & v_3 = 8 \\ & v_4 = 4 \\ & v_5 = 9 \end{array}$$

C_1 matrisini tərtib edək:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\Delta_1 = -1}$$

Göründüyü kimi, C_1 matrisinin bir elementi mənfidir. Deməli, X_0 daşınmalar matrisi baxılan nəqliyyat məsələsinin optimal planı deyil və 1-ci yaxınlaşmaya keçib yeni daşınmalar planı qurmaq lazımdır.

1-ci yaxınlaşma: **1-ci mərhələ:** Bu mərhələyə ehtiyac yoxdur, çünki X_0 daşınmalar matrisinin məsələnin optimal planı olmadığı artıq məlumdur.

2-ci mərhələ: X_0 daşınmalar matrisindən X_1 daşınmalar matrisinə keçək:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 & 0 & 0 \\ 150 & 170 & 40 & {}^{(+)}0 & 140^{(-)} \\ 0 & 0 & 0 & {}_{(-)}280 & 20_{(+)} \end{pmatrix} \theta_1 = 140 \quad \Rightarrow$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 & 0 & 0 \\ 150 & 170 & 40 & 140 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 140 & 160 \end{pmatrix}$$

X_1 daşınmalar matrisi üçün məqsəd funksiyasının qiymətini hesablayaq:

$$Z(X_1) = Z(X_0) + \Delta_1\theta_1 = 3940 + (-1)\cdot 140 = 3940 - 140 = 3800$$

2- ci yaxınlaşma: **1-ci mərhələ:** X_1 daşınmalar matrisinin optimal olub-olmadığını müəyyən etmək üçün C_1 matrisindən C_2 matrisinə keçək:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 0^\circ & 8 & 1 \\ 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ & -1^\circ & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0^\circ & 0^\circ \end{pmatrix} \begin{matrix} +1 \\ +1 \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

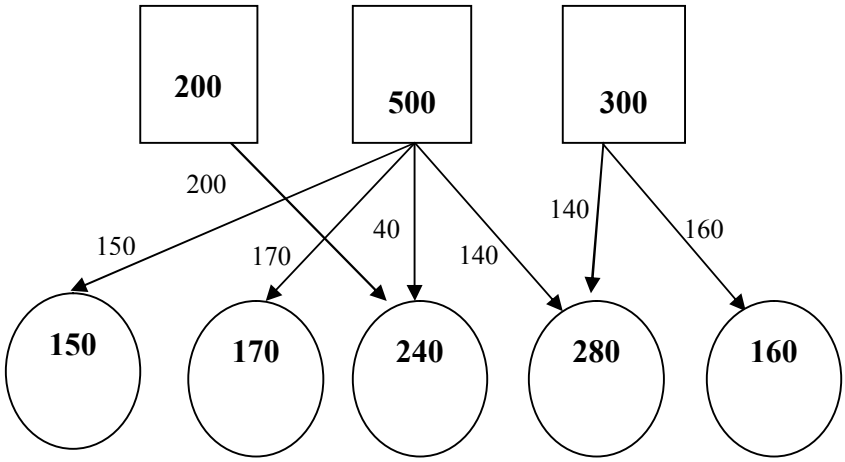
$$\begin{matrix} -1 & -1 & -1 \end{matrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C_2 matrisinin heç bir elementi mənfi deyil. Deməli, X_1 daşınmalar matrisi baxılan nəqliyyat məsələsinin optimal planıdır və bu optimal plana görə $Z(X^*) = 3800 - dir$.

Beləliklə, 1-ci məntəqə bütün məhsulunu 3-cü istehlakçıya göndərməlidir. 2-ci məntəqə 1-ci istehlakçıya 150 t, 2-ci istehlakçıya 170 t, 3-cü istehlakçıya 40 t və 4-cü istehlakçıya 140 t məhsul göndərməlidir. 3-cü məntəqə isə 4-cü istehlakçıya 140 t və 5-ci istehlakçıya 160 t məhsul göndərməlidir. Bu daşınmalar variantına görə

məcmu nəqliyyat xərcləri bütün mümkün daşınma variantları içərisində ən kiçik kəmiyyət olub, 3800 manata bərabər olacaqdır. Bu optimal planın blok-sxemini quraq:



Cavab: $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 & 0 & 0 \\ 150 & 170 & 40 & 140 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 140 & 160 \end{pmatrix}$ **olduqda**

$\min Z(X^*) = 3800$ **olur.** ◄

Daşınmalar matrisində cırlaşma halı olan nəqliyyat məsələsinin həll alqoritminə baxaq.

►**Məsələ 5.3.** Fərz edək ki, 3 məntəqədə $a_1 = 200\ t,\ a_2 = 400\ t,\ a_3 = 300\ t,$ məhsul vardır. Bu məhsulları 4 istehlak məntəqəsinə daşımaq lazımdır. Istehlakçıların tələbləri $b_1 = 350\ t,\ b_2 = 250\ t,\ b_3 = 200\ t,\ b_4 = 100\ t$ -dur. Məhsul vahidlərinin müxtəlif kommunikasiyalar üzrə daşınma xərcləri aşağıdakı nəqliyyat xərcləri matrisi ilə verilmişdir:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Məhsulları istehlakçılara daşımaq üçün elə bir plan tapmaq lazımdır ki, bu plana görə bütün məntəqələrdə olan məhsullar tam daşınsın, istehlakçıların tələbləri tam ödənsin və daşınmalara sərf ediləcək məcmu nəqliyyat xərcləri minimum olsun.

Həlli: Verilmiş iqtisadi məsələnin riyazi təsvirini verək. Məsələdə $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 900$ olduğu üçün onun riyazi təsviri qapalı nəqliyyat məsələsinə gətiriləcəkdir. Odur ki, $\{i, j\}$ kommunikasiyası üzrə daşınan məhsulun miqdarını x_{ij} ilə işarə etsək, yaza bilərik:

$$Z(x) = 3x_{11} + 7x_{12} + 2x_{13} + 6x_{14} + 5x_{21} + 6x_{22} + 3x_{23} + x_{24} +$$
$$+ 7x_{31} + 3x_{32} + 6x_{33} + 4x_{34} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 400 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 350 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 250 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 200 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 100 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = \overline{1,3};\ \ j = \overline{1,4})$$

Məsələni potensiallar üsulu ilə həll edək.

Hazırlıq mərhələsi: Əvvəlcə ən kiçik element üsulu ilə nəqliyyat məsələsinin X_0 başlanğıc daşınmalar matrisini tərtib edək:

0	0	200	0	~~200~~	0	0	0	0
300	0	0	100	~~400~~	~~300~~	0	0	0
50	250	0	0	~~300~~	~~50~~	0	0	0
~~350~~	~~250~~	~~200~~	~~100~~					
~~50~~	0	0	0					
0	0	0	0					

$$C=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2^{(2)} & 6 \\ 5^{(4)} & 6 & 3 & 1^{(1)} \\ 7 & 8^{(3)} & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Beləliklə, aşağıdakı X_0 daşınmalar matrisi alındı:

$$X_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 & 0 \\ 300 & 0 & 0 & 100 \\ 50 & 250 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

X_0 daşınmalar matrisi üçün məqsəd funksiyasının qiymətini hesablayaq:

$$Z(X_0)=2\cdot 200+5\cdot 300+1\cdot 100+7\cdot 50+3\cdot 250=3100$$

X_0 daşınmalar matrisində $r=m+n-1=3+4-1=6$ şərti ödənməlidir. Həqiqətdə isə bu matrisdə sıfırdan böyük elementlərin sayı $r'=5$-dir. $r'<r$ olduğu üçün X_0 daşınmalar matrisi cırlaşmış plandır və məsələnin həllini davam etdirmək üçün cırlaşma halını aradan qaldırmaq lazımdır. Bunun üçün X_0 daşınmalar matrisindəki sıfır elementlərindən birinə şərti olaraq sıfırdan böyük element kimi baxacağıq. Bu matrisin $x_{11}=0$ elementi yuxarıda müəyyən etdiyimiz şərtləri ödədiyi üçün onu şərti olaraq sıfırdan böyük element kimi qəbul edək:

$$X_0=\begin{pmatrix} \otimes & 0 & 200 & 0 \\ 300 & 0 & 0 & 100 \\ 50 & 250 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Artıq X_0 daşınmalar matrisində $r=m+n-1$ şərti ödənir. Deməli, X_0 matrisi cırlaşmadan azad olmuşdur və məsələnin həllini davam etdirmək olar. Əvvəlki məsələnin həlli prosesini mərhələlər üzrə ətraflı izah etdiyimiz üçün bu məsələnin həllini izahsız verəcəyik.

$$\begin{cases} v_1 - u_1 = 3 \\ v_3 - u_1 = 2 \\ v_1 - u_2 = 5 \\ v_4 - u_2 = 1 \\ v_1 - u_3 = 7 \\ v_2 - u_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} u_1 = 0 \\ u_2 = -2 \\ u_3 = -4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} v_1 = 3 \\ v_2 = -1 \\ v_3 = 2 \\ v_4 = -1 \end{matrix}$$

C_1 matrisini tərtib edək:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\Delta_1 = -1}$$

Göründüyü kimi, C_1 matrisinin bir elementi mənfidir. Deməli, X_0 daşınmalar matrisi baxılan nəqliyyat məsələsinin optimal planı deyil və 1-ci yaxınlaşmaya keçib yeni daşınmalar planı qurmaq lazımdır.

1-ci yaxınlaşma: 1-ci mərhələ: Bu mərhələyə ehtiyac yoxdur, çünki X_0 daşınmalar matrisinin məsələnin optimal planı olmadığı artıq məlumdur.

2-ci mərhələ: X_0 daşınmalar matrisindən X_1 daşınmalar matrisinə keçək:

$$X_0 = \begin{pmatrix} {}^{(+)}\otimes & 0 & 200^{(-)} & 0 \\ {}_{(-)}300 & 0 & 0_{(+)} & 100 \\ 50 & 250 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\theta_1 = 200} \Rightarrow$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 200 & 100 \\ 50 & 250 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

X_1 daşınmalar matrisi üçün məqsəd funksiyasının qiymətini hesablayaq:

$$Z(X_1) = Z(X_0) + \Delta_1\theta_1 = 3100 + (-1)\cdot 200 = 2900$$

X_1 daşınmalar matrisi üçün $r = m + n - 1$ şərti ödənir və bu matris cırlaşmamış plandır.

2-ci yaxınlaşma: 1-ci mərhələ: X_1 daşınmalar matrisinin optimal olub-olmadığını müəyyən etmək üçün C_1 matrisindən C_2 matrisinə keçək:

$$C_1 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0^{\bullet} & 8 & 0 & 7 \\ 0^{\bullet} & 5 & -1^{\bullet} & 0^{\bullet} \\ 0^{\bullet} & 0^{\bullet} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & -1 & & -1 \end{matrix} \end{array}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

C_2 matrisinin heç bir elementi mənfi deyil. Deməli, X_1 daşınmalar matrisi baxılan nəqliyyat məsələsinin optimal planıdır və bu optimal plana görə $Z(X^*) = 2900$ -dür.

Cavab: $X_1 = \begin{pmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 200 & 100 \\ 50 & 250 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **olduqda** $\min Z(X^*) = 2900$ **olur.** ◄

İndi isə açıq nəqliyyat məsələsinin həll alqoritmini nəzərdən keçirək.

►**Məsələ 5.4.** Fərz edək ki, A_1, A_2, A_3 və A_4 müəssisələrində $a_1 = 200\ t$, $a_2 = 300\ t$, $a_3 = 500\ t$, $a_4 = 300\ t$ eyniadlı məhsul vardır. Bu məhsulları B_1, B_2 və B_3 istehlak məntəqələrinə daşımaq lazımdır. Istehlakçıların tələbləri uyğun olaraq $b_1 = 260\ t$, $b_2 = 370\ t$, $b_3 = 390\ t$ -dur. Məhsul vahidlərinin müxtəlif kommunikasiyalar üzrə daşınma xərcləri aşağıdakı nəqliyyat xərcləri matrisi ilə verilmişdir:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 9 & 5 \\ 7 & 3 & 9 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Məhsulları istehsalçılardan istehlakçılara daşımaq üçün elə bir plan tapmaq lazımdır ki, bu plana görə nəqliyyat xərclərinin cəmi minimum olsun.

Həlli: Məsələdə $\sum_{i=1}^{4} a_i = 1300\ t$; $\sum_{j=1}^{3} b_j = 1020\ t$ olduğu üçün bu məsələnin riyazi təsviri açıq nəqliyyat məsələsinə gətiriləcəkdir. Odur ki, $\{i, j\}$ kommunikasiyası üzrə daşınan məhsulun miqdarını x_{ij} ilə işarə etsək, yaza bilərik:

$$Z(x) = 3x_{11} + 7x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 9x_{22} + 5x_{23} + 7x_{31} + 3x_{32} +$$
$$+ 9x_{33} + 4x_{41} + 4x_{42} + 8x_{43} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 200 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 300 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 500 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} \le 300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 260 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 370 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 390 \end{cases}$$

$$x_{11} \ge 0, x_{12} \ge 0, ..., x_{43} \ge 0$$

Yuxarıda nəzərdən keçirdiyimiz teoremə görə açıq halda nəqliyyat məsələsini həll etmək mümkün olmur və onu qapalı şəklə gətirmək lazımdır. Məsələdə $\sum_{i=1}^{4} a_i > \sum_{j=1}^{3} b_j$ olduğu üçün bu məsələni qapalı şəklə gətirmək üçün şərti B_4 istehlakçı qəbul edilir və onun məhsula olan tələbi $b_4 = \sum_{i=1}^{4} a_i - \sum_{j=1}^{3} b_j = 1300 - 1020 = 280\ t$ kimi müəyyən edilir. Bu halda məsələnin ölçüləri dəyişdiyi üçün (4×3 ölçülü məsələ 4×4 ölçülü məsələyə çevrilir) həm C nəqliyyat xərcləri matrisinə, həm də X daşınmalar matrisinə 4-cü sütun əlavə ediləcəkdir:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 9 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$$

Onda açıq nəqliyyat məsələsi aşağıdakı klassik qapalı nəqliyyat məsələsinə gələcəkdir:

$$Z(x) = 3x_{11} + 7x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 9x_{22} + 5x_{23} + 7x_{31} + 3x_{32} +$$
$$+ 9x_{33} + 4x_{41} + 4x_{42} + 8x_{43} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 300 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 500 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 260 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 370 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 390 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 280 \end{cases}$$

$$x_{11} \ge 0, x_{12} \ge 0, ..., x_{44} \ge 0$$

Alınmış qapalı nəqliyyat məsələsini potensiallar metodu ilə həll edək:

Hazırlıq mərhələsi: Əvvəlcə ən kiçik element üsulu ilə nəqliyyat məsələsini X_0 başlanğıc daşınmalar matrisini tərtib edək:

0	0	200	0	~~200~~	0	0	0	0
260	0	40	0	~~300~~	~~40~~	0	0	0
0	370	130	0	~~500~~	~~130~~	0	0	0
0	0	20	280	~~300~~	~~20~~	0	0	0
~~260~~	~~370~~	~~390~~	~~280~~					
0	0	~~190~~	0					
0	0	~~150~~	0					
0	0	~~130~~	0					
0	0	0	0					

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2^{(2)} & 0 \\ 4^{(4)} & 9 & 5^{(5)} & 0 \\ 7 & 3^{(3)} & 9 & 0 \\ 4 & 4 & 8^{(6)} & 0^{(1)} \end{pmatrix}$$

Beləliklə, aşağıdakı $X_0^{(1)}$ daşınmalar matrisi alındı:

$$X_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 & 0 \\ 260 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 370 & 130 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 280 \end{pmatrix}$$

$X_0^{(1)}$ daşınmalar matrisi üçün məqsəd funksiyasının qiymətini hesablayaq:

$$Z(X_0^{(1)}) = 2 \cdot 200 + 4 \cdot 260 + 5 \cdot 40 + 3 \cdot 370 + 9 \cdot 130 + 8 \cdot 20 + 0 \cdot 280 = 4080$$

$X_0^{(1)}$ daşınmalar matrisində $r = m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$ sayda sıfırdan böyük element olmalıdır. Göründüyü kimi, bu şərt ödənir və $X_0^{(1)}$ matrisi cırlaşmamış daşınmalar planıdır. Odur ki, məsələnin həllini davam etdirək.

Alınmış $X_0^{(1)}$ daşınmalar matrisinin optimal olub-olmamasını yoxlamaq üçün C nəqliyyat xərcləri matrisi əsasında $C_1 = \left\| c_{ij} - (v_j - u_i) \right\|_{4,4}$ matrisini tərtib edək. Bu məqsədlə $X_0^{(1)}$ daşınmalar matrisinin sətir və sütun potensiallarının qiymətlərini hesablamaq lazımdır. Potensialların qiymətlərini hesablamaq üçün $X_0^{(1)}$ daşınmalar matrisinin $x_{ij} > 0$ elementləri üçün $v_j - u_i = c_{ij}$ tənlikləri tərtib edilir və onların bazasında aşağıdakı tənliklər sistemi qurulur:

$$\begin{cases} v_3 - u_1 = 2 \\ v_1 - u_2 = 4 \\ v_3 - u_2 = 5 \\ v_2 - u_3 = 3 \\ v_3 - u_3 = 9 \\ v_3 - u_4 = 8 \\ v_4 - u_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} u_1 = 0 & v_1 = 1 \\ u_2 = -3 & v_2 = -4 \\ u_3 = -7 & v_3 = 2 \\ u_4 = -6 & v_4 = -6 \end{matrix}$$

C_1 matrisini tərtib edək:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta_1 = -3$$

Göründüyü kimi C_1 matrisində mənfi elementlər var. Deməli, $X_0^{(1)}$ daşınmalar matrisi baxılan nəqliyyat məsələsinin optimal planı deyil və 1-ci yaxınlaşmaya keçib yeni daşınmalar planı qurmaq lazımdır.

1-ci yaxınlaşma: 1-ci mərhələ: Bu mərhələyə ehtiyac yoxdur, çünki X^0 daşınmalar matrisinin məsələnin optimal planı olmadığı artıq məlumdur.

2-ci mərhələ: $X_0^{(1)}$ daşınmalar matrisindən $X_1^{(1)}$ daşınmalar matrisinə keçək:

$$X_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 & 0 \\ {}^{(-)}260 & 0 & 40^{(+)} & 0 \\ 0 & 370 & 130 & 0 \\ {}^{(+)}0 & 0 & 20_{(-)} & 280 \end{pmatrix} \theta_1 = 20$$

$$X_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 & 0 \\ 240 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 370 & 130 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 280 \end{pmatrix}$$

$X_1^{(1)}$ daşınmalar matrisi üçün məqsəd funksiyasının qiymətini hesablayaq:

$$Z(X_1^{(1)}) = Z(X_0^{(1)}) + \Delta_1\theta_1 = 4080 + (-3)\cdot 20 = 4020$$

2- ci yaxınlaşma: 1-ci mərhələ: $X_1^{(1)}$ daşınmalar matrisinin optimal olub-olmadığını yoxlayaq:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 0^{\bullet} & 6 \\ 0^{\bullet} & 10 & 0^{\bullet} & 3 \\ -1 & 0^{\bullet} & 0^{\bullet} & -1 \\ -3^{\bullet} & 2 & 0 & 0^{\bullet} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +3 \end{matrix}$$

$$-3$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Delta_2 = -4$$

Göründüyü kimi $X_1^{(1)}$ daşınmalar matrisi də optimal plan deyil.

2-ci mərhələ: $X_1^{(1)}$ daşınmalar matrisindən $X_2^{(1)}$ daşınmalar matrisinə keçək:

$$X_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 & 0 \\ {}^{(-)}240 & 0 & 60^{(+)} & 0 \\ 0 & 370 & 130^{(-)} & 0^{(+)} \\ {}^{(+)}20 & 0 & 0 & 280_{(-)} \end{pmatrix} \theta_2 = 130$$

$$X_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 & 0 \\ 110 & 0 & 190 & 0 \\ 0 & 370 & 0 & 130 \\ 150 & 0 & 0 & 150 \end{pmatrix}$$

$$Z(X_2^{(1)}) = Z(X_1^{(1)}) + \Delta_2\theta_2 = 4020 + (-4)\cdot 130 = 3500$$

3- cü yaxınlaşma: **1-ci mərhələ:** $X_2^{(1)}$ daşınmalar matrisinin optimal olub-olmadığını yoxlayaq:

$$C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 0^{\bullet} & 3 \\ 0^{\bullet} & 10 & 0^{\bullet} & 0 \\ -1 & 0^{\bullet} & 0 & -4^{\bullet} \\ 0^{\bullet} & 5 & 3 & 0^{\bullet} \end{pmatrix} + 4$$

$$-4$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

C_3 matrisinin heç bir elementi mənfi deyil. Deməli, $X_2^{(1)}$ daşınmalar matrisi baxılan nəqliyyat məsələsinin optimal planıdır.

$$X_{opt}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 & 0 \\ 110 & 0 & 190 & 0 \\ 0 & 370 & 0 & 130 \\ 150 & 0 & 0 & 150 \end{pmatrix}$$

və bu optimal plana görə $\min Z(X_{opt}^{(1)}) = 3500$ -dir[10].

Indi isə qapalı nəqliyyat məsələsinin optimal həllindən açıq nəqliyyat məsələsinin optimal həllini tapaq. Bu məqsədlə $X_2^{(1)}$ daşınmalar matrisində 4-cü sütunu silmək kifayətdir.

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 \\ 110 & 0 & 190 \\ 0 & 370 & 0 \\ 150 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\min Z(X_{opt}) = 3500$$

[10] Açıq nəqliyyat məsələsini qapalı şəklə gətirdiyimiz zaman C matrisinin əlavə 4-cü sütununa $c_{i4} = 0$ $(i = \overline{1,4})$ qiymətləri daxil etdiyimiz üçün $\min Z(X_{opt}^{(1)}) = \min Z(X_{opt})$ olur.

Beləliklə, açıq nəqliyyat məsələsi üçün tapılmış optimal plana görə:

- A_1 müəssisəsinin məhsulları tam daşınır:

$$0+0+200=200 \qquad 200-200=0$$

- A_2 müəssisəsinin məhsulları tam daşınır:

$$110+0+190=300 \qquad 300-300=0$$

- A_3 müəssisəsində olan 500 t məhsulun 370 tonu daşınır, 130 tonu isə müəssisədə qalır:

$$0+370+0=370 \qquad 500-370=130$$

- A_4 müəssisəsində olan 300 t məhsulun 150 tonu daşınır, 150 tonu isə müəssisədə qalır:

$$150+0+0=150 \qquad 300-150=150$$

Cavab: $X_{opt}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 \\ 110 & 0 & 190 \\ 0 & 370 & 0 \\ 150 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **olduqda** $\min Z(X_{opt})=3500$

olur.◄

5.4. Nəqliyyat məsələsinin modifikasiyaları və onların həll üsulları

Nəqliyyat məsələsinin (5.5)-(5.8) klassik qoyuluşunun aşağıdakı modifikasiyaları mövcuddur:

1. **Qadağalara malik nəqliyyat məsələsi.** Bu məsələnin qoyuluşunda fərz edilir ki, müəyyən $\{i,j\}$ kommunikasiyaları üzrə daşınmalar qadağandır. Odur ki, həmin kommunikasiyalar üzrə daşınmanın həcmini əks etdirən dəyişənin qiyməti əvvəlcədən sıfra bərabər qəbul edilir, yəni $x_{ij}=0$

2. **Məhdudiyyətlərə malik nəqliyyat məsələsi**. Bu məsələnin qoyuluşunda fərz edilir ki, müəyyən məlum $\{i,j\}$ kommunikasiyaları üzrə daşınacaq məhsulun həcminə yuxarıdan və ya aşağıdan (ya da həm yuxarıdan, həm də aşağıdan) məhdudiyyət qoyulur. Yəni

$$x_{ij} \geq b$$
$$x_{ij} \leq a$$
$$a \geq x_{ij} \geq b$$

Məhdudiyyətlərə malik nəqliyyat məsələsinin qoyuluşu, iqtisadi-riyazi modelinin qurulması və həllinə aid misala baxaq.

►**Məsələ 5.5.** Fərz edək ki, 3 müəssisədə eyni adlı yük vardır. Birinci müəssisədə olan yükün miqdarı 200 t, 2-ci müəssisədə olan yükün miqdarı 380 t, 3-cü müəssisədə olan yükün miqdarı isə 420 t-dur. Bu yükləri 4 istehlakçı məntəqəsinə daşımaq lazımdır. 1-ci istehlakçının tələbi 250t,2-ci istehlakçının tələbi 250 t, 3-cü istehlakçının tələbi 230 t, 4-cü istehlakçının tələbi 270 tondur. Yük vahidinin müəssisələrdən istehlakçılara daşınması xərcləri aşağıdakı nəqliyyat xərcləri matrisi ilə verilmişdir.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 8 \\ 6 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

İkinci müəssisədən 3-cü istehlakcıya ən azı 40 ton, 3-cü müəssisədən 4-cü istehlakçıya isə ən çoxu 60 ton məhsul daşımaq olar. Məhsulları istehlakçılara daşımaq üçün elə bir daşınmalar planı qurmaq lazımdır ki, bu plana görə qoyulmuş bütün məhdudiyyətlərin ödənməsi şərti ilə daşınma xərclərinin cəmi minimum olsun.

Göründüyü kimi, baxılan iqtisadi məsələ məhdudiyyətlərə malik nəqliyyat məsələsidir. Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini tərtib edək. Tutaq ki, $\{i; j\}$ kommunikasiyası üzrə x_{ij} qədər yük daşınacaqdır. Deməli məsələnin daşınmalar planı aşağıdakı daşınmalar matrisi şəklində axtarılacaqdır:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}$$

Onda məsələnin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı şəkildə olacaqdır:

$$Z(x) = 3x_{11} + 7x_{12} + 2x_{13} + 6x_{14} + 5x_{21} + 4x_{22} +$$
$$+ 3x_{23} + 8x_{24} + 6x_{31} + x_{32} + 7x_{33} + 3x_{34} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=200 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=380 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=420 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=250 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=250 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=230 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=270 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{23}\geq 40 \\ x_{34}\leq 60 \end{cases}$$

$$x_{ij}\geq 0 \qquad (i=\overline{1,3}; \qquad j=\overline{1,4})$$

Məsələdə $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 1000$ olduğundan bu model qapalı nəqliyyat modelidir və onu potensiallar metodu ilə həll etmək olar. Yuxarıda verdiyimiz alqoritmə əsaslanaraq zəruri hazırlıq işlərini yerinə yetirək.

İlk növbədə X^* daşınmalar matrisinin x_{23} elementi üçün 40-dan kiçik olmayan qiymət təmin etmək üçün «minimal ehtiyat» yaradaq, yəni həm ikinci müəssisənin ehtiyatını, həm də üçüncü istehlakçının tələbini 40 vahid azaldaq. Onda:

$$a_2' = a_2 - 40 = 380 - 40 = 340 \text{ vahid}$$

$$b_3' = b_3 - 40 = 230 - 40 = 190 \text{ vahid}$$

alınacaqdır.

X^* daşınmalar matrisinin x_{34} elementi üçün 60-dan böyük olmayan qiyməti təmin etmək üçün 4-cü real istehlakçının tələbini 2 hissəyə ayıraq. Bu istehlakçıya 60 vahidlik tələb saxlayıb, 4-cü şərti istehlakçı qəbul edək və onun tələbini $b_4' = b_4 - 60 = 270 - 60 = 210$ kimi müəyyən edək. Məsələnin ölçüləri $3\times 4-$dən $3\times 5-$ə dəyişdiyi üçün C nəqliyyat xərcləri matrisinə 5-ci sütun əlavə edək. Bu sütun 4-cü sütunun təkrarı olacaq, sadəcə c_{35} elementinin qiymətini kifayət qədər böyük M ədədinə (tutaq ki, $M=100$) bərabər edəcəyik, yəni:

$$C' = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 8 & 8 \\ 6 & 1 & 7 & 3 & M \end{pmatrix}$$

Hazırlıq mərhələsi: Ən kiçik element qaydası ilə məsələnin başlanğıc daşınmalar matrisini tərtib edək:

10	0	190	0	0	~~200~~	~~10~~	0	0
240	0	0	0	100	~~340~~	~~100~~	0	0
0	250	0	60	110	~~420~~	~~170~~	~~110~~	0
~~250~~	~~250~~	~~190~~	~~60~~	~~210~~				
~~240~~	0	0	0	~~110~~				
0	0	0	0	0				

$$C' = \begin{pmatrix} 3^{(3)} & 7 & 2^{(2)} & 6 & 6 \\ 5^{(5)} & 4 & 3 & 8 & 8^{(6)} \\ 6 & 1^{(1)} & 7 & 3^{(4)} & M \end{pmatrix}$$

Beləliklə, aşağıdakı başlanğıc daşınmalar matrisi aldıq:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 190 & 0 & 0 \\ 240 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 250 & 0 & 60 & 110 \end{pmatrix}$$

$$Z(x) = 3\cdot 10 + 2\cdot 190 + 5\cdot 240 + 8\cdot 100 + 1\cdot 250 + 3\cdot 60 + 100\cdot 110 = 30 +$$
$$+ 380 + 1200 + 800 + 250 + 180 + 11000 = 13840 \quad vahid$$

X_0 daşınmalar matrisində $r = m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ şərti ödəndiyi üçün bu plan cırlaşmamış plandır və məsələnin həllini davam etdirək.

X_0 daşınmalar matrisinin optimallıq şərtini müəyyən etmək üçün sətir (u_i) və sütun (v_j) potensiallarının qiymətlərini hesablayaq:

$$\begin{cases} v_1 - u_1 = 3 \\ v_3 - u_1 = 2 \\ v_1 - u_2 = 5 \\ v_5 - u_2 = 8 \\ v_2 - u_3 = 1 \\ v_4 - u_3 = 3 \\ v_5 - u_3 = 100 \end{cases} \qquad \begin{matrix} u_1 = 94 & v_1 = 97 \\ u_2 = 92 & v_2 = 1 \\ u_3 = 0 & v_3 = 96 \\ & v_4 = 3 \\ & v_5 = 100 \end{matrix}$$

$C_1 = \left\| C_{ij} - (v_j - u_i) \right\|_{3,5}$ matrisini tərtib edək:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 & 97 & 0 \\ 0 & 95 & -1 & 97 & 0 \\ -91 & 0 & -89 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\Delta = -91}$$

C_1 matrisində mənfi elementlərin olması göstərir ki, X_0 daşınmalar matrisi baxılan nəqliyyat modelinin optimal həlli deyil və yaxınlaşmaya keçərək yeni daşınmalar matrisi qurmaq lazımdır.

1-ci yaxınlaşma: I mərhələ.1-ci mərhələ yoxdur, çünki, X_0 daşınmalar matrisinin optimal plan olmadığı məlumdur.

2-ci mərhələ: X_0 daşınmalar matrisindən X_1 daşınmalar matrisinə keçək. C_1 matrisində ən kiçik mənfi element $c_{31} = -91$ olduğu üçün X_0 daşınmalar matrisində qapalı dövrə $x_{31} = 0$ elementi üçün qurulmalıdır;

$$X_0 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 190 & 0 & 0 \\ {}^{(-)}240 & 0 & 0 & 0 & 100^{(+)} \\ {}^{(+)}0 & 250 & 0 & 60 & 110_{(-)} \end{pmatrix}_{\theta_1 = 110}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 190 & 0 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 & 210 \\ 110 & 250 & 0 & 60 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z(x_1) = Z(x_0) + \Delta_1\theta_1 = 13840 - 10010 = 3830 \text{ vahid}$$

2-ci yaxınlaşma: 1-ci mərhələ: X_1 daşınmalar matrisinin optimallıq şərtini yoxlayaq. Bunun üçün C_1 matrisindən C_2 matrisinə keçək:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0^{\bullet} & 100 & 0^{\bullet} & 97 & 0^{\bullet} \\ 0^{\bullet} & 95 & -1 & 97 & 0^{\bullet} \\ -91^{\bullet} & 0^{\bullet} & -89 & 0^{\bullet} & 0 \end{pmatrix} +91$$

$$-91 \qquad -91$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 91 \end{pmatrix} \Delta_2 = -1$$

C_2 matrisində mənfi element var. Deməli X_1 daşınmalar matrisi də optimal daşınmalar planı deyil.

2-ci mərhələ: Optimal olmayan X_1 daşınmalar matrisindən X_2 daşınmalar matrisinə keçək. C_2 matrisində $c_{23} = -1$ olduğu üçün X_1 daşınmalar matrisində qapalı dövrə $x_{23} = 0$ elementi üçün qurulmalıdır:

$$X_1 = \begin{pmatrix} {}^{(+)}10 & 0 & 190^{(-)} & 0 & 0 \\ {}_{(-)}130 & 0 & 0_{(+)} & 0 & 210 \\ 110 & 250 & 0 & 60 & 0 \end{pmatrix} \theta_2 = 130$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 140 & 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 130 & 0 & 210 \\ 110 & 250 & 0 & 60 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z(X_2) = Z(X_1) + \Delta_2\theta_2 = 3830 - 130 = 3700 \text{ vahid.}$$

3-cü yaxınlaşma. 1-ci mərhələ: X_2 daşınmalar matrisinin optimallıq şərtini yoxlamaq üçün C_2 matrisindən C_3 matrisinə keçək:

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0^{\bullet} & 9 & 0^{\bullet} & 6 & 0 \\ 0 & 4 & -1^{\bullet} & 6 & 0^{\bullet} \\ 0^{\bullet} & 0^{\bullet} & 2 & 0^{\bullet} & 91 \end{pmatrix} +1$$

$$-1$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 & 6 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 90 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_3 = -1$$

C_3 matrisində mənfi element olduğu üçün X_2 daşınmalar matrisi optimal plan deyil.

2-ci mərhələ: Optimal olmayan X_2 daşınmalar matrisindən X_3 daşınmalar matrisinə keçək. C_3 matrisində $c_{15} = -1$ olduğu üçün X_2 daşınmalar matrisində qapalı dövrə $x_{15} = 0$ elementi üçün tərtib edilməlidir.

$$X_2 = \begin{pmatrix} 140 & 0 & {}^{(-)}60 & 0 & 0^{(+)} \\ 0 & 0 & {}_{(+)}130 & 0 & 210_{(-)} \\ 110 & 250 & 0 & 60 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta_3 = 60$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 190 & 0 & 150 \\ 110 & 250 & 0 & 60 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z(X_3) = Z(X_2) + \Delta_3\theta_3 = 3700 - 60 = 3640 \quad vahid$$

4-cü yaxınlaşma: 1-ci mərhələ: X_3 daşınmalar matrisinin optimallıq şərtini yoxlayaq. Bu məqsədlə C_3 matrisindən C_4 matrisinə keçmək lazımdır.

$$C_3 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0^{\bullet} & 9 & 0 & 6 & -1^{\bullet} \\ 1 & 5 & 0^{\bullet} & 7 & 0^{\bullet} \\ 0^{\bullet} & 0^{\bullet} & 2 & 0^{\bullet} & 90 \end{pmatrix} \begin{matrix} +1 \\ \\ +1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & -1 & & -1 & \end{matrix} \end{array}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 91 \end{pmatrix}$$

C_4 matrisinin heç bir elementi mənfi deyil. Deməli, X_3 daşınmalar planı məsələnin optimal həllidir.

$$X_{opt}^{(1)} = \begin{pmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 190 & 0 & 150 \\ 110 & 250 & 0 & 60 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\min Z(X^*) = 3640$$

$X_{opt}^{(1)}$ daşınmalar planında 4-cü şərti istehlakçıya uyğun gələn 5-ci sütun elementlərini 4-cü faktiki istehlakçıya uyğun gələn 4-cü sütun elementlərinə əlavə edərək 5-ci sütunu silək, 2-ci istehsalçı və 3-cü istehlakçıya olan 40 ($x_{23} \geq 40$) vahidlik «borcumuzu» qaytaraq. Onda qoyulmuş məhdudiyyətlərə malik nəqliyyat məsələsinin aşağıdakı optimal planını alırıq:

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 140 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 230 & 150 \\ 110 & 250 & 0 & 60 \end{pmatrix}$$

$$Z_{\min} = 3640 + 40 \cdot 3 = 3640 + 120 = 3760 \text{ vahid}$$

Cavab: $X_{opt} = \begin{pmatrix} 140 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 230 & 150 \\ 110 & 250 & 0 & 60 \end{pmatrix}$ **olduqda**

$\min Z(X_{opt}) = 3760$ **olur.**◄

3. **Çox mərhələli nəqliyyat məsələsi.** Bəzi nəqliyyat məsələlərinin qoyuluşunda fərz edilir ki, məhsullar istehsalçılardan bilavasitə istehlakçılara deyil, müəyyən aralıq məntəqələrə (anbarlara, bazalara və s.) daşınır. Bu aralıq məntəqələrdə istehsal prosesi başa çatdırılır (qablaşdırma, çeşidləmə, markirovka), sonra isə tam hazır məhsul son istehlakçılara çatdırılır. Belə məsələnin məqsəd funksiyasında həm iki səviyyəli nəqliyyat xərclərini, həm də məhsul vahidinə düşən əlavə istehsal xərclərini nəzərə almaq lazım gəlir.

Məsələnin məhdudiyyət şərtlərində isə istehsalçıların təkliflərinin və istehlakçıların tələblərinin məhdud olması ilə yanaşı həm də aralıq məntəqələrin tutumlarının məhdud olmasını nəzərə almaq lazımdır.

Çox mərhələli nəqliyyat məsələsinin iqtisadi-riyazi modelini aşağıdakı kimi tərtib etmək olar:

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{R}(c_{ir} + c_r)x_{ir} + \sum_{r=1}^{R}\sum_{j=1}^{n} c_{rj}x_{rj} \to \min$$

$$\sum_{r=1}^{R} x_{ir} = a_i \qquad (i = \overline{1,m})$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ir} = s_r \qquad (r = \overline{1,R})$$

$$\sum_{r=1}^{R} x_{rj} = Q_j \qquad (j = \overline{1,n})$$

$$x_{ir} \geq 0, \;\; x_{rj} \geq 0 \qquad \begin{pmatrix} i = \overline{1,m}) \\ r = \overline{1,R} \\ j = \overline{1,n} \end{pmatrix}$$

Burada:

m – müəssisələrin sayı;

R – aralıq məntəqələrin sayı;

n – istehlakçıların sayı;

a_i – i – ci müəssisədə olan məhsulun miqdarı;

s_r – r – ci aralıq məntəqənin tutumu;

c_r – r – ci aralıq məntəqədə məhsul vahidinə düşən əlavə istehsal xərcləri;

c_{ir} - məhsul vahidinin i – ci müəssisədən r – ci aralıq məntəqəyə daşınma xərcləri;

$Q_j - j-$cu istehlak məntəqəsinin tələbi;

c_{rj} - məhsul vahidinin $r-$ci aralıq məntəqədən $j-$cu istehlakçıya daşınma xərcləridir;

x_{ir} – məchul kəmiyyət olub $i-$ci müəssisədən $r-$ci aralıq məntəqəyə daşınan məhsulun miqdarını göstərir;

x_{rj} – məchul kəmiyyət olub $r-$ci aralıq məntəqədən $j-$cu istehlak məntəqəsinə daşınacaq məhsulun miqdarını göstərir;

Asanlıqla sübut etmək olar ki, bu məsələdə

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{r=1}^{R} s_r = \sum_{j=1}^{n} Q_j$$

tarazlıq şərtləri ödənir.

Zamana görə nəqliyyat məsələsi. Bəzən nəqliyyat məsələlərində idarəetmənin məqsədi daşınma xərcləri cəmini minimum etmək deyil, məhsulları qısa zaman ərzində istehlakçılara çatdırmaq kimi müəyyən edilir. Belə məsələlərə misal olaraq süd və digər tez xarab olan məhsulların istehlakçılara və emal müəssisələrinə çatdırılmasını, yığım prosesində kənd təsərrüfatı məhsullarının konserv kombinatlarına çatdırılmasını və s. göstərmək olar. Məsələnin qoyuluşu aşağıdakı kimidir: Fərz edək ki, m sayda istehsal müəssisəsində bircins məhsul vardır. Bu müəssisələrdə olan məhsulun miqdarı uyğun olaraq $a_1, a_2, ..., a_m$ vahiddir. Həmin məhsullar n sayda istehlakçıya daşınmalıdır. İstehlakçıların tələbləri məlumdur və uyğun olaraq $b_1, b_2, ..., b_n$ vahiddir. Məhsul vahidini $\{i, j\}$ kommunikasiyası üzrə (marşrut üzrə) daşımaq üçün sərf edilən t_{ij} vaxtları məlum hesab edilir:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mn} \end{pmatrix}$$

Onda qarşıya belə bir məsələ çıxır: *Məhsulları istehsalçılardan istehlakçılara daşımaq üçün elə bir daşınma variantı tapmaq lazımdır ki, bu varianta (plana) görə hər bir istehsalçıda olan məhsulun tam daşınması və hər bir istehlakçının tələbinin tam ödənməsi şərti ilə bütün*

kommunikasiyalar üzrə məhsulların daşınmasının maksimal vaxtı minimum olsun. Bu məsələyə ***zamana görə nəqliyyat məsələsi*** deyilir.

Məsələni riyazi dilə çevirək.Tutaq ki, $\{i, j\}$ kommunikasiyası üzrə x_{ij} vahid məhsul daşınacaqdır. Başqa sözlə, zamana görə nəqliyyat məsələsinin daşınmalar planı klassik (qapalı) nəqliyyat məsələsində olduğu kimi aşağıdakı matris şəklində axtarılacaqdır:

$$X = \left\| x_{ij} \right\|_{m,n} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \ldots x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} \ldots x_{2n} \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ x_{m1} & x_{m2} \ldots x_{mn} \end{pmatrix}$$

Məsələnin qoyuluşunun iqtisadi şərtləri klassik nəqliyyat məsələsinin qoyuluşu ilə üst-üstə düşdüyü üçün baxdığımız bu modifikasiyanın məhdudiyyət şərtləri adi nəqliyyat məsələsinin məhdudiyyət şərtlərindən heç nə ilə fərqlənməyəcəkdir. Məqsədimizin riyazi ifadəsi isə

$$T(x) = \min \left\{ \max_{i,j} t_{ij} \right\}$$

şəklində olacaqdır. Yəni X daşınmalar matrisinin $x_{ij} > 0$ elementlərinə uyğun gələn T matrisinin elementlərindən ən böyüyü minimum olmalıdır. Təbii ki, T(x) vaxtı ərzində X daşınmalar matrisi ilə müəyyən edilən daşınmalar planı tam yerinə yetiriləcəkdir. Beləliklə, minimum vaxt kriteriyasına görə nəqliyyat məsələsinin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı şəkildədir:

$$T(x) = \max_{x_{ij}>0} \{ t_{ij} \} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = \overline{1,m})$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = \overline{1,n})$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n})$$

Bu məsələnin həll alqoritmi aşağıdakı kimidir:

Nəqliyyat məsələsinin ilkin daşınmalar planının tərtib edilməsi üsullarından biri ilə X_0 başlanğıc daşınmalar matrisi tərtib edilir. Bu matrisin $x_{ij} > 0$ elementləri üçün məqsəd funksiyasının $T(X_0) = \max_{x_{ij}>0} \{ t_{ij} \} = t_{i_0 j_0}$

qiyməti müəyyən edilir. X_0 daşınmalar matrisinin $t_{ij} > T(x_0)$ olan bütün sıfır elementləri tədqiqatdan kənarlaşdırılır. Belə ki, həmin elementlər üçün $x_{ij} > 0$ qiymətlərinin alınması son nəticədə məqsəd funksiyasının qiymətini artırır. Funksiyanın qiymətini azaltmaq üçün yeni daşınmalar matrisinə keçən zaman əvvəlki matrisin elə bir $x_{ij} > 0$ elementinin qiyməti sıfıra çevrilməlidir ki, bu element üçün $t_{ij} \to \max$ olsun. Bunun üçün X daşınmalar matrisində "boşaldıcı dövrlər" adlanan dövrlər qurulur. Qeyd edək ki, bu dövrlərə bir neçə "0" elementləri daxil ola bilər (cırlaşma halında isə şərti olaraq sıfırdan böyük hesab edilən sıfır elementləri bu sıraya aid edilmir). Hər bir boşaldıcı dövrdə iştirak edən elementlərə boşaldılan x_{ij} elementindən başlayaraq "-" və "+" şərti işarələr qoyulur və $\theta = \max\limits_{"-"}\{x_{ij}\}$ kəmiyyəti qədər sürüşdürmə aparılır. Əgər X matrisinin baxılan x_{ij} elementini "0"-a bərabər etmək mümkün olsa, bu element sonradan nəzərə alınmır. Alınmış yeni daşınmalar matrisi üçün məqsəd funksiyasının qiyməti əvvəlki daşınmalar matrisi ilə müqayisədə daha az olacaqdır. Sonra yeni alınmış X_1 daşınmalar matrisində $T(X_1) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{t_{ij}\} = t_{i_1 j_1}$ şərtinə uyğun olan $x_{i_1 j_1}$ elementi boşaldılmalıdır (sıfıra bərabər edilməlidir). Proses o vaxta qədər davam etdirilir ki, daşınmalar matrisinin tələb olunan $x_{i_R j_R}$ elementinin qiymətini sıfıra çevirmək imkanı mövcud olmasın.

Zamana görə nəqliyyat məsələsinin qoyuluşu və həllinə aid misala baxaq.

►**Məsələ 5.6.** Fərz edək ki, A_1, A_2, A_3 və A_4 müəssisələrində uyğun olaraq 300*t*, 400*t*, 500*t*, 600*t* məhsul vardır. Bu məhsulları B_1, B_2, B_3 və B_4 istehlak məntəqələrinə daşımaq lazımdır. Istehlakçıların tələbləri uyğun olaraq $b_1 = 200t$, $b_2 = 400t$, $b_3 = 500t$, $b_4 = 700t$ -dur. İstehsalçılardan istehlakçılara məhsulların çatdırılması vaxtları aşağıdakı matrislə verilmişdir:

$$T = \begin{pmatrix} 26 & 16 & 14 & 22 \\ 12 & 14 & 18 & 16 \\ 10 & 24 & 10 & 20 \\ 38 & 12 & 28 & 8 \end{pmatrix}$$

Bütün daşınmaların həyata keçirilməsi üçün zəruri olan minimal vaxtı tapmaq tələb olunur.

Həlli: Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini quraq. Tutaq ki, $\{A_i; B_j\}$ kommunikasiyası üzrə x_{ij} vahid məhsul daşınacaqdır. Onda baxılan zamana görə nəqliyyat məsələsinin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı kimi alınacaqdır:

$$T(x) = \max_{x_{ij}>0}\{\ t_{ij}\} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 300 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 400 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 500 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 200 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 400 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 500 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 700 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \begin{pmatrix} i = \overline{1,4} \\ j = \overline{1,4} \end{pmatrix}$$

Şimal-qərb bucağı üsulunu tətbiq etməklə bu məsələnin X_0 daşınmalar matrisini tərtib edək (həll prosesinin müqayisəli izahını təmin etmək üçün biz T və X matrislərini bir cədvəldə əks etdirəcəyik):

Cədvəl 5.1

200	400	500	700	b_j / a_i
26 200	16 100	14 0	22 0	300
12 0	14 300	18 100	16 0	400
10 0	24 0	10 400	20 100	500
38 0	12 0	28 0	8 600	600

Alınmış X_0 başlanğıc daşınmalar matrisinə görə $T(X_0) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{26,16,14,18,10,20,8\} = 26$ qiyməti $\{A_1; B_1\}$ kommunikasiyası üçün alınır. Bu daşınmalar matrisində $\{A_4; B_1\}$ və $\{A_4; B_3\}$ kommunikasiyaları üçün $t_{41} = 38$ və $t_{43} = 28$ daşınma vaxtları $T(X_0) = 26$-dan böyük olduğu üçün həmin kommunikasiyaları silirik:

Cədvəl 5.2

200	400	500	700	b_j / a_i
26 200	16 100	14 0	22 0	300
12 0	14 300	18 100	16 0	400
10 0	24 0	10 400	20 100	500
38	12 0	28	8 600	600

X_0 daşınmalar matrisini yaxşılaşdırmaq üçün $\{A_1; B_1\}$ kommunikasiyasını boşaltmaq lazımdır. Bu məqsədlə $\{(A_2, B_1);\ (A_1, B_1);\ (A_1, B_2);\ (A_2, B_2)\}$ dövrəsini qururuq və bu dövrədə $\theta = \min_{"-"}\{200, 300\} = 200$ olduğunu təyin edirik. Dövrə üzrə sürüşdürmə apararaq X_1 dayaq daşınmalar matrisini alırıq. (cədvəl 5.3→cədvəl 5.4)

Cədvəl 5.3.

200	400	500	700	b_j / a_i
26 200 −	16 + 100	14 0	22 0	300
12 0 +	14 - 300	18 100	16 0	400
10 0	24 0	10 400	20 100	500
38	12 0	28	8 600	600

Cədvəl 5.4.

200	400	500	700	b_j / a_i
26 0	16 300	14 0	22 0	300
12 200	14 100	18 100	16 0	400
10 0	24 0	10 400	20 100	500
38	12 0	28	8 600	600

X_1 daşınmalar matrisi üçün

$$T(X_1) = \max_{x_{ij}>0}\{16,12,14,18,10,20,8\} = 20$$

qiyməti $\{A_3; B_4\}$ kommunikasiyasında alınır. Bu daşınmalar matrisinin $\{A_1; B_1\}$, $\{A_1; B_4\}$ və $\{A_3; B_2\}$ kommunikasiyaları üçün $t_{11} = 26$, $t_{14} = 22$ və $t_{32} = 24$ daşınma vaxtları $T(X_1) = 20$-dən böyük olduğu üçün bu kommunikasiyaları da silirik (cədvəl 5.5):

Cədvəl 5.5.

200	400	500	700	b_j / a_i
26	16 300	14 0	22	300
12 200	14 100	18 100	16 0	400
10 0	24	10 400	20 100	500
38	12 0	28	8 600	600

X_1 daşınmalar matrisini yaxşılaşdırmaq üçün $\{A_3, B_4\}$ kommunikasiyasını boşaltmaq lazımdır. Bu məqsədlə $\{(A_2, B_4); (A_3, B_4); (A_3, B_3); (A_2, B_3)\}$ dövrəsini qururuq və bu dövrədə $\theta = \min_{"-"}\{100,100\} = 100$ olduğunu təyin edirik. Dövrə üzrə sürüşdürmə apararaq X_2 dayaq daşınmalar matrisini alırıq. (cədvəl 5.6→cədvəl 5.7)

Cədvəl 5.6

200	400	500	700	b_j / a_i
26	16 300	14 0	22	300
12 200	14 100	18 100 −	16 + 0	400
10 0	24	10 400 +	20 − 100	500
38	12 0	28	8 600	600

X_2 dayaq daşınmalar matrisi üçün $T(X_2) = \max\limits_{x_{ij}>0}\{16,12,14,16,10,8\} = 16$ qiyməti $\{A_1; B_2\}$ və $\{A_2; B_4\}$ kommunikasiyalarında alınır. Bu daşınmalar matrisinin $\{A_2, B_3\}$ və $\{A_3; B_4\}$ kommunikasiyaları üçün $t_{23} = 18$ və $t_{34} = 20$ daşınma vaxtları $T(X_2) = 16$ -dan böyük olduğu üçün bu kommunikasiyaları da silirik (cədvəl 5.7):

Cədvəl 5.7.

200	400	500	700	b_j / a_i
26	16 300	14 0	22	300
12 200	14 100	18	16 100	400
10 0	24	10 500	20	500
38	12 0	28	8 600	600

X_2 daşınmalar matrisini yaxşılaşdırmaq üçün $\{A_1, B_2\}$ və $\{A_2, B_4\}$ kommunikasiyalarını boşaltmaq lazımdır. Lakin cədvəl 5.7-də verilmiş X_2 daşınmalar matrisinin silinməmiş kommunikasiyalarının köməyi ilə bu kommunikasiyaları boşaltmaq mümkün deyil. Odur ki, X_2 daşınmalar matrisi, yəni:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 300 & 0 & 0 \\ 200 & 100 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 600 \end{pmatrix}$$

baxılan nəqliyyat məsələsinin optimal daşınmalar planıdır.

Cavab: $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 300 & 0 & 0 \\ 200 & 100 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 600 \end{pmatrix}$ **olduqda**

$\min T(X^*) = 16$ **olur.**◀

5.5. Nəqliyyat məsələlərinin macar metodu ilə həll alqoritmi

Nəqliyyat məsələsinin macar metodu ilə həll alqoritmi hazırlıq mərhələsindən və sonlu sayda yaxınlaşmalardan ibarətdir. Hazırlıq mərhələsində elementləri mənfi olmayan və

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(0)} \le a_i & (i = \overline{1,m}) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{(0)} \le b_j & (j = \overline{1,n}) \end{cases} \qquad (5.12)$$

bərabərsizliklərini ödəyən $X_0 = \left\| x_{ij}^{(0)} \right\|_{m,n}$ matrisi qurulur. Əgər (5.12) şərtlərinin hamısı bərabərliklərdən ibarətdirsə, X_0 avtomatik olaraq nəqliyyat məsələsinin optimal həlli olur. Əgər (5.12) şərtləri arasında ciddi bərabərsizliklər varsa, onda X_0 matrisi məsələnin həlli olmur və 1-ci yaxınlaşmaya keçmək lazımdır. R-ci yaxınlaşmadan sonra qurulmuş matrisi $X_R = \left\| x_{ij}^{(R)} \right\|_{m,n}$ ilə işarə edək və

$$\Delta_R = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j - 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(R)} \qquad (5.13)$$

olduğunu qəbul edək.

Δ_R kəmiyyəti X_R matrisinin məcmu fərqi adlanır və bu matrisin nəqliyyat məsələsinin daşınmalar planına yaxınlığını xarakterizə edir. 1-ci yaxınlaşma nəticəsində (5.12) sistemini ödəyən qeyri-mənfi elementlərindən ibarət $X_1 = \left\| x_{ij}^{(1)} \right\|_{m,n}$ matrisi qurulur. Bu halda X_1 matrisi elə bir matrisdir ki, həmin matrisə görə $\Delta_1 < \Delta_0$ olur. Əgər Δ_1 sıfıra bərabərdirsə, onda X_1 nəqliyyat məsələsinin optimal planıdır. Əgər

$\Delta_1 > 0$ olarsa, onda növbəti yaxınlaşmaya keçmək lazımdır. Yaxınlaşmalar müəyyən d qiymətində $\Delta_d = 0$ olana qədər davam etdirilir. Bu zaman X_d matrisi nəqliyyat məsələsinin optimal həlli olur.

İndi isə alqoritmin ayrı-ayrı elementlərini daha ətraflı nəzərdən keçirək.

Hazırlıq mərhələsi: $C = \left\| c_{ij} \right\|_{m,n}$ nəqliyyat xərcləri matrisinin hər bir sütununda ən kiçik element tapılır. Sonra bu elementi uyğun sütunun bütün elementlərindən çıxırıq. Nəticədə C' matrisini alırıq. Sonra isə C' matrisinin hər bir sətirində ən kiçik element tapılır və bu elementi uyğun sətir elementlərindən çıxırıq. Nəticədə $C'' = C_0 = \left\| c_{ij}^{(0)} \right\|_{m,n}$ matrisi alınır. Bu matrisin bütün elementləri qeyri-mənfidir və matrisin hər bir sətirində (sütununda) heç olmazsa bir sıfır vardır. Bundan sonra $X_0 = \left\| x_{ij}^{(0)} \right\|_{m,n}$ matrisini qururuq. Bu matris sütunlar üzrə qurulur. Əgər $i_{j,R} (R = 1,2,...,r_j)$ C_0 matrisində j-cu sütunun R-ci sıfırı yerləşmiş sətirin nömrəsi olarsa (sıfırların sayılması yuxarıdan aşağı aparılır), onda X_0 matrisinin birinci sütununun elementləri aşağıdakı rekurent formula üzrə müəyyən olunur:

$$x_{i1}^{(0)} = \begin{cases} 0, & i \neq i_{\lambda,1}, \quad \lambda = 1,2,...,r_1 \\ \min \ (a_i, b_1 - \sum_{\mu=1}^{i-1} x_{\mu 1}^{(0)}, & i = i_{\lambda 1} \end{cases}$$

Fərz edək ki, X_0 matrisində 1-dən j-a qədər bütün sütunlar doldurulmuşdur. j-cu sütunun elementləri aşağıdakı formula üzrə hesablanır:

$$x_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0, & i \neq i_{\lambda,j}, \quad \lambda = 1,2,...,r_j \\ \min(a_i - \sum_{\mu=1}^{i-1} x_{\mu j}^{(0)}, b_j - \sum_{\mu=1}^{i-1} x_{\mu j}^{(0)}), & i = i_{\lambda j} \end{cases}$$

Beləliklə, X_0 matrisinin müsbət elementləri C_0 matrisinin sıfırlarının mövqelərində yerləşir. Əgər:

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j - 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0$$

şərti ödənərsə, onda X_0 verilmiş nəqliyyat məsələsinin optimal həllidir. Əgər $\Delta_0 > 0$ olarsa, onda 1-ci yaxınlaşmaya keçirik.

Yaxınlaşmanın məzmunu. Hər bir yaxınlaşma öz növbəsində keyfiyyətcə bir-birindən fərqlənən 3 mərhələdən ibarətdir. Yaxınlaşma 1-ci mərhələ ilə başlayır. Sonra ümumi halda bir neçə dəfə 3, 1 mərhələ cütləri yerinə yetirilir. Yaxınlaşma 2-ci mərhələ ilə bitir.

Tutaq ki, R yaxınlaşma artıq aparılmışdır. Həm də $\Delta_R > 0$-dır. Bu zaman X_R , C_R matrislərindən çıxış edərək növbəti $(R+1)$ -ci yaxınlaşmanı yerinə yetirmək lazımdır. Yaxınlaşmaya başlamazdan əvvəl C_R matrisində fərqlərin kəmiyyəti (uyğunsuzluqların kəmiyyəti)

$$\sigma_j^{(R)} = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{(R)} = 0$$

olan sütunlar "+" işarəsi ilə qeyd edilir.

1-ci mərhələ: Əgər C_R matrisinin bütün sıfır elementləri qeyd edilmiş olarsa, onda 3-cü mərhələyə keçirik. Əks halda C_R matrisində ixtiyari qeyd edilməmiş sıfırı, tutaq ki, i-ci sətirdə və j-cu sütunda yerləşmiş sıfırı seçirik və i-ci sətirin fərqini hesablayırıq:

$$\sigma_i^{(R)} = a_i - \sum_{\mu=1}^{n} x_{i\mu}^{(R)}$$

Bu zaman aşağıdakı iki haldan biri mümkündür:

a) $\sigma_i^{(R)} = 0$

b) $\sigma_i^{(R)} > 0$

a) halında C_R matrisinin i-ci sətiri "+" işarə ilə, $C_{ij}^{(R)}$ elementi isə ştrixlə qeyd edilir. Sonra bu matrisin bütün qeyd edilmiş sütunları nəzərdən keçirilir. Əgər C_R-in μ-cü sütunu qeyd edilibsə və $x_{i\mu}^{(R)} > 0$ -sa, onda sütun üzərinə qoyulmuş qeyd olunma işarəsi ləğv edilir, $C_{i\mu}^{(R)}$ elementi isə ulduzla qeyd edilir. b) halında isə $C_{i\mu}$ elementi ştrixlə qeyd edilir və ikinci mərhələyə keçilir. C_R matrisinin qeyd edilməmiş bir sıfır elementinin nəzərdən keçirilməsı ilə bağlı olan əməliyyatların məcmuyunu 1-cı mərhələnin addımı hesab edək.

Fərz edək ki, bir neçə bu cür addım atılmış, həmçinin sonuncu addım a) halı ilə bitmişdir. Əgər C_R matrisinin bütün sıfırları qeyd edilmişdirsə, onda 3-cü mərhələyə keçirik. Əgər matrisin sıfırları içərisində qeyd edilməmişləri qalıbsa, 1-ci mərhələni davam etdiririk və növbəti addıma keçirik. Beləliklə, 1-ci mərhələ bir neçə addımdan ibarət olub, ya b) halı ilə (2-ci mərhələyə keçid), ya da C_R matrisində bütün sıfırların qeyd edilməsi ilə (3-cü mərhələyə keçid) bitir. 1-ci mərhələnin nəticəsindən asılı olaraq biz iki halı bir-birindən fərqiəndirməliyik:

- 1A halı- 2-ci mərhələyə keçid;
- 1B halı -3-cü mərhələyə keçid.

2-ci mərhələ: 2-ci mərhələ 1A halında 1-ci mərhələnin ardınca gəlir. Bu mərhələdə C_R matrisində ştrix və ulduzlarla qeyd edilmiş elementlərdən (sıfırlardan) zəncir düzəldilir və X_R matrisindən X_{R+1} matrisinə keçilir. Fərz edək ki, C_R matrisində $\lambda_1\mu_1$ mövqeyində yerləşmiş sıfır üçün b) halı alınmışdır. Bu elementdən başlayaraq C_R matrisində işarə edilmiş sıfırlardan zəncir qurmaq üçün aşağıdakı qaydaya riayət edilir:

μ_1 sütununda ulduzlu sıfır seçilir - $0^*_{\lambda_2\mu_1}$ (sıfırın indeksləri bu elementin C_R matrisindəki vəziyyətini göstərir). λ_2 sətirində isə ştrixli sıfır seçilir - $0'_{\lambda_2\mu 2}$. Sonra $0'_{\lambda_2\mu 2}$ -dən μ_2 sütunu boyunca hərəkət edib, ulduzlu sıfır axtarırıq və s. Sütun üzrə ştrixli sıfırdan ulduzlu sıfra keçmək və sətir üzrə ulduzlu sıfırdan ştrixli sıfıra keçmək mümkün olana qədər proses davam etdirilir.

İsbat edilir ki, bu qayda ilə zəncirin qurulması birqiymətli aparılır, zəncirdə qapalı dövrlər olmur və zəncir ştrixli sıfır ilə bitir.

$$0'_{\lambda_1\mu_1}, 0^*_{\lambda_2\mu_1}, \ldots, 0^*_{\lambda_S\mu_{S-1}}, 0'_{\lambda_S\mu_S} \qquad (5.14)$$

zənciri qurulduqdan sonra X_R matrisindən X_{R+1} matrisinə keçid aşağıdakı formula üzrə həyata keçirilir:

$$\begin{cases} x_{ij}^{(R+1)} = x_{ij}^{(R)}, & \text{əgər } c_{ij}^{(R)} \text{ (5.14) zəncirinə daxil deyilsə} \\ x_{ij}^{(R+1)} = x_{ij}^{(R)} + \theta_R & \text{əgər } c_{ij}^{(R)} \text{ (5.14) zəncirinin tək elementidirsə} \\ x_{ij}^{(R+1)} = x_{ij}^{(R)} - \theta_R & \text{əgər } c_{ij}^{(R)} \text{ (5.14) zəncirinin cüt elementidirsə} \end{cases}$$

Burada: $\theta_R = \min\limits_{2\le t\le S}\left\{x^{(R)}_{\lambda_t\mu_{t-1}}\sigma^{(R)}_{\lambda_1}, \sigma^{(R)}_{\mu_s}\right\}$

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi:

$$\sigma_i^{(R)} = a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(R)}, \;\; \sigma_j^{(R)} = b_i - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{(R)}$$

X_{R+1} matrisinin elementlərinin qeyri-mənfi olduğunu və (5.12) bərabərsizliklərini ödədiyini yoxlamaq çətin deyil. Bu halda

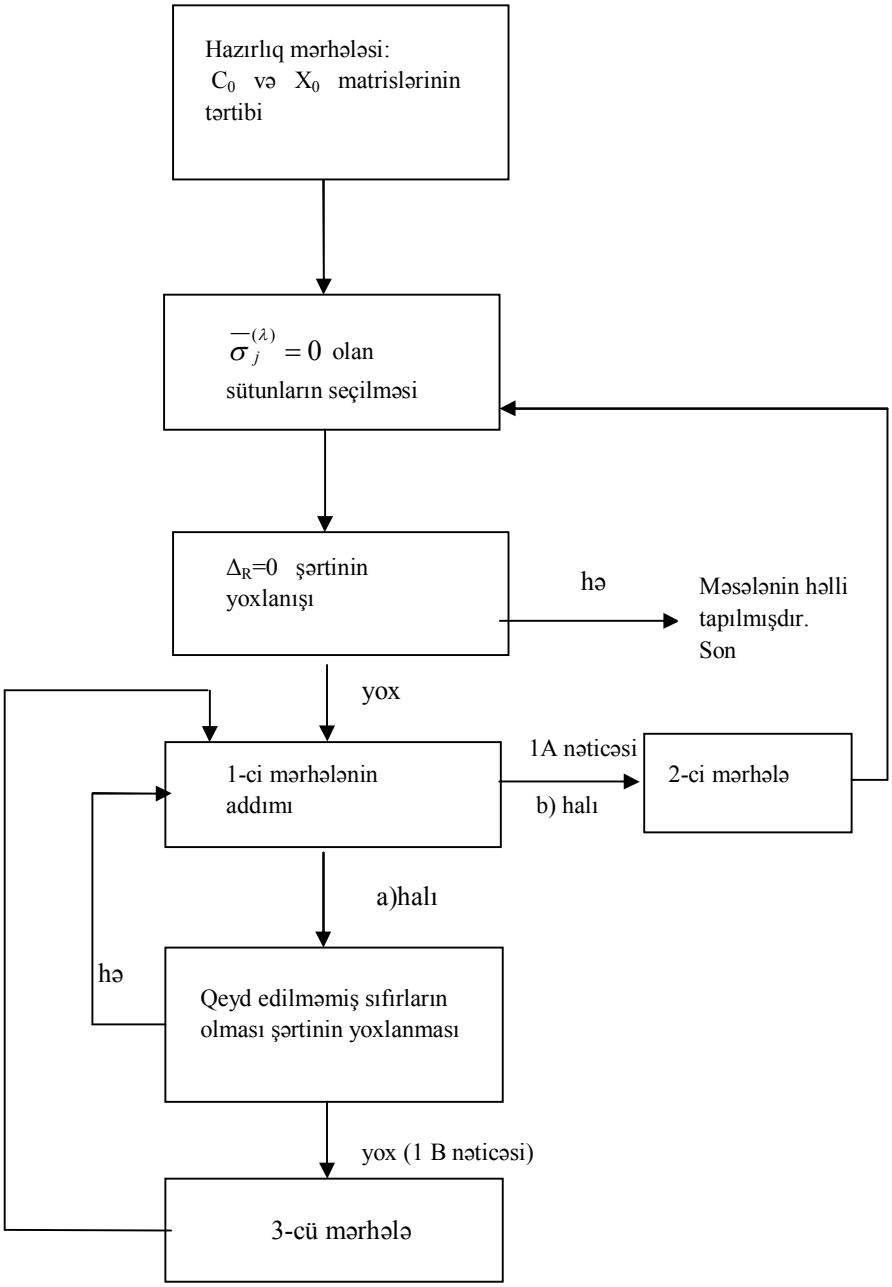
$$\Delta_{R+1} < \Delta_R$$

şərti ödənir.

3-cü mərhələ: Fərz edək ki, 1-ci mərhələ C_R matrisinin bütün sıfırlarının qeyd edilməsi ilə bitmişdir. Bu halda 3-cü mərhələyə keçmək zəruridir. Bu mərhələdə $C_R = \left\|c_{ij}^{(R)}\right\|$ matrisindən $C_R^{(1)} = \left\|c_{ij}^{(R,1)}\right\|$ matrisinə keçilir. $C_R^{(1)}$ matrisində heç olmazsa bir qeyd edilməmiş sıfır vardır və bütün elementlər üçün $C_{ij}^{(R,1)} \ge 0$ şərti ödənir. C_R matrisində qeyd edilməmiş bütün elementlərdən ən kiçiyi seçilir. $h = \min c_{ij}^{(R)}$ olsun. Onda C_R matrisinin qeyd edilməmiş sətirlərindəki elementlərdən h çıxılır, qeyd edilmiş sütun elementlərinə isə h əlavə edilir. Alınmış matrisi $C_R^{(1)}$ ilə işarə edirik. Sonra yenidən 1-ci mərhələyə keçilir və C_R matrisi əvəzinə $C_R^{(1)}$ matrisi götürülür, bu halda bütün əvvəlki qeyd edilmə işarələri saxlanılır.

1-ci mərhələ aparıldıqdan sonra ya 2-ci mərhələyə keçilir (1A halı), ya da yenidən 3-cü mərhələyə qayıtmaq zərurəti yaranır (1B halı). Isbat etmək olar ki, sonlu sayda dövrlərdən sonra hökmən 2-ci mərhələyə keçid baş verir və bu mərhələlərin yerinə yetirilməsi ilə R+1-ci yaxınlaşma bitir.

Əgər Δ_{R+1} məcmu fərq sıfra bərabər olarsa, onda X_{R+1} matrisi nəqliyyat məsələsinin optimal həllidir. Əgər $\Delta_{R+1} > 0$ olarsa, onda növbəti $(R+2)$-ci yaxınlaşmaya keçilir. Nəqliyyat məsələsi üçün macar metodunun alqoritminin blok-sxemi aşağıdakı kimidir (şəkil 5.3):



Şəkil 5.3.Macar metodunun alqoritminin blok-sxemi

Macar metodu $a_i (i=\overline{1,n})$ və $b_j (j=\overline{1,n})$ parametrləri tam ədədlər olduqda nəqliyyat məsələlərinin həllini daha səmərəli aparmağa imkan verir. Bu metodun tətbiqi halında optimal daşınmalar planının alınması üçün zəruri olan əməliyyatların sayını əvvəlcədən qiymətləndirmək mümkün olur. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, optimal planın tapılması üçün icra ediləcək yaxinlaşmaların sayı:

$$L=\frac{\sum_{i=1}^{m}a_i+\sum_{j=1}^{n}b_j-2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{(0)}}{2}=\frac{\Delta_0}{2}$$

-dən çox olmayacaqdır (çünki hər bir yaxınlaşma prosesində məcmu fərq ən pis halda 2 dəfə azalir).

Macar metodunun üstünlüyü və sərfəliliyi həm də onunla bağlıdır kı, bu metodla nəinki optimal daşınmalar planı almaq olur, həm də hər bir yaxınlaşmanın nəticəsinin optimal plana yaxınlığını qiymətləndirmək və bununla da hesablama prosesinə nəzarət etmək imkanı yaranır. Bu metodun digər bir üstünlüyü isə onun cırlaşma halına qeyri-həssas olmasıdır. Macar metodunda X_R matrisindən X_{R+1} matrisinə keçid zamanı zəncirin potensiallar metodu ilə müqayisədə daha sadə şəkildə qurulması da bu metodun üstünlüklərindən biridir.

Macar metodunu tətbiq etməklə nəqliyyat məsələsinin həll alqoritminə baxaq.

►**Məsələ 5.7.** Fərz edək ki, 4 müəssisədə uyğun olaraq $a_1=4$ vahid, $a_2=2$ vahid, $a_3=3$ vahid, $a_4=3$ vahid eyni adlı məhsul vardır. Bu məhsulları 4 istehlakçıya daşımaq lazımdır. İstehlakçıların tələbləri uyğun olaraq $b_1=3$ vahid, $b_2=6$ vahid, $b_3=2$ vahid və $b_4=1$ vahiddir. Məhsul vahidlərinin daşınma xərcləri aşağıdakı nəqliyyat xərcləri matrisi ilə verilmişdir:

$$C=\begin{pmatrix}2 & 5 & 9 & 5\\ 8 & 3 & 5 & 8\\ 7 & 3 & 1 & 4\\ 5 & 9 & 7 & 2\end{pmatrix}$$

Məhsulları minimum nəqliyyat xərcləri ilə istehsalcılardan istehlak məntəqələrinə daşımaq variantını tapmaq tələb edilir.

Həlli: Baxılan nəqliyyat məsələsinin iqtisadi-riyazi modelini quraq. Tutaq ki, $\{i;\ j\}$ kommunikasiyası üzrə x_{ij} qədər məhsul daşınacaqdır. Onda alırıq:

$$Z(x) = 2x_{11} + 5x_{12} + 9x_{13} + 5x_{14} + 8x_{21} + 3x_{22} + 5x_{23} + 8x_{24} + 7x_{31} + 3x_{32} +$$
$$+ x_{33} + 4x_{34} + 5x_{41} + 9x_{42} + 7x_{43} + 2x_{44} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 4 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 3 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 3 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 6 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 2 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \begin{pmatrix} i = \overline{1,4} \\ j = \overline{1,4} \end{pmatrix}$$

Nəqliyyat məsələsini macar metodu ilə həll edək:

Hazırlıq mərhələsi: Nəqliyyat xərcləri matrisinin hər bir sütununda ən kiçik element tapırıq və bu elementi sütunların qalan elementlərindən çıxırıq:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 & 5 \\ 8 & 3 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \to \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Göründüyü kimi C_0 matrisi C matrisinin 1-ci sütun elementlərindən 2-ni, 2-ci sütun elementlərindən 3-ü, 3-cü sütun elementlərindən 1-i, 4-cü sütun elementlərindən 2-ni çıxmaq yolu ilə tərtib edilmişdir.

Sonra isə C_0 matrisinin hər bir sətirindəki ən kiçik elementi bu sətrin qalan bütün elementlərindən çıxmaqla C_1 matrisi qurulur. C_0 matrisinin hər bir sətirindəki ən kiçik element sıfır olduğundan C_1 matrisi C_0 matrisi ilə üst-üstə düşür.

İndi isə, X_0 matrisini quraq. Matrisin qurulması sütunlar üzrə aparılır. Bunun üçün C_0-də 1-ci sütunda yuxarıdan aşağı sıfırlar tapılır. X_0 planında bu sıfırlara uyğun elementlər təyin edilir. Nəticədə aşağıdakı daşınmalar planı alırıq:

$$X_0 = \begin{array}{c|cc} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{matrix} & \end{array}$$

X_0 matrisindən sonra sağdan 2-ci sütunda istehsal məntəqələrinin uyğunsuzluqları (sətir uyğunsuzluqları), aşağıdan 2-ci sətirdə isə istehlak məntəqələrinin uyğunsuzluqları (sütun uyğunsuzluqları) göstərilmişdir.

$\frac{1}{2}\Delta_0 = 3 > 0$ olduğundan 1-ci yaxınlaşmaya keçirik.

I yaxınlaşma: Yuxarida qeyd etdiyimiz kimi, hər bir yaxınlaşma 1-ci mərhələ ilə başlayır, sonra isə $\{3,1\},\{3,1\},...,\{3,1\}$ mərhələ cütləri təkrarlanır və yaxınlaşma 2-ci mərhələ ilə, yəni yeni X_R matrisinin qurulması ılə başa çatır. 1-ci mərhələnin icra edilməsini asanlaşdırmaq üçün C_0 matrisinin X_0 matrisinə görə müsbət uyğunsuzluqlara malik olan sətirləri sol tərəfdə qoyulmuş "$\times$" işarələri ilə qeyd edilir. Bu matrisdə X_0 matrisinə görə uyğunsuzluqları " 0 "-a bərabər olan sütunlar isə yuxarıdın "+" işarə ilə qeyd edilir. C_0 matrisində bu sütunlarda X_0 matrisinin sıfırdan böyük elementlərinə uygun gələn elementləri xətlə qeyd edilir. Göründüyü kimi bu sütunlar 1-ci və 4-cü sütunlardır, xətlə qeyd edilmiş elementlər isə $c_{11} = 0$ və $c_{44} = 0 -$dır.

I (1) mərhələsi iki addımdan ibarətdir və bu addımlar nəticəsində 2-ci və 3-cü sətirlər qeyd edilir. Sonra isə $h = 2$ olduqda 3-cü mərhələ icra edilir.

$$C_0 = \begin{array}{c} \\ \times \\ \\ \times \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} + & & + & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \bar{0} & 2 & 8 & 3 \\ 6 & 0' & 4 & 6 \\ 5 & 0' & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & \bar{0} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ + \\ + \\ \\ \end{array} \xrightarrow{h=2} \quad C_1 = \begin{array}{c} \\ \times \\ \\ \times \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \oplus & \uparrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \bar{0} & 0' & 6 & 3 \\ 8 & 0' & 4 & 8 \\ 7 & 0' & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & \bar{0} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ + \\ + \\ \\ \end{array}$$

I (2) mərhələsi bir addımdan ibarət olub $1(A)$ halı ılə bitir, yəni 2-ci mərhələyə keçilir.

2-ci mərhələdə X_0 planından X_1 planına keçilir. Bu keçid çox sadə icra edilir, cünki dövrə yalnız bir elementdən, $x_{12}=0$ elementindən ibarətdir.

$$X_0=\begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{array} \quad \overrightarrow{\theta_1=1}$$

$$X_1=\begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{array}$$

Beləliklə, 1-ci yaxınlaşma 1,3,1 və 2-ci mərhələdən ibarət oldu. X_1 matrisində $\frac{1}{2}\Delta_1=2>0$ olduğu üçün 2-ci yaxınlaşmaya keçilir.

II yaxınlaşma. Biz yuxarıda 1-ci yaxınlaşmanı ətraflı izah etdiyimiz üçün bu yaxınlaşmanı izahsız verəcəyik.

$$C_1=\begin{array}{c} \\ \\ \\ \times \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \oplus & \oplus & & + \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} \bar{0}^* & \bar{0}' & 6 & 3 \\ 8 & \bar{0}' & 4 & 8 \\ 7 & \bar{0}^* & 0' & 4 \\ 3 & 4 & 4 & \bar{0} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ + \\ + \\ + \\ \\ \end{array} \quad \overrightarrow{h=3}$$

$$C_2 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \times \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & & + \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0^* & 0' & 6 & 6 \\ 8 & 0' & 4 & 11 \\ 7 & 0^* & 0' & 7 \\ 0' & 1 & 1 & \bar{0} \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ + \\ + \\ + \\ \\ \end{array}$$

$$X_1 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \end{array}\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ \\ \end{array} \quad \overrightarrow{\theta_2 = 2}$$

$$X_2 \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \\ \end{array}$$

Göründüyü kimi, 2-ci yaxınlaşma da 1,3,1 və 2 mərhələlərindən ibarətdir. $\Delta_2=0$ olduğu üçün X_2 matrisi baxılan nəqliyyat məsələsinin optimal planıdır. Bu optimal plan üçün nəqliyyat xərclərinin cəmi minimum olub:

$$\min Z(x) = 2\cdot 1 + 5\cdot 3 + 3\cdot 2 + 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 = 30$$

vahid təşkil edir.

Cavab: $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *olduqda* $\min Z(X^*) = 30$ ◄

Mövzu üzrə praktikum

5.8.-5.41 nəqliyyat məsələlərini həll edin	
5.8	$C=\begin{pmatrix}12 & 8 & 21 & 10 & 15\\ 13 & 4 & 15 & 13 & 21\\ 25 & 16 & 26 & 17 & 20\end{pmatrix}$ $a_1=250$ $a_2=200$ $a_3=150$ $b_1=180$ $b_2=120$ $b_3=90$ $b_4=105$ $b_5=105$
5.9	$C=\begin{pmatrix}20 & 17 & 13 & 2 & 17\\ 6 & 10 & 9 & 4 & 15\\ 3 & 7 & 13 & 6 & 23\end{pmatrix}$ $a_1=220$ $a_2=400$ $a_3=280$ $b_1=160$ $b_2=180$ $b_3=170$ $b_4=200$ $b_5=190$
5.10	$C=\begin{pmatrix}9 & 15 & 35 & 34 & 7\\ 15 & 35 & 12 & 11 & 6\\ 16 & 19 & 40 & 45 & 35\end{pmatrix}$ $a_1=250$ $a_2=300$ $a_3=350$ $b_1=300$ $b_2=160$ $b_3=120$ $b_4=180$ $b_5=140$
5.11	$C=\begin{pmatrix}7 & 9 & 16 & 10 & 16\\ 13 & 12 & 18 & 12 & 20\\ 19 & 15 & 10 & 13 & 13\end{pmatrix}$ $a_1=250$ $a_2=350$ $a_3=300$ $b_1=150$ $b_2=170$ $b_3=190$ $b_4=210$ $b_5=180$
5.12	$C=\begin{pmatrix}12 & 21 & 9 & 10 & 18\\ 19 & 26 & 12 & 17 & 20\\ 13 & 15 & 11 & 13 & 21\end{pmatrix}$ $a_1=300$ $a_2=280$ $a_3=220$ $b_1=180$ $b_2=140$ $b_3=190$ $b_4=120$ $b_5=170$

5.13	$C=\begin{pmatrix}28 & 12 & 7 & 23 & 10\\ 35 & 14 & 12 & 15 & 3\\ 30 & 16 & 11 & 25 & 15\end{pmatrix}$ $a_1=280$ $a_2=300$ $a_3=220$ $b_1=170$ $b_2=120$ $b_3=190$ $b_4=140$ $b_5=180$
5.14	$C=\begin{pmatrix}5 & 13 & 18 & 17 & 8\\ 6 & 10 & 15 & 6 & 3\\ 24 & 21 & 9 & 16 & 17\end{pmatrix}$ $a_1=350$ $a_2=400$ $a_3=250$ $b_1=175$ $b_2=225$ $b_3=230$ $b_4=170$ $b_5=200$
5.15	$C=\begin{pmatrix}8 & 20 & 7 & 11 & 16\\ 15 & 22 & 11 & 12 & 19\\ 4 & 15 & 12 & 15 & 17\end{pmatrix}$ $a_1=200$ $a_2=150$ $a_3=150$ $b_1=160$ $b_2=70$ $b_3=90$ $b_4=80$ $b_5=100$
5.16	$C=\begin{pmatrix}9 & 6 & 17 & 11 & 8\\ 26 & 8 & 18 & 10 & 14\\ 6 & 7 & 14 & 10 & 6\end{pmatrix}$ $a_1=200$ $a_2=250$ $a_3=150$ $b_1=120$ $b_2=100$ $b_3=100$ $b_4=80$ $b_5=200$
5.17	$C=\begin{pmatrix}13 & 9 & 5 & 11 & 17\\ 14 & 5 & 12 & 14 & 22\\ 20 & 17 & 13 & 18 & 21\end{pmatrix}$ $a_1=400$ $a_2=250$ $a_3=350$ $b_1=200$ $b_2=170$ $b_3=230$ $b_4=225$ $b_5=175$

5.18	$C = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 10 & 18 & 9 \\ 25 & 14 & 7 & 5 & 16 \\ 6 & 13 & 14 & 18 & 14 \end{pmatrix}$ $a_1 = 160$ $a_2 = 400$ $a_3 = 240$ $b_1 = 170$ $b_2 = 190$ $b_3 = 140$ $b_4 = 180$ $b_5 = 120$
5.19	$C = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 4 & 9 & 4 \\ 17 & 10 & 9 & 11 & 5 \\ 15 & 13 & 12 & 13 & 8 \end{pmatrix}$ $a_1 = 150$ $a_2 = 250$ $a_3 = 200$ $b_1 = 180$ $b_2 = 120$ $b_3 = 90$ $b_4 = 105$ $b_5 = 105$
5.20	$C = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 21 & 14 & 17 \\ 14 & 8 & 15 & 11 & 21 \\ 19 & 16 & 26 & 12 & 20 \end{pmatrix}$ $a_1 = 200$ $a_2 = 150$ $a_3 = 150$ $b_1 = 90$ $b_2 = 100$ $b_3 = 70$ $b_4 = 130$ $b_5 = 110$
5.21	$C = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 15 & 11 & 21 \\ 12 & 25 & 24 & 14 & 17 \\ 19 & 20 & 26 & 12 & 20 \end{pmatrix}$ $a_1 = 150$ $a_2 = 150$ $a_3 = 200$ $b_1 = 90$ $b_2 = 100$ $b_3 = 70$ $b_4 = 110$ $b_5 = 130$
5.22	$C = \begin{pmatrix} 10 & 26 & 36 & 34 & 16 \\ 12 & 20 & 30 & 12 & 6 \\ 24 & 21 & 9 & 16 & 17 \end{pmatrix}$ $a_1 = 350$ $a_2 = 400$ $a_3 = 250$ $b_1 = 175$ $b_2 = 225$ $b_3 = 230$ $b_4 = 170$ $b_5 = 200$

5.23	$C=\begin{pmatrix} 6 & 11 & 10 & 14 & 18 \\ 17 & 6 & 4 & 11 & 19 \\ 12 & 8 & 19 & 10 & 13 \end{pmatrix}$ $a_1=350$ $a_2=300$ $a_3=350$ $b_1=160$ $b_2=160$ $b_3=180$ $b_4=220$ $b_5=280$
5.24	$C=\begin{pmatrix} 20 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 26 & 16 & 12 & 20 & 46 \\ 25 & 14 & 16 & 19 & 48 \end{pmatrix}$ $a_1=150$ $a_2=150$ $a_3=200$ $b_1=100$ $b_2=70$ $b_3=130$ $b_4=110$ $b_5=90$
5.25	$C=\begin{pmatrix} 6 & 13 & 14 & 18 & 14 \\ 25 & 14 & 7 & 5 & 16 \\ 11 & 4 & 10 & 18 & 9 \end{pmatrix}$ $a_1=160$ $a_2=400$ $a_3=240$ $b_1=170$ $b_2=190$ $b_3=140$ $b_4=180$ $b_5=120$
5.26	$C=\begin{pmatrix} 8 & 20 & 7 & 11 & 16 \\ 4 & 14 & 12 & 15 & 17 \\ 15 & 22 & 11 & 12 & 19 \end{pmatrix}$ $a_1=150$ $a_2=200$ $a_3=150$ $b_1=160$ $b_2=70$ $b_3=90$ $b_4=80$ $b_5=100$
5.27	$C=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 14 & 10 & 6 \\ 9 & 6 & 17 & 11 & 8 \\ 13 & 4 & 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ $a_1=150$ $a_2=250$ $a_3=200$ $b_1=120$ $b_2=180$ $b_3=100$ $b_4=100$ $b_5=100$

5.28	$C=\begin{pmatrix}2&5&8&1\\8&3&9&2\\7&4&6&3\end{pmatrix}$ $\quad a_1=9,\ a_2=16,\ a_3=5$ $b_1=11 \quad b_2=7 \quad b_3=8 \quad b_4=4$
5.29	$C=\begin{pmatrix}1&6&9&3\\3&2&2&4\\4&5&4&7\\1&4&3&9\end{pmatrix}$ $\quad a_1=200,\ a_2=400,\ a_3=600,\ a_4=200$ $b_1=200 \quad b_2=400 \quad b_3=400 \quad b_4=800$
5.30	$C=\begin{pmatrix}1&3&4&2\\1&2&4&1\\3&4&5&9\\6&3&7&6\end{pmatrix}$ $\quad a_1=200,\ a_2=200,\ a_3=300,\ a_4=300$ $b_1=200 \quad b_2=300 \quad b_3=400 \quad b_4=200$
5.31	$C=\begin{pmatrix}3&4&5&4&6\\1&5&7&1&5\\4&6&6&3&4\\2&7&4&7&2\end{pmatrix}$ $\quad a_1=5,\ a_2=10,\ a_3=15,\ a_4=10$ $b_1=10 \quad b_2=15 \quad b_3=15 \quad b_4=10 \quad b_5=10$
5.32	$C=\begin{pmatrix}1&3&4&3&1\\9&5&2&4&8\\3&4&7&4&3\\5&7&2&6&6\end{pmatrix}$ $\quad a_1=30,\ a_2=60,\ a_3=90,\ a_4=60$ $b_1=30 \quad b_2=90 \quad b_3=60 \quad b_4=90 \quad b_5=30$

5.33	$C=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 & 13 \\ 6 & 3 & 7 & 6 & 10 \\ 10 & 5 & 2 & 2 & 6 \\ 9 & 4 & 4 & 9 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad a_1 = 5,\ a_2 = 5,\ a_3 = 10,\ a_4 = 15,\ a_5 = 10$ $b_1 = 5 \quad b_2 = 5 \quad b_3 = 10 \quad b_4 = 10 \quad b_5 = 5$
5.34-5.41 məhdudiyyətlərə malik nəqliyyat məsələlərini həll edin	
5.34	$C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad a_1 = 500,\ a_2 = 1500,\ a_3 = 1000,\ a_4 = 1500$ $\quad x_{24} \le 500,\ \underline{x_{32} \ge 500}$ $b_1 = 500 \quad b_2 = 1000 \quad b_3 = 500 \quad b_4 = 1500$
5.35	$C=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad a_1 = 100,\ a_2 = 200,\ a_3 = 300,\ a_4 = 400$ $\quad x_{44} \le 200,\ \underline{x_{33} \ge 100}$ $b_1 = 300 \quad b_2 = 300 \quad b_3 = 300 \quad b_4 = 300$
5.36	$C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 9 & 3 \\ 3 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad a_1 = 1000,\ a_2 = 1500,\ a_3 = 2000,\ a_4 = 500$ $\quad x_{12} \le 500,\ \underline{x_{33} \ge 1000}$ $b_1 = 2000 \quad b_2 = 1000 \quad b_3 = 2000 \quad b_4 = 1000$

5.37	$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} a_1 = 100 \\ a_2 = 50 \\ a_3 = 100 \\ a_4 = 50 \end{matrix}$ $\begin{matrix} x_{31} \le 50 \\ \underline{x_{14} \ge 50} \end{matrix}$ $b_1 = 100 \quad b_2 = 100 \quad b_3 = 50 \quad b_4 = 100$
5.38	$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 8 \\ 2 & 9 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} a_1 = 100 \\ a_2 = 50 \\ a_3 = 100 \\ a_4 = 200 \end{matrix}$ $\begin{matrix} x_{41} \le 100 \\ \underline{x_{33} \ge 50} \end{matrix}$ $b_1 = 200 \quad b_2 = 100 \quad b_3 = 200 \quad b_4 = 50$
5.39	$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} a_1 = 50 \\ a_2 = 100 \\ a_3 = 200 \\ a_4 = 100 \end{matrix}$ $\begin{matrix} x_{41} \le 50 \\ \underline{x_{33} \ge 100} \end{matrix}$ $b_1 = 100 \quad b_2 = 100 \quad b_3 = 200 \quad b_4 = 200$
5.40	$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 10 & 6 \\ 3 & 3 & 13 & 7 \\ 3 & 4 & 11 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} a_1 = 30 \\ a_2 = 30 \\ a_3 = 60 \\ a_4 = 60 \end{matrix}$ $\begin{matrix} x_{41} \le 20 \\ \underline{x_{32} \ge 30} \end{matrix}$ $b_1 = 30 \quad b_2 = 60 \quad b_3 = 30 \quad b_4 = 90$

5.41	$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 15 & 9 \\ 5 & 6 & 11 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} a_1 = 10 \\ a_2 = 20 \\ a_3 = 10 \\ a_4 = 40 \end{matrix}$ $\begin{matrix} x_{24} \le 10 \\ \underline{x_{42} \ge 10} \end{matrix}$ $b_1 = 10 \quad b_2 = 20 \quad b_3 = 20 \quad b_4 = 40$

Mövzu üzrə testlər

1.Məcmu təkliflə məcmu tələb arasında aşağıdakı şərtlərdən hansı ödənməlidir ki, nəqliyyat modelini həll etmək mümkün olsun?

A) $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

B) $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

C) $\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$

D) $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

E) $\sum_{i=1}^{m} a_i \leq \sum_{j=1}^{n} b_j$

2. 3×3 **ölçülü açıq nəqliyyat məsələsində** $\sum_{i=1}^{3} a_i < \sum_{j=1}^{3} b_j$ **–dur. İstehlakçılar üzrə məhdudiyyətlər sistemi hansı şəkildə olacaqdır?**

A) $\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq b_2 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq b_3 \end{cases}$

B) $\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3 \end{cases}$

C) $\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq b_2 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq b_3 \end{cases}$

D) $\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = b_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = b_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = b_3 \end{cases}$

E) $\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \le b_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \le b_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \le b_3 \end{cases}$

3. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ **- halında açıq nəqliyyat modelini qapalı şəklə gətirmək üçün:**

A) Məsələyə $(m+1)$–ci şərti istehsalçı daxil edilməlidir;

B) Məsələyə $(n+1)$-ci şərti istehlakçı daxil edilməlidir;

C) Məsələyə $(m+1)$–ci şərti istehsalçı və $(n+1)$–ci şərti istehlakçı daxil edilməlidir;

D) Məsələyə $(m+1)$ –ci şərti istehsalçının və ya $(n+1)$ –ci şərti istehlakçının daxil edilməsinin heç bir fərqi yoxdur;

E) Məsələyə $(m+n-1)$ sayda şərti istehlakçı daxil edilməlidir.

4.Zamana görə nəqliyyat məsələsində:

A) Məhsulların istehsalına sərf edilən xərclərin cəmi minimumlaşdırılır;

B) Məhsulların istehsalçılardan istehlakçılara daşınması vaxtlarının daşınan məhsulların miqdarına hasillərinin cəmi minimumlaşdırılır;

C) Maksimal yükdaşınma vaxtı minimumlaşdırılır;

D) Müxtəlif növ məhsulların daşınması üçün optimal plan axtarılır;

E) Məhsulların istehlakına sərf edilən xərclərin cəmi minimumlaşdırılır.

5. Qadağalara malik nəqliyyat məsələsi klassik nəqliyyat məsələsindən nə ilə fərqlənir?

A) Məsələnin qoyuluşları arasında heç bir fərq yoxdur;

B) Qadağalara malik nəqliyyat məsələsində bəzi kommunikasiyalar üzrə daşınmalar qadağan edilir;

C) Qadağalara malik nəqliyyat məsələsində bəzi kommunikasiyalar üzrə daşınmaların hökmən yerinə yetirilməsi tələb olunur;

D) Qadağalara malik nəqliyyat məsələsində bəzi kommunikasiyalar üzrə daşınmaların həcminə aşağıdan məhdudiyyətlər qoyulur;

E) Qadağalara malik nəqliyyat məsələsində bəzi kommunikasiyalar üzrə daşınmaların həcminə yuxarıdan məhdudiyyətlər qoyulur.

6. Daşınmaların həcmində məhdudiyyətlərə malik nəqliyyat məsələsi klassik nəqliyyat məsələsindən nə ilə fərqlənir?

A) Məsələnin qoyuluşları arasında heç bir fərq yoxdur;

B) Məhdudiyyətlərə malik nəqliyyat məsələsində bəzi

kommunikasiyalar üzrə daşınmalar qadağan edilir;

C) Məhdudiyyətlərə malik nəqliyyat məsələsində bəzi kommunikasiyalar üzrə daşınma vaxtına aşağıdan məhdudiyyət qoyulur;

D) Məhdudiyyətlərə malik nəqliyyat məsələsində bəzi kommunikasiyalar üzrə daşınma vaxtına yuxarıdan məhdudiyyət qoyulur;

E) Məhdudiyyətlərə malik nəqliyyat məsələsində bəzi kommunikasiyalar üzrə daşınacaq məhsulun miqdarına yuxarıdan və ya aşağıdan məhdudiyyət qoyulur.

7.Nəqliyyat məsələsinin dayaq daşınmalar planının ranqı haqqında teoremlə bağlı aşağıdakı sualın doğru cavabını tapın:

- *Nəqliyyat məsələsinin dayaq daşınmalar planında sıfırdan böyük elementlərin sayı …….-ə bərabər olmalıdır:*

A) $m+n$;

B) $2m+n-1$;

C) $m+n-1$;

D) $m+2n-1$;

E) $m+n+1$.

8.Nəqliyyat məsələsinin potensiallar üsulu ilə həlli zamanı dayaq daşınmalar planının optimallıq əlaməti haqqında teoremlə bağlı aşağıdakı mülahizələrdən hansının doğru olduğunu təyin edin.

- *Əgər optimal daşınmalar planında* $x_{ij} > 0$ *olarsa, onda:*

A) $v_j - u_i < c_{ij}$ şərti ödənməlidir;

B) $v_j - u_i > c_{ij}$ şərti ödənməlidir;

C) $v_j - u_i = c_{ij}$ şərti ödənməlidir;

D) $v_j - u_i \le c_{ij}$ şərti ödənməlidir;

E) $v_j - u_i \ge c_{ij}$ şərti ödənməlidir.

9. Nəqliyyat modelinin potensiallar üsulu ilə həlli zamanı ilkin dayaq həllinin qurulması ilə bağlı aşağıdakı mülahizələrdən hansının doğru olduğunu seçin:

A) Şimal-qərb bucağı üsulu və ən kiçik element üsulu bir-birindən fərqlənmirlər;

B) Şimal-qərb bucağı üsulunda əvvəlcə X -daşınmalar planının X_{11} elementi təyin edilir, ən kiçik element üsulunda isə X -daşınmalar matrisinin ixtiyari elementindən başlamaq olar;

C) Şimal-qərb bucağı üsulunda əvvəlcə X -daşınmalar planının X_{11}

elementi təyin edilir, ən kiçik element üsulunda isə X daşınmalar planının elə bir elementindən başlamaq lazımdır ki, bu element C nəqliyyat xərcləri matrisinin ən kiçik elementinə uyğun gəlsin;

D) Şimal-qərb bucağı üsulunda X -daşınmalar planının ixtiyari elementindən başlamaq olar, ən kiçik element üsulunda isə, ən kiçik nəqliyyat xərcinə uyğun gələn X_{ij} elementindən başlamaq lazımdır;

E) Şimal-qərb bucağı üsulunda əvvəlcə X -daşınmalar planının X_{11} elementi təyin edilir, ən kiçik element üsulunda isə X daşınmalar planının elə bir elementindən başlamaq lazımdır ki, bu element C nəqliyyat xərcləri matrisinin ən böyük elementinə uyğun gəlsin.

10. Nəqliyyat məsələsinin cırlaşmış dayaq həllinin alınması ilə bağlı aşağıdakı təkliflərdən hansının doğru olduğunu təyin edin:

A) Cırlaşma halını aradan qaldırmaq üçün X daşınmalar matrisinin sıfır elementlərindən hər hansı birini şərti olaraq müsbət element kimi götürmək lazımdır;

B) Cırlaşma halını aradan qaldırmaq üçün X daşınmalar matrisinin elə bir sıfır elementini şərti müsbət element kimi götürmək lazımdır ki, bu sıfır elementi daşınmalar planının digər müsbət elementləri ilə qapalı dövrə təşkil etməsin;

C) Cırlaşma halını aradan qaldırmaq üçün, X daşınmalar matrisinə $(m+1)$ -ci sətir əlavə etmək lazımdır;

D) Cırlaşma halını aradan qaldırmaq üçün X daşınmalar matrisinə $(n+1)$ -ci sütun əlavə etmək lazımdır;

E) Cırlaşma halı məsələnin optimal həllinin tapılmasına təsir etmədiyi üçün onu aradan qaldırmaq zəruri deyil.

11. Fərz edək ki, qapalı nəqliyyat modeli 3×6 ölçülüdür. Əgər bu modelin ilkin daşınmalar planı cırlaşmamış plandırsa, onda həmin planda neçə elementin qiyməti 0-dan böyük olacaqdır?

A) 6;
B) 18;
C) 8;
D) 3;
E) 10.

FƏSİL 6

TAM ƏDƏDLİ XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMA MƏSƏLƏSİ

6.1. Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu. Həndəsi və iqtisadi izahı

Bəzi xətti proqramlaşdırma məsələsində iştirak edən iqtisadi obyektlər bölünməz təbiətli olurlar (binalar, qurğular, işçilər və s.). Odur ki, həmin obyektlərin əsasında tərtib edilən xətti proqramlaşdırma məsələlərində bu obyektləri əks etdirən dəyişənlərin tam ədədli qiymətlərə malik olmaları təmin edilməlidir. Belə məsələlərə ***tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələləri*** deyilir. Ümumi halda bu məsələ aşağıdakı kimi yazılır.

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max(\min) \qquad (6.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_i \qquad (i = \overline{1,m}) \qquad (6.2)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad (6.3)$$

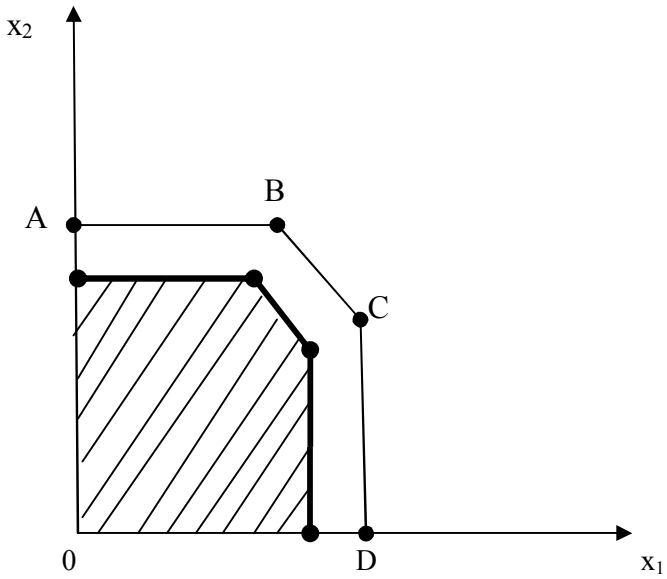
x_j - tam ədədlərdir. (6.4)

Göründüyü kimi, (6.1)-(6.4) tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsi (6.1)-(6.3) xətti proqramlaşdırma məsələsindən yalnız (6.4) tam ədədlilik şərtlərinin qoyulması ilə fərqlənir.

Qeyd edək ki, (6.4) tam ədədlilik şərti həm məsələnin bütün dəyişənlərinin üzərinə, həm də onların bir qisminin üzərinə qoyula bilər. Birinci halda məsələ tamamilə tam ədədli, ikinci halda isə qismən tam ədədli hesab edilir.

(6.1)-(6.4) tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin həndəsi mənasını araşdıraq.

Tutaq ki, (6.1)-(6.4) məsələsində n=2-dir. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi (6.2) sistemi ziddiyyətli deyilsə, onda (6.1)-(6.3) məsələsinin həllər oblastı müstəvi üzərində qabarıq çoxbucaqlı verir. Tutaq ki, bu çoxbucaqlı aşağıdakı şəkildədir:



Şəkil 6.1

Əgər bu çoxbucaqlının bütün təpə nöqtələrinin koordinatları tam ədədlərdən ibarətdirsə, onda (6.1)-(6.3) məsələsi ilə (6.1)-(6.4) məsələsinin həndəsi mənaları üst-üstə düşür.

Tutaq ki, həllər çoxbucaqlısının bəzi təpə nöqtələrinin koordinatları tam ədədlər deyil. Bu oblastın daxilində tam ədədli koordinatlara malik bütün nöqtələri ayıraq. Onda aydındır ki, (6.1)-(6.4) məsələsinin həllər çoxluğu bu avtonom nöqtələrin çoxluğundan ibarət olacaqdır və təbii ki, qabarıq olmayacaqdır. Odur ki, xüsusi kəsmələrin köməyi ilə bu tam ədədli nöqtələrin içərisindən hüdud nöqtələri birləşdirsək yeni qabarıq oblast alınacaqdır.

Təbii ki, bu yeni həllər çoxluğunun bütün təpə nöqtələri tam ədədli koordinatlara malik olacaqdır.

Beləliklə, (6.1)-(6.4) *tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin həndəsi mənası dedikdə (6.1)-(6.3) məsələsinin həllər oblastı daxilində elə bir yeni qabarıq oblastın yaradılması başa düşülür ki, bu oblastın bütün təpə nöqtələri tam ədədli koordinatlara malik olsunlar*.

Indi isə məsələnin iqtisadi mənasını araşdıraq. Fərz edək ki, müəssisə istehsalı inkişaf etdirmək üçün 50,7 min manat investisiya ayırmışdır. Bu vəsaitə A və B dəzgahları alınmalıdır. Bir ədəd A dəzgahının qiyməti 3,2 min manat, bir ədəd B dəzgahının qiyməti 2,4

min manatdır. A və B dəzgahları 100 kv.m ərazisi olan yeni sex sahəsində yerləşdirilməlidir. Bir ədəd A dəzgahının yerləşdirilməsi üçün 1,2 kv.m, bir ədəd B dəzgahının yerləşdirilməsi üçün isə 2,1 kv.m sahə tələb edilir. Bir ədəd A dəzgahı müəssisədə istehsal həcmini 80 vahid, bir ədəd B dəzgahı isə 120 vahid artırmağa imkan verir.

Müəssisə üçün elə bir inkişaf proqramı qurmaq lazımdır ki, bu proqrama görə istehsalın həcmini maksimum artırmaq mümkün olsun.

Baxılan iqtisadi məsələnin riyazi ifadəsini verək.

Tutaq ki, müəssisə x_1 ədəd A dəzgahı və x_2 ədəd B dəzgahı əldə edəcəkdir. Onda alırıq:

$$Z(x) = 80x_1 + 120x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3{,}2x_1 + 2{,}4x_2 \le 50{,}7 \\ 1{,}2x_1 + 2{,}1x_2 \le 100 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$x_1, x_2 - \text{tam ədədlərdir.}$$

Göründüyü kimi, baxılan iqtisadi məsələnin riyazi təsviri tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirildi.

6.2. Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin həll üsulları

Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsini iki yolla həll etmək olar:

1. (6.4) tam ədədlilik şərti nəzərə alınmadan (6.1)-(6.3) adi xətti proqramlaşdırma məsələsi Simpleks metodla həll edilir və optimal plan tapılır. Sonra isə bu optimal planda tam ədədli olmayan qiymətlərə malik dəyişənlərin qiymətləri tam ədədə qədər yuvarlaqlaşdırılır.

Qeyd edək ki, bu yanaşmadan yalnız o halda istifadə etmək olar ki, dəyişənin qiymətinin yuvarlaqlaşdırılan kəsr hissəsi tam hissəyə nəzərən əhəmiyyətli hissə olmasın. (Məsələn, əgər $x_1 = 438{,}1$ alınmışdırsa, $x_1 \approx 438$ qəbul etmək reallığı çox da təhrif etmir, $x_1 = 0{,}4$ üçün isə $x_1 \approx 0$ qəbul etmək reallıqdan həddən artıq çox uzaqlaşmaq deməkdir).

2. Məsələnin həllinə Simpleks metodla yanaşı alınacaq optimal həllin tam ədədli olmasını təmin edən bir sıra əlavə alqoritmlər tətbiq edilir. Bu alqoritmlərə misal olaraq Qomori alqoritmini, şaxələr və hüdüdlar metodunu və eləcə də kombinator metodları göstərmək olar.

Qomori alqoritmi ilə (6.1)-(6.4) məsələsinin həlli aşağıdakı mərhələlər üzrə aparılır.

1. (6.4) tam ədədlilik şərti nəzərə alınmadan (6.1)-(6.3) məsələsi adi qaydada Simpleks metodla həll edilərək optimal plan tapılır.

Tutaq ki, bu optimal planın alındığı Simpleks cədvəli aşağıdakı kimidir[11].

	$-t_1$	...	$-t_s$	...	$-t_n$	1
$S_1 =$	b_{11}	...	b_{1s}	...	b_{1n}	b_1
...	...	...	...	...	...	....
$S_r =$	b_{r1}	...	b_{rs}	...	b_{rn}	b_r
...	...	....	...	...	...	...
$S_m =$	b_{m1}	...	b_{ms}	...	b_{mn}	b_m
$Z(x) =$	q_1	...	q_s	...	q_n	Q

(6.1)

Şərtə görə (6.1) cədvəlində (6.1)-(6.3) məsələsinin optimal həlli tapılmışdır. Deməli, bu cədvəldə $b_i \geq 0$ $(i = \overline{1,m})$ və $q_j \geq 0$ $(j = \overline{1,n})$ şərtləri ödənir (fərz edəcəyik ki, (6.1)-(6.4) məsələsində məqsəd funksiyasının maksimum qiyməti axtarılır) və qeyri-bazis dəyişənlərin:

$$t_1 = 0,...,t_s = 0,...,t_n = 0$$

qiymətlərində X^* optimal həll tapılır. Bu optimal həllə görə

$$\max Z(X^*) = Q\text{-dür.}$$

Əgər bu optimal həlldə planda bütün dəyişənlərin qiymətləri tam ədədlərdirsə, onda bu optimal plan avtomatik olaraq (6.1)-(6.4) tam ədədli məsələnin də optimal həlli olur və məsələnin həlli başa çatır. Əks halda ikinci mərhələyə keçilir.

---

[11] Sadəlik üçün biz (6.1) Simpleks cədvəlində bazis dəyişənləri S_i $(i = \overline{1,m})$ ilə, qeyri-bazis dəyişənləri isə t_j $(j = \overline{1,n})$ ilə işarə etmişik. Təbii ki, konkret halda həm S_i dəyişənləri, həm də t_j dəyişənləri içərisində x_j və y_i dəyişənləri iştirak edəcəklər.

2. Tutaq ki, 1-ci mərhələdə tapılmış X^* optimal planda $x_r^* = b_r$ $(S_r = x_r = b_r)$ qiyməti tam ədədli deyil. Yəni (6.1) Simpleks cədvəlin r-ci sətirinin sərbəst həddi kəsr ədəddir. Onda bu sətir üçün aşagıdakı əlavə şərt tərtib edilir:

$$\beta_r - \beta_{r1}t_1 - ... - \beta_{rn}t_n \le 0 \qquad (6.5)$$

$$(\text{ və yaxud } \quad \beta_{r1}t_1 + \beta_{r2}t_2 + ... + \beta_{rn}t_n - \beta_r \ge 0)$$

Burada β_r – (6.1) Simpleks cədvəlində b_r sərbəst həddin kəsr hissəsi, $\beta_{rj}(j = \overline{1,n})$ – həmin cədvəlin r – ci sətirində yerləşən $b_{rj}(j = \overline{1,n})$ əmsalının kəsr hissəsidir.

Qeyd 1. *Ədədin tam hissəsi dedikdə bu ədəddən böyük olmayan tam ədəd başa düşülür. Müsbət ədədin tam hissəsi müsbət işarəli, mənfi ədədin tam hissəsi isə mənfi işarəlidir.*

Qeyd 2. *Ədədin kəsr hissəsi dedikdə ədədin özü ilə onun tam hissəsinin fərqi başa düşülür. Ədədin işarəsindən asılı olmayaraq onun kəsr hissəsi həmişə müsbət işarəli olur.*

(6.5) şərtinə əlavə Qomori məhdudiyyəti deyilir. İsbat edilir ki, (6.5) əlavə Qomori şərti düz kəsiyin aşağıdakı bütün xassələrini ödəyir:

1) Bu şərt xəttidir;

2) Bu şərt tam ədədli olmayan X^* optimal həllin alındığı təpə nöqtəsini kəsib atır;

3) Bu şərt tam ədədli koordinatlara malik olan heç bir təpə nöqtəsini kəsib atmır.

3. Zəruri çevirmələrdən sonra (6.5) əlavə Qomori şərti S_{m+1} – sətir kimi (6.1) Simpleks cədvəlinə daxil edilir. Nəticədə Simpleks cədvəlinin sərbəst hədlər sütununda mənfi element yaranır və dayaq planının alınması əlaməti pozulur.

Məsələ təkrarən Simpleks metodla (bu halda Qoşma Simpleks metoddan istifadə etmək daha sərfəlidir. Bu halın araşdırılması oxucunun özünə həvalə edilir) həll edilir və yeni optimal həll tapılır. Tapılmış bu yeni optimal həlldə x_r dəyişənin yeni qiyməti hökmən tam ədəd olacaqdır. Əgər bu optimal həlldə qalan dəyişənlərin qiymətləri də tam ədədlərdirsə, onda məsələnin həlli başa çatır. Əks halda ikinci mərhələyə qayıdılır. Bu proses tamamilə tam ədədli optimal həll alınana qədər davam etdirilir.

Əgər X^* optimal həlldə $x_r = b_r$ qiyməti kəsr ədəddirsə və bu zaman sonuncu Simpleks cədvəlinin r-ci sətirində heç bir kəsr ədəd yoxdursa, onda (6.5) Qomori şərtini tərtib etmək mümkün deyil və deməli, baxılan məsələnin tam ədədli optimal həlli ümumiyyətlə mövcud deyildir.

Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin Qrafik üsulu və Qomori alqoritmi ilə həllinə aid misala baxaq.

►**Məsələ 6.1.** Fərz edək ki, aşağıdakı tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsi verilmişdir.

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max \qquad (6.6)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 13 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ -3x_1 + x_2 \le 9 \end{cases} \qquad (6.7)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \qquad (6.8)$$

$$x_1, x_2 - \text{ tam ədədlərdir} \qquad (6.9)$$

Əvvəlcə bu məsələni Qrafik üsulu ilə həll edək. Bu məqsədlə (6.9)- tam ədədlilik şərtlərini nəzərə almadan (6.6)-(6.8) xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllər oblastını X_1OX_2 düzbucaqlı koordinat sistemində quraq (şəkil 6.2).

Göründüyu kimi, məsələnin həllər oblastı $OABCD$ çoxbucaqlısıdır və $Z = 0$ düz xətti oblastın C təpə nöqtəsində bu oblasta dayaq olur. Deməli, (6.6)-(6.8) xətti proqramlaşdırma məsələsinin optimal həlli C təpə nöqtəsində alınır və

$$X^*_{opt} = (x_1 = 9{,}5, \ \ x_2 = 3{,}5) \text{ -dir}$$

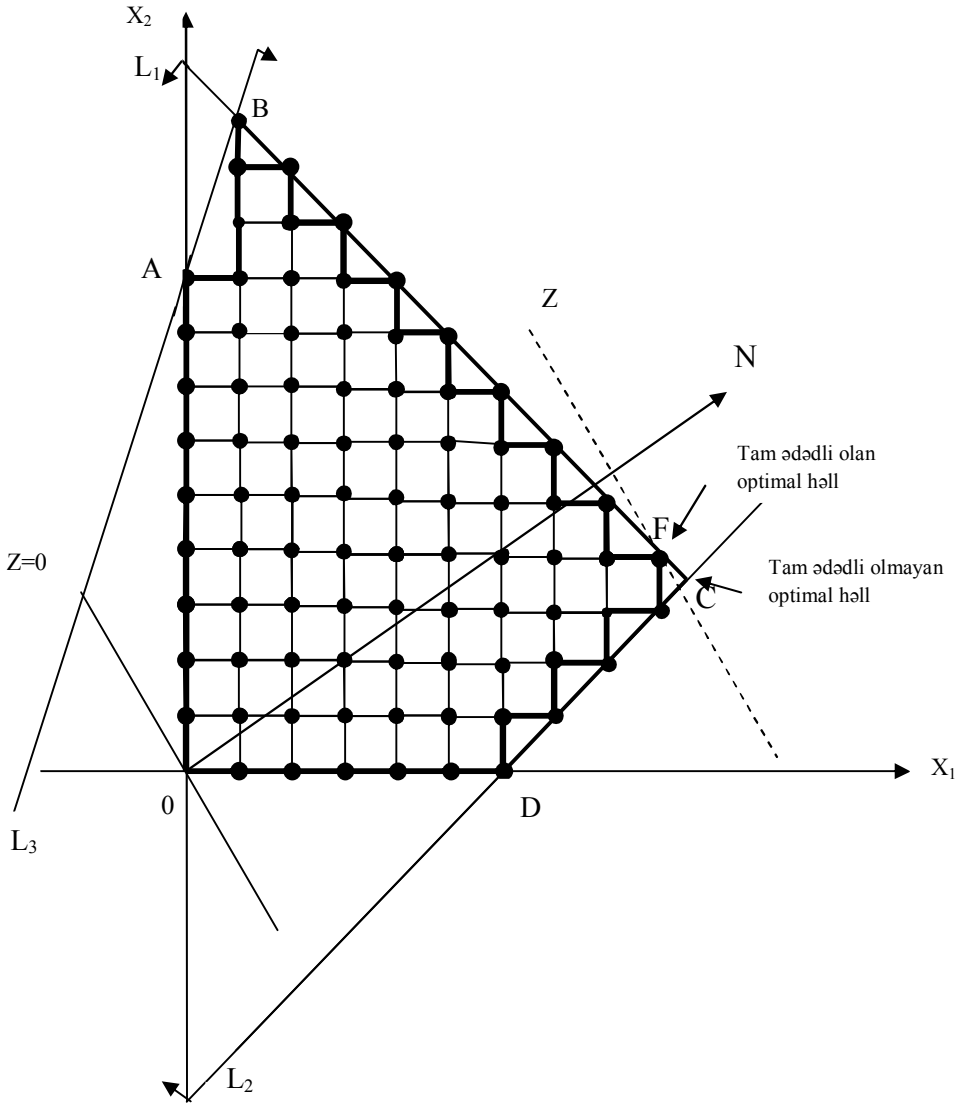
Bu optimal həll üzrə

$$\max Z(X^*) = 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 9{,}5 + 2 \cdot 3{,}5 = 28{,}5 + 7 = 35{,}5$$

alınır.

Tapılmış optimal həldə hər iki dəyişənin qiyməti kəsr ədədlərdir. Odur ki, bu həll (6.9) tam ədədlilik şərtini ödəmədiyi üçün (6.6)-(6.9) tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin optimal həlli deyildir. Daha doğrusu, C təpə nöqtəsi (6.6)-(6.9) tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin optimal həllinin alındığı təpə nöqtəsi deyildir. (6.6)-(6.9) məsələsinin optimal həllini təyin edəcək nöqtəni tapmaq üçün $OABCD$ çoxbucaqlısı əsasında bütün təpə nöqtələri tam

ədədli koordinatlara malik olan və bu oblastın bütün tam ədədli koordinatlara malik nöqtələrini özünə daxil edən yeni oblast quraq. Şəkildən göründüyü kimi $Z = 0$ səviyyə xətti F təpə nöqtəsində bu oblasta dayaq olacaq, sonra isə tam ədədli koordinatlara malik nöqtələr oblastını tərk edəcəkdir. Deməli,



Şəkil 6.2.

(6.6)-(6.9) məsələsinin optimal həlli məhz F təpə nöqtəsində alınır. Bu nöqtənin koordinatları $F(9,4)$ olduğu üçün alırıq:

$$X^*_{opt} = (x_1 = 9,\ x_2 = 4)$$

$$\max Z(X^*) = 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 9 + 2 \cdot 4 = 27 + 8 = 35$$

İndi isə (6.6)-(6.9) tam ədədli xətti poqramlaşdırma məsələsini Qomori alqoritmi ilə həll edək.

1-ci mərhələ: (6.9) tam ədədlilik şərtləri nəzərə alınmadan (6.6)-(6.8) xətti poqramlaşdırma məsələsini Simpleks metodla həll edək:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + y_1 = 13 \\ x_1 - x_2 + y_2 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + y_3 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - x_2 + 13 \geq 0 \\ y_2 = -x_1 + x_2 + 6 \geq 0 \\ y_3 = 3x_1 - x_2 + 9 \geq 0 \end{cases}$$

Simpleks cədvəli tərtib edək:

	$-x_1$	$-x_2$	1
$y_1 =$	1	1	13
$y_2 =$	1	-1	6
$y_3 =$	-3	1	9
$Z(x) =$	-3	-2	0

(6.2)

(6.2) Simpleks cədvəlində sərbəst hədlərin heç biri mənfi deyil. Deməli, məsələnin dayaq həlli tapılmışdır və $x_1 = 0, x_2 = 0$ olduqda

$$X_{day} = (x_1 = 0,\ x_2 = 0); \qquad Z(X_{day}) = 0$$

alırıq.

Məsələnin optimal həllini tapmaq üçün (6.2) Simpleks cədvəlinin $Z(x)$ sətirindəki mənfi elementləri yox edək.

	$-x_1$	$-x_2$	1
$y_1 =$	1	1	13
$y_2 =$	$\langle 1 \rangle$	-1	6
$y_3 =$	-3	1	9
$Z(x) =$	-3	-2	0

	$-y_2$	$-x_2$	1
$y_1 =$	-1	$\langle 2 \rangle$	7
$x_1 =$	1	-1	6
$y_3 =$	3	-2	27
$Z(x) =$	3	-5	18

	$-y_2$	$-y_1$	1
$x_2 =$	-1	1	7
$x_1 =$	1	1	19
$y_3 =$	4	2	68
$Z(x) =$	1	5	71

: (2)

	$-y_2$	$-y_1$	1
$x_2 =$	$-1/2$	$1/2$	$7/2$
$x_1 =$	$1/2$	$1/2$	$19/2$
$y_3 =$	$4/2$	$2/2$	$68/2$
$Z(x) =$	$1/2$	$5/2$	$71/2$

Sonuncu Simpleks cədvəlində $Z-$ sətir əmsallarından heç biri mənfi deyil. Odur ki, cədvəlin yuxarısında yerləşən qeyri-bazis dəyişənlərin sıfır qiymətlərində, yəni $y_1 = 0,\ y_2 = 0$ olduqda (6.6)-(6.8) məsələsinin aşağıdakı optimal həlli alınır:

$$X^*_{opt} = (x_1 = 19/2,\ x_2 = 7/2)$$

$$Z(X^*) = 71/2$$

Aldığımız optimal həlldə dəyişənlərin qiymətləri kəsr ədədlər olduğu üçün bu həll optimal həll ola bilməz. Bu optimal həll həndəsi baxımdan (6.6)-(6.8) xətti proqramlaşdırma məsələsinin $OABCD$ həllər çoxbucaqlısının C təpə nöqtəsini verir. Odur ki, 2-ci mərhələyə keçək.

2-ci mərhələ: Sonuncu Simpleks cədvəldə $x_2 = 3\,1/2$ olduğu üçün bu dəyişənin yerləşdiyi 1-ci sətir üçün əlavə Qomori şərti tərtib edək:

$$1/2 - 1/2\, y_2 - 1/2\, y_1 \le 0$$

3-cü mərhələ: Əlavə Qomori şərtinə $y_4 \ge 0$ əlavə dəyişən daxil edib tənliyə çevirək.

$$1/2 - 1/2\, y_2 - 1/2\, y_1 + y_4 = 0$$

$$y_4 = 1/2\, y_2 + 1/2\, y_1 - 1/2 \ge 0$$

Bu şərti 4-cü sətir kimi sonuncu Simpleks cədvələ daxil edək:

	$-y_2$	$-y_1$	1
$x_2 =$	$-1/2$	$1/2$	$7/2$
$x_1 =$	$1/2$	$1/2$	$19/2$
$y_3 =$	$4/2$	$2/2$	$68/2$
$y_4 =$	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$
$Z(x) =$	$1/2$	$5/2$	$71/2$

Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda mənfi element yarandığı üçün dayaq həllin tapılması əlaməti pozulmuşdur. Odur ki, məsələni təkrarən Simpleks metodla həll etmək lazımdır.

4-cü mərhələ: Sonuncu Simpleks cədvəlin $Z(x)$ sətirində heç bir mənfi element olmadığı üçün sərbəst hədlər sütunundakı mənfi elementi yox etmək üçün Qoşma Simpleks metodunu tətbiq edək.

$$\max\left\{\tfrac{1}{2}:(-\tfrac{1}{2});\ \tfrac{5}{2}:(-\tfrac{1}{2})\right\}=\left\{\tfrac{1}{2}:\ -(\tfrac{1}{2})\right\}$$

olduğu üçün əsas element olaraq $a_{41}=-\tfrac{1}{2}$ – i götürmək lazımdır.

	$-y_2$	$-y_1$	1
$x_2=$	$-\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{7}{2}$
$x_1=$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{19}{2}$
$y_3=$	$\tfrac{4}{2}$	$\tfrac{2}{2}$	$\tfrac{68}{2}$
$y_4=$	$\langle-\tfrac{1}{2}\rangle$	$-\tfrac{1}{2}$	$-\tfrac{1}{2}$
$Z(x)=$	$\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{5}{2}$	$\tfrac{71}{2}$

	$-y_4$	$-y_1$	1	
$x_2=$	$\tfrac{1}{2}$		$-\tfrac{8}{4}$	
$x_1=$	$-\tfrac{1}{2}$		$-\tfrac{18}{4}$	
$y_3=$	$-\tfrac{4}{2}$		$-\tfrac{64}{4}$	: (-1/2)
$y_2=$	1	$-\tfrac{1}{2}$	$-\tfrac{1}{2}$	
$Z(x)=$	$-\tfrac{1}{2}$	$-\tfrac{4}{4}$	$-\tfrac{35}{2}$	

	$-y_4$	$-y_1$	1
$x_2=$			4
$x_1=$			9
$y_3=$			32
$y_2=$			1
$Z(x)=$	1	2	35

Sonuncu Simpleks cədvəldə həm sərbəst hədlər sütununda, həm də $Z(x)$ sətirində heç bir mənfi element yoxdur. Odur ki, $y_1=0,\ y_4=0$ olduqda yeni optimal plan alırıq:

$$X^*_{opt} = (x_1 = 9,\ x_2 = 4)$$
$$\max Z(X^*) = 35$$

Yoxlama

$$Z(X^*) = 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 9 + 2 \cdot 4 = 27 + 8 = 35$$

Alınmış yeni optimal planda dəyişənlərin qiymətləri tam ədədlər olduğu üçün bu optimal həll (6.6)-(6.8) tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin optimal həllidir.

Qeyd: *Biz yuxarıda Qomori şərtini* $x_2 = 7/2$ *qiyməti üçün tərtib etdik. Bu halda Qomori şərtinin* $x_1 = 19/2$ *qiyməti üçün tərtib edilməsi məsələnin həll prosesində heç bir dəyişiklik yaratmır, yəni 1 addıma eyni optimal həll alınır. Odur ki, bu tip məsələlərin həllində əlavə Qomori şərtinin ilk növbədə hansı dəyişən üçün tərtib edilməsinin üstünlüyə malik olub-olmadığını göstərmək praktik cəhətdən çətindir. Qeyd edək ki, xüsusi ədəbiyyatlarda da bu məsələyə vahid yanaşma yoxdur. Belə ki, bəzi mənbələr əlavə Qomori şərtinin ən böyük tam hissəyə malik dəyişən üçün [18, 21], digərləri ən böyük kəsr hissəyə malik dəyişən üçün [24, 26, 27] tərtib edilməli olduğunu qeyd edirlər. Bəziləri isə bunu emprik hesab edib seçimi ixtiyari qəbul edirlər [14, 33]. Odur ki, biz də bu məsələyə toxunmadan belə hesab edirik ki, əlavə Qomori şərtinin tərtib edilməsinə istənilən tam olmayan qiymətə malik dəyişəndən başlamaq olar.*

Cavab: $X^*_{opt} = (x_1 = 9,\ x_2 = 4)$ *olduqda* $\max Z(X^*) = 35$ *olur*.◄

Mövzu üzrə praktikum

6.2-6.6 tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələlərini Qrafik üsulu ilə həll edin;
6.7-6.16 tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələlərini Simpleks üsulu ilə həll edin.

6.2	$Z(x) = 2x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10 \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$ x_j - tam ədədlərdir
6.3	$Z(x) = 2x_1 - x_2 + 8 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + 3x_2 \ge 10 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$ x_j - tam ədədlərdir
6.4	$Z(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \ge 12 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ 3x_1 + 6x_2 \le 24 \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$ x_j - tam ədədlərdir
6.5	$Z(x) = 6x_1 + 4x_2 \to \min$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \le 4 \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$ x_j - tam ədədlərdir

6.6	$Z(x) = 2x_1 + 5x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 5 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10 \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$ x_j - tam ədədlərdir
6.7	$Z(x) = x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 3x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 \le 10 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 \le 14 \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ \ \ x_4 \ge 0$ x_j - tam ədədlərdir
6.8	$Z(x) = 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 23 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \le 17 \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ \ \ x_4 \ge 0$ x_j - tam ədədlərdir
6.9	$Z(x) = -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 7x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \le 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \le 7 \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ \ \ x_4 \ge 0$ x_j - tam ədədlərdir
6.10	$Z(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 17 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ \ \ x_4 \ge 0$ x_j - tam ədədlərdir
6.11	$Z(x) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ \ \ x_4 \ge 0$ x_j - tam ədədlərdir

6.12	$Z(x) = 3x_1 - x_2 - 5x_3 \to \max$ $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 \le 4 \\ x_1 \qquad - 3x_3 \le 3 \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$ x_j - tam ədədlərdir
6.13	$Z(x) = 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ \qquad - 2x_2 + 3x_3 \le 4 \\ \qquad - 3x_2 + 4x_3 \le 7 \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$ x_j - tam ədədlərdir
6.14	$Z(x) = 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \ge 3 \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$ x_j - tam ədədlərdir
6.15	$Z(x) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 \le 5 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$ x_j - tam ədədlərdir
6.16	$Z(x) = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + \qquad x_4 = 10 \\ x_1 + 4x_2 + \qquad\quad x_5 = 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\quad = 13 \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0$ x_j - tam ədədlərdir

Mövzu üzrə testlər

1.Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşuna aid aşağıdakı mülahizələrdən doğru olanını seçin:

- *Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsində:*

A) Məqsəd funksiyasının əmsalları tam ədədlər olmalıdır;
B) Məhdudiyyət şərtlərinin əmsalları tam ədədlər olmalıdır;
C) Məchulların qiymətləri tam ədədlər olmalıdır;
D) Məhdudiyyət şərtlərinin sərbəst hədləri tam ədədlər olmalıdır;
E) Məsələnin bütün sabit kəmiyyətləri tam ədədlər olmalıdır.

2.Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin iqtisadi mənası ilə bağlı aşağıdakı mülahizələrdən doğru olanını seçin:

A) Əgər iqtisadi obyektdə istifadə edilən ehtiyatların həcmləri tam ədədlərdirsə, onda qoyulmuş iqtisadi məsələ tam ədədli proqramlaşdırma məsələsinə gətirilir;
B) Əgər iqtisadi obyektdə məhsul vahidinə düşən ehtiyatların sərfi normaları tam ədədlərdirsə, onda qoyulmuş iqtisadi məsələnin həlli tam ədədli proqramlaşdırma məsələsinə gətirilir;
C) Əgər iqtisadi obyekti xarakterizə edən dəyişənlərin qiymətləri yalnız tam ədədlər olmalıdırsa, onda qoyulmuş iqtisadi məsələnin həlli tam ədədli proqramlaşdırma məsələsinə gətirilir;
D) Əgər iqtisadi obyektdə istifadə edilən ehtiyatların həcmlərindən heç olmazsa biri tam ədəddirsə, onda qoyulmuş iqtisadi məsələnin həlli tam ədədli proqramlaşdırma məsələsinə gətirilir;
E) Əgər iqtisadi obyektdə məhsul vahidinə düşən ehtiyatların sərfi normalarından heç olmazsa biri tam ədəddirsə, onda qoyulmuş iqtisadi məsələnin həlli tam ədədli proqramlaşdırma məsələsinə gətirilir.

3.Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin həll alqoritmi ilə bağlı aşağıdakı cavablardan hansının doğru olduğunu seçin:

A) Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks üsulla həll etmək həmişə mümkündür;
B) Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin Simpleks üsulla həll etmək ümumiyyətlə mümkün deyil;
C) Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin Simpleks üsulla həll etmək olar, lakin alınan optimal həll tam ədədli olmazsa, onda əlavə Qomori şərtini tərtib edib məsələni təkrar həll etmək lazımdır;
D) Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsini yalnız potensiallar metodu ilə həll etmək olar, lakin optimal həll tam ədədli olmazsa, onda Qomori şərti tərtib edib, məsələni təkrar həll etmək lazımdır;
E) Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsini yalnız Qoşma-Simpleks

metodla həll etmək lazımdır.

4.Qomori alqoritmi ilə tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllinə aid aşağıdakı mülahizələrdən doğru olanını seçin:

- Əgər tam ədədli olmayan optimal plan tapılmış Simpleks cədvəldə tam ədəd olmayan sərbəst həddin yerləşdiyi sətirdə heç bir kəsr ədəd yoxdursa, onda:

A) Məsələnin məqsəd funksiyası aşağıdan qeyri-məhduddur;
B) Məsələnin tam ədədli optimal həlli yoxdur;
C) Məsələnin məqsəd funksiyası yuxarıdan qeyri-məhduddur;
D) Məsələnin tam ədədli optimal həlli var və Simpleks cədvələ əlavə Qomori şərti daxil edilməlidir;
E) Məsələnin tam ədədli optimal həlli var, lakin onu tapmaq mümkün deyil.

5.Fərz edək ki, tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsi tam ədədlilik şərti nəzərə alınmadan Simpleks üsulla həll edilərək optimal plan tapılmışdır. Sonuncu Simpleks cədvəlinin x_3 dəyişəninə uyğun gələn sətiri aşağıdakı şəkildədir:

$x_3=$	$\frac{7}{10}$	$-\frac{3}{10}$	2	$\frac{23}{10}$	$\frac{85}{10}$

x_3 dəyişəni üçün əlavə Qomori şərti tərtib edin:

A) $\frac{7}{10}t_1+\frac{7}{10}t_2+\frac{3}{10}t_4-\frac{5}{10}\geq 0$

B) $\frac{3}{10}t_1+\frac{3}{10}t_2+\frac{1}{10}t_3+\frac{7}{10}t_4+\frac{5}{10}\geq 0$

C) $\frac{3}{10}t_1+\frac{7}{10}t_2+\frac{3}{10}t_3-\frac{5}{10}\geq 0$

D) $\frac{7}{10}t_1-\frac{3}{10}t_2+\frac{3}{10}t_3-\frac{5}{10}\geq 0$

E) $\frac{3}{10}t_1-\frac{3}{10}t_2+\frac{3}{10}t_4-\frac{5}{10}\geq 0$

6.**Fərz edək ki, tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsi tam ədədlilik şərti nəzərə alınmadan Simpleks üsulla həll edilərək optimal plan tapılmışdır. Sonuncu Simpleks cədvəlinin x_1 dəyişəninə uyğun gələn sətiri aşağıdakı şəkildədir:**

x_1=	3	-2	5	0	4,8

x_1 dəyişəni üçün əlavə Qomori şərti tərtib edin:

A) $0{,}3t_1 + 0{,}2t_2 + 0{,}5t_3 - 0{,}8 \geq 0$

B) $0{,}7t_1 + 0{,}8t_2 + 0{,}5t_3 - 0{,}8t_4 \geq 0$

C) $0{,}3t_1 + 0{,}2t_2 + 0{,}5t_3 + 0{,}8 \geq 0$

D) $0{,}7t_1 + 0{,}8t_2 + 0{,}5t_4 - 0{,}8 \geq 0$

E) Əlavə şərt tərtib etmək mümkün deyil

7.Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin Qomori üsulu ilə həllinə aid aşağıdakı mülahizələrdən hansının doğru olduğunu seçin.

- Qomori şərti o zaman düzgün kəsmə hesab edilir ki o:

A) Yalnız xətti olsun;

B) Yalnız tapılmış tam ədədli olmayan optimal planı kəsib atsın;

C) Yalnız heç bir tam ədədli planı kəsməsin;

D) Həm xətti olsun, həm də tam ədədli olmayan optimal planı kəsib atsın;

E) Həm xətti olsun, həm tam ədədli olmayan optimal planı kəsib atsın, həm də heç bir tam ədədli planı kəsməsin.

FƏSİL 7
KƏSR-XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMA MƏSƏLƏSİ

7.1. Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu

Bəzi xətti proqramlaşdırma məsələlərində məqsəd funksiyası iki xətti funksiyanın nisbəti şəklində qurulur. Belə məsələlərə *kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələləri* deyilir. Bu məsələ ümumi halda aşağıdakı kimi yazılır:

$$Z(x)=\frac{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}=\frac{Z_1}{Z_2}\to \max(\min) \qquad (7.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le a_i \qquad (i=\overline{1,m}) \qquad (7,2)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j=\overline{1,n}) \qquad (7.3)$$

(7.1)-(7.3) kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşunda fərz edilir ki, $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ne 0$ -dır və (7.3) sistemi ilə müəyyən edilmiş oblastda $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j > 0$ şərtinin ödənməsi təmin edilir.

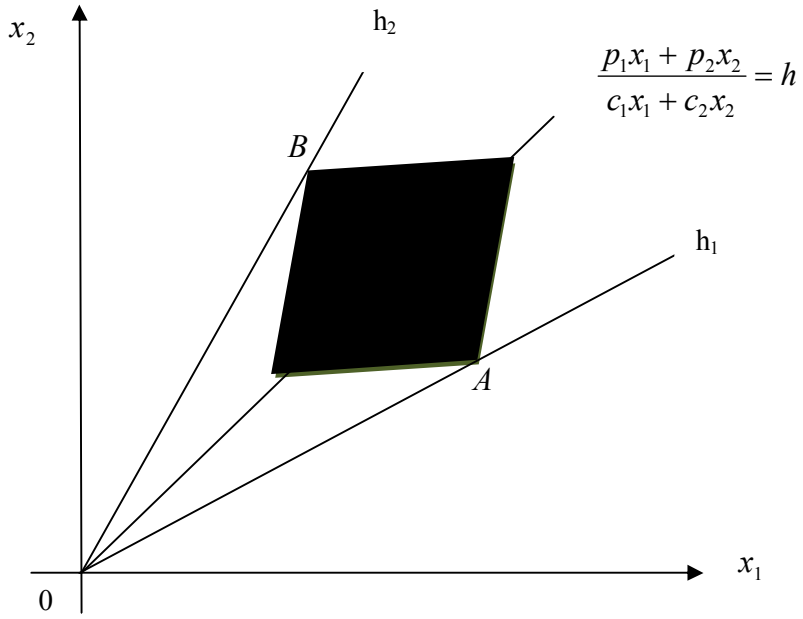
Məsələnin həndəsi mənası aşağıdakı kimidir.:

Fərz edək ki, (7.1)-(7.3) məsələsində dəyişənlərin sayı 2-yə bərabərdir ($n=2$). Onda bu məsələnin həllər oblastı müstəvi üzərində qabarıq çoxbucaqlı verəcəkdir. Tutaq ki, bu həllər çoxbucaqlısı şəkil 7.1-dəki kimi alınmışdır.

$Z(x)=\dfrac{p_1x_1+p_2x_2}{c_1x_1+c_2x_2}$ ifadəsini elə bir sabit h kəmiyyətinə bərabər edək ki, bu ifadənin qrafiki koordinat başlanğıcından keçən və həllər oblastı ilə ortaq nöqtələrə malik olan düz xətt versin.

Əgər bu düz xətti koordinat başlanğıcı ətrafında fırlatsaq həmin düz xətt həllər oblastının A və B təpə nöqtələrində bu oblasta dayaq olacaqdır. Deməli, *(7.1)-(7.3) məsələsinin həndəsi mənası dedikdə məsələnin həllər oblastının elə bir təpə nöqtəsinin tapılması başa*

düşülür ki, bu nöqtənin koordinatları kəsr-xətti məqsəd funksiyasına maksimum və ya minimum qiymət versin.



Şəkil 7.1

İndi isə kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin iqtisadi mənasına aid aşağıdakı sadə misala baxaq.

Tutaq ki, müəssisə standart şərtlər daxilində (yəni fərz edilir ki, ehtiyatların məhdud həcmləri və məhsul vahidinə ehtiyat sərfi normaları məlumdur) A, B, C məhsulları istehsal edir. A məhsulunun bir vahidinin maya dəyəri 50 manat, B məhsulunun bir vahidinin maya dəyəri 80 manat, C məhsulunun bir vahidinin maya dəyəri 100 manatdır.

Müəssisə üçün elə bir istehsal proqramı tərtib etmək lazımdır ki, bu proqrama görə müəssisədə məhsul vahidinin maya dəyəri minimum olsun. Qoyulmuş bu məqsədin riyazi ifadəsini tərtib edək.

Tutaq ki, müəssisə x_1 ədəd A məhsulu, x_2 ədəd B məhsulu, x_3 ədəd C məhsulu istehsal etməlidir.

Onda bu məhsulların məcmu maya dəyəri:

$$50x_1 + 80x_2 + 100x_3$$

manat təşkil edəcəkdir. Müəssisə üzrə məhsul vahidinin maya dəyəri isə

$$\frac{50x_1 + 80x_2 + 100x_3}{x_1 + x_2 + x_3}$$

təşkil edəcəkdir. Məqsədimizə görə bu kəmiyyət minimum olmalıdır, yəni:

$$Z(x) = \frac{50x_1 + 80x_2 + 100x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \to \min$$

Göründüyü kimi, alınmış məqsəd funksiyası kəsr-xətti funksiyadır. Deməli, bu məqsəd funksiyası əsasında tərtib edilmiş xətti proqramlaşdırma məsələsi də kəsr-xətti məsələ olacaqdır.

7.2. Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin həll üsulu

Xüsusi əvəzetmələrin köməyi ilə (7.1)-(7.3) kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsini həmişə xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirmək olur. Bu məqsədlə aşağıdakı əvəzetmələri qəbul edək:

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right\}^{-1} = y_0 \qquad (7.4)$$

$$y_0 \cdot x_j = y_j \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad (7.5)$$

Onda (7.1)-(7.3) məsələsi aşağıdakı adi xətti proqramlaşdırma məsələsinə gələcəkdir:

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j y_j \to \max(\min) \qquad (7.6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - a_i y_0 \le 0 \qquad (i = \overline{1,m}) \qquad (7.7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j y_j = 1 \qquad (7.8)$$

$$y_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,n}), \qquad y_0 > 0 \quad (7.9)$$

Qeyd: *Bir çox ədəbiyyatlarda* $y_0 \ge 0$ *yazılsa da, biz məsələnin belə qoyuluşu ilə razı deyilik. Çünki* y_0 *yalnız o halda 0-a bərabər ola*

bilər ki, $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = 0$ *olsun. Bu isə (7.1)-(7.3) kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşuna ziddir.*

(7.1)-(7.3) kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsi aşağıdakı alqoritm üzrə həll edilir.

• *(7.4)-(7.5) əvəzetmələrin köməyi ilə (7.1)-(7.3) kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsi (7.6)-(7.9) xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirilir;*

• *Alınmış* $[(m+1);(n+1)]$ *ölçülü yeni məsələ Simpleks metodla həll edilərək optimal həll tapılır, yəni* y_0 *və* $y_j\,(j=\overline{1,n})$ *dəyişənləri üçün optimal qiymətlər tapılır;*

• *(7.4)-(7.5) əvəzetmələrindən istifadə etməklə (7.6)-(7.9) məsələsinin optimal həllindən (7.1)-(7.3) məsələsinin dəyişənlərinin optimal qiymətləri, yəni* $x_j\,(j=\overline{1,n})$ *dəyişənlərinin optimal qiymətləri hesablanır və (7.1)-(7.3) kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin optimal həlli tapılır.*

İndi isə kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu və həllinə aid praktik misala baxaq.

►**Məsələ 7.1.** Müəssisə 3 növ istehsal ehtiyatından istifadə etməklə A, B və C məhsulları istehsal edir. Istehsal ehtiyatlarının həcmi məhduddur və aşağıdakı qədərdir:

1-ci istehsal ehtiyatı – 120 vahid

2-ci istehsal ehtiyatı – 96 vahid

3-cü istehsal ehtiyatı – 180 vahid

Məhsul vahidlərinə ehtiyat sərfi normaları aşağıdakı texnoloji matrislə verilmişdir:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Burada a_{ij} - j nömrəli məhsul vahidi istehsalına i-ci istehsal ehtiyatının sərfi normasıdır.

Məhsulların satış bazarının öyrənilməsi göstərir ki, 1 ədəd A məhsulunun satışından müəssisə 90 manat, 1 ədəd B məhsulunun satışından 100 manat, 1 ədəd C məhsulunun satışından isə 160 manat

mənfəət əldə edəcəkdir. Müəssisə üçün elə bir istehsal proqramı tərtib etmək lazımdır ki, bu proqrama görə müəssisədə məhsul vahidinin verəcəyi mənfəət maksimum olsun.

Həlli: Baxılan iqtisadi məsələnin riyazi təsvirini verək. Tutaq ki, müəssisə x_1 vahid A məhsulu, x_2 vahid B məhsulu, x_3 vahid C məhsulu istehsal etməlidir. Daha doğrusu, müəssisənin istehsal proqramı $X=(x_1,x_2,x_3)$ 3 ölçülü vektorla xarakterizə ediləcəkdir. Onda baxılan iqtisadi məsələnin riyazi təsviri aşağıdakı kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətiriləcəkdir:

$$Z(x)=\frac{90x_1+100x_2+160x_3}{x_1+x_2+x_3}\to \max$$

$$\begin{cases} 6x_1+5x_2+4x_3\le 120 \\ 3x_1+2x_2+4x_3\le 96 \\ 5x_1+3x_2+3x_3\le 180 \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\qquad x_2\ge 0,\qquad x_3\ge 0$$

Alınmış kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsini həll edək.

• Əvvəlcə kəsr-xətti məsələni xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirək. Bu məqsədlə

$$\frac{1}{x_1+x_2+x_3}=y_0$$

əvəzetməsi qəbul edək və yeni dəyişənlərə keçək:

$$\begin{cases} y_1=y_0x_1 \\ y_2=y_0x_2 \\ y_3=y_0x_3 \end{cases}$$

Onda yuxarıda verdiyimiz alqoritmə görə bu kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsi aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətiriləcəkdir:

$$F(y)=90y_1+100y_2+160y_3\to \max$$

$$\begin{cases} 6y_1+5y_2+4y_3-120y_0\le 0 \\ 3y_1+2y_2+4y_3-96y_0\le 0 \\ 5y_1+3y_2+3y_3-180y_0\le 0 \\ y_1+y_2+y_3=1 \end{cases}$$

$$y_0>0,\qquad y_1\ge 0,\qquad y_2\ge 0,\qquad y_3\ge 0$$

• Alınmış xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks metodla həll edək:

1-ci mərhələ: Simpleks cədvəli tərtib edək:

$$\begin{cases} 6y_1 + 5y_2 + 4y_3 - 120y_0 + t_1 = 0 \\ 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 - 96y_0 + t_2 = 0 \\ 5y_1 + 3y_2 + 3y_3 - 180y_0 + t_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 + 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = -6y_1 - 5y_2 - 4y_3 + 120y_0 \geq 0 \\ t_2 = -3y_1 - 2y_2 - 4y_3 + 96y_0 \geq 0 \\ t_3 = -5y_1 - 3y_2 - 3y_3 + 180y_0 \geq 0 \\ 0 = -y_1 - y_2 - y_3 + 1 \end{cases}$$

	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	$-y_0$	1
$t_1 =$	6	5	4	-120	0
$t_2 =$	3	2	4	-96	0
$t_3 =$	5	3	3	-180	0
$0 =$	$\langle 1 \rangle$	1	1	0	1
$F(y) =$	-9	-10	-16	0	0

Qeyd: *Biz məqsəd funksiyasını* $Z(x) = 10(9x_1 + 10x_2 + 16x_3)$ *kimi ifadə edərək Simpleks cədvəlinə daxil etmişik.*

	0	$-y_2$	$-y_3$	$-y_0$	1
$t_1 =$	-6	-1	-2	-120	-6
$t_2 =$	-3	-1	1	-96	-3
$t_3 =$	-5	-2	-2	-180	-5
$y_1 =$	1	1	1	0	1
$F(y) =$	9	-1	-7	0	9

	$-y_2$	$-y_3$	$-y_0$	1
$t_1 =$	-1	-2	-120	-6
$t_2 =$	-1	1	-96	-3
$t_3 =$	-2	-2	-180	-5
$y_1 =$	1	1	0	1
$F(y) =$	-1	-7	0	9

Sonuncu cədvəldə t_1, t_2, t_3, y_1 dəyişənləri vahid bazis əmələ gətirir. Odur ki, bu dəyişənlər bazis dəyişənləridir.

2-ci mərhələ: Məsələnin dayaq həllini tapaq. Əvvəlcə sərbəst hədlər sütunundakı (-6) elementini yox edək:

$$\min\left\{\frac{-6}{-1};\frac{-3}{-1};\frac{-5}{-2};\frac{1}{1}\right\}=\frac{1}{1}$$

olduğu üçün əsas element olaraq $a_{41}=1$ elementini götürək:

	$-y_2$	$-y_3$	$-y_0$	1
$t_1 =$	-1	-2	-120	-6
$t_2 =$	-1	1	-96	-3
$t_3 =$	-2	-2	-180	-5
$y_1 =$	$\langle 1\rangle$	1	0	1
$F(y) =$	-1	-7	0	9

	$-y_1$	$-y_3$	$-y_0$	1
$t_1 =$	1	-1	-120	-5
$t_2 =$	1	2	-96	-2
$t_3 =$	2	0	-180	-3
$y_2 =$	1	1	0	1
$F(y) =$	1	-6	0	10

Sərbəst hədlər sütunundakı (-5) elementini yox edək:

$$\min\left\{\frac{-5}{-1};\frac{1}{1}\right\}=\frac{1}{1}$$

olduğu üçün əsas element olaraq $a_{42}=1$ elementini götürək:

	$-y_1$	$-y_3$	$-y_0$	1
$t_1=$	1	-1	-120	-5
$t_2=$	1	2	-96	-2
$t_3=$	2	0	-180	-3
$y_2=$	1	$\langle 1\rangle$	0	1
$F(y)=$	1	-6	0	10

	$-y_1$	$-y_2$	$-y_0$	1
$t_1=$	2	1	-120	-4
$t_2=$	-1	-2	-96	-4
$t_3=$	2	0	-180	-3
$y_3=$	1	1	0	1
$F(y)=$	7	6	0	16

$F(y)$ sətirində heç bir mənfi element yoxdur. Odur ki, mənfi sərbəst hədləri yox etmək üçün Qoşma-Simpleks metodundan istifadə edək. Əvvəlcə $b_1=-4$ sərbəst həddi yox edək. Əsas element olaraq $a_{13}=-120$ elementini götürək:

	$-y_1$	$-y_2$	$-y_0$	1
$t_1=$	2	1	$\langle -120\rangle$	-4
$t_2=$	-1	-2	-96	-4
$t_3=$	2	0	-180	-3
$y_3=$	1	1	0	1
$F(y)=$	7	6	0	16

	$-y_1$	$-y_2$	$-t_1$	1	
$y_0 =$	2	1	1	-4	
$t_2 =$	312	336	96	96	
$t_3 =$	120	180	180	-360	: (-120)
$y_3 =$	-120	-120	0	-120	
$F(y) =$	-840	-720	0	-1920	

	$-y_1$	$-y_2$	$-t_1$	1
$y_0 =$	$-2/120$	$-1/120$	$-1/120$	$4/120$
$t_2 =$	$-312/120$	$-336/120$	$-96/120$	$-96/120$
$t_3 =$	-1	$-180/120$	$-180/120$	3
$y_3 =$	1	1	0	1
$F(y) =$	7	6	0	16

Sərbəst hədlər sütunundakı sonuncu mənfi elementi də Qoşma-Simpleks metodla yox edək:

$$\max\left\{7:(-\frac{312}{120});\ 6:(-\frac{336}{120});\ 0:(-\frac{96}{120})\right\}=0:(-\frac{96}{120})$$

olduğu üçün əsas element olaraq $a_{23}=-\frac{96}{120}$ elementini götürək:

	$-y_1$	$-y_2$	$-t_1$	1
$y_0 =$	$-2/120$	$-1/120$	$-1/120$	$4/120$
$t_2 =$	$-312/120$	$-336/120$	$\langle -96/120 \rangle$	$-96/120$
$t_3 =$	-1	$-180/120$	$-180/120$	3
$y_3 =$	1	1	0	1
$F(y) =$	7	6	0	16

	$-y_1$	$-y_2$	$-t_2$	1
$y_0 =$			$1/120$	$-4/120$
$t_1 =$	$-312/120$	$-336/120$	1	$-96/120$
$t_3 =$			$180/120$	$-432/120$
$y_3 =$			0	$-96/120$
$F(y) =$	$-672/120$	$-576/120$	0	$-1536/120$

: (-96/120)

	$-y_1$	$-y_2$	$-t_2$	1
$y_0 =$				$4/96$
$t_1 =$				1
$t_3 =$				$432/96$
$y_3 =$				1
$F(y) =$	7	6	0	16

Sonuncu Simpleks cədvəldə sərbəst hədlərin heç biri mənfi deyil. Odur ki, $y_1 = 0, y_2 = 0, t_2 = 0$ qiymətlərində məsələnin aşağıdakı optimal həlli alınır:

$$Y^*_{opt} = (y_1^* = 0,\ y_2^* = 0,\ y_3^* = 1,\ y_0^* = \frac{1}{24})$$

$$\max F(Y^*) = 16 \cdot 10 = 160$$

• Xətti proqramlaşdırma məsələsinin aldığımız optimal həllindən kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin optimal həllini tapaq:

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0} = 0 : \frac{1}{24} = 0$$

$$x_2 = \frac{y_2}{y_0} = 0 : \frac{1}{24} = 0$$

$$x_3 = \frac{y_3}{y_0} = 1 : \frac{1}{24} = 24$$

Deməli, kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin optimal həlli aşağıdakı kimidir:

$$X^*_{opt} = (x_1^* = 0,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 24)$$

$$\max F(X^*) = 160$$

Yoxlama: $Z(x) = \dfrac{90 \cdot 0 + 100 \cdot 0 + 160 \cdot 24}{24} = 160$

Beləliklə, müəssisə A və B məhsullarını istehsal etməməli, C məhsulundan isə 24 ədəd istehsal etməlidir. Bu halda müəssisə üzrə məhsul vahidinin verdiyi mənfəət maksimum olub 160 manat təşkil edəcəkdir. Bu optimal plana görə 1-ci istehsal ehtiyatından 24 vahid (120-96=24) artıq qalacaq, 2-ci növ istehsal ehtiyatı tam sərf olunacaq (96-96=0), 3-cü növ istehsal ehtiyatından isə 108 vahid (180-72=108) artıq qalacaqdır.

Cavab: $X^*_{opt} = (x_1^* = 0,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 24)$ *olduqda* $\max Z(X^*) = 160$ *olur* ◄

Bəzi kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələlərinin məqsəd funksiyasının məxrəcində sərbəst hədd iştirak edir. Belə kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin həll alqoritminə baxaq.

►**Məsələ 7.2.** Aşağıdakı kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsini həll edin:

$$Z(x) = \frac{2x_1 + 4x_2}{x_1 + x_2 + 2} \to \max \qquad (7.10)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 20 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases} \qquad (7.11)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \qquad (7.12)$$

Həlli: 1-ci mərhələ: (7.10)-(7.12) kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsini xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirək. Bu məqsədlə

$$\{x_1 + x_2 + 2\}^{-1} = y_0 \qquad (7.13)$$

$$\begin{cases} y_1 = y_0 x_1 \\ y_2 = y_0 x_2 \end{cases} \qquad (7.14)$$

əvəzetmələri qəbul etsək, onda (7.10)-(7.12) kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsi aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətiriləcək:

$$Z(x) = 2y_1 + 4y_2 \to \max \qquad (7.15)$$

$$\begin{cases} 5y_1 + y_2 - 20y_0 \geq 0 \\ -y_1 + y_2 - 3y_0 \leq 0 \\ 2y_1 - y_2 - 2y_0 \leq 0 \\ y_1 + y_2 + 2y_0 = 1 \end{cases} \qquad (7.16)$$

$$y_0 > 0, \qquad y_1 \geq 0, \qquad y_2 \geq 0 \qquad (7.17)$$

2-ci mərhələ: Alınmış (7.15)-(7.17) xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks metodla həll edək:

$$\begin{cases} -5y_1 - y_2 + 20y_0 + t_1 = 0 \\ -y_1 + y_2 - 3y_0 + t_2 = 0 \\ 2y_1 - y_2 - 2y_0 + t_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + 2y_0 + 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = 5y_1 + y_2 - 20y_0 \geq 0 \\ t_2 = y_1 - y_2 + 3y_0 \geq 0 \\ t_3 = -2y_1 + y_2 + 2y_0 \geq 0 \\ 0 = -y_1 - y_2 - 2y_0 + 1 \end{cases}$$

Simpleks cədvəlinə keçək:

	$-y_1$	$-y_2$	$-y_0$	1
$t_1 =$	-5	-1	20	0
$t_2 =$	-1	1	-3	0
$t_3 =$	2	-1	-2	0
$0 =$	1	1	2	1
$F(y) =$	-2	-4	0	0

Simpleks cədvəlin solunda yerləşmiş 0 elementini $a_{42} = 1$ əsas elementə görə cədvəlin yuxarısına keçirib ikinci sütunu silək:

	$-y_1$	$-y_2$	$-y_0$	1
$t_1 =$	-5	-1	20	0
$t_2 =$	$-`1$	1	-3	0
$t_3 =$	2	-1	-2	0
$0 =$	1	$\langle 1 \rangle$	2	1
$F(y) =$	-2	-4	0	0

	$-y_1$	0	$-y_0$	1
$t_1 =$	-4	1	22	1
$t_2 =$	-2	-1	-5	-1
$t_3 =$	3	1	0	1
$y_2 =$	1	1	2	1
$F(y) =$	2	4	8	4

	$-y_1$	$-y_0$	1
$t_1 =$	-4	22	1
$t_2 =$	-2	-5	-1
$t_3 =$	3	0	1
$y_2 =$	1	2	1
$F(y) =$	2	8	4

Məsələnin dayaq həllini tapaq. Əvvəlcə sərbəst hədlər sütunundakı (-1) elementini yox edək. Lakin Simpleks cədvəlin $F(y)$ sətirində heç bir mənfi element yoxdur. Odur ki, bu mənfi sərbəst həddi yox etmək üçün Qoşma Simpleks metod alqoritmindən istifadə edəcəyik:

$$\max\left\{\frac{2}{-2};\frac{8}{-5}\right\}=\frac{2}{-2}$$

olduğu üçün əsas element olaraq $a_{21}=-2$ elementini götürək:

	$-y_1$	$-y_0$	1
$t_1 =$	-4	22	1
$t_2 =$	$\langle -2 \rangle$	-5	-1
$t_3 =$	3	0	1
$y_2 =$	1	2	1
$F(y) =$	2	8	4

	$-t_2$	$-y_0$	1
$t_1 =$	4	-64	-6
$y_1 =$	1	-5	-1
$t_3 =$	-3	15	1
$y_2 =$	-1	1	-1
$F(y) =$	-2	-6	-6

: (-2)

	$-t_2$	$-y_0$	1
$t_1 =$	-2	32	3
$y_1 =$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
$t_3 =$	$\frac{3}{2}$	$\langle -\frac{15}{2} \rangle$	$-\frac{1}{2}$
$y_2 =$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$F(y) =$	1	3	3

	$-t_2$	$-t_3$	1
$t_1 =$		-32	$-\frac{13}{2}$
$y_1 =$		$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$
$y_0 =$	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
$y_2 =$		$\frac{1}{2}$	-4
$F(y) =$	-12	-3	-21

: (-15/2)

	$-t_2$	$-t_3$	1
$t_1 =$			$13/15$
$y_1 =$			$5/15$
$y_0 =$			$1/15$
$y_2 =$			$8/15$
$F(y) =$	$24/15$	$6/15$	$42/15$

Sonuncu Simpleks cədvəlin həm sərbəst hədlər sütununda, həm də məqsəd funksiyası sətirində heç bir mənfi element yoxdur. Odur ki, $t_2=0$, $t_3=0$ qiymətlərində (7.15)-(7.17) xətti proqramlaşdırma məsələsinin aşağıdakı optimal həlli alınır:

$$Y^*_{opt} = (y_1 = 5/15,\ y_2 = 8/15,\ y_0 = 1/15)$$

$$\max F(Y^*) = 42/15$$

3-cü mərhələ: (7.14) əvəzetmələrindən istifadə etməklə (7.15)-(7.17) xətti proqramlaşdırma məsələsinin optimal həllindən (7.10)-(7.12) kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin optimal həllini tapaq:

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0} = \frac{5}{15} : \frac{1}{15} = 5$$

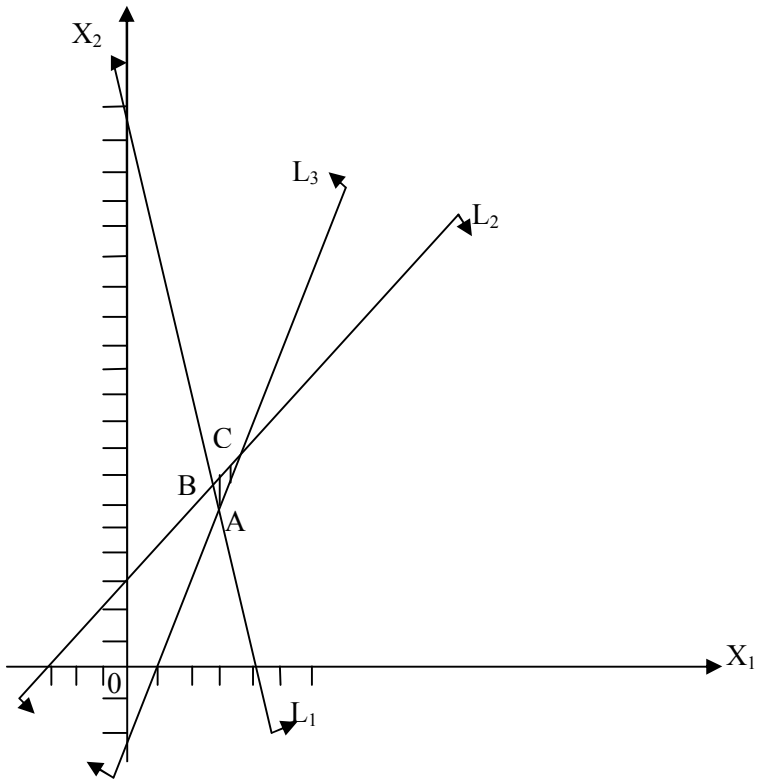
$$x_2 = \frac{y_2}{y_0} = \frac{8}{15} : \frac{1}{15} = 8$$

Deməli, (7.10)-(7.12) kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin optimal həlli aşağıdakı kimidir:

$$X^*_{opt} = (x_1 = 5,\ x_2 = 8)$$

$$\max F(X^*) = \frac{2x_1 + 4x_2}{x_1 + x_2 + 2} = \frac{2 \cdot 5 + 4 \cdot 8}{5 + 8 + 2} = \frac{42}{15}$$

(7.10)-(7.12) kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsi üçün tapdığımız X^* vektorunun doğrudan da məsələnin optimal həlli olduğunu həndəsi qurmalar yolu ilə yoxlayaq. Bu məqsədlə düzbucaqlı koordinat sistemində (7.10)-(7.12) kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllər oblastını quraq (şəkil 7.1)



Şəkil 7.1

Göründüyü kimi, (7.10)-(7.12) kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllər oblastı *ABC* üçbucaqlısıdır. Bu həllər oblastının təpə nöqtələrinin koordinatlarını tapaq:

A təpə nöqtəsi üçün:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 = 20 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

$$7x_1 = 22$$

$$x_1 = \frac{22}{7}$$

$$x_2 = \frac{30}{7}$$

$$A(\frac{22}{7}; \frac{30}{7})$$

B təpə nöqtəsi üçün:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 = 20 \\ -x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

$$6x_1 = 17$$

$$x_1 = \frac{17}{6}$$

$$x_2 = \frac{35}{6}$$

$$B(\frac{17}{6};\frac{35}{6})$$

C təpə nöqtəsi üçün:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = 8$$

$$C(5;8)$$

A, B və C təpə nöqtələrində (7.10) kəsr-xətti funksiyanın qiymətini hesablayaq:

$$Z(x)_A = \frac{2x_1 + 4x_2}{x_1 + x_2 + 2} = \frac{2 \cdot \frac{22}{7} + 4 \cdot \frac{30}{7}}{\frac{22}{7} + \frac{30}{7} + 2} = \frac{\frac{164}{7}}{\frac{66}{7}} = \frac{164}{66} \approx 2{,}48$$

$$Z(x)_B = \frac{2x_1 + 4x_2}{x_1 + x_2 + 2} = \frac{2 \cdot \frac{17}{6} + 4 \cdot \frac{35}{6}}{\frac{17}{6} + \frac{35}{6} + 2} = \frac{\frac{174}{7}}{\frac{64}{6}} = \frac{174}{64} \approx 2{,}72$$

$$Z(x)_C = \frac{2x_1 + 4x_2}{x_1 + x_2 + 2} = \frac{2 \cdot 5 + 4 \cdot 8}{5 + 8 + 2} = \frac{42}{15} \approx 2{,}8$$

Beləliklə, $C(5;\ 8)$ təpə nöqtəsində (7.10) kəsr-xətti funksiya (7.11)-(7.12) şərtləri ilə müəyyən edilən oblastda özünün ən böyük qiymətini alır, daha doğrusu $X^* = (x_1 = 5,\ x_2 = 8)$ təpə nöqtəsi məsələnin optimal həllinin alındığı nöqtədir. Göründüyü kimi, bu optimal həll Simpleks metodla aldığımız optimal həllin təkrarıdır. Deməli, Simpleks metodun tətbiqi ilə aldığımız optimal həll həqiqətən də (7.10)-(7.12) kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin optimal həllidir.

Cavab: $X^* = (5,\ 8)$ **olduqda** $Z_{\max} = \frac{42}{15}$ **olur.**◄

Mövzu üzrə praktikum

7.3-7.12 kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələlərini Simpleks metodla həll edin:

7.3.	$Z(x)=\dfrac{3x_1+x_2-x_3}{x_1+x_2+x_3}\to\max$ $\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3\le 2\\ -5x_1+x_2+2x_3\le 10\\ -3x_1+x_2-3x_3\le 3\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
7.4	$Z(x)=\dfrac{5x_1-x_2+x_3}{2x_1+3x_2+x_3}\to\max$ $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3\le 6\\ 4x_1+x_2-3x_3\le -8\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
7.5	$Z(x)=\dfrac{x_1-3x_2+x_3}{x_1-2x_2+x_3}\to\max$ $\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3\le 8\\ x_1-3x_2+x_3=3\\ -x_2\le 6\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
7.6	$Z(x)=\dfrac{2x_1+x_2-x_3}{x_1-x_2+2x_3}\to\min$ $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3\ge 5\\ x_1+2x_2+x_3\le 7\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
7.7	$Z(x)=\dfrac{6x_1-x_2+3x_3}{-x_1+x_2+x_3}\to\min$ $\begin{cases}2x_1+2x_2+x_3\ge 6\\ -x_1-x_2+x_3\ge -7\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$

7.8	$Z(x)=\dfrac{3x_1+2x_2+3x_3}{x_1+x_2+x_3}\to\max$ $\begin{cases}-x_1-x_2+2x_3\le -2\\ -x_1+2x_2+x_3\le 4\\ x_1\qquad\quad +2x_3=2\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
7.9	$Z(x)=\dfrac{-2x_1+8x_2+3x_3}{x_1+x_2+x_3}\to\min$ $\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3\ge 12\\ x_1+x_2+x_3=8\\ 2x_1-3x_2+x_3\ge -8\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
7.10	$Z(x)=\dfrac{-2x_1-x_2+6x_3}{x_1-2x_2+3x_3}\to\max$ $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3\ge 2\\ \qquad x_2+2x_3\le 3\\ \qquad -2x_2+3x_3\le 6\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
7.11	$Z(x)=\dfrac{3x_1+x_2-2x_3}{x_1+x_2+x_3}\to\max$ $\begin{cases}-x_1+2x_2+5x_3\le 9\\ x_1-x_2-3x_3\le 2\\ 2x_1+x_2+x_3\le 7\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
7.12	$Z(x)=\dfrac{x_1+x_2-2x_3+14x_4}{x_1-2x_2+x_3-x_4}\to\min$ $\begin{cases}-3x_1-x_2-3x_3+5x_4\ge -15\\ -2x_1+x_2-x_3+4x_4\le 8\\ \qquad x_2-4x_3\qquad\quad \le -4\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0,\quad x_4\ge 0$

Mövzu üzrə testlər

1.Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu ilə əlaqədar aşağıdakı təkliflərdən hansının doğru olduğunu seçin:

A) Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsində məchulların qiymətləri hökmən kəsr ədədlər olmalıdır;
B) Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsində məqsəd funksiyası iki xətti funksiyanın nisbəti şəklində olur;
C) Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsində məqsəd funksiyasının ekstremumu hökmən kəsr ədəd olmalıdır;
D) Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin məhdudiyyət şərtlərinin sərbəst hədləri kəsr ədədlər olmalıdır;
E) Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşunda iştirak edən bütün parametrlər kəsr ədədlər olmalıdır.

2.Hansı halda kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsini xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirmək mümkündür?

A) Bütün hallarda;
B) Heç bir halda;
C) Əgər kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsində məhdudiyyət şərtləri yalnız bərabərsizliklərdən ibarətdirsə;
D) Əgər kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsində məhdudiyyət şərtləri yalnız tənliklərdən ibarətdirsə;
E) Əgər kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsində məchulların sayı ilə məhdudiyyət şərtləri arasındakı fərq 2-yə bərabərdir.

3.n dəyişənli və m məhdudiyyət şərtli kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsi xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirildikdə bu məsələdə neçə dəyişən iştirak edəcəkdir?

A) n dəyişən;
B) m dəyişən;
C) $m+n$ dəyişən;
D) $n+1$ dəyişən;
E) $m+1$ dəyişən.

4. 2 dəyişənli və 3 məhdudiyyət şərtli kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsi adi xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirilmişdir. Bu məsələdə dəyişənlərin mənfi olmaması şərti nəzərə alınmaqla neçə xətti bərabərsizlik və neçə xətti tənlik iştirak edəcəkdir:

A) 5 bərabərsizlik və 0 tənlik;
B) 6 bərabərsizlik və 0 tənlik;
C) 6 bərabərsizlik və 1 tənlik;

D) 5 bərabərsizlik və 2 tənlik;
E) 3 bərabərsizlik və 1 tənlik.

5.Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsi aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirilmişdir:

$$F(y) = 6y_1 + 4y_2 + y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 4y_1 + y_2 + 2y_3 - 40y_0 \le 0 \\ 7y_1 + 6y_2 - \quad 30y_0 \le 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

$$y_0 > 0, y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0$$

Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin məqsəd funksiyası hansı şəkildədir:

A) $Z(x) = \dfrac{6x_1 + 4x_2 + x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \to \max$

B) $Z(x) = \dfrac{6x_1 + 4x_2 + x_3}{4x_1 + x_2 + 2x_3} \to \max$

C) $Z(x) = \dfrac{6x_1 + 4x_2 + x_3}{7x_1 + 6x_2} \to \max$

D) $Z(x) = \dfrac{4x_1 + x_2 + 2x_3}{6x_1 + 4x_2 + x_3} \to \max$

E) $Z(x) = \dfrac{7x_1 + 6x_2}{x_1 + x_2 + x_3} \to \max$

6.Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsi xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirilərək Simpleks metodla həll edilmiş və aşağıdakı optimal plan tapılmışdır:

$$y_0^* = 10, \quad y_1^* = 20, \quad y_2^* = 35, \quad y_3^* = 0$$

Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin optimal həllini tapın:

A) $x_1^* = 2, \quad x_2^* = 3{,}5, \quad x_3^* = 0$

B) $x_1^* = 10, \quad x_2^* = 20, \quad x_3^* = 35$

C) $x_1^* = \dfrac{1}{2}, \quad x_2^* = \dfrac{2}{7}, \quad x_3^* = 0$

D) $x_1^* = 2, \quad x_2^* = 35, \quad x_3^* = 0$

E) $x_1^* = 10,\ x_2^* = 35,\ x_3^* = 0$

7.**Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin məqsəd funksiyası** $Z(x) = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j} \to \max$ **şəklindədir. Bu məsələni xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirmək üçün istifadə edilən əvəzetmələr hansılardır?**

A) $\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right\} = y_0;\qquad y_0 \cdot x_j = y_j \qquad (j = \overline{1,n})$

B) $\left\{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right\} = y_0;\qquad y_0 \cdot x_j = y_j \qquad (j = \overline{1,n})$

C) $\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right\}^{-1} = y_0;\qquad y_0 \cdot x_j = y_j \qquad (j = \overline{1,n})$

D) $\left\{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right\}^{-1} = y_0;\qquad y_0 \cdot x_j = y_j \qquad (j = \overline{1,n})$

E) $\left\{\dfrac{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}\right\} = y_0;\qquad y_0 \cdot x_j = y_j \qquad (j = \overline{1,n})$

8.Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin Simpleks metodla həllinə aid aşağıdakı mülahizələrdən doğru olanı seçin:

A) Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks metodla həll etmək üçün məsələ iki məsələyə ayrılmalı, bu məsələlərdə məqsəd funksiyası olaraq kəsr-xətti funksiyasının məxrəci və surəti götürülməlidir;

B) Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks metodla həll etmək üçün əvvəlcə məsələ xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirilməlidir;

C) Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks metodla həll etmək üçün əvvəlcə onun qoşma məsələsini yazmaq lazımdır;

D) Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks metodla həll etmək üçün sərbəst hədlərdən əmsallar kimi istifadə edərək yeni xətti funksiya qurmaq lazımdır;

E) Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks metodla həll etmək üçün əvvəlcə onu nəqliyyat məsələsinə gətirmək lazımdır.

9. Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsi aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirilmişdir:

$$F(y) = y_1 - 4y_2 + 6y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 5y_1 - y_2 + 3y_3 - 100y_0 \le 0 \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 - 60y_0 \le 0 \\ 3y_1 + y_2 - 2y_3 + 3y_0 = 1 \end{cases}$$

$$y_0 > 0, y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0$$

Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin məqsəd funksiyası hansı şəkildədir:

A) $Z(x) = \dfrac{x_1 - 4x_2 + 6x_3}{5x_1 - x_2 + 3x_3} \to \min$

B) $Z(x) = \dfrac{x_1 - 4x_2 + 6x_3}{5x_1 + 7x_2 - 100} \to \min$

C) $Z(x) = \dfrac{x_1 - 4x_2 + 6x_3}{-x_1 + 2x_2 + x_3 - 60} \to \min$

D) $Z(x) = \dfrac{x_1 - 4x_2 + 6x_3}{3x_1 + x_2 - 2x_3} \to \min$

E) $Z(x) = \dfrac{x_1 - 4x_2 + 6x_3}{3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3} \to \min$

FƏSİL 8

PARAMETRİK XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMA MƏSƏLƏSİ

8.1. Parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu

Bəzi xətti proqramlaşdırma məsələlərinin sabit kəmiyyətləri dəyişmə oblastı məlum olan müəyyən bir parametrlərdən asılı olur. Belə məsələlərə parametrik xətti proqramlaşdırma məsələləri deyilir. Məsələnin ümumi yazılışı aşağıdakı kimidir:

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n}(p'_j+p''_j\,t)x_j \to \max(\min) \qquad (8.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n}(a'_{ij}+a''_{ij}t)x_j \le a'_i+a''_i\cdot t \qquad (i=\overline{1,m}) \quad (8.2)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j=\overline{1,n}) \qquad (8.3)$$

$$t\in[\alpha,\beta] \qquad (8.4)$$

(8.1)-(8.4) parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsi aşağıdakı kimi ifadə edilir:

t parametrinin $[\alpha,\beta]$ oblastından götürülmüş hər bir diskret qiyməti üçün elə bir $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ vektoru tapmaq lazımdır ki, bu vektorun komponentləri (8.2)-(8.3) sistemlərini ödəsinlər və (8.1) məqsəd funksiyasına ən böyük və ya ən kiçik qiymət versinlər.

Qeyd edək ki, (8.1)-(8.4) parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsinin bir sıra modifikasiyaları mümkündür:

1. Yalnız məqsəd funksiyasının əmsalları parametrdən asılı olur:

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n}(p'_j+p''_j\,t)x_j \to \max(\min) \qquad (8.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le a_i \qquad (i=\overline{1,m}) \quad (8.6)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j=\overline{1,n}) \qquad (8.7)$$

$$t\in[\alpha;\beta] \qquad (8.8)$$

2. Yalnız məhdudiyyət şərtlərinin əmsalları parametrdən asılı olur:

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max(\min) \qquad (8.9)$$

$$\sum_{j=1}^{n}(a'_{ij}+a''_{ij}t)x_j \le a_i \qquad (i=\overline{1,m}) \quad (8.10)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j=\overline{1,n}) \qquad (8.11)$$

$$t \in [\alpha,\beta] \qquad (8.12)$$

2. Yalnız məhdudiyyət şərtlərinin sərbəst hədləri parametrdən asılı olur.

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max(\min) \qquad (8.13)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le a'_i + a''_i t \qquad (i=\overline{1,m}) \quad (8.14)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j=\overline{1,n}) \qquad (8.15)$$

$$t \in [\alpha,\beta] \qquad (8.16)$$

Biz gələcəkdə yalnız məqsəd funksiyalarının əmsalları parametrdən asılı olan məsələləri öyrənəcəyik. Bu məsələnin *həndəsi mənası dedikdə t parametrinin* $t \in [\alpha,\beta]$ *oblastından götürülmüş hər bir qiyməti üçün (8.6)-(8.7) şərtləri ilə müəyyən edilən həllər oblastının elə bir təpə nöqtəsinin tapılması başa düşülür ki, bu nöqtənin koordinatları məsələnin məqsəd funksiyasına maksimum (minimum) qiymət versinlər.*

Məsələnin iqtisadi mənasını araşdıraq. Tutaq ki, müəssisə standart şərtlər daxilində A və B məhsulları istehsal edir. Məhsulların satış bazarının öyrənilməsi göstərir ki, A məhsulunun bir vahidinin qiyməti (20-40) manat arasında, B məhsulunun bir vahidinin qiyməti isə (30-10) manat arasında dəyişir. Qiymətlərin hər bir konkret səviyyəsi üçün elə bir $X=(x_1,\ x_2)$ istehsal proqramı tapmaq lazımdır ki, bu proqrama görə müəssisənin məcmu gəliri maksimum olsun. Bu məqsədin riyazi ifadəsini verək. Tutaq ki, müəssisədə x_1 vahid A məhsulu və x_2 vahid B məhsulu istehsal ediləcəkdir. Onda alırıq:

$$Z(x)=(20+t)x_1+(30-t)x_2 \to \max$$
$$t \in [0;\ 20]$$

Göründüyü kimi, alınmış məqsəd funksiyası parametrik xətti funksiyadır. Deməli, bu məqsəd funksiyasına görə tərtib edilmiş xətti proqramlaşdırma məsələsi də parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsi olacaqdır.

8.2. Parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsinin həll alqoritmi

Parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsinin həll alqoritminə baxaq. Fərz edək ki, (8.5)-(8.8) parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsində məqsəd funksiyasının maksimum qiyməti axtarılır. Bu məsələnin Simpleks metodla həlli aşağıdakı mərhələləri əhatə edir:

1. t parametri üçün $t \in [\alpha, \beta]$ oblastından hər hansı bir $t = t_0$ qiyməti seçilir. Burada $\alpha \le t_0 < \beta$ -dır. Onda baxılan parametrik məsələ adi xətti proqramlaşdırma məsələsinə çevrilir.

2. $t = t_0$ halı üçün Simpleks cədvəli qurulan zaman cədvələ məqsəd funksiyası sətirindən sonra iki sətir əlavə edilir. Bu sətirlərdən birincisində p'_j ədədləri, ikincisində isə p''_j ədədləri yerləşdirilir. Məqsəd funksiyası sətirinin əmsallarını hesablamaq üçün isə

$$\theta_j = p'_j + p''_j\, t$$

ifadəsindən istifadə edəcəyik. Sadəlik üçün fərz edək ki, $t_0 = \alpha$ -dır, yəni t parametri $[\alpha, \beta]$ oblastının sol hüdud qiymətini almışdır. Onda (8.5)-(8.8) parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsi üçün aşağıdakı Simpleks cədvəli alarıq (Fərz edilir ki, məsələnin (8.6) məhdudiyyət şərtləri sisteminə $y_i \ge 0$ $(i = \overline{1,m})$ əlavə dəyişənlər daxil edilərək vahid bazis yaradılmışdır):

	$-x_1$ ... $-x_s$ ... $-x_n$	1
$y_1 =$	a_{11} ... a_{1s} ... a_{1n}	a_1
...	... ...	....
$y_r =$	a_{r1} ... a_{rs} ... a_{rn}	a_r
...	... .	...
$y_m =$	a_{m1} ... a_{ms} ... a_{mn}	a_m
$Z_\alpha =$	θ_1 ... θ_s ... θ_n	0
$p'_j =$	$-p'_1$ ... $-p'_s$ ... $-p'_n$	0
$p''_j =$	$-p''_1$ ... $-p''_s$ ... $-p''_n$	0

(8.1)

(8.1) Simpleks cədvəli əsasında məsələ Simpleks metodla həll edilərək optimal planın tapıldığını şərtləşək. Daha doğrusu, məsələnin həlli nəticəsində elə bir Simpleks cədvəli alınmışdır ki, bu cədvəldə bütün sərbəst hədlər qeyri-mənfidir ($b_i \geq 0$ $(i = \overline{1,m})$) və Z_α sətirinin bütün əmsalları üçün $\omega_j \geq 0$ $(j = \overline{1,n})$ şərtləri ödənir. Bu isə $Z(x)$ funksiyası üçün sonlu maksimumun alınması deməkdir.

3. t parametri üçün $[\alpha, \beta]$ oblastından elə qiymətlər çoxluğu müəyyən edilir ki, bu qiymətlərdə $t = t_0$ qiyməti üçün tapılmış X_0^* optimal həlli dayanıqlı olaraq qalır. Başqa sözlə desək, t parametri üçün elə qiymətlər çoxluğu müəyyən edilir ki, bu qiymətlər üçün $Z(x)$ funksiyasının maksimum qiyməti məsələnin həllər oblastının $\max Z_\alpha$ qiymətini təmin edən təpə nöqtəsində alınır. Təbii ki, t-nin bütün bu qiymətləri üçün sonuncu Simpleks cədvəlin Z_α sətirinin əmsalları qeyri-mənfi olmalıdır.

Başqa sözlə desək,

$$\begin{cases} q'_1 + q''_1 t \geq 0 \\ q'_2 + q''_2 t \geq 0 \\ \dots \qquad \dots \\ q'_n + q''_n t \geq 0 \end{cases} \qquad (8.17)$$

sistemi ziddiyətli olmamalıdır[12].

Asanlıqla yəqin edə bilərik ki, t parametrinin axtarılan qiymətləri çoxluğu

$$\alpha_1 \le t \le \alpha_2$$

şərtlərini ödəməlidir.

Burada α_1 və α_2 hüdudları aşağıdakı kimi müəyyən edilir.

α_1 üçün:

• əgər sonuncu Simpleks cədvəldə əlavə edilmiş 2-ci sətirdə heç olmazsa bir elementin qiyməti sıfırdan böyükdürsə, onda

$$\alpha_1 = \max_{q''_j > 0}\left(-\frac{q'_j}{q''_j}\right)$$

• əgər sonuncu Simpleks cədvəldə əlavə edilmiş 2-ci sətirdə heç bir müsbət element yoxdursa, onda:

$$\alpha_1 = -\infty$$

α_2 üçün:

• əgər sonuncu Simpleks cədvəldə əlavə edilmiş 2-ci sətirdə heç olmazsa bir mənfi element varsa, onda

$$\alpha_2 = \min_{q''_j < 0}\left(-\frac{q'_j}{q''_j}\right)$$

• əgər sonuncu Simpleks cədvəldə əlavə edilmiş 2-ci sətirdə heç bir mənfi element yoxdursa, onda:

$$\alpha_2 = +\infty$$

Məsələdə t parametri üçün $t \in [\alpha, \beta]$ seqmenti müəyyən edildiyi üçün bizi təbii ki, t-nin yalnız bu seqmentə düşən qiymətləri maraqlandırır. Əgər $\alpha_2 > \beta$ olarsa, onda (8.5)-(8.8) parametrik proqramlaşdırma məsələsinin həlli başa çatmışdır. Belə ki, t parametrinin $[\alpha, \beta]$ oblastına daxil olan bütün qiymətlərində (8.5) məqsəd funksiyasının maksimum qiyməti həllər oblastının $\max Z_\alpha$ qiymətinin alındığı təpə nöqtəsində alınacaqdır. Əgər $\alpha_2 < \beta$ olarsa, onda qalan $[\alpha_2, \beta]$ oblastından t parametri üçün yeni $t = t_1$ qiyməti seçilir, burada $\alpha_2 \le t_1 < \beta$ -

---

[12] Fərz edilir ki, sonuncu Simpleks cədvəlin 1-ci əlavə sətirində $q'_1, q'_2, ..., q'_n$ ədədləri, 2-ci əlavə sətirdə isə $q''_1, q''_2, ..., q''_n$ ədədləri alınmışdır. Sonrakı addımlarda sadəlik üçün bu ədədlərn işarəmələrini q'_j və q''_j kimi saxlayacağıq.

dir və t-nin bu yeni qiymətində 2-ci mərhələyə qayıdılır. Bu mərhələlər bütün $[\alpha, \beta]$ oblastı tədqiq edilənə qədər davam etdirilir.

Qeyd: *Əgər (8.5)-(8.8) xətti proqramlaşdırma məsələsinin (8.5) məqsəd funksiyasının minimum qiyməti axtarılırsa, onda* α_1 *və* α_2 *hüdudları aşağıdakı kimi müəyyən edilir:*

$$\alpha_1 = \begin{cases} \max\limits_{q''_j < 0}\left(-\dfrac{q'_j}{q''_j}\right), & \text{əgər əlavə edilimiş 2-ci sətirdə heç olmazsa bir element üçün } q''_j < 0 \text{ şərti ödənirsə} \\ -\infty, & \text{əgər bu sətirdə bütün elementlər üçün } q''_j \geq 0 \text{ şərtləri ödənirsə} \end{cases}$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} \min\limits_{q''_j > 0}\left(-\dfrac{q'_j}{q''_j}\right), & \text{əgər əlavə edilimiş 2-ci sətirdə heç olmazsa bir element üçün } q''_j > 0 \text{ şərti ödənirsə,} \\ +\infty, & \text{əgər bu sətirdə bütün elementlər üçün } q''_j \leq 0 \text{ şərtləri ödənirsə} \end{cases}$$

İndi isə məqsəd funksiyasının əmsalları prametrdən asılı olan parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllinə aid konkret misala baxaq.

►**Məsələ 8.1. Aşağıdakı parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsini həll edin :**

$$Z(x) = 6x_1 + (2-t)x_2 + (4+t)x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$
$$t \in [0; +\infty]$$

Həlli: 1-ci mərhələ: t parametri üçün $t \in [\alpha, \beta]$ oblastından t=1 qiymətini seçək. Onda xətti parametrik proqramlaşdırma məsələsi aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsinə çevriləcəkdir:

$$Z(x) = 6x_1 + x_2 + 5x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

2-ci mərhələ: Yuxarıda təsvir etdiyimiz parametrik proqramlaşdırma məsələsinin Simpleks metodla həll alqoritminə əsaslanaraq məsələni həll edək:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + y_1 = 12 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + y_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - 3x_2 - x_3 + 12 \geq 0 \\ y_2 = x_1 - x_2 - 2x_3 + 2 \geq 0 \end{cases}$$

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	$\langle 1 \rangle$	3	1	12
$y_2 =$	-1	1	2	2
$Z_1(x) =$	-6	-1	-5	0
$p' =$	-6	-2	-4	0
$p'' =$	0	1	-1	0

	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$x_1 =$	1	3	1	12
$y_2 =$	1	4	3	14
$Z_1(x) =$	6	17	1	72
$q' =$	6	16	2	72
$q'' =$	0	1	-1	0

Sonuncu Simpleks cədvəlində $y_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ olarsa, məsələ üçün aşağıdakı optimal həlli alırıq:

$$X^*_{opt} = (x_1 = 12,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0)$$

$$\max Z_1(X^*) = 72$$

3-cü mərhələ: t parametri üçün elə qiymətlər çoxluğu seçək ki, bu qiymətlərdə Z_1 funksiyasının maksimum qiyməti tapdığımız $(x_1 = 12, x_2 = 0, x_3 = 0)$ təpə nöqtəsində alınsın. Sonuncu Simpleks cədvəlin sonuncu iki sətirində həm müsbət, həm də mənfi elementlər olduğundan tapırıq:

a) α_1 üçün ($q''_j > 0$)

$$-(\frac{q'_2}{q''_2}) = -\frac{16}{1} = -16$$

$$\alpha_1 = -16$$

b) α_2 üçün ($q''_j < 0$)

$$-(\frac{q'_3}{q''_3}) = -\frac{2}{-1} = 2$$

$$\alpha_2 = 2$$

Bizi t-nin alınmış qiymətlərindən yalnız $[0;+\infty]$ seqmentinə düşən qiymətlər maraqlandırdığı üçün təbii ki, $\alpha_1 = 0$ qəbul etməliyik. Deməli, X^* optimal planın alındığı təpə nöqtəsi $t \in [0;\ 2]$ qiymətlər üçün optimaldır. $\max Z_t$ üçün alırq:

$$\max Z_t = 72 - 0 \cdot t = 72$$

$\alpha_2 = 2 < +\infty = \beta$ olduğundan t=2 qiyməti üçün Z_2 sətrinin əmsallarını hesablayaq:

a) $q'_1 + q''_1 t = 6 + 0t = 6$

b) $q'_2 + q''_2 t = 16 + t = 18$

c) $q'_3 + q''_3 t = 2 - t = 0$

d) $72 + 0t = 72$

Beləliklə, t=2 qiyməti üçün aşağıdakı Simpleks cədvəli alırıq:

	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$x_1 =$	1	3	1	12
$y_2 =$	1	4	$\langle 3 \rangle$	14
$Z_2(x) =$	6	18	0	72
$q' =$	6	16	2	72
$q'' =$	0	1	-1	0

	$-y_1$	$-x_2$	$-y_2$	1
$x_1 =$	$2/3$	$5/3$	$-1/3$	$22/3$
$x_3 =$	$1/3$	$4/3$	$1/3$	$14/3$
$Z_2(x) =$	$18/3$	$54/3$	0	$216/3$
$q' =$	$16/3$	$40/3$	$-2/3$	$188/3$
$q'' =$	$1/3$	$7/3$	$1/3$	$14/3$

Sonuncu Simpleks cədvəlində $y_1 = 0, x_2 = 0, y_2 = 0$ olarsa, t=2 qiyməti üçün aşağıdakı optimal həlli alırıq:

$$X^*_{opt} = (x_1 = 22/3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 14/3)$$

$$\max Z_2(X^*) = 216/3 = 72$$

t parametri üçün $\max Z_t = 188/3 + 14/3\, t$ qiymətinin $(x_1 = 22/3, x_2 = 0, x_3 = 14/3)$ təpə nöqtəsində alındığı bütün qiymətlər çoxluğunu müəyyən edək:

α_1-i hesablayaq:

$$\alpha_1 = \max_{q_j > 0}\left(-\frac{q'_j}{q''_j}\right) = \left(-16,\ -\frac{40}{7},\ 2\right) = 2$$

$$\alpha_1 = 2$$

Sonuncu Simpleks cədvəldə bütün q_j-lar sıfırdan böyük olduğu üçün:

$$\alpha_2 = +\infty$$

Deməli, $(x_1 = 22/3, x_2 = 0, x_3 = 14/3)$ təpə nöqtəsi $[2;+\infty]$ oblastı üçün optimaldır.

Beləliklə, baxılan parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsi həll edildi. $[0;+\infty]$ oblastı 2 hissəyə parçalanır: $[0;2]$ parçası və $[2;+\infty]$ parçası.

$t \in [0;2]$ üçün Z_t-nin maksimum qiyməti $(x_1 = 12, x_2 = 0, x_3 = 0)$ təpə nöqtəsində, $t \in [2;+\infty]$ üçün isə $(x_1 = 22/3, x_2 = 0, x_3 = 14/3)$ təpə nöqtəsində alınır.

Cavab: **a)** $0 \le t \le 2$ **olduqda** $X^* = (x_1 = 12,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0)$ **təpə nöqtəsində** $Z_{\max} = 72 + 0 \cdot t$ **olur.**

b) $2 \le t \le +\infty$ **olduqda** $X^* = (x_1 = 22/3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 14/3)$ **təpə nöqtəsində** $Z_{\max} = 188/3 + 14/3\, t$ **olur.**◄

Mövzu üzrə praktikum

8.2-8.11 parametrik xətti proqramlaşdırma məsələlərini Simpleks metodla həll edin:

8.2	$Z(x) = (2+t)x_1 + (3+t)x_2 + (6-t)x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 3 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$ $t \in [0;10]$
8.3	$Z(x) = (3-t)x_1 - 2x_2 + (5+t)x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$ $t \in [-\infty;+\infty]$
8.4	$Z(x) = (7+t)x_1 + (0+3t)x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 32 \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \ge 9 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$ $t \in [1;8]$
8.5	$Z(x) = (2+2t)x_1 + (4-2t)x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$ $t \in [1;15]$

8.6	$Z(x) = 4x_1 + (2+t)x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 4 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 40 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$ $t \in [0;8]$
8.7	$Z(x) = (10-10t)x_1 + (9+t)x_2 + (7-2t)x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 2x_1 + x_3 \le 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 3 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$ $t \in [1;10]$
8.8	$Z(x) = tx_1 + (1+t)x_2 \to \max$ $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ 4x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$ $t \in [1;7]$
8.9	$Z(x) = (2+t)x_1 + (12-t)x_2 + (6+t)x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 20 \\ 2x_1 + x_3 \le 42 \\ x_2 \le 36 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$ $t \in [0;10]$

8.10	$Z(x)=(1+t)x_1+(2-t)x_2+(2-3t)x_3+(1-2t)x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4 \le 5 \\ x_1+2x_2 \qquad +x_4 \le 7 \\ x_1 \qquad +x_3+2x_4 \le 3 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0$ $t \in [1;20]$
8.11	$Z(x)=6x_1+(4+t)x_3+(12-t)x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1-x_2+x_3 \qquad =28 \\ -x_1+3x_2 \qquad +x_4=20 \\ -\frac{1}{2}x_1+2x_2 \qquad +x_5=24 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0, \quad x_5 \ge 0$ $t \in [-\infty;+\infty]$

Mövzu üzrə testlər

1. Aşağıdakı mülahizələrdən hansı doğru deyil?

A) Əgər xətti proqramlaşdırma məsələsinin məqsəd funksiyasının əmsalları müəyyən parametrdən asılıdırsa, onda bu məsələ parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsidir;
B) Əgər xətti proqramlaşdırma məsələsinin məhdudiyyət şərtlərinin əmsalları müəyyən parametrdən asılıdırsa, onda bu məsələ parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsidir;
C) Əgər xətti proqramlaşdırma məsələsinin sərbəst hədləri müəyyən parametrdən asılıdırsa, onda bu məsələ parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsidir;
D) Əgər xətti proqramlaşdırma məsələsinin həm məqsəd funksiyasının əmsalları, həm məhdudiyyət şərtlərinin əmsalları, həm də sərbəst hədləri müəyyən parametrdən asılıdırsa, onda bu məsələ parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsidir;
E) Əgər xətti proqramlaşdırma məsələsinin məchulları parametrdən asılıdırsa, onda bu məsələ parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsidir.

2. Aşağıdakı mülahizələrin hansının doğru olduğunu seçin.

- *Parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsinin həndəsi mənası:*

A) Həllər çoxüzlüsünün elə bir təpə nöqtəsinin tapılmasından ibarətdir ki, həmin təpə nöqtəsində funksiyanın qiyməti parametrin bütün mümkün qiymətlərində ən böyük olsun;
B) Həllər çoxüzlüsünün elə bir təpə nöqtəsinin tapılmasından ibarətdir ki, həmin təpə nöqtəsində funksiyanın qiyməti parametrin bütün mümkün qiymətlərində ən kiçik olsun;
C) Parametrin verilmiş oblastdakı hər bir qiyməti üçün həllər çoxüzlüsünün elə bir təpə nöqtəsi tapılmalıdır ki, bu nöqtədə məsələnin məqsəd funksiyası özünün ekstremum qiymətini alsın;
D) Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin həndəsi mənası ilə eynidir;
E) Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin həndəsi mənası ilə eynidir.

3.Parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu ilə bağlı aşağıdakı mülahizələrdən hansının doğru olduğunu seçin:

A) Parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsinin məqsəd funksiyasının əmsalları müəyyən parametrdən asılı ola bilməz;
B) Parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsinin məhdudiyyət şərtlərinin sərbəst hədləri müəyyən parametrdən asılı ola bilməz;
C) Parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsinin məhdudiyyət

şərtlərinin əmsalları müəyyən parametrdən asılı ola bilməz;

D) Parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsində məqsəd funksiyasının əmsalları, məhdudiyyət şərtlərinin əmsalları və sərbəst hədlər eyni zamanda müəyyən parametrdən asılı ola bilməz;

E) Parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsində iştirak edən istənilən sabit kəmiyyətlərin qiyməti parametrdən asılı ola bilər.

4.Məqsəd funksiyasının əmsalları parametrdən asılı olan parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsinin yerləşdirildiyi ilk Simpleks cədvəlinin son üç sətiri aşağıdakı şəkildədir:

$Z_t =$	8	16	10	0
$P_j^{'} =$	2	4	4	0
$P_j^{''} =$	3	6	3	0

Bu sətirlər t parametrinin hansı qiymətində alınmışdır:

A) 1;
B) 2;
C) 3;
D) 4;
E) 5.

5.Məqsəd funksiyasının əmsalları parametrdən asılı olan parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsinin yerləşdirildiyi ilk Simpleks cədvəlinin son üç sətiri aşağıdakı şəkildədir:

$Z_t =$	-1	-1	0
$P_j^{'} =$	-2	-1	0
$P_j^{''} =$	1	0	0

Bu sətirlər t parametrinin hansı qiymətində alınmışdır:
A) 1;
B) 0;
C) -1;
D) 2;
E) -2.

FƏSİL 9

QEYRİ-XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMA MƏSƏLƏSİ

9.1. Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu

Məlum olduğu kimi, klassik optimal idarəetmə məsələsi kimi baxılan riyazi proqramlaşdırmanın ümumi məsələsi aşağıdakı kimi yazılır:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to ext \qquad (9.1)$$

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i & (i = \overline{1,k}) \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i & (i = \overline{k+1,m}) \end{cases} \qquad (9.2)$$

Burada f və g_i verilmiş məlum funksiyalardır. Əgər bu funksiyaların hamısı eyni zamanda xəttidirsə, onda (9.1)-(9.2) məsələsi əvvəlki fəsillərdə ətraflı nəzərdən keçirdiyimiz xətti proqramlaşdırma məsələsinə çevrilir. Əgər bu funksiyalardan heç olmazsa biri qeyri-xəttidirsə, onda məsələ qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsidir. Deməli, xətti proqramlaşdırma məsələsinə qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin xüsusi halı kimi baxmaq olar.

(9.1)-(9.2) qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsində dəyişənlərin mənfi olmaması şərtləri ya açıq şəkildə verilə bilər, ya da (9.2) sisteminin tərkibində nəzərə alına bilər.

(9.1)-(9.2) qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin həll edilməsi dedikdə n ölçülü fəzanın elə bir

$$X^* = (x_1^*, \ x_2^*, ..., x_n^*)$$

nöqtəsinin tapılması başa düşülür ki, bu nöqtənin koordinatları (9.2) sisteminin məhdudiyyət şərtlərini ödəsinlər və həmin fəzanın koordinatları (9.2) sistemini ödəyən ixtiyari başqa X nöqtəsi üçün

$$f(X^*) \ge f(X) \text{ - (max halı üçün)}$$

$$f(X^*) \le f(X) \text{ - (min halı üçün)}$$

şərtləri ödənsin.

(9.2) sisteminin məhdudiyyət şərtləri n ölçülü E_n evklid fəzada məsələnin həllər oblastını əmələ gətirir. Qeyd edək ki, xətti proqramlaşdırma məsələsindən fərqli olaraq bu oblast heç də həmişə qabarıq alınmır. *(9.1)-(9.2) qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin həndəsi mənası dedikdə bu həllər oblastının elə bir nöqtəsinin tapılması başa düşülür ki, bu nöqtədən ən yüksək tərtibli (ən aşağı tərtibli)* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = h$ *hiper səth keçsin.* Qeyd edək ki, xətti proqramlaşdırma məsələsindən fərqli olaraq bu nöqtə oblastın həm sərhəd nöqtəsi, həm də daxili nöqtəsi ola bilər.

İndi isə (9.1)-(9.2) qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin iqtisadi mənasını araşdıraq.

Fərz edək ki, müəssisədə 180 ədəd eyni adlı detal hazırlanmalıdır. Bu detalları iki texnoloji üsulla hazırlamaq olar. Tədqiqatlar göstərir ki, birinci üsulla x_1 ədəd detalın hazırlanması üçün $4x_1 + x_1^2$ manat xərc çəkilməlidir. İkinci üsulla x_2 ədəd detalın hazırlanması xərci isə $8x_2 + x_2^2$ manat təşkil edir. Müəssisə üçün elə istehsal proqramı tapmaq lazımdır ki, bu proqrama görə 180 ədəd detalın hazırlanmasına çəkilən xərclərin cəmi minimum olsun.

Məsələnin riyazi ifadəsini verək:

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \to \min \qquad (9.3)$$

$$x_1 + x_2 = 180 \qquad (9.4)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \qquad (9.5)$$

Göründüyü kimi, (9.3) funksiyası kvadratik funksiyadır. Deməli, (9.3)-(9.5) məsələsi qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsidir.

9.2. Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin həll üsulları

Xətti proqramlaşdırma məsələsindən fərqli olaraq qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsini həll etmək üçün universal həll metodu mövcud deyil. Odur ki, qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin tipindən asılı olaraq müxtəlif həll üsullarından istifadə etmək lazım gəlir. Bu üsullara misal olaraq Laqranj vuruqları üsulunu, sürətli enmə və ya qalxma üsulunu, yəhərvari nöqtə (düyün nöqtəsi) üsulunu göstərmək olar. Əgər (9.1)-(9.2) məsələsində $k = 0$ -dırsa, yəni məhdudiyyət şərtləri yalnız tənliklərdən ibarətdirsə və dəyişənlər üzərinə qeyri-

mənfilik şərtləri qoyulmamışdırsa (f və g_i funksiyaları öz məxsusi törəmələri ilə bərabər kəsilməz funksiyalardır), onda bu məsələni Laqranj vuruqları üsulu ilə həll etmək mümkündür.

Tutaq ki, (9.1)-(9.2) məsələsində $k = 0$ -dır və dəyişənlərin mənfi olmaması şərtləri açıq şəkildə verilməmişdir. Onda bu məsələnin Laqranj vuruqları üsulu ilə həlli aşağıdakı mərhələlər üzrə aparılmışdır.

• Laqranj funksiyasını tərtib edilməsi. Aşağıdakı funksiyaya baxaq:

$$F(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left[b_i-g_i(x_1,x_2,...,x_n)\right] \qquad (9.6)$$

(9.6) funksiyasına Laqranj funksiyası deyilir. Burada λ_i - Laqranj vuruğudur.

• İsbat edilir ki, əgər (9.1) və (9.6) funksiyaları kəsilməz funksiyadırsa, onda bu funksiyaların ekstremumları eyni nöqtədə alınır. Məlum olduğu kimi ekstremum nöqtəsində kəsilməz funksiyaların birinci tərtib törəmələri sıfıra çevrilir. Odur ki, (9.6) funksiyasının dəyişənlərinə görə birinci tərtib törəmələrini hesablayıb sıfıra bərabər etsək, alarıq:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f}{\partial x_j}-\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}=0 \qquad (j=\overline{1,n}) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i}=\left[a_i-g_i(x_1,x_2,...,x_n)\right]=0 \qquad (i=\overline{1,m}) \end{cases}$$

Göründüyü kimi $(m+n)$ sayda tənlikdən və $(m+n)$ sayda məchuldan ibarət olan tənliklər sistemi alınmışdır.

• Alınmış sistem həll edilərək (9.1) funksiyasının ekstremal qiymətinin alınmasına şübhə doğuran nöqtələr çoxluğu tapılır. Sonrakı tədqiqat şərtsiz ekstremum qaydası üzrə aparılır (yəni funksiyanın ikinci tərtib törəmələri tapılır, bu qiymətlərin sıfırdan fərqliliyi müəyyən edilir və s.).

İndi isə yuxarıda baxdığımız (9.3)-(9.5) məsələsini Laqranj vuruqları üsulu ilə həll edək.

► **Məsələ 9.1.** Fərz edək ki, (9.3)-(9.5) məsələsində dəyişənlər üzərinə qeyri-mənfilik şərti qoyulmamışdır. Laqranj funksiyasını tərtib edək:

$$F(x_1,x_2,\lambda)=4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2+\lambda\left[180-(x_1+x_2)\right]$$

Bu funksiyanın x_1, x_2 və λ -ya görə 1-ci tərtib məxsusi törəmələrini hesablayıb “0”-a bərabər edək:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - (x_1 + x_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 + 2x_1 - \lambda = 0 \\ 8 + 2x_2 - \lambda = 0 \\ 180 - (x_1 + x_2) = 0 \end{cases}$$

Bu sistemi həll etsək alarıq:

$$\begin{cases} 4 + 2x_1 = \lambda \\ 8 + 2x_2 = \lambda \\ x_1 + x_2 = 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 + 2x_1 = 8 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 180 \end{cases}$$

$$x_1 = 180 - x_2$$

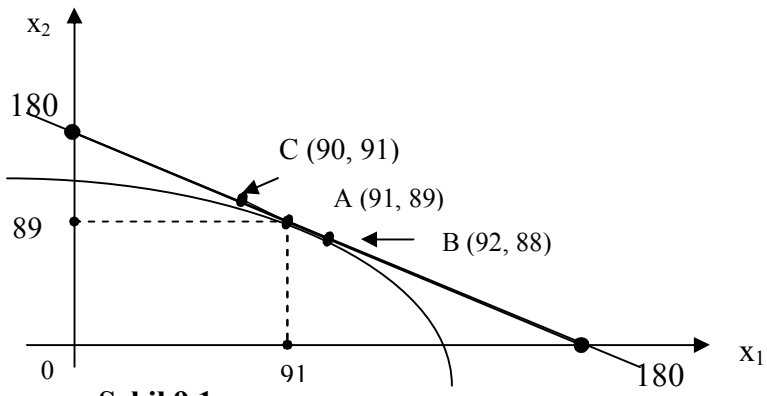
$$2 + 180 - x_2 = 4 + x_2$$

$$2x_2 = 179$$

$$x_2 = 89$$

$$x_1 = 91$$

Beləliklə, məlum oldu ki, $A(91{,}89)$ nöqtəsində (9.3) qeyri-xətti funksiyanın (9.4) şərti daxilində ən kiçik qiymətinin alınmasına şübhə vardır. Sonrakı tədqiqatları qrafiki qurmalar şəklində aparaq (şəkil 9.1):



Şəkil 9.1.

(9.3) qeyri-xətti funksiyanın riyazi təbiətinə əsaslanaraq şəkil 9.1-ə görə deyə bilərik ki, əgər

$$f(A)_{91,89} < f(B)_{92,88}$$

$$f(A)_{91,89} < f(C)_{90,90}$$

olarsa, onda $A(91,89)$ nöqtəsində məsələnin optimal həlli alınacaqdır

$$f(A)_{91,89} = 4\cdot 91 + 91^2 + 8\cdot 89 + 89^2 = 91\cdot 95 + 89\cdot 9 = 8645 + 8633 = 17278$$

$$f(B)_{92,88} = 4\cdot 92 + 92^2 + 8\cdot 88 + 88^2 = 92\cdot 96 + 88\cdot 96 = 96\cdot 180 = 17280$$

$$f(C)_{90,90} = 4\cdot 90 + 90^2 + 8\cdot 90 + 90^2 = 90\cdot 94 + 90\cdot 88 = 17280$$

Göründüyü kimi, $A(91,89)$ nöqtəsində məsələnin optimal həlli alınır:

$$X^*_{opt} = (x_1 = 91,\ x_2 = 89)$$

Onda

$$\min F(X^*) = 2x_1 + x_1^2 + 8x_1 + x_2^2 = 2\cdot 91 + 91^2 + 8\cdot 89 + 89^2 = 27278$$

alınır.

Beləliklə, müəssisə:

- birinci üsulla 91 ədəd
- ikinci üsulla 89 ədəd

detal hazırlanmalıdır. Bu halda 180 ədəd detalın hazırlanmasının məcmu istehsal xərcləri bütün mümkün istehsal variantları içərisində (bu variantların sayı 181-ə bərabərdir) ən kiçik kəmiyyət olub, 17278 şərti dəyər vahidi təşkil edəcəkdir.◀

Mövzu üzrə praktikum

9.1-9.11 qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələlərini Laqranj vuruqları üsulu ilə həll edin:

9.2	$Z(x) = x_1 x_2 \to \min$ $x_1^2 + x_2^2 = 2$
9.3	$Z(x) = x_1 + x_2 \to \min$ $1/x_1 + 1/x_2 = 1$
9.4	$Z(x) = x_1 x_2 x_3 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1 x_2 + x_2 x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 = 8 \end{cases}$
9.5	$Z(x) = x_1^3 + x_2^3 \to \min$ $x_1 + x_2 = 2$
9.6	$Z(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$
9.7	$Z(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$
9.8	$Z(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$
9.10	$Z(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$
9.11	$Z(x) = 3x_1 + x_1^2 + x_2^2 \to ext$ $6x_1 + 2x_2 = 8$
9.12	$Z(x) = 2x_1 + x_2^2 + x_3 - x_3^2 \to ext$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$

Mövzu üzrə testlər

1.Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllər oblastı:

A) Hökmən qabarıqdır;
B) Hökmən qabarıq deyil;
C) Həm qabarıq, həm də qeyri-qabarıq ola bilər;
D) Hökmən qabarıqdır, lakin məhdud deyil;
E) Hökmən qabarıq deyil və eyni zamanda məhdud deyil.

2. Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu və onun həndəsi mənası ilə bağlı aşağıdakı mülahizələrdən doğru olanını seçin.
- Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin həndəsi mənası dedikdə məsələnin həllər oblastının elə bir nöqtəsinin tapılması başa düşülür ki:

A) Bu nöqtə həllər oblastının ixtiyari nöqtəsi olsun;
B) Bu nöqtə həllər oblastının ixtiyari təpə nöqtəsi olsun;
C) Bu nöqtədən ən yüksək (ən aşağı) səviyyəli hipersəth keçsin;
D) Bu nöqtə həllər oblastının ixtiyari daxili nöqtəsi olsun;
E) Bu nöqtə həllər oblastının kənar nöqtəsi olsun.

3. Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu ilə bağlı aşağıdakı mülahizələrdən doğru olanını seçin:

A) Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsində yalnız məqsəd funksiyası qeyri-xətti olmalıdır;
B) Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsində yalnız məhdudiyyət şərtləri qeyri-xətti olmalıdır;
C) Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsində ya məqsəd funksiyası, ya məhdudiyyət şərtləri, ya da hər ikisi qeyri-xətti ola bilər;
D) Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin məqsəd funksiyası kəsr-xətti, məhdudiyyət şərtləri isə xətti ola bilər;
E) Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin məqsəd funksiyası qeyri-xətti olmalı, məhdudiyyət şərtləri isə xətti tənliklər olmalıdır.

4. Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsi verilmişdir:

$$f = x_1 x_2 x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = 28 \end{cases}$$

Laqranj funksiyası tərtib edin:

A) $F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1 x_2 x_3 + 15\lambda_1 + 28\lambda_2 (x_1 + x_2 + x_3 + x_1 x_2 +$
$+ x_2 x_3 + x_1 x_3)$

B) $F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1 x_2 x_3 + \lambda_1 [15 + (x_1 + x_2 + x_3)] +$
$+ \lambda_2 [28 + (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3)]$

C) $F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1 x_2 x_3 + \lambda_1 [15 + (x_1 + x_2 + x_3)] -$
$- \lambda_2 [28 + (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3)]$

D) $F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1 x_2 x_3 + \lambda_1 [15 - (x_1 + x_2 + x_3)] -$
$- \lambda_2 [28 - (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3)]$

E) $F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1 x_2 x_3 + \lambda_1 [15 - (x_1 + x_2 + x_3)] +$
$+ \lambda_2 [28 - (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3)]$

5. Aşağıdakı Laqranj funksiyası hansı qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsi əsasında tərtib edilmişdir:

$$F(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \lambda_1 [4 - (x_1 + x_2)] +$$
$$+ \lambda_2 [4 - (x_2 + x_3]$$

A) $Z(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 \to \min$
$\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$

B) $Z(x) = (x_1 x_2)^2 + (x_2 x_3)^2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

C) $Z(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 x_2 = 4 \\ x_2 x_3 = 4 \end{cases}$$

D) $Z(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

E) $Z(x) = x_1 x_2 x_2 x_3 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

II BÖLMƏ
İQTİSADİ-RİYAZİ MODELLƏR

- **Leontyev makromodelləri;**
- **Mikromodellər;**
- **Korrelyasiya və reqressiya təhlili modelləri;**
- **İstehsal funksiyaları;**
- **Proqnozlaşdırma modelləri;**
- **İqtisadiyyatın oyun modelləri.**

FƏSİL 10
İQTİSADİYYATIN MAKROMODELLƏRİ

10.1. Statik Leontyev modelinin çıxarılışı

Kibernetik yanaşma baxımından *makroiqtisadi sistem dedikdə bütövlükdə xalq təsərrüfatı başa düşülür.* Mürəkkəb, dinamik, stoxastik xarakterli makroiqtisadiyyatın optimal idarə edilməsi bu sistemin ayrı-ayrı alt sistemləri səviyyəsində tarazlıq əlaqələrinin yaradılması və dayanıqlığının təmin edilməsi yolu ilə təmin edilir. Makroiqtisadiyyat səviyyəsində optimal idarəetmə strategiyaları qurmaq üçün makromodellərdən istifadə edilir.

Ən çox istifadə edilən makromodellərə misal olaraq «məsrəf-buraxılış» tipli Leontyev modelini, Fon-Neyman modelini (genişlənən iqtisadiyyat modeli), Solou, Evans, Xarrod-Domar modellərini və s. göstərmək olar.

Makromodellərin qurulması və həlli problemlərini Leontyev makromodelləri timsalında izləyək. Leontyev makromodellərinin köməyi ilə həm bütövlükdə makroiqtisadi sistemdə, həm də onun ayrı-ayrı sahələrində məhsul istehsalı və bölüşdürülməsi, son məhsulun quruluşu, milli gəlirin yaranması, bölgüsü və son bölgüsü, müxtəlif təyinatlı axınların (material axınları, əmək ehtiyatları axınları, investisiya axınları və s.) sahələrarası hərəkəti və s. kimi makroiqtisadi proseslər və göstəricilər arasında olan tarazlıq əlaqələri kəmiyyət baxımından təhlil edilir.

Leontyev makromodellərinin [13] qurulmasına keçməzdən əvvəl makroiqtisadi sistemlə bağlı bəzi ilkin şərtləri qəbul edək. Fərz edəcəyik ki, makroiqtisadiyyatı formalaşdıran sahələr xalis sahələrdir. Yəni sahə yalnız bir növ məhsul istehsal edir və qalan sahələrin heç biri bu məhsulu istehsal etmir. Biz gələcəkdə bu maddi istehsal sahələrinə makroiqtisadi sistemin funksional alt sistemləri kimi baxacağıq və onları funksional bloklar adlandıracağıq.

---

[13] Bəzi ədəbiyyatlarda "məsrəf-buraxılış" tipli Leontyev modelinə "məhsul istehsalı və bölüşdürülməsinin sahələrarası balans modeli" də deyilir.

Leontyev modellərinin tərtib edilməsinin metodoloji əsasını makroiqtisadiyyatın ayrı-ayrı funksional bloklarının qarşılıqlı əlaqələrini əks etdirən aşağıdakı informasiya sxemi təşkil edir (bəzi ədəbiyyatlarda bu sxemə sahələrarası balans sxemi deyilir):

İstehlak edən funksional bloklar / İstehsal edən funksional bloklar	1	2	...	j	...	n	Son məhsul	Məcmu məhsul
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2j}	...	x_{2n}	y_2	x_2
...	...	...	...	...	...		...	...
i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{in}	y_i	x_i
...	...	...	...	...	...		...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nj}	...	x_{nn}	y_n	x_n
Xalis məhsul: Əmək ödənişi	v_1	v_2	(1)	v_j	...	v_n	v_{son}	
Xalis məhsul: Xalis gəlir	m_1	m_2	...	m_j	...	m_n	(2) m_{son}	-
Məcmu məhsul	x_1	x_2	...	x_j	...	x_n	-	X

Göründüyü kimi, informasiya sxeminin əsasını makroiqtisadiyyatın bütün bloklarının çoxluğu təşkil edir. Sxemdə bu blokların sayı $n-$ə bərabərdir. Hər bir blok sxemdə iki dəfə əks etdirilmişdir:

- istehsal edən blok kimi
- istehlak edən blok kimi

Hər bir bloka istehsalçı baxımından sxemin müəyyən sətiri, istehlakçı baxımından isə müəyyən sütunu uyğun gəlir. Onda aydındır ki, sxemin $i-$ci sətiri ilə $j-$cu sütununun kəsişməsində yerləşən x_{ij} *elementi i nömrəli blok tərəfindən* (3) *ıl edilən və* (4) *əli blokda material məsrəfi şəklində istehlak edilən məhsulun miqdarını göstə-*

rəcəkdir.

Sxemin sütunlarında hər bir funksional blokun material məsrəflərinin və xalis məhsulunun strukturu əks etdirilir. (Sxemdə xalis məhsul iki komponentə - əmək ödənişinə və xalis gəlirə bölünmüşdür). Onda aydındır ki, sxemin hər bir sütun elementlərinin cəmi həmin blokun məcmu məhsuluna bərabər olacaqdır. Məsələn, 1-ci sütun üçün alırıq:

$$x_1 = \boxed{x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{n1}} + \boxed{v_1 + m_1}$$

Material məsrəfləri Xalis məhsul

və ya ümumi şəkildə

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + v_j + m_j \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad (10.1)$$

Göründüyü kimi, (10.1) sistemi n sayda xətti tənliklərdən ibarətdir və bu sistemi quruluş tənlikləri sistemi adlandırmaq olar.

Sxemin sətirlərində isə hər bir blokun məcmu məhsulunun istifadə istiqamətləri üzrə bölgüsü əks etdirilir. Onda aydındır ki, sxemin hər bir sətir elementlərinin cəmi də uyğun funksional blokun məcmu məhsulunu verəcəkdir. Məsələn, 1-ci sətir üçün alırıq:

$$x_1 = \boxed{x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n}} + \boxed{y_1}$$

Istehsal sferasında qalan məhsul Istehsal sferasını tərk edən məhsul

və ya ümumi şəkildə

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \qquad (i = \overline{1,n}) \qquad (10.2)$$

(10.2) sistemi də n sayda xətti tənliklərdən ibarətdir və bu sistemi bölüşdürmə tənlikləri sistemi adlandıra bilərik.

Sxemin xarakterik xüsusiyyətlərindən biri odur ki, bu sxemdə müstəqil iqtisadi məzmuna malik olan dörd bölməni ayırmaq olar:

I bölmənin elementləri istehsal vasitələrinin bloklar arası axınlarını əks etdirir.

II bölmənin elementləri makroiqtisadi sistemdə yaradılmış son məhsulun strukturunu əks etdirir. Başqa sözlə desək, burada makroiqtisadi sistemin yaratdığı milli gəlirin material-əşya tərkibi açıqlanır.

III bölmənin elementləri də milli gəliri əks etdirir. Lakin II bölmədən fərqli olaraq burada milli gəlirin dəyər tərkibi açıqlanır.

Sxemin IV bölməsi isə milli gəlirin son bölgüsü və istifadəsini əks etdirir.

III və II bölmələrin iqtisadi məzmunları eyni olduğundan (hər ikisi milli gəliri göstərir) asanlıqla isbat etmək olar ki, bu bölmələrin yekunları bir-birinə bərabərdir.

Doğrudan da əgər (10.1) sistemini j indeksinə görə, (10.2) sistemini isə i indeksinə görə cəmləsək, alarıq:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} (v_j + m_j)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Alınmış ifadələrin sol tərəfləri bir-birinə bərabərdir. Belə ki, $\sum_{i=1}^{n} x_i$ və $\sum_{j=1}^{n} x_j$ ifadələri yaranma və bölüşdürmə baxımından makroiqtisadi sistemin məcmu məhsulunu göstərir. Sağ tərəflərin 1-ci toplananları da sxemin 1-ci bölmə elementlərinin cəmi olduğundan bir-birinə bərabərdir. Onda aydındır ki, tarazlığın qorunması üçün sağ tərəflərin 2-ci toplananları da bir-birinə bərabər olmalıdır, yəni:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} (v_j + m_j)$$

Sonuncu ifadənin sol tərəfi II bölmənin, sağ tərəfi isə III bölmənin yekunudur. Beləliklə, isbat etdik ki, Leontyev makromodellərində makroiqtisadi sistemin idarə edilməsinin mühüm prinsiplərindən biri olan milli gəlirin material-əşya tərkibi ilə dəyər tərkibinin vəhdəti prinsipi gözlənilir.

Yuxarıda əks etdirdiyimiz informasiya sxeminin xarakterik xüsusiyyətlərindən biri odur ki, bu sxemə daxil olan göstəricilər arasında ciddi riyazi asılılıqlar vardır. Makroiqtisadiyyatın ayrı-ayrı funksional alt sistemləri arasındakı texnoloji əlaqələri əks etdirmək üçün birbaşa məsrəf əmsallarından istifadə edilir. Bu əmsallar aşağıdakı kimi hesab-

lanır:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \qquad (10.3)$$

Burada: a_{ij} – makroiqtisadiyyatın i və j nömrəli funksional blokları arasındakı texnoloji əlaqələri əks etdirən birbaşa məsrəf əmsalını;

x_{ij} – i – ci blokda istehsal edilən və j – cu blok tərəfindən material məsrəfi şəklində istehlak edilən məhsulun miqdarını;

x_j – j – cu blokun məcmu məhsulunu əks etdirir.

Tərif: Birbaşa məsrəf əmsalı a_{ij} ***j – cu blokda bir vahid məhsul buraxmaq üçun material məsrəfi şəklində istifadə edilən*** i ***– ci blokun məhsulunun miqdarını göstərir.***

Bütövlükdə makroiqtisadiyyat səviyyəsində nisbi sabit hesab edilən (daha doğrusu ekzogen təbiətli) bu əmsallar aşağıdakı kvadrat matrisi əmələ gətirir:

$$a = \left\| a_{ij} \right\|_{n,n} \quad \text{və ya} \quad a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(10.3) ifadəsindən x_{ij} – un qiymətini tapsaq, alarıq:

$$x_{ij} = a_{ij} x_j \qquad (10.4)$$

(10.4) ifadəsini (10.2) bölüşdürmə tənlikləri sistemində yerinə yazsaq, alarıq:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \qquad (i = \overline{1,n}) \qquad (10.5)$$

və ya açıq şəkildə:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + y_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + y_n \end{cases}$$

(10.5) ifadəsinə ***statik Leontyev modeli*** deyilir. Qeyd edək ki, bəzi ədəbiyyatlarda bu modelə sahələrarası balansın statik modeli də deyilir.

İstifadə edilən riyazi aparatın xarakterinə görə bu model xətti tənliklər sistemindən ibarətdir. Bu tənliklər sisteminə n sayda xətti tənliklər və $2n$ sayda məchul daxildir (yəni: $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$). Məlum olduğu kimi belə sistemlər qeyri-müəyyəndir və onların sonsuz sayda həlli vardır. Odur ki, (10.5) modelini birqiymətli həll etmək üçün bu modeldə n sayda məchulun qiymətini məlum hesab edib, qalan n sayda məchulun qiymətini tapmaq lazım gəlir. Onda (10.5) Leontyev modeli əsasında makroiqtisadi balans hesablamaları aparmaq üçün aşağıdakı 3 variant alınır:

1. Bütün bloklar üzrə son məhsullar $(y_1, y_2, ..., y_n)$ verilir. Onda (10.5) modelini həll etməklə bütün funksional blokların məcmu məhsulları $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tapılır.

2. Bütün bloklar üzrə məcmu məhsullar verilir. Bu halda (10.5) Leontyev modelini həll etməklə bütün blokların son məhsulları tapılır.

3. Bəzi bloklar üzrə məcmu məhsullar, digər bloklar üzrə isə son məhsullar verilir. Bu halda ekzogen parametrlərin sayı n - ə bərabər olmalıdır. Onda (10.5) modelini həll etməklə məcmu məhsulları verilmiş bloklar üçün son məhsullar, son məhsulları verilmiş bloklar üçün isə məcmu məhsullar tapılır.

Qeyd edək ki, (10.5) modeli çoxvariantlı balans hesablamaları aparmaq üçün əlverişli deyil. Çünki bu zaman hər bir variant üçün böyük ölçülü xətti tənliklər sistemini təkrarən həll etmək lazım gəlir. Odur ki, bu modeli bir qədər başqa formaya gətirək.

Matris qoyuluşunda (10.5) statik Leontyev modeli aşağıdakı kimi yazılır:

$$X = aX + Y \qquad (10.6)$$

burada x-məcmu məhsul vektoru, y-son məhsul vektoru, a-isə birbaşa məsrəf əmsalları matrisidir. (10.6) ifadəsini x-ə görə həll edək:

$$X = aX + Y$$
$$X - aX = Y$$
$$(E - a)X = Y$$

Burada E – vahid matrisdir.

$$X = (E - a)^{-1} \cdot Y \qquad (10.7)$$

Beləliklə, (10.5) statik Leontyev modelinin həlli aşağıdakı matrisin tərsinin hesablanmasına gətirilir:

$$E-a=\begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12}\ldots-a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22}\ldots-a_{2n} \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2}\ldots 1-a_{nn} \end{bmatrix}$$

$(E-a)^{-1}$ tərs matrisini A ilə, bu matrisin elementlərini isə A_{ij} ilə işarə edək. Onda (10.7) ifadəsi aşağıdakı şəklə düşəcəkdir:

$$X = AY \qquad (10.8)$$

A matrisinə ***tam məsrəf əmsalları matrisi*** deyilir. Bu matrisin A_{ij} *elementi* $j-cu$ *blokda (sahədə) 1 vahid son məhsul istehsal etmək üçün material məsrəfi şəklində istifadə edilən* $i-ci$ *blokun (sahənin) məhsulunun miqdarını göstərir.* (10.8) ifadəsindən matrislərin vurulması qaydasına görə ayrı-ayrı sahələrin məcmu məhsullarını hesablasaq, alarıq:

$$\begin{cases} x_1 = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \ldots + A_{1n}y_n \\ x_2 = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + \ldots + A_{2n}y_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n = A_{n1}y_1 + A_{n2}y_2 + \ldots + A_{nn}y_n \end{cases}$$

və ya

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}y_j \qquad (i=\overline{1,n}) \quad (10.9)$$

Göründüyü kimi, (10.9) ifadəsində hər bir blokun məcmu məhsulu bütün blokların son məhsullarının törəməsinə çevrilir. Odur ki, (10.9) sisteminə daxil olan tənliklərin sağ tərəflərində məchul iştirak etmir və sistemin həlli elementar vurma və toplama əməliyyatlarına gətirilir. Bununla da alternativ balans hesablamaları aparmaq üçün əlverişli mexanizm formalaşır.

Statik Leontyev modelinin tərtibi və həllinə aid misala baxaq.

►**Məsələ 10.1.** Fərz edək ki, makroiqtisadiyyat şərti olaraq 3 funksional blok şəklində aqreqasiya olunmuşdur:

1.Sənaye

2.Kənd təsərrüfatı

3.Digər sahələr

Bu funksional bloklar üzrə birbaşa məsrəf əmsalları matrisi və son məhsul vektoru verilmişdir:

$$a = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Funksional blokların məcmu məhsullarını tapmaq tələb olunur.

Həlli: Statik Leontyev modelini tərtib edək. Əgər sənayenin məcmu məhsulunu x_1, kənd təsərrüfatının məcmu məhsulunu x_2, digər sahələrin məcmu məhsulunu isə x_3 ilə işarə etsək, qoyulmuş iqtisadi məsələ üçün Statik Leontyev modeli aşağıdakı şəkildə alınacaqdır:

$$\begin{cases} x_1 = 0,2x_1 + 0,2x_2 + 0,1x_3 + 50 \\ x_2 = 0,5x_1 + 0,3x_2 + 0,1x_3 + 100 \\ x_3 = 0,2x_1 + 0,2x_2 + 0,4x_3 + 30 \end{cases}$$

Modeli Qaus üsulu ilə həll edək:

$$\begin{cases} x_1 - 0,2x_1 - 0,2x_2 - 0,1x_3 = 50 \\ x_2 - 0,5x_1 - 0,3x_2 - 0,1x_3 = 100 \\ x_3 - 0,2x_1 - 0,2x_2 - 0,4x_3 = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,8x_1 - 0,2x_2 - 0,1x_3 = 50 \\ -0,5x_1 + 0,7x_2 - 0,1x_3 = 100 \\ -0,2x_1 - 0,2x_2 + 0,6x_3 = 30 \end{cases}$$

Sistemin 1-ci tənliyini (0,8)-ə, 2-ci tənliyini (0,5)-ə, 3-cü tənliyini isə (0,2)-yə bölək:

$$\begin{cases} x_1 - 0,25x_2 - 0,125x_3 = 62,5 \\ -x_1 + 1,40x_2 - 0,20x_3 = 200 \\ -x_1 - \quad x_2 + \quad 3x_3 = 150 \end{cases}$$

Sistemin 1-ci tənliyini olduğu kimi saxlayaraq, əvvəlcə 1-ci tənliklə 2-ci tənliyi, sonra isə 1-ci tənliklə 3-cü tənliyi tərəf-tərəfə toplasaq alarıq:

$$\begin{cases} x_1 - 0,25x_2 - 0,125x_3 = 62,5 \\ 1,15x_2 - 0,325x_3 = 262,5 \\ -1,25x_2 + 2,875x_3 = 212,5 \end{cases}$$

Indi isə 2-ci tənliyi (1,15)-ə, 3-cü tənliyi isə (1,25)-ə bölək:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}25x_2 - 0{,}125x_3 = 62{,}5 \\ x_2 - 0{,}283x_3 = 228{,}3 \\ -x_2 + 2{,}3x_3 = 170 \end{cases}$$

Sistemin 1-ci və 2-ci tənliklərini olduğu kimi saxlayıb, 2-ci tənliklə 3-cü tənliyi tərəf-tərəfə toplasaq alarıq:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}25x_2 - 0{,}125x_3 = 62{,}5 \\ x_2 - 0{,}283x_3 = 228{,}3 \\ 2{,}017x_3 = 398{,}3 \end{cases}$$

Sonuncu sistemin 3-cü tənliyindən x_3-ün qiymətini tapaq:

$$x_3 = 398{,}3 : 2{,}017 \approx 197{,}5$$

x_3 -ün tapılmış qiymətini 2-ci tənlikdə yerinə yazıb x_2 -nin qiymətini tapaq:

$$x_2 = 0{,}283 \cdot x_3 + 228{,}3 \approx 0{,}283 \cdot 197{,}5 + 228{,}3 \approx 284{,}2$$

x_2 və x_3 dəyişənlərinin tapılmış qiymətlərini 1-ci tənlikdə yerinə yazıb x_1-in qiymətini tapaq:

$$x_1 = 0{,}25 \cdot x_2 + 0{,}125 \cdot x_3 + 62{,}5 \approx 0{,}25 \cdot 284{,}2 + 0{,}125 \cdot 197{,}5 + 62{,}5 \approx 158{,}2$$

Beləliklə, məcmu məhsul vektoru aşağıdakı kimidir:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \approx 158{,}2 \\ x_2 \approx 284{,}2 \\ x_3 \approx 197{,}5 \end{pmatrix}$$

Indi isə baxılan makroiqtisadi sistem üçün funksional blokların qarşılıqlı əlaqələrini əks etdirən informasiya sxemini (sahələrarası balans sxemini) quraq. Əvvəlcə bu sxemin 1-ci bölməsinin elementlərini (istehsal vasitələrinin bloklararası axınlarını) hesablayaq:

$$x_{11} = a_{11}x_1 \approx 0{,}2 \cdot 158{,}2 \approx 31{,}64$$
$$x_{12} = a_{12}x_2 \approx 0{,}2 \cdot 284{,}2 \approx 56{,}84$$
$$x_{13} = a_{13}x_3 \approx 0{,}1 \cdot 197{,}5 \approx 19{,}75$$
$$x_{21} = a_{21}x_1 \approx 0{,}5 \cdot 158{,}2 \approx 79{,}1$$
$$x_{22} = a_{22}x_2 \approx 0{,}3 \cdot 284{,}2 \approx 85{,}26$$
$$x_{23} = a_{23}x_3 \approx 0{,}1 \cdot 197{,}5 \approx 19{,}75$$

$$x_{31} = a_{31}x_1 \approx 0{,}2 \cdot 158{,}2 \approx 31{,}64$$
$$x_{32} = a_{32}x_2 \approx 0{,}2 \cdot 284{,}2 \approx 56{,}84$$
$$x_{33} = a_{33}x_3 \approx 0{,}4 \cdot 197{,}5 \approx 79{,}0$$

2-ci bölmənin elementləri ekzogen təbiətli olduğu üçün 3-cü bölmənin elementlərini, daha doğrusu funksional blokların xalis məhsullarını (yəni "$z_j = v_j + m_j$" kəmiyyətlərini) müəyyən edək:

$$z_1 = x_1 - \sum_{i=1}^{3} x_{i1} \approx 158{,}2 - (31{,}64 + 79{,}1 + 31{,}64) \approx 158{,}2 - 142{,}38 \approx 15{,}82$$

$$z_2 = x_2 - \sum_{i=1}^{3} x_{i2} \approx 284{,}2 - (56{,}84 + 85{,}26 + 56{,}84) \approx 284{,}2 - 198{,}94 \approx 85{,}26$$

$$z_3 = x_3 - \sum_{i=1}^{3} x_{i3} \approx 197{,}5 - (19{,}75 + 19{,}75 + 79{,}0) \approx 197{,}5 - 118{,}5 \approx 79{,}0$$

Bizim misalda 4-cü bölmə yalnız bir göstəricidən ibarət olacaq və apardığımız makroiqtisadi hesablamaların düzgünlüyünə nəzarət etməyə xidmət edəcəkdir. Daha doğrusu, ikinci bölmənin yekununun üçüncü bölmənin yekununa bərabər olmasına nəzarət etməyə imkan verəcəkdir. Hesablamaların nəticələrini aşağıdakı sxemdə yerləşdirək:

Istehlak edən f.b / Istehsal edən f.b.	**Sənaye**	**Kənd təsərrüfatı**	**Digər sahələr**	**Son məhsul**	**Məcmu məhsul**
Sənaye	31,64	56,84	19,75	50	158,2
Kənd təsərrüfatı	79,1	85,26	19,75	100	284,2
Digər sahələr	31,64	56,84	79,0	30	197,5
Xalis məhsul	15,82	85,26	79,0	180=180	-
Məcmu məhsul	158,2	284,2	197,5	-	639,9

Apardığımız makroiqsadi hesablamaların mütləq və nisbi xətalarını hesablayaq:

Sənaye üzrə:

Mütləq xəta:

$$\Delta x_1 = x_1 - (\sum_{j=1}^{3} x_{1j} + y_1) = 158{,}2 - (31{,}64 + 56{,}84 + 19{,}75 + 50) \approx$$

$$\approx 158{,}2 - 158{,}23 \approx -0{,}03$$

Nisbi xəta:

$$\frac{|\Delta x_1|}{x_1} \cdot 100 = \frac{0{,}03 \cdot 100}{158{,}2} \approx 0{,}019\%$$

Kənd təsərrüfatı üzrə:

Mütləq xəta:

$$\Delta x_2 = x_2 - (\sum_{j=1}^{3} x_{2j} + y_2) = 284{,}2 - (79{,}1 + 85{,}26 + 19{,}75 + 100) \approx$$

$$\approx 284{,}2 - 284{,}11 \approx 0{,}09$$

Nisbi xəta:

$$\frac{|\Delta x_2|}{x_2} \cdot 100 = \frac{0{,}09 \cdot 100}{284{,}2} \approx 0{,}032\%$$

Digər sahələr üzrə:

Mütləq xəta:

$$\Delta x_3 = x_3 - (\sum_{j=1}^{3} x_{3j} + y_3) = 197{,}5 - (31{,}64 + 56{,}84 + 79{,}0 + 30) \approx$$

$$\approx 197{,}5 - 197{,}48 \approx 0{,}02$$

Nisbi xəta:

$$\frac{|\Delta x_3|}{x_3} \cdot 100 = \frac{0{,}02 \cdot 100}{197{,}5} \approx 0{,}010\%$$

Beləliklə, makroiqtisadi sistemdə sənaye üzrə 50 vahid, kənd təsərrüfatı üzrə 100 vahid və digər sahələr üzrə 30 vahid son məhsul təmin etmək üçün 158,2 vahid sənaye məhsulu, 284,2 vahid kənd təsərrüfatı məhsulu və 197,5 vahid digər sahələrin məhsulu istehsal edilməlidir.

Cavab: x_1 **(sənaye) ≈158,2,** x_2 **(kənd təsərrüfatı) ≈ 284,2,** x_3 **(digər sahələr) ≈ 197,5.◄**

10.2. Birbaşa və tam məsrəf əmsalları matrislərinin riyazi xarakteristikaları

İndi isə birbaşa və tam məsrəf əmsalları matrisinin bəzi kəmiyyət xarakteristikalarını nəzərdən keçirək.

Teorem: Birbaşa məsrəf əmsalları matrisində hər bir sütun elementlərinin cəmi 1-dən kiçikdir.

Bu teoremi a birbaşa məsrəf əmsalları matrisinin 1-ci sütun elementləri üçün isbat edək.

a matrisinin 1-ci sütun elementlərinin cəminə baxaq:

$$a_{11} + a_{21} + ... + a_{n1}$$

İsbat etməliyik ki, bu kəmiyyət 1-dən kiçikdır.

Bu cəmi birinci blokun məcmu məhsulu olan x_1 – ə vursaq, alarıq:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_1 + ... + a_{n1}x_1$$

Alınmış cəm öz iqtisadi məzmununa görə birinci blokun material məsrəflərinin cəmidir. Bu cəmə birinci blokun xalis məhsulu olan $(v_1 + m_1)$ daxil olmadığından, təbii ki, bu kəmiyyət birinci blokun məcmu məhsulundan kiçik olacaqdır:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_1 + ... + a_{n1}x_1 < x_1$$

Alınmış bərabərsizliyi $x_1 \neq 0$ və $x_1 > 0$ şərtləri daxilində x_1 – ə bölsək, alarıq

$$a_{11} + a_{21} + ... + a_{n1} < 1$$

Teorem isbat edildi. Bu şərti a birbaşa məsrəf əmsalları matrisinin bütün sütunları üçün ümumləşdirsək, alarıq:

$$a_{1j} + a_{2j} + ... + a_{nj} < 1 \qquad (j = \overline{1,n})$$

və ya

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \qquad (j = \overline{1,n})$$

Analoji yanaşma əsasında isbat edilir ki, a birbaşa məsrəf əmsalları matrisinin hər bir sətir elementlərinin cəmi də vahiddən böyük deyil. Teoremdən belə nəticə almaq olar ki, a birbaşa məsrəf əmsalları matrisinin hər bir elementinin qiyməti $0 \leq a_{ij} < 1$ oblastında dəyişir.

Qeyd: *1. Bəzi ədəbiyyatlarda qeyd edilir ki, a birbaşa məsrəf əmsalları matrisinin hər bir sətir elementlərinin cəmi 1- dən kiçikdir,*

yəni $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1 \quad (i = \overline{1,n})$ *şərtləri ödənir. Qeyd edək ki, biz bu halı iqtisadi həqiqətlər baxımından real şəraiti daha adekvat əks etdirən hal kimi qəbul edirik.*

2. Bəzi ədəbiyyatlarda qeyd edilir ki, a matrisinin elementləri $0 \le a_{ij} \le 1$ *oblastında dəyişir. Qeyd edək ki, iqtisadi həqiqətlər müstəvisində bu fikirlə razılaşmaq çətindir. Belə ki, əgər* $a_{ij} = 1$ *olarsa, onda* $j-$*cu blokun məhsulu material tutumu baxımından 100%* $i-$*ci blokun məhsulundan ibarət olmalıdır. Təbii ki, bu hal iqtisadi baxımdan nonsensdır.*

İndi isə verilmiş a birbaşa məsrəf əmsalları matrisinə görə A tam məsrəf əmsalları matrisinin qurulmasına baxaq. Bunun üçün aşağıdakı üsullardan istifadə edilir:

- **Tərs matrisin qurulmasının riyazi yolu**

$A = (E-a)^{-1}$ olduğundan, A tam məsrəf əmsalları matrisini $(E-a)$ matrisinin tərsi kimi riyazi yolla qurmaq olar, yəni:

$$A = (E-a)^{-1} = \frac{1}{|E-a|} \cdot \left\| c_{ij} \right\|^{T}$$

Burada $c_{ij} - (E-a)$ matrisinin $\{i, j\}$ indeksli elementinin cəbri tamamlayıcısı olub $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ kimi hesablanır (M_{ij} - həmin elementin minorudur).

Beləliklə, A tam məsrəf əmsalları matrisini almaq üçün aşağıdakı alqoritm tətbiq oluna bilər:

1-ci mərhələdə a birbaşa məsrəf əmsalları matrisinə görə $(E-a)$ *matrisi qurulur;*

2-ci mərhələdə $(E-a)$ *matrisinin determinantı hesablanır. Əgər* $|E-a| = 0$ *olarsa, onda bu matrisin tərsi yoxdur. Əgər* $|E-a| \ne 0$ *olarsa, onda 3-cü mərhələyə keçilir;*

3-cü mərhələdə $(E-a)$ *matrisi transponirə edilir;*

4-cü mərhələdə $(E-a)^{T}$ *matrisinin hər bir elementinin yerinə bu elementin cəbri tamamlayıcısı* $(C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n})$ *yazılır;*

5-ci mərhələdə alınmış matrisin hər bir elementini $(E-a)$ *mat-*

risinin determinantına bölməklə A tam məsrəf əmsalları matrisini alırıq.

- **1 vahid son məhsula görə;**

Fərz edək ki, 1-ci funksional blokun son məhsulu 1-ə bərabərdir, yəni $y_1 = 1$. Qalan blokların son məhsullarının isə 0-a bərabər olduğunu şərtləşək, yəni $y_2 = y_3 = ... = y_n = 0$. Onda (10.6) statik Leontyev modeli aşağıdakı kimi olacaqdır:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + 1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + 0 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + 0 \end{cases}$$

Göründüyü kimi, bu halda makroiqtisadiyyatın bütün funksional bloklarının fəaliyyəti 1-ci funksional blokda 1 vahid son məhsulun təmin edilməsinə xidmət edir. Deməli, bu sistemin həlli öz iqtisadi məzmununa görə A tam məsrəf əmsalları matrisinin 1-ci sütununun elementləri ilə üst-üstə düşəcəkdir, yəni:

$$x_1 = A_{11}$$
$$x_2 = A_{21}$$
$$...$$
$$x_n = A_{n1}$$

Beləliklə, ardıcıl olaraq hər bir blokun son məhsulunu 1-ə bərabər edib (bu halda qalan bütün blokların son məhsulları 0-a bərabər olmalıdır) alınmış xətti tənliklər sistemini həll etsək, n sayda addımdan sonra A tam məsrəf əmsalları matrisinin bütün elementlərini hesablamış olarıq.

- **İterativ metod.**

İsbat edilir ki, A matrisinin qurulması aşağıdakı matris sırasının yığılmasına gətirilr:

$$A = (E - a)^{-1} \approx E + a + a^2 + ... + a^R + ... \approx E + \sum_{R=1}^{\infty} a^R$$

Doğrudan da əgər B matrisi $C-$nin tərs matrisidirsə, onda hökmən $BC = CB = E$ olduğunu nəzərə alsaq, alarıq:

$$(E - a)(E + a + a^2 + a^3 + ...) = E + a + a^2 + a^3 + ... - a - a^2 - a^3 - ... = E$$

Buradan da belə bir qənaətə gəlmək olar ki, tam məsrəf əmsalları matrisinin elementləri üçün

$$A_{ij} \geq a_{ij} \qquad (i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n})$$

şərtləri ödənməlidir, yəni j-cu funksional blokda 1 vahid son məhsul istehsalı ilə bağlı $i-$ci blokun material məsrəflərini əks etdirən A_{ij} tam məsrəf əmsalı bu blokda 1 vahid məcmu məhsul istehsalı ilə bağlı olan a_{ij} birbaşa məsrəf əmsalından kiçik deyil. Digər tərəfdən $i=j$ olduqda hökmən $A_{ij}>1$ şərti ödənməlidir, $i \neq j$ olduqda isə $A_{ij} \geq 0$ olacaqdır.

Indi isə tam məsrəf əmsalları matrisi əsasında Leontyev modelinin tərtibi və həllinə aid misala baxaq.

►**Məsələ 10.2.** Fərz edək ki, makroiqtisadi sistem ***Məsələ 10.1***-də verilmiş a birbaşa məsrəf əmsalları matrisi və y son məhsul vektoru ilə xarakterizə edilir.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, verilmiş a birbaşa məsrəf əmsalları matrisinə görə A tam məsrəf əmsalları matrisini müxtəlif yollarla qurmaq olar.

▪A tam məsrəf əmsalları matrisini (E-a) matrisinin tərs matrisi kimi riyazi yolla quraq:

- (E-a) matrisini quraq:

$$(E-a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}1\\ -0{,}5 & 0{,}7 & -0{,}1\\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}6\end{pmatrix}$$

- $(E-a)$ matrisinin determinantını hesablayaq:

$$|E-a|=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0.6+(-0{,}5)\cdot(-0{,}1)\cdot(-0{,}2)+(-0{,}2)\cdot(-0{,}2)\cdot(-0{,}1)-$$
$$-0{,}7\cdot(-0{,}1)\cdot(-0{,}2)-0{,}6\cdot(-0{,}2)\cdot(-0{,}5)-0.8\cdot(-0{,}1)\cdot(-0{,}2)=$$
$$=0{,}336-0{,}01-0{,}004-0{,}014-0{,}06-0{,}016\approx 0{,}232$$

- $(E-a)$ matrisini transponirə edək:

$$(E-a)^T=\begin{pmatrix}0{,}8 & -0{,}5 & -0{,}2\\ -0{,}2 & 0{,}7 & -0{,}2\\ -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}6\end{pmatrix}$$

• $(E-a)^T$ matrisinin elementləri üçün cəbri tamamlayıcıları tapaq:

$$S_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & 0,6 \end{vmatrix} = 0,7 \cdot 0,6 - [(-0,2) \cdot (-0,1)] = 0,42 - 0,02 = 0,40$$

$$S_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -0,2 & -0,2 \\ -0,1 & 0,6 \end{vmatrix} = -\{[(-0,2) \cdot 0,6] - [(-0,2) \cdot (-0,1)]\} = -[-0,12 - 0,02] = 0,14$$

$$S_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -0,2 & 0,7 \\ -0,1 & -0,1 \end{vmatrix} = [(-0,2) \cdot (-0,1)] - [0,7 \cdot (-0,1)] = 0,02 + 0,07 = 0,09$$

$$S_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -0,5 & -0,2 \\ -0,1 & 0,6 \end{vmatrix} = -\{[(-0,5) \cdot 0,6] - [(-0,2) \cdot (-0,1)]\} =$$

$$= -[-0,3 - 0,02] = 0,32$$

$$S_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,1 & 0,6 \end{vmatrix} = 0,8 \cdot 0,6 - [(-0,2) \cdot (-0,1)] = 0,48 - 0,02 = 0,46$$

$$S_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 0,8 & -0,5 \\ -0,1 & -0,1 \end{vmatrix} = -\{[0,8 \cdot (-0,1)] - [(-0,5) \cdot (-0,1)]\} = -[-0,08 - 0,05] = 0,13$$

$$S_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -0,5 & -0,2 \\ 0,7 & -0,2 \end{vmatrix} = [(-0,5) \cdot (-0,2)] - [(-0,2) \cdot (0,7)] =$$

$$= 0,10 + 0,14 = 0,24$$

$$S_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,2 & -0,2 \end{vmatrix} = -\{[0,8 \cdot (-0,2)] - [(-0,2) \cdot (-0,2)]\} = -[-0,16 - 0,04] = 0,2$$

$$S_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 0,8 & -0,5 \\ -0,2 & 0,7 \end{vmatrix} = 0,8 \cdot 0,7 - [(-0,5) \cdot (-0,2)] = 0,56 - 0,10 = 0,46$$

Beləliklə alırıq:

$$(\overline{E - a}) = \begin{pmatrix} 0,40 & 0,14 & 0,09 \\ 0,32 & 0,46 & 0,13 \\ 0,24 & 0,20 & 0,46 \end{pmatrix}$$

- $A = \dfrac{(\overline{E - a})}{|E - a|}$ olduğunu nəzərə alsaq, taparıq:

$$A = \begin{pmatrix} 0,40 & 0,14 & 0,09 \\ 0,32 & 0,46 & 0,13 \\ 0,24 & 0,20 & 0,46 \end{pmatrix} : 0,232 = \begin{pmatrix} 1,724 & 0,603 & 0,388 \\ 1,379 & 1,983 & 0,560 \\ 1,034 & 0,862 & 1,983 \end{pmatrix}$$

▪ A tam məsrəf əmsalları matrisini funksional blokların 1 vahid son məhsullarına görə quraq:

- Tutaq ki, $y_1 = 1,\quad y_2 = y_3 = 0$ -dır. Onda Leontyev modeli aşağıdakı şəkildə alınacaqdır:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 + 1 \\ x_2 = 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}1x_3 + 0 \\ x_3 = 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 + 0 \end{cases}$$

Modeli Qaus üsulu ilə həll edək:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 - 0{,}2x_2 - 0{,}1x_3 = 1 \\ -0{,}5x_1 + 0{,}7x_2 - 0{,}1x_3 = 0 \\ -0{,}2x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}6x_3 = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} :0{,}8 \\ :0{,}5 \\ :0{,}2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}25x_2 - 0{,}125x_3 = 1{,}25 \\ -x_1 + 1{,}40x_2 - 0{,}20x_3 = 0 \\ -x_1 - \quad x_2 + \quad 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}25x_2 - 0{,}125x_3 = 1{,}25 \\ 1{,}15x_2 - 0{,}325x_3 = 1{,}25 \\ -1{,}25x_2 + 2{,}875x_3 = 1{,}25 \end{cases} \begin{vmatrix} \\ :1{,}15 \\ :1{,}25 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}25x_2 - 0{,}125x_3 = 1{,}25 \\ x_2 - 0{,}283x_3 = 1{,}087 \\ -x_2 + 2{,}3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}25x_2 - 0{,}125x_3 = 1{,}25 \\ x_2 - 0{,}283x_3 = 1{,}087 \\ 2{,}017x_3 = 2{,}087 \end{cases}$$

$$x_3 = 2{,}087 : 2{,}017 \approx 1{,}034$$

$$x_2 = 1{,}087 + 0{,}283 \cdot 1{,}034 \approx 1{,}379$$

$$x_1 = 1{,}25 + 0{,}25 \cdot 1{,}38 + 0{,}125 \cdot 1{,}034 \approx 1{,}724$$

Beləliklə, A tam məsrəf əmsalları matrisinin 1-ci sütun elementlərinin qiymətləri üçün alırıq:

$$A_{11} = x_1 \approx 1{,}724; \quad A_{21} = x_2 \approx 1{,}379; \quad A_{31} = x_3 \approx 1{,}034$$

- Tutaq ki, $y_2 = 1$, $y_1 = y_3 = 0$ -dır. Onda Leontyev modeli aşağıdakı şəkildə alınacaqdır:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 + 0 \\ x_2 = 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}1x_3 + 1 \\ x_3 = 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 + 0 \end{cases}$$

Modeli Qaus üsulu ilə həll edək:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 - 0{,}2x_2 - 0{,}1x_3 = 0 \\ -0{,}5x_1 + 0{,}7x_2 - 0{,}1x_3 = 1 \\ -0{,}2x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}6x_3 = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} : 0{,}8 \\ : 0{,}5 \\ : 0{,}2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}25x_2 - 0{,}125x_3 = 0 \\ -x_1 + 1{,}40x_2 - 0{,}20x_3 = 2 \\ -x_1 - \quad x_2 + \quad 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}25x_2 - 0{,}125x_3 = 0 \\ 1{,}15x_2 - 0{,}325x_3 = 2 \\ -1{,}25x_2 + 2{,}875x_3 = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} \\ : 1{,}15 \\ : 1{,}25 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}25x_2 - 0{,}125x_3 = 0 \\ x_2 - 0{,}283x_3 = 1{,}739 \\ -x_2 + 2{,}3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}25x_2 - 0{,}125x_3 = 0 \\ x_2 - 0{,}283x_3 = 1{,}739 \\ 2{,}017x_3 = 1{,}739 \end{cases}$$

$$x_3 = 1{,}739 : 2{,}017 \approx 0{,}862$$

$$x_2 = 1{,}739 + 0{,}283 \cdot 0{,}862 \approx 1{,}983$$

$$x_1 = 0{,}25 \cdot 1{,}983 + 0{,}125 \cdot 0{,}862 \approx 0{,}604$$

Beləliklə, A tam məsrəf əmsalları matrisinin 2-ci sütun elementlərinin qiymətləri üçün alırıq:

$$A_{12} = x_1 \approx 0{,}604\,; \quad A_{22} = x_2 \approx 1{,}983\,; \quad A_{32} = x_3 \approx 0{,}862$$

- Tutaq ki, $y_3 = 1$, $y_1 = y_2 = 0$ -dır. Onda Leontyev modeli aşağıdakı şəkildə alınacaqdır:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 + 0 \\ x_2 = 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}1x_3 + 0 \\ x_3 = 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 + 1 \end{cases}$$

Modeli Qaus üsulu ilə həll edək:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 - 0{,}2x_2 - 0{,}1x_3 = 0 \\ -0{,}5x_1 + 0{,}7x_2 - 0{,}1x_3 = 0 \\ -0{,}2x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}6x_3 = 1 \end{cases} \begin{vmatrix} :0{,}8 \\ :0{,}5 \\ :0{,}2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}25x_2 - 0{,}125x_3 = 0 \\ -x_1 + 1{,}40x_2 - 0{,}20x_3 = 0 \\ -x_1 - \quad x_2 + \quad 3x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}25x_2 - 0{,}125x_3 = 0 \\ 1{,}15x_2 - 0{,}325x_3 = 0 \\ -1{,}25x_2 + 2{,}875x_3 = 5 \end{cases} \begin{vmatrix} \\ :1{,}15 \\ :1{,}25 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}25x_2 - 0{,}125x_3 = 0 \\ x_2 - 0{,}283x_3 = 0 \\ -x_2 + 2{,}3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}25x_2 - 0{,}125x_3 = 0 \\ x_2 - 0{,}283x_3 = 0 \\ 2{,}017x_3 = 4 \end{cases}$$

$$x_3 = 4 : 2{,}017 \approx 1{,}983$$

$$x_2 = 0{,}283 \cdot 1{,}983 \approx 0{,}561$$

$$x_1 = 0{,}25 \cdot 0{,}561 + 0{,}125 \cdot 1{,}983 \approx 0{,}388$$

Beləliklə, A tam məsrəf əmsalları matrisinin 3-cü sütun elementlərinin qiymətləri üçün alırıq:

$$A_{13} = x_1 \approx 0{,}388\,; \quad A_{23} = x_2 \approx 0{,}561\,; \quad A_{33} = x_3 \approx 1{,}983$$

A tam məsrəf əmsalları matrisinin bütün elementləri təyin edildi:

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}724 & 0{,}604 & 0{,}388 \\ 1{,}380 & 1{,}983 & 0{,}561 \\ 1{,}034 & 0{,}862 & 1{,}983 \end{pmatrix}$$

▪ A tam məsrəf əmsalları matrisini matris sırasının yığılması şəklində (təqribi yolla) quraq:

$$A = (E - a)^{-1} = E + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \ldots$$

$$a^2 = a \cdot a = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}16 & 0{,}12 & 0{,}08 \\ 0{,}27 & 0{,}21 & 0{,}12 \\ 0{,}22 & 0{,}18 & 0{,}20 \end{pmatrix}$$

$$a^3 = a \cdot a^2 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}16 & 0{,}12 & 0{,}08 \\ 0{,}27 & 0{,}21 & 0{,}12 \\ 0{,}22 & 0{,}18 & 0{,}20 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}108 & 0{,}084 & 0{,}060 \\ 0{,}183 & 0{,}141 & 0{,}096 \\ 0{,}174 & 0{,}138 & 0{,}120 \end{pmatrix}$$

$$a^4 = a \cdot a^3 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}108 & 0{,}084 & 0{,}060 \\ 0{,}183 & 0{,}141 & 0{,}096 \\ 0{,}174 & 0{,}138 & 0{,}120 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}0756 & 0{,}0588 & 0{,}0432 \\ 0{,}1263 & 0{,}0981 & 0{,}0708 \\ 0{,}1278 & 0{,}1002 & 0{,}0792 \end{pmatrix}$$

$$a^5 = a \cdot a^4 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}0756 & 0{,}0588 & 0{,}0432 \\ 0{,}1263 & 0{,}0981 & 0{,}0708 \\ 0{,}1278 & 0{,}1002 & 0{,}0792 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}05316 & 0{,}04140 & 0{,}03072 \\ 0{,}08847 & 0{,}06885 & 0{,}05076 \\ 0{,}09150 & 0{,}07146 & 0{,}05448 \end{pmatrix}$$

Beləliklə, A tam məsrəf əmsalları matrisini təqribi olaraq aşağıdakı kimi alırıq:

$$A=E+a+a^2+a^3+a^4+a^5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}2&0{,}2&0{,}1\\0{,}5&0{,}3&0{,}1\\0{,}2&0{,}2&0{,}4\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}0{,}16&0{,}12&0{,}08\\0{,}27&0{,}21&0{,}12\\0{,}22&0{,}18&0{,}20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}108&0{,}084&0{,}060\\0{,}183&0{,}141&0{,}096\\0{,}174&0{,}138&0{,}120\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}0756&0{,}0588&0{,}0432\\0{,}1263&0{,}0981&0{,}0708\\0{,}1278&0{,}1002&0{,}0792\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}0{,}05316&0{,}04140&0{,}03072\\0{,}08847&0{,}06885&0{,}05076\\0{,}09150&0{,}07146&0{,}05448\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}59676&0{,}50420&0{,}31392\\1{,}16777&1{,}81795&0{,}43756\\0{,}81330&0{,}68966&1{,}85368\end{pmatrix}$$

Müxtəlif üsullarla tərtib edilmiş A tam məsrəf əmsalları matrislərinin müqayisəsi göstərir ki, 1-ci və 2-ci üsulla tərtib edilmiş A tam məsrəf əmsalları matrisləri bir-birindən cüzi fərqlənir, sonuncu iterativ üsulla qurduğumuz A matrisinin elementlərinin qiymətləri isə bu matrislərin elementlərinin qiymətlərindən əhəmiyyətli dərəcədə azdır. Deməli, sonuncu A tam məsrəf əmsalları matrisinin real iqtisadi şəraitə adekvatlığı daha aşağıdır. Odur ki, tam məsrəf əmsalları matrisi əsasında funksional blokların məcmu məhsullarını hesablamaq üçün 1 vahid son məhsula görə hesablanmış tam məsrəf əmsalları matrisindən istifadə edək:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}724&0{,}604&0{,}388\\1{,}380&1{,}983&0{,}561\\1{,}034&0{,}862&1{,}983\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}50\\100\\30\end{pmatrix}$$

$$x_1=1{,}724\cdot 50+0{,}604\cdot 100+0{,}388\cdot 30=86{,}2+60{,}4+11{,}64\approx 158{,}24$$

$$x_2=1{,}380\cdot 50+1{,}983\cdot 100+0{,}561\cdot 30=69+198{,}3+16{,}83\approx 284{,}13$$

$$x_3=1{,}034\cdot 50+0{,}862\cdot 100+1{,}983\cdot 30=51{,}7+86{,}2+59{,}49\approx 197{,}39$$

Göründüyü kimi, alınmış nəticələr **Məsələ 10.1-də** funksional blokların məcmu məhsulları üçün alınmış qiymətlərlə əsasən üst-üstə düşür.

Cavab: x_1 **(sənaye) ≈158,2,** x_2 **(kənd təsərrüfatı) ≈284,1,** x_3 **(digər sahələr) ≈197,4.** ◄

10.3. Leontyev makromodelinin xətti optimallaşdırma modelinə gətirilməsi

Yuxarıda nəzərdən keçirdiyimiz Leontyev modelləri balans modelləri idi. Çünki bu modellərdə makroiqtisadi göstəricilər arasındakı tarazlıq əlaqələri kəmiyyət baxımından təhlil edilir, mümkün davranış variantları içərisindən qarşıya qoyulmuş məqsədə ən yaxşı cavab verən variantın tapılması problemi isə araşdırılmırdı, daha doğrusu optimallaşdırma məsələsi həll edilmirdi. Qeyd edək ki, Leontyev modellərini optimallaşdırma modelləri şəklində qurmaq olar.

Əvvəlcə ən yaxşı sahələrarası balansın seçilməsi məsələsinin qoyuluşunu verək. Bu məqsədlə ilk növbədə optimallıq kriteriyası müəyyən edilməlidir. Bu optimallıq kriteriyasını müəyyən etmək üçün fərz edəcəyik ki, makroiqtisadiyyatın hər bir funksional blokunun məhsul vahidi üçün bu növ son məhsulun əhəmiyyətliliyini xarakterizə edəcək $c_1, c_2, ..., c_n$ ədədləri seçmək mümkündür. Onda son məhsul vektorunu

$$U = (c,\ \ y) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \qquad (10.10)$$

göstəricisi ilə ifadə etmək mümkün olacaqdır. Bu halda ən yaxşı sahələrarası balansın seçilməsi ilə bağlı optimallaşdırma məsələsini belə ifadə etmək olar: *Elə mənfi olmayan Y son məhsul vektoru və X məcmu məhsul vektoru tapmaq lazımdır ki, bu vektorlar*

$$X = AY$$

model şərtlərini ödəsinlər və $U = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ *optimallıq kriteriyasına maksimum qiymət versinlər, yəni;*

$$U = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \to \max \qquad (10.11)$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_i \qquad (i = \overline{1,n}) \qquad (10.12)$$

$$x_i \geq 0,\ \ y_i \geq 0 \qquad (i = \overline{1,n},\ \ i = \overline{1,n}) \qquad (10.13)$$

Asanlıqla yəqin edə bilərik ki, məsələ düzgün ifadə edilməmişdir və onun həlli yoxdur.

Dogrudan da, fərz edək ki, elə $X^* \geq 0$ və $Y^* \geq 0$ vektorlar cütü

mövcuddur ki, onlar $X = AY$ asılılığını ödəyirlər və bu vektorlara görə $U^* = (c,\ y_i^*)$ məqsəd funksiyası özünün maksimal qiymətini alır. $\overline{Y^*} = \beta Y^*$ vektoruna baxaq, burada $\beta > 1-$ dir. Təbii ki, $\overline{Y^*} = \beta Y^* \geq 0$ şərti odənəcəkdir. Eləcə də aydındır ki, $\overline{X^*} = \beta X^*$ məcmu məhsul buraxılışı vektoru da qeyri-mənfidir və bu vektorla $\overline{y}_i^*$ vektoru arasında $X = AY$ kəmiyyət asılılığı ödənir. Əgər bu halda $\overline{y}_i^*$ son məhsul vektoru üçün məqsəd funksiyasının qiymətini hesablasaq, alarıq:

$$\overline{U}^* = (c,\ \overline{y}_i^*) = \sum_{i=1}^{n} c_i \beta y_i^* = \beta \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^* = \beta U^* > U^* \qquad (10.14)$$

Deməli, $\{X^*, Y^*\}$ vektorlar cütü qoyulmuş optimallaşdırma məsələsinin optimal həlli deyil və bu vektorlara görə məqsəd funksiyasının maksimal qiyməti təmin edilmir.

Məsələnin qeyri-korrekt qoyuluşunun səbəbi ondadır ki, əgər funksional blokların məhsul buraxılışı vektorunun istehsal istehlakı baxımından $X = AY$ asılılığı ilə balanslılığı təmin edilibsə, onda funksional blokların məcmu məhsullarını məhdudiyyətsiz şəkildə artırmaq imkanı qazanırıq. Lakin real iqtisadi həyatda makroiqtisadiyyatın funksional bloklarının məhsul istehsalı imkanlarını qeyri-məhdud hesab etmək olmaz və bu imkanların məhduduluğu istehsal ehtiyatlarının (xammallar, yanacaq, enerji və s.) məhdudluğu ilə bağlıdır. Odur ki, məsələni korrekt ifadə etmək üçün həmin qeyri-korrektliyi doğuran əsas səbəblər - əsas fondlar və əmək ehtiyatları üzrə uçot aparılmalıdır. Funksional blokların fəaliyyətində bu ehtiyatların məhdudluğunu nəzərə alaq. Bu məqsədlə sabit nisbətli aşağıdakı istehsal funksiyasından istifadə edək:

$$x_i \leq \min\{d_i^1 K_i, d_i^2 L_i\} \qquad (i = \overline{1,n}) \qquad (10.15)$$

Burada: K_i – makroiqtisadiyyatın i – ci funksional blokunda əsas fondların miqdarı;

d_i^1 – i – ci funksional blokda fond verimi;

L_i – i – ci funksional blokda işləyənlərin sayı;

d_i^2 – i – ci funksional blokda əmək məhsuldarlığıdır.

Əsas fondlar üzrə məhdudiyyətlər çox vaxt bir qədər başqa şəkildə əks etdirilir:

$$x_i \leq t_i \qquad (i = \overline{1,n}) \qquad (10.16)$$

Burada: $t_i = d_i^1 K_i - i -$ ci funksional blokun güc göstəricisidir. Bu göstərici mövcud əsas fondlar və sabit fondverimi şəraitində funksional blokun istehsal edə biləcəyi məhsulun maksimal miqdarını göstərir. Beləliklə, müəyyən sadələşdirmə yolu ilə biz $t_i -$ni dəyişməz (determinik) qəbul edəcəyik.

Əmək ehtiyatlarına gəldikdə isə qeyd etmək lazımdır ki, hər bir funksional blok üzrə onları məhdudlaşdırmaq iqtisadi reallığa uyğun olmazdı. Çünki istehsal güclərinin funksional bloklar arasında hərəkətini demək olar ki, rast gəlinməsə də işçilərin bir funksional bloka aid olan müəssisələrdən başqa funksional bloka aid müəssisələrə üz tutmasına adi hal kimi yanaşmaq lazımdır. Ən sadə variantda əmək ehtiyatları üzrə aşağıdakı ümumi məhdudiyyəti tərtib etmək olar:

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = R \qquad (10.17)$$

Burada $R -$ işçilərin ümumi sayıdır. (10.17) ifadəsi inflyasiya nəticəsində yaranan işsizliyi nəzərə almır və bu şərtə görə işçilərin tam məşğulluğu təmin edilir. (10.15) şərtinə görə aşağıdakı bərabərsizlik alınır:

$$x_i \le d_i^2 L_i \qquad (10.18)$$

Əgər tam məşğulluğun təmin edilməsi şərtini nəzərə alsaq, onda yaza bilərik:

$$x_i = d_i^2 L_i \qquad (10.18')$$

(10.17) və (10.18) şərtlərindən əmək üzrə aşağıdakı məhdudiyyət şərti alınır.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{d_i} = R \qquad (10.19)$$

Qeyd edək ki, (10.19) şərti real bazar şəraiti baxımından tam əsaslı qəbul edilə bilməz, çünki bu şərt işçilərin heç bir məhduyyət qoyulmadan bir funksional bloka aid olan müəssisədən digər blokun müəssisəsinə keçilməsi imkanını nəzərdə tutur. Odur ki, bu şərt real iqtisadi şəraitə adaptasiya olunmalıdır. Lakin bu məsələyə birqiymətli yanaşma yoxdur və bizi Leontyev modellərinin özəllikləri deyil, konseptual əsasları maraqlandırdığı üçün biz (10.19) məhdudiyyətinə əsaslanacağıq.

Beləliklə, ən yaxşı sahələrarası balansın seçilməsi məsələsinin riyazi təsviri aşağıdakı iqtisadi-riyazi modelə gətirildi:

$$U = (c, y) \to \max \qquad (10.20)$$

$$X = aX + Y \qquad (10.21)$$

$$X \le t \qquad (10.22)$$

$$(x, d_2) \le R \qquad (10.23)$$

$$x \ge 0, y \ge 0 \qquad (10.24)$$

Burada $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$, $d_2 = (1/d_1^2, ..., 1/d_n^2)$ -dır. Fərz edilir ki, A, t, d_2 və R ekzogen parametrlərdir (daha doğrusu, qiymətləri əvvəlcədən verilmişdir).

Göründüyü kimi, istifadə olunan riyazi aparatın xarakterinə görə (10.20)-(10.24) modeli xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsidir və funksional blokların sayının kifayət qədər böyük olması halında belə mövcud həll alqoritmləri əsasında reallaşdırıla bilər.

Qeyd edək ki, bu modelin qurulmasının bir sıra prinsipial çətinlikləri də vardır və bu çətinliklər hər şeydən əvvəl son məhsul vektorunun komponentlərinin qiymətləndirilməsində iştirak edən c_i əmsallarının seçilməsi ilə bağlıdır.

Sahələrarası balansın optimallaşdırılması məsələsinin daha bir qoyuluşunu verək.

Fərz edək ki, makroiqtisadiyyatın n funksional blokunun istehsalının çeşid vektoru $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şəklindədir. $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ son məhsul vektoru, $a = \|a_{ij}\|_{n,n}$ isə birbaşa məsrəf əmsalları matrisidir. Onda statik Leontyev modelinə görə bu parametrlər arasındakı asılılıq:

$$(E - a)X = Y \qquad (10.25)$$

matris tənliyi ilə ifadə ediləcəkdir.

Əgər $(E - a)$ matrisi cırlaşmamışdırsa, onda tənliyin həlli

$$X = (E - a)^{-1} Y \qquad (10.26)$$

şəklində axtarılacaqdır.

Fərz edək ki, Y son məhsul vektoru dəqiq verilməmişdir, daha doğrusu bu vektorun kompanentləri aşağıdan məhdudlaşdırılmışdır, yəni $Y \ge b$ şərtləri ödənir. (Qeyd edək ki, konkret halda funksional blokların son məhsulları yuxarıdan da məhdudlaşdırıla bilər).

Onda (10.25) tənliklər sistemi

$$(E - a)X \ge b \qquad (10.27)$$

bərabərsizlikləri ilə əvəz olunacaqdır.

Aydındır ki, $X \geq 0$ – dır. Əgər bu halda $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ vektoru məlumdursa, onda aşağıdakı xətti optimallaşdırma modelini alırıq:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (10.28)$$

$$(E - a)X \geq b \qquad (10.29)$$

$$X \geq 0 \qquad (10.30)$$

Statik Leontyev modelinin məcmu məhsulun maksimumlaşdırılması kriteriyasına görə optimallaşdırılması modelinə gətirilməsi və Simpleks metodla həllinə aid misala baxaq.

►**Məsələ 10.3.** Fərz edək ki, makroiqtisadiyyat şərti olaraq 3 funksional bloka bölünmüşdür. Bu blokların texnoloji əlaqələrini əks etdirən birbaşa məsrəf əmsalları matrisi aşağıdakı kimidir:

$$a = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}1 & 0{,}0 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}0 & 0{,}20 \end{pmatrix}$$

Funksional blokların son məhsulları üzərinə yuxarıdan məhdudiyyətlər qoyulmuşdur. Belə ki, 1-ci funksional blok üzrə $y_1 \leq 180$ vahid, 2-ci funksional blok üzrə $y_2 \leq 130$ vahid və 3-cü funksional blok üzrə $y_3 \leq 220$ vahid təmin edilməlidir.

1-ci funksional blokun istehsal gücü üzrə $x_1 \leq 400$, 2-ci funksional blokun istehsal gücü üzrə isə $x_2 \leq 300$ vahid məhdudiyyət müəyyən edilmişdir. 3-cü blokun istehsal gücü isə praktik olaraq qeyri-məhdud hesab edilir. Beləliklə, yaza bilərik:

$$y_i \leq b, \text{ harada ki, } b = \begin{pmatrix} 180 \\ 130 \\ 220 \end{pmatrix}$$

Makroiqtisadiyyat üçün elə bir optimal məcmu məhsul buraxılışı vektoru müəyyən edilməlidir ki, bu vektora görə iqtisadi sistemin məcmu məhsulu maksimum olsun.

Həlli: Məsələnin endogen parametrləri funksional blokların məcmu məhsulları olan x_1, x_2 və x_3 olacaqdır. Onda baxılan makroiqtisadi məsələnin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı şəkildə alınacaqdır:

$$Z(x)=\sum_{i=1}^{3}x_i \to \max$$

$$\begin{cases}(E-a)\mathrm{X}\le b\\ x_1\le 400\\ x_2\le 300\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0,\ \ x_3\ge 0$$

Modeli açıq şəkildə yazmaq üçün $(E-a)$ matrisini quraq:

$$(E-a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}0\\ 0{,}1 & 0{,}0 & 0{,}05\\ 0{,}2 & 0{,}0 & 0{,}20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}4 & -0{,}1 & 0{,}0\\ -0{,}1 & 1{,}0 & -0{,}05\\ -0{,}2 & 0{,}0 & 0{,}80\end{pmatrix}$$

Onda yuxarıdakı modeli açıq şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$Z(x)=x_1+x_2+x_3\to \max \qquad (10.31)$$

$$\begin{cases}0{,}4x_1-0{,}1x_2 \le 180\\ -0{,}1x_1+x_2-0{,}05x_3\le 130\\ -0{,}2x_1+\ \ 0{,}8x_3\le 220\\ x_1 \le 400\\ x_2 \le 300\end{cases} \qquad (10.32)$$

$$x_1\ge 0,\qquad x_2\ge 0,\qquad x_3\ge 0 \qquad (10.33)$$

Alınmış xətti optimallaşdırma modelini Simpleks metodla həll edək:

1-ci mərhələ: Mənfi olmayan $S_1\ge 0,\ S_2\ge 0,\ \ S_3\ge 0,\ \ S_4\ge 0,$ $S_5\ge 0$ əlavə dəyişənlərin köməyi ilə (10.32) sisteminin məhdudiyyət şərtlərini tənliklərə çevirək:

$$\begin{cases} 0{,}4x_1 - 0{,}1x_2 + \qquad\qquad S_1 = 180 \\ -0{,}1x_1 + x_2 - 0{,}05x_3 + S_2 = 130 \\ -0{,}2x_1 + \qquad 0{,}8x_3 + S_3 = 220 \\ x_1 + \qquad\qquad\qquad S_4 = 400 \\ \qquad\quad x_2 + \qquad\qquad S_5 = 300 \end{cases} \qquad (10.34)$$

Sonuncu sistem vahid bazisə gətirilmişdir və S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 dəyişənləri bazis dəyişənləridir. (10.34) sistemini bazis dəyişənləri vasitəsilə ifadə edək:

$$\begin{cases} S_1 = 180 - 0{,}4x_1 + 0{,}1x_2 \qquad \geq 0 \\ S_2 = 130 + 0{,}1x_1 - x_2 + 0{,}05x_3 \geq 0 \\ S_3 = 220 + 0{,}2x_1 - \qquad 0{,}8x_3 \geq 0 \\ S_4 = 400 - x_1 \qquad\qquad \geq 0 \\ S_5 = 300 - \qquad x_2 \qquad \geq 0 \end{cases} \qquad (10.35)$$

(10.35) sistemi və (10.31) məqsəd funksiyası əsasında Simpleks cədvəli tərtib edək:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$S_1 =$	0,4	−0,1	0	180
$S_2 =$	−0,1	1	−0,05	130
$S_3 =$	−0,2	0	0,8	220
$S_4 =$	1	0	0	400
$S_5 =$	0	1	0	300
$Z(x) =$	−1	−1	−1	0

(10.1)

2-ci mərhələ: (10.1) Simpleks cədvəlinin sərbəst hədlər sütununda heç bir mənfi element yoxdur. Odur ki, cədvəlin yuxarısında yerləşən qeyri-bazis dəyişənlərin sıfır qiymətlərində, daha doğrusu $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ olduqda aşağıdakı dayaq həlli alırıq:

$$X_{day} = (x_1 = 0,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 0)\,; \quad Z(X_{day}) = 0$$

3-cü mərhələ: Simpleks cədvəlin $Z(x)$ sətirində olan mənfi elementləri yox etməklə modelin optimal həllini tapaq:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$S_1 =$	0,4	$-0{,}1$	0	180
$S_2 =$	$-0{,}1$	$\langle 1 \rangle$	$-0{,}05$	130
$S_3 =$	$-0{,}2$	0	0,8	220
$S_4 =$	1	0	0	400
$S_5 =$	0	1	0	300
$Z(x) =$	-1	-1	-1	0

	$-x_1$	$-S_2$	$-x_3$	1
$S_1 =$	0,39	0,1	$-0{,}005$	193
$x_2 =$	$-0{,}1$	1	$-0{,}05$	130
$S_3 =$	$-0{,}2$	0	0,8	220
$S_4 =$	$\langle 1 \rangle$	0	0	400
$S_5 =$	0,1	-1	0,05	170
$Z(x) =$	$-1{,}1$	1	$-1{,}05$	130

	$-S_4$	$-S_2$	$-x_3$	1

$S_1 =$	$-0{,}39$	$0{,}1$	$-0{,}005$	37
$x_2 =$	$0{,}1$	1	$-0{,}05$	170
$S_3 =$	$0{,}2$	0	$\langle 0{,}8 \rangle$	300
$x_1 =$	1	0	0	400
$S_5 =$	$-0{,}1$	-1	$0{,}05$	130
$Z(x) =$	$1{,}1$	1	$-1{,}05$	570

	$-S_4$	$-S_2$	$-S_3$	1
$S_1 =$			$0{,}005$	31,1
$x_2 =$			$0{,}05$	151
$x_3 =$	$0{,}2$	0	1	300
$x_1 =$			0	320
$S_5 =$			$-0{,}05$	89
$Z(x) =$	$1{,}09$	$0{,}8$	$1{,}05$	771

$: (0{,}8)$

	$-S_4$	$-S_2$	$-S_3$	1
$S_1 =$				39
$x_2 =$				189
$x_3 =$				375
$x_1 =$				400
$S_5 =$				111
$Z(x) =$	$1{,}36$	1	$1{,}31$	964

Göründüyü kimi, sonuncu Simpleks cədvəlin $Z(x)$ sətirində heç bir mənfi element yoxdur. Odur ki, qeyri-bazis dəyişənlərin sıfır qiymətlərində, daha doğrusu $S_2 = 0,\ S_3 = 0,\ S_4 = 0$ olduqda aşağıdakı optimal həlli alırıq:

$$X_{opt} = (x_1 = 400,\ x_2 = 189,\ x_3 = 375)\,; \quad \max Z(X^*) = 964$$

Cavab: $X_{opt} = x_1 = 400,\ x_2 = 189,\ x_3 = 375)$ **olduqda** $\max Z(X^*) = 964$ **olur.**◄

Beləliklə, alınmış optimal həllə görə 2-ci və 3-cü funksional blokların məhsuluna tələb tam ödənir, yəni $b_2 = 130,\ b_3 = 220$ şərtləri təmin edilir (çünki, sonuncu Simpleks cədvəlindən $S_2 = S_3 = 0$ alınır). 1-ci funksional blokun məhsuluna olan tələb isə $S_1 = 39$ vahid (daha doğrusu $b_1 = 180 - 39 = 141$) ödənmir. 1-ci funksional blok üzrə hüdud istehsal gücü tam istifadə edilir ($S_4 = 0$), 2-ci funksional blokda isə 111 vahid ($S_5 = 111$) ehtiyat mövcuddur. Bu optimal həllə görə iqtisadi sistem üzrə məcmu məhsul maksimum olur və $\max Z(x) = 964$ vahid təşkil edir.

►Indi isə məsələnin qoyuluşunu bir qədər dəyişdirək və fərz edək ki, funksional bloklar üzrə istehsal güclərinə məhdudiyyətlər qoyulmur. Onda (10.31)-(10.33) modelinin (10.32) sistemində 4-cü və 5-ci məhdudiyyət şərtləri iştirak etməyəcəkdir və $S_1,\ S_2,\ S_3$ bazis dəyişənlərinin iştirak etdiyi (10.1) Simpleks cədvəli aşağıdakı şəkildə alınacaqdır:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$S_1 =$	0,4	$-0,1$	0	180
$S_2 =$	$-0,1$	1	$-0,05$	130
$S_3 =$	$-0,2$	0	0,8	220
$Z(x) =$	-1	-1	-1	0

(10.2)

(10.2)Simpleks cədvəli əsasında modeli təkrarən həll edək:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$S_1 =$	0,4	$-0,1$	0	180
$S_2 =$	$-0,1$	$\langle 1 \rangle$	$-0,05$	130
$S_3 =$	$-0,2$	0	0,8	220
$Z(x) =$	-1	-1	-1	0

	$-x_1$	$-S_2$	$-x_3$	1
$S_1 =$	0,39	0,1	$-0,005$	193
$x_2 =$	$-0,1$	1	$-0,05$	130
$S_3 =$	$-0,2$	0	$\langle 0,8 \rangle$	220
$Z(x) =$	$-1,1$	1	$-1,05$	130

	$-x_1$	$-S_2$	$-S_3$	1	
$S_1 =$	0,311	0,08	0,005	155,5	
$x_2 =$	$-0,09$	0,8	0,05	115	: (0,8)
$x_3 =$	$-0,2$	0	1	220	
$Z(x) =$	$-1,09$	0,8	1,05	335	

	$-x_1$	$-S_2$	$-S_3$	1
$S_1 =$	$\langle 0{,}389 \rangle$	0,1	0,006	194,4
$x_2 =$	$-0{,}113$	1	0,063	143,8
$x_3 =$	$-0{,}25$	0	1,25	275
$Z(x) =$	$-1{,}363$	1	1,313	418,8

	$-S_1$	$-S_2$	$-S_3$	1	
$x_1 =$	1	0,1	0,006	194,4	
$x_2 =$	0,113			77,9	: (0,389)
$x_3 =$	0,25			155,6	
$Z(x) =$	1,363	0,525	0,519	427,9	

	$-S_1$	$-S_2$	$-S_3$	1
$x_1 =$				500
$x_2 =$				200
$x_3 =$				400
$Z(x) =$	3,503	1,350	1,334	1100

Son Simpleks cədvəldən $S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ S_3 = 0$ olduqda optimal həll

$$X_{opt} = (x_1 = 500,\ \ x_2 = 200,\ \ x_3 = 400)$$

şəklində alınır və

$$\max Z(X^*) = 1100$$

olur.

Beləliklə, makroiqtisadi sistemin funksional bloklarının istehsal gücləri üzərinə məhdudiyyətlərin qoyulmadığı halda 1-ci blokda 500 vahid, 2-ci blokda 200 vahid və 3-cü blokda 400 vahid məhsul istehsal ediləcək və $\max Z(x) = 1100$ vahid olacaqdır ki, bu halda da 1-ci blokda 180 vahid ($S_1 = 0$), 2-ci blokda 130 vahid ($S_2 = 0$) və 3-cü blokda 220 vahid ($S_3 = 0$) son məhsul təmin ediləcəkdir.

Bir daha (10.31)-(10.33) modelinin optimal həllinin alındığı Simpleks cədvəlinə qayıdaraq qeyd edək ki, bu cədvəlin $Z(x)$ sətirindəki 1, 1,3 və 1,36 əmsallarına iqtisadi məna vermək olar. Məsələn, S_4 qeyri-bazis dəyişənin qiymətləndirilməsi olan 1,36 göstərir ki, bu dəyişənin qiymətinin 1 vahid artırılması (başqa sözlə desək, makroiqtisadiyyatın 1-ci funksional blokunun istehsal gücünün 1 vahid artırılması) $Z_{\max}$ məcmu məhsulu 1,36 vahid artıracaqdır.

Cavab: $X_{opt} = (x_1 = 500,\ \ x_2 = 200,\ \ x_3 = 400)$ **olduqda** $\max Z(X^*) = 1100$ **olur.**◀

10.4. Dinamik Leontyev makromodelinin çıxarılışı

Yuxarıda nəzərdən keçirdiyimiz Leontyev modelləri zaman faktoruna görə statik modellər idi. Belə ki, bu modellərdə iştirak edən bütün iqtisadi parametrlər eyni zaman momentinə aid edilirdi, investisiyalar son məhsulun tərkibində əks etdirilirdi və nəticədə investisiyaların ayrı-ayrı blokların inkişafına etdiyi təsiri təhlil etmək mümkün olmurdu. Bununla da fasiləsiz inkişaf edən iqtisadiyyat bir-birindən asılı olmayaraq hesablanmış modellər silsiləsi ilə əks etdirilirdi. Odur ki, Leontyev makromodellərinin dinamik versiyaları tərtib edilir. Dinamik Leontyev modelini tərtib etmək üçün metodoloji baza rolunu (10.5) statik Leontyev modeli oynayır. Əsas fərq ondan ibarətdir ki, investisiyalar son məhsulun tərkibindən çıxarılır və ayrıca qeyd edilir. Bu baxımdan yuxarıda nəzərdən keçirdiyimiz informasiya sxeminin 1-ci iki bölməsi aşağıdakı şəkilə düşəcəkdir:

Istehlak edən funksional blok / Istehsal edən funksional blok	İstehsal vasitələrinin bloklar arası axınları				İnvestisiyaların bloklar arası axınları				Xalis son məhsul	Məcmu məhsul
	1	2	...	n	1	2	...	n		
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	$\Delta\phi_{11}$	$\Delta\phi_{12}$	...	$\Delta\phi_{1n}$	z_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	$\Delta\phi_{21}$	$\Delta\phi_{22}$	...	$\Delta\phi_{2n}$	z_2	x_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	$\Delta\phi_{n1}$	$\Delta\phi_{n2}$	...	$\Delta\phi_{nn}$	z_n	x_n

Sxemdən göründüyü kimi hər bir funksional blokun son məhsulu aşağıdakı kimi hesablanacaqdır:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \Delta\phi_{ij} + z_i \qquad (i = \overline{1,n}) \qquad (10.36)$$

Burada $\Delta\phi_{ij}$ – *i-ci blok tərəfindən istehsal edilən və j – cu blokda fond artımı şəklində istifadə olunan məhsulun miqdarı*, z_i – *i-ci funksional blokun xalis son məhsuludur*.

Məlum olduğu kimi blokda fond artımı məhsul artımına proporsionaldır, yəni

$$\Delta\phi_{ij} = b_{ij}\Delta x_j \qquad (10.37)$$

Burada: Δx_j – *j – cu blokda yaranan məhsul artımı olub, həmin blokda iki ardıcıl zaman momentində istehsal səviyyələrinin fərqi kimi hesablanır*, yəni:

$$\Delta x_j = x_j^t - x_j^{t-1} \qquad (10.38)$$

Burada *t – iqtisadi zamandır* və ənənəvi olaraq bir təqvim ilinə bərabər götürülür.

(10.37) ifadəsində

$$b_{ij} = \frac{\Delta\phi_{ij}}{\Delta x_j}$$

kimi hesablanan proporsionallıq əmsalı xüsusi maraq kəsb edir. Bu əmsala fond tutumunun artımı əmsalı və ya investisiya qoyuluşu əmsalı

deyilir. Bütövlükdə makroiqtisadiyyat səviyyəsində bu əmsallar ekzogen təbiətli $B = \|b_{ij}\|_{n,n}$ kvadrat matrisi əmələ gətirir. Bu matrisin b_{ij} *elementi* $j-$ *cu funksional blokda məhsul istehsalını bir vahid artırmaq üçün investisiya qoyuluşu şəklində tələb edilən* $i-ci$ *blokun məhsulunun miqdarını göstərir.*

(10.36)-nı (10.5) –də nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{n} \Delta\phi_{ij} + z_i \qquad (i = \overline{1,n}) \quad (10.39)$$

Göründüyü kimi, (10.39) sistemi sonlu-fərq tənlikləri sistemidir. Bu sistemdən normal tənliklər sisteminə kecək. Əgər fond artımı ilə məhsul artımı arasında zaman laqının (zamana görə kecikmənin) mövcud olduğunu nəzərə alsaq, daha doğrusu fond artımının keçmiş dövrə, məhsul artımının isə gələcək dövrə aid olduğunu nəzərə alsaq, t ilində makroiqtisadi sistemin $i-$ ci blokunun məcmu məhsulu ücün aşağıdakı ifadəni yaza bilərik:

$$x_i^t = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^t + \sum_{j=1}^{n} \Delta\phi_{ij} + z_i^t = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^t + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Delta x_j + z_i^t =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^t + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} (x_j^t - x_j^{t-1}) + z_i^t = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^t + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^t - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^{t-1} + z_i^t =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) x_j^t - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j + z_i^t \qquad (i = \overline{1,n})$$

Əgər bu ifadəni bütün funksional bloklar üçün ümumiləşdirsək, alarıq:

$$x_i^t = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) x_j^t - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^{t-1} + z_i^t \qquad (i = \overline{1,n}) \qquad (10.40)$$

(10.40) normal tənliklər sisteminə ***dinamik Leontyev makromodeli*** deyilir. Bu model hər bir blokun fəaliyyətində keçmiş dövrlə gələcək dövrü əlaqələndirməyə imkan verir. Nəticədə iqtisadi-riyazi tədqiqatların adekvatlıq səviyyəsi yüksəlir və qəbul edilən idarəetmə qərarları real iqtisadi şəraiti daha düzgün əks etdirir.

Yuxarıda tərtib etdiyimiz Leontyev makromodelləri istehsal vasitələrinin bloklar arası axınları bazasında tərtib edilmişdir. Qeyd edək ki, bu modelləri başqa metodiki əsasda, yəni əmək ehtiyatlarının, maliyyə ehtiyatlarının, qiymətin əmələ gəlməsi faktorlarının bloklar arası axınları bazasında da tərtib etmək olar. Belə Leontyev

modellərinə Leontyev makromodellərinin modifikasiyaları deyilir. Qeyd edək ki, bu modifikasiyaların riyazi ifadələri yuxarıda tərtib etdiyimiz makromodellərdən müəyyən qədər fərqlidir.

Leontyev modellərinin həll üsulları onların riyazi aparatına uyğun olaraq seçilir. Əgər Leontyev modeli balans modeli olub xətti tənliklər sistemi şəklində tərtib edilmişdirsə, onda onu həll etmək üçün xətti cəbrin Kramer, Qaus, Jordan-Qaus və s. kimi sonlu həll üsullarından, o cümlədən Zeydel üsulu və s. kimi təqribi həll üsullarından istifadə edilir. Əgər Leontyev modeli optimallaşdırma modeli olub, xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsi şəklində tərtib edilmişdirsə, onda onu həll etmək üçün xətti proqramlaşdırmanın həll üsullarından (Simpleks metod, Qoşma Simpleks metod) istifadə edilir.

Mövzu üzrə praktikum

Birbaşa məsrəf əmsalları matrisi və son məhsul vektoru verilmişdir. Sahələrin məcmu məhsullarını tapın.	
10.4	$a = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,0 & 0,2 \\ 0,0 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 145 \\ 30 \\ 75 \end{pmatrix}$
10.5	$a = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,0 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 170 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix}$
Birbaşa məsrəf əmsalları matrisi və məcmu məhsul vektoru verilmişdir. Sahələrin son məhsullarını tapın.	
10.6	$a = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,0 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$
10.7	$a = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$
10.8	$a = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,0 & 0,2 \\ 0,0 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix}$
10.9	$a = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,0 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 145 \\ 300 \\ 75 \end{pmatrix}$
Statik Leontyev modelini tərtib edin və endogen parametrləri təyin edin.	
10.10	$a = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = 400 \\ x_2 = 600 \\ y_3 = 100 \end{matrix}$

10.11	$a=\begin{pmatrix}0,4 & 0,1 & 0,2\\ 0,1 & 0,3 & 0,1\\ 0,2 & 0,4 & 0,2\end{pmatrix}$ $\quad y_1=50$, $x_2=200$, $x_3=350$
Birbaşa məsrəf əmsalları matrisi və məcmu məhsul vektoru verilmişdir	
10.12	***1 və 3 bloklar üçün xalis məhsulu müəyyən edin*** $a=\begin{pmatrix}0,3 & 0,1 & 0,1\\ 0,2 & 0,2 & 0,3\\ 0,1 & 0,4 & 0,2\end{pmatrix}$ $\quad x=\begin{pmatrix}100\\150\\200\end{pmatrix}$
10.13	***Bütün bloklar üçün xalis məhsulu müəyyən edin.*** $a=\begin{pmatrix}0,1 & 0,3 & 0,0\\ 0,0 & 0,4 & 0,1\\ 0,4 & 0,1 & 0,2\end{pmatrix}$ $\quad x=\begin{pmatrix}250\\180\\220\end{pmatrix}$
Istehsal vasitələrinin bloklararası axınları və son məhsul vektoru verilmişdir. Birbaşa məsrəf əmsalları matrisini qurun.	
10.14	$x_{11}=60$ $x_{12}=70$ $x_{13}=30$ $x_{21}=50$ $x_{22}=20$ $x_{23}=80$ $\quad y=\begin{pmatrix}100\\200\\300\end{pmatrix}$ $x_{31}=40$ $x_{32}=40$ $x_{33}=90$
10.15	$x_{11}=185$ $x_{12}=75$ $x_{13}=60$ $x_{21}=85$ $x_{22}=120$ $x_{23}=80$ $\quad y=\begin{pmatrix}150\\350\\400\end{pmatrix}$ $x_{31}=100$ $x_{32}=60$ $x_{33}=95$
10.16	$x_{11}=150$ $x_{12}=120$ $x_{13}=70$ $x_{21}=95$ $x_{22}=140$ $x_{23}=150$ $\quad y=\begin{pmatrix}220\\180\\250\end{pmatrix}$ $x_{31}=100$ $x_{32}=190$ $x_{33}=190$
10.17	$x_{11}=110$ $x_{12}=130$ $x_{13}=200$ $x_{21}=100$ $x_{22}=190$ $x_{23}=170$ $\quad y=\begin{pmatrix}130\\150\\210\end{pmatrix}$ $x_{31}=70$ $x_{32}=80$ $x_{33}=110$

10.18	$x_{11}=60 \quad x_{12}=20 \quad x_{13}=80$ $x_{21}=70 \quad x_{22}=30 \quad x_{23}=20 \qquad y=\begin{pmatrix}300\\100\\200\end{pmatrix}$ $x_{31}=30 \quad x_{32}=90 \quad x_{33}=40$
Tam məsrəf əmsalları matrisini hesablayın	
10.19	$a=\begin{pmatrix}0,3 & 0,1 & 0,4\\0,2 & 0,2 & 0,3\\0,1 & 0,3 & 0,1\end{pmatrix}$
10.20	$a=\begin{pmatrix}0,1 & 0,2 & 0,4\\0,4 & 0,1 & 0,1\\0,3 & 0,3 & 0,2\end{pmatrix}$
10.21	$a=\begin{pmatrix}0,6 & 0,0 & 0,1\\0,2 & 0,1 & 0,3\\0,1 & 0,4 & 0,1\end{pmatrix}$
10.22	$a=\begin{pmatrix}0,1 & 0,7 & 0,1\\0,3 & 0,0 & 0,2\\0,4 & 0,1 & 0,2\end{pmatrix}$
10.23	$a=\begin{pmatrix}0,2 & 0,1 & 0,3\\0,4 & 0,2 & 0,1\\0,0 & 0,4 & 0,3\end{pmatrix}$
10.24	$a=\begin{pmatrix}0,1 & 0,3 & 0,2\\0,2 & 0,2 & 0,1\\0,3 & 0,1 & 0,1\end{pmatrix}$

Mövzu üzrə testlər

1. Leontyev modelinin informasiya sxeminin (sahələrarası balans sxemi) 1-ci bölməsində nə əks etdirilir?

A) İstehsal vasitələrinin sahələrarası axınları;
B) Milli gəlirin material-əşya tərkibi;
C) Milli gəlirin dəyər tərkibi;
D) Milli gəlirin son bölgüsü və istifadəsi;
E) Xarici ticarət saldosu.

2. Leontyev modelinin informasiya sxeminin (sahələrarası balans sxemi) 2-ci bölməsində nə əks etdirilir?

A) İstehsal vasitələrinin sahələrarası axınları;
B) Milli gəlirin material-əşya tərkibi;
C) Milli gəlirin dəyər tərkibi;
D) Milli gəlirin son bölgüsü və istifadəsi;
E) Xarici ticarət saldosu.

3. Leontyev modelinin informasiya sxeminin (sahələrarası balans sxemi) 3-cü bölməsində nə əks etdirilir?

A) İstehsal vasitələrinin sahələrarası axınları;
B) Milli gəlirin material-əşya tərkibi;
C) Milli gəlirin dəyər tərkibi;
D) Milli gəlirin son bölgüsü və istifadəsi;
E) Xarici ticarət saldosu.

4. Leontyev modelinin informasiya sxeminin (sahələrarası balans sxemi) 4-cü bölməsində nə əks etdirilir?

A) İstehsal vasitələrinin sahələrarası axınları;
B) Milli gəlirin material-əşya tərkibi;
C) Milli gəlirin dəyər tərkibi;
D) Milli gəlirin son bölgüsü və istifadəsi;
E) Xarici ticarət saldosu.

5. Leontyev modelinin informasiya sxeminin (sahələrarası balans sxemi) $i-$ ci sətri ilə $j-$ cu sütununun kəsişməsində yerləşən x_{ij} elementinin iqtisadi mənası nədir:

A) $i-$ci sahənin məcmu məhsulu;
B) $j-$cu sahənin məcmu məhsulu;

C) $i-$ci sahə məhsulunun $j-$cu sahədə son məhsul kimi formalaşan hissəsi;
D) $i-$ci sahədə istehsal edilən və $j-$cu sahədə material məsrəfi kimi istifadə edilən məhsulun miqdarı;
E) $j-$cu sahədə istehsal edilən və $i-$ci sahədə material məsrəfi şəklində istehlak edilən məhsulun miqdarı.

6. Aşağıdakı ifadələrdən hansı statik Leontyev modelinin (sahələrarası balansın statik modeli) riyazi ifadəsidir?

A) $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \qquad (i = \overline{1,n})$

B) $x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j + y_j \qquad (i = \overline{1,n})$

C) $x_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j - y_i \qquad (j = \overline{1,n})$

D) $x_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j - y_j \qquad (j = \overline{1,n})$

E) $x_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{n} + y_j \qquad (i = \overline{1,n})$.

7. $a = \|a_{ij}\|_{n,n}$ birbaşa məsrəf əmsalları matrisinin a_{ij} elementinin iqtisadi mənası nədir?

A) $i-$ci sahədə istehsal edilən və $j-$cu sahədə istifadə edilən məhsulun miqdarı;
B) $j-$cu sahədə istehsal edilən və $i-$ci sahədə istifadə edilən məhsulun miqdarı;
C) $j-$cu sahədə 1 vahid məhsul istehsal etmək üçün material məsrəfi şəklində sərf edilən $i-$ci sahənin məhsulunun miqdarı;
D) $j-$cu sahədə 1 vahid məhsul istehsal etmək üçün investisiya qoyuluşları şəklində istifadə edilən $i-$ci sahənin məhsulunun miqdarı;
E) $i-$ci sahədə istehsal edilən və $j-$cu sahədə istehlak edilən son məhsulun miqdarı.

8. $a = \left\| a_{ij} \right\|_{n,n}$ **birbaşa məsrəf əmsalları matrisinin** a_{ij} **elementlərinin qiymətləri hansı oblastda dəyişir?**

A) $-1 \le a_{ij} \le 1$

B) $0 \le a_{ij} < 1$

C) $-\infty < a_{ij} < 1$

D) $0 \le a_{ij} < +\infty$

E) $1 \le a_{ij} < +\infty$

9. $X = AY$ **Leontyev modelində (sahələrarası balans modeli)** A **- tam məsrəf əmsalları matrisinin** A_{ij} **elementi:**

A) $i-$ ci sahədə istehsal edilən və $j-$ cu sahədə istifadə edilən məhsulun miqdarını göstərir;

B) $j-$ cu sahədə istehsal edilən və $i-$ ci sahədə istifadə edilən məhsulun miqdarını göstərir;

C) $j-$cu sahədə 1 vahid məhsul istehsal etmək üçün material məsrəfi şəklində sərf edilən $i-$ci sahənin məhsulunun miqdarını göstərir;

D) $j-$ cu sahədə 1 vahid məhsul istehsal etmək üçün investisiya qoyuluşları şəklində istifadə edilən $i-$ ci sahənin məhsulunun miqdarını göstərir;

E) $j-$ cu sahədə 1 vahid son məhsul istehsal etmək üçün material məsrəfi şəklində istifadə edilən $i-$ci sahənin məhsulunun miqdarını göstərir.

10. Əgər bəzi sahələr üzrə x_i **məcmu məhsullar, digər sahələr üzrə isə** y_i **son məhsullar verilmişdirsə, onda statik Leontyev modeli (sahələrarası balansın statik modeli) əsasında makroiqtisadi balans hesablamaları aparılmasının mümkünlüyü üçün məlum** x_i **və** y_i **- lərin cəmi neçə olmalıdır?**

A) $m + n - 1$

B) $2n$

C) $n - 1$

D) n

E) $n + 1$

11. Aşağıdakı ifadələrdən hansı Dinamik Leontyev modeli (sahələrarası balansın dinamik modeli) hesab edilə bilər:

A) $x_i^t = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij})x_j^t + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j^{t-1} + z_i^t \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$

B) $x_i^t = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij})x_j^t - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j^{t-1} + z_i^t \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$

C) $x_i^t = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - b_{ij})x_j^t + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j^{t-1} + z_i^t \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$

D) $x_i^t = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - b_{ij})x_j^t - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j^{t-1} + z_i^t \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$

E) $x_i^t = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij})x_j^{t-1} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j^t + z_i^t \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$

12. Əgər $i \neq j$ olarsa, onda A tam məsrəf əmsalları matrisinin A_{ij} elementinin qiyməti necə olacaqdır?

A) $A_{ij} < 0$

B) $A_{ij} > 0$

C) $A_{ij} \geq 0$

D) $A_{ij} > 1$

E) $A_{ij} > -1$

13. Əgər $i = j$ olarsa, onda A tam məsrəf əmsalları matrisinin A_{ij} elementinin qiyməti necə olacaqdır?

A) $A_{ij} > 1$

B) $A_{ij} \geq 0$

C) $A_{ij} \geq -1$

D) $A_{ij} \leq 1$

E) $A_{ij} \leq 0$

14. Dinamik Leontyev modelində (sahələrarası balansın dinamik modeli) b_{ij} ekzogen parametrlərin iqtisadi mənası nədir?

A) Bu əmsal i nömrəli sahədə istehsal edilən və j-cu sahədə material məsrəfi şəklində istifadə edilən məhsulun miqdarını göstərir;
B) Bu əmsal i nömrəli sahədə istehsal edilən və j-cu sahədə investisiya qoyuluşu şəklində istifadə edilən məhsulun miqdarını göstərir;
C) Bu əmsal j-cu sahədə 1 vahid məhsul istehsal etmək üçün istifadə edilən i-ci sahənin məhsulunun miqdarını göstərir;
D) Bu əmsal j-cu sahədə 1 vahid son məhsul istehsal etmək üçün istifadə edilən i-ci sahənin məhsulunun miqdarını göstərir;
E) Bu əmsal j-cu sahədə məhsul istehsalını 1 vahid artırmaq üçün investisiya qoyuluşu şəklində istifadə edilən i-ci sahənin məhsulunun miqdarını göstərir.

FƏSIL 11

İQTİSADİYYATIN MİKROMODELLƏRİ

Kibernetik yanaşma baxımından mikro sistemlər dedikdə ayrı-ayrı müəssisələr, firmalar, istehsal bölmələri və s. başa düşülür. Mikro sistemlər səviyyəsində optimal idarəetmə strategiyaları qurmaq üçün istifadə edilən iqtisadi-riyazi modellərə mikromodellər (və ya müəssisə, firma modelləri) deyilir. Müəssisə modellərinin qurulması qarşısına bütünlükdə modellərin qarşısına qoyulan real iqtisadi sistemə kafi adekvatlıq və riyazi aparatın kafi sadəliyi tələbləri qoyulur. Tipik müəssisə modellərinə misal olaraq aşağıdakı modelləri göstərmək olar:

- Müəssisələrin optimal istehsal güclərinin təyin edilməsi modeli;
- Müəssisələrdə avadanlıqların optimal yüklənməsi modeli;
- Müəssisələrdə qarışıqların və birləşmələrin optimal tərkibinin müəyyən edilməsi modeli;
- Müəssisədə materialların optimal biçilməsi modeli;
- Müəssisələrdə işçilərin işlərə optimal təyin edilməsi modeli;
- Müəssisələrdə detalların optimal istehsal və saxlanma rejiminin tapılması modeli;
- Aqrar firmalarda əkin sahələrinin optimal bölüşdürülməsi modeli;
- Müəssisədə (firmada) daxili yük daşınmalarının optimallaşdırılması modeli və s.

Bu tipik müəssisə modellərindən bəzilərini daha ətraflı nəzərdən keçirək.

11.1.Müəssisələrin optimal istehsal güclərinin təyin edilməsi məsələsinin qoyuluşu

Müəssisələrin optimal istehsal güclərinin təyin edilməsi məsələsinin qoyuluşu aşağıdakı şəkildədir:

Fərz edək ki, müəssisədə m sayda məhdud ehtiyatdan istifadə etməklə n adda məhsul istehsal edilir. Ehtiyatların məhdudluğu $A = (a_1, a_2, ..., a_m)$ vektoru ilə təyin edilir. Məhsul vahidinə ehtiyat sərfi

normaları $A = \|a_{ij}\|_{m,n}$ texnoloji matrislə verilir. Burada $a_{ij} - j$ nömrəli məhsul vahidi istehsalına $i-$ ci ehtiyatın sərf olunması normasıdır. Məhsul vahidlərinin maya dəyərləri $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ vektoru ilə müəyyən edilir. Məhsul vahidlərinin gözlənilən bazar qiymətləri vektoru isə $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ şəklindədir.

Onda *müəssisənin optimal istehsal gücünün müəyyən edilməsi məsələsi elə* $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *istehsal proqramının tapılmasına gətirilir ki, bu proqrama görə onun əldə edəcəyi məcmu mənfəət maksimum olsun*. Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini tərtib edək:

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{n} (p_j - c_j) x_j \to \max \qquad (11.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_i \qquad (i = \overline{1,m}) \qquad (11.2)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad (11.3)$$

Göründüyü kimi, baxılan məsələnin iqtisadi-riyazi modeli xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinə gətirildi. Bu məsələnin optimal həlli olan X^* vektoru maksimum mənfəət baxımından müəssisənin optimal istehsal gücünü müəyyən etməyə imkan verir.

Indi isə müəssisələrin optimal istehsal gücünün təyin edilməsi modelinin qurulmasına aid konkret misalı nəzərdən keçirək.

►**Məsələ 11.1** Fərz edək ki, müəssisənin istehsal gücü 3 növ məhsul istehsalını nəzərdə tutur. Bu məqsədlə 4 növ məhdud ehtiyatdan istifadə edilir. Ehtiyatların həcmləri A=(100, 120, 200, 400) vektoru ilə müəyyən edilir.

Məhsul vahidləri istehsalına ehtiyat sərfi normaları aşağıdakı matris şəklində verilmişdir:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \\ 1 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

Məhsul vahidlərinin maya dəyərləri vektoru və məhsul vahidinin gözlənilən bazar qiymətləri vektoru aşağıdakı şəkildə verilmişdir:

C= (40,60,70)
P= (90,100,100)

Maksimum mənfəət kriteriyasına görə müəssisənin optimal istehsal gücünün təyin edilməsi məsələsinin iqtisadi-riyazi modelini qurun.

Həlli: Müəssisənin istehsal edəcəyi 1-ci növ məhsulun miqdarını x_1, 2-ci növ məhsulun miqdarını x_2, 3-cü növ məhsulun miqdarını isə x_3 ilə işarə edək. Onda 1-ci məhsulun 1 vahidinin satışından $m_1 = 90 - 40 = 50$ *manat*, 2-ci məhsulun 1 vahidinin satışından $m_2 = 100 - 60 = 40$ *manat*, 3-cü məhsulun 1 vahidinin satışından $m_3 = 100 - 70 = 30$ *manat* mənfəət alınacaqdır. Ehtiyatların həcmləri məhdud olduğu üçün x_1 qədər 1-ci məhsul, x_2 qədər 2-ci məhsul və x_3 qədər 3-cü məhsul istehsal etmək üçün sərf ediləcək 1-ci ehtiyatın həcmi 100 vahiddən, 2-ci ehtiyatın həcmi 120 vahiddən, 3-cü ehtiyatın həcmi 200 vahiddən, 4-cü ehtiyatın həcmi isə 400 vahiddən çox ola bilməz. Məhsul vahidlərinin sayının mənfi olmaması şərtlərini də əlavə etsək, onda baxılan məsələnin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı kimi alınacaqdır:

$$Z(x) = 50x_1 + 40x_2 + 30x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 \le 100 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \le 120 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 \le 200 \\ x_1 + 10x_2 + 3x_3 \le 400 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

Göründüyü kimi, məsələnin iqtisadi-riyazi modeli xətti optimallaşdırma modelidir və onu Simpleks metodla həll etmək olar. (Simpleks metodun həll alqoritmi əvvəlki fəsillərdə ətraflı nəzərdən keçirildiyi üçün bu məsələnin həlli üzərində dayanmayacayıq).

Qeyd 1: *Nəzərdən keçirdiyimiz məsələdə optimallıq kriteriyası kimi məcmu gəlirin maksimumlaşdırılması kriteriyasından da istifadə etmək olar, yəni* $Z(x) = 90x_1 + 100x_2 + 100x_3 \to \max$.

Qeyd 2: *Maksimum mənfəət kriteriyası ilə maksimum gəlir kriteriyası arasında iqtisadi baxımdan ziddiyət olmadığı üçün hər iki optimallıq kriteriyası üçün tapılmış optimal istehsal proqramı variantı üst-üstə düşəcəkdir.*

Cavab: $Z(x) = 50x_1 + 40x_2 + 30x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 \le 100 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \le 120 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 \le 200 \\ x_1 + 10x_2 + 3x_3 \le 400 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \quad \blacktriangleleft$$

11.2. Avadanlıqların optimal yüklənməsi məsələsinin qoyuluşu

Müəssisələr səviyyəsində həll edilən məsələlərdən biri də avadanlıqların optimal yüklənməsi məsələsidir. Məsələnin qoyuluşu aşağıdakı kimidir:

Fərz edək ki, müəssisədə m sayda eyni tipli avadanlıq vardır. Bu avadanlıqlarda n sayda məmulat emal edilməlidir. Avadanlıqların hər birində bu məmulatlardan hər biri istehsal edilə bilər. Müəssisə öz istehsal proqramını $B=(B_1,B_2,...,B_n)$ şəklində müəyyən etmişdir. Avadanlıqların iş vaxtları fondları $A=(A_1,A_2,...,A_m)$ şəklində verilmişdir. i nömrəli avadanlıqda j nömrəli məmulatların bir vahidinin istehsalına sərf olunan vaxt a_{ij} qədərdir. i nömrəli avadanlıqda j nömrəli məmulat vahidi istehsalının maya dəyəri isə c_{ij} manatdır. (Fərz edilir ki, $A = \|a_{ij}\|_{m,n}$ və $C = \|c_{ij}\|_{m,n}$ matrisləri birqiymətli şəkildə verilmişdir, yəni bu matrislərin bütün elementləri ekzogen təbiətli elementlərdir).

Qarşıya belə bir məsələ çıxır: *Avadanlıqlarda istehsal ediləcək məmulatların tərkibini və sayını elə müəyyən etmək lazımdır ki,* $B=(B_1,B_2,...,B_n)$ *istehsal proqramının tam yerinə yetirilməsinin məcmu maya dəyəri minimum olsun.* Bu məsələyə müəssisələrdə avadanlıqların optimal yüklənməsi məsələsi deyilir.

Məsələnin riyazi təsvirini verək. Tutaq ki, i nömrəli avadanlıqda x_{ij} qədər j növ məmulat istehsal ediləcəkdir. Daha doğrusu, müəssisənin avadanlıqlarının optimal yüklənməsi variantı $X^* = \|x_{ij}^*\|_{m,n}$ matrisi şəklində axtarılacaqdır. Onda bu məsələnin iqtisadi-riyazi

modeli aşağıdakı kimi alınacaqdır:

$$Z(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min \qquad (11.4)$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{ij}\le A_i \qquad (i=\overline{1,m}) \qquad (11.5)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=B_j \qquad (j=\overline{1,n}) \qquad (11.6)$$

$$x_{ij}\ge 0 \qquad (i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,n}) \qquad (11.7)$$

Modelin məqsəd funksiyası olan (11.4) müəssisədə $B=(B_1,B_2,...,B_n)$ istehsal proqramının yerinə yetirilməsinin məcmu maya dəyərinin minimum olmasını nəzərdə tutur. (11.5) xətti məhdudiyyətlər sistemi müəssisənin hər bir avadanlığının iş vaxtı fondunun məhdud olmasını əks etdirir. (11.6) sistemi hər bir məmulat növü üzrə istehsal proqramının tam yerinə yetirilməsini təmin edir. (11.7) sistemi isə modelin endogen parametrlərinin mənfi olmaması şərtləridir.

Bəzən bu və ya digər avadanlıqda məmulatların emal edilməsinin maya dəyəri haqqında dəqiq informasiya əldə etmək çətin olur. Bu halda optimallıq kriteriyası olaraq bütün avadanlıqların ümumi yüklənmə vaxtının minimum olması kriteriyasından istifadə edilir:

$$Z(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{ij}\to\min \qquad (11.4')$$

Indi isə müəssisələrdə avadanlıqların optimal yüklənməsi modelinin tərtibinə aid konkret misalı nəzərdən keçirək.

►**Məsələ 11.2.** Fərz edək ki, müəssisədə 4 eyni tipli avadanlıq vardır və bu avadanlıqlarda 3 məmulat emal edilməlidir. Avadanlıqların illik iş vaxtı fondları uyğun olaraq $A_1=1200$, $A_2=2000$, $A_3=2350$, $A_4=3500$ saat təşkil edir. Müəssisədə 500 vahid 1-ci məmulat, 600 vahid 2-ci məmulat, 300 vahid 3-cü məmulat istehsal edilməlidir. Bu və ya digər avadanlıqda məmulat vahidlərinin emalına sərf edilən vaxtlar ekzogen təbiətli parametrlər hesab edilir və onların qiymətləri aşağıdakı matrislə verilmişdir:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Bu və ya digər avadanlıqda məmulat vahidlərinin emal edilməsinin maya dəyəri də ekzogen təbiətlidir və aşağıdakı matrislə verilir:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & 10 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Minimum maya dəyəri kriteriyasına görə müəssisənin avadanlıqlarının optimal yüklənməsi modelini tərtib edin.

Həlli: Əgər i nömrəli avadanlıqda emal ediləcək j nömrəli məmulatın sayını x_{ij} ilə işarə etsək, onda qarşıya qoyulmuş məqsədin riyazi ifadəsi aşağıdakı şəkildə olacaqdır:

$$Z(x) = 6x_{11} + 9x_{12} + x_{13} + 3x_{21} + 4x_{22} + 8x_{23} +$$
$$+ 2x_{31} + 5x_{32} + 10x_{33} + 7x_{41} + x_{42} + 3x_{43} \to \min$$

Hər bir avadanlığın iş vaxtı fondu məhdud olduğu üçün, bu avadanlıqların işləyəcəkləri real vaxt onların potensial imkanlarını aşa bilməz. Odur ki, alırıq:

$$\begin{cases} 7x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} \le 1200 \\ 2x_{21} + 8x_{22} + x_{23} \le 2000 \\ 4x_{31} + 6x_{32} + 3x_{33} \le 2350 \\ x_{41} + 5x_{42} + 2x_{43} \le 3500 \end{cases}$$

Hər bir məmulat növü üzrə istehsal tapşırığı tam yerinə yetirilməlidir. Odur ki, alırıq:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 500 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 600 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 300 \end{cases}$$

Əgər hər bir avadanlıqda istehsal ediləcək məmulatların sayının mənfi kəmiyyət olmamasını da nəzərə alsaq, onda baxılan məsələnin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı kimi alınacaqdır:

$$Z(x) = 6x_{11} + 9x_{12} + x_{13} + 3x_{21} + 4x_{22} + 8x_{23} +$$
$$+ 2x_{31} + 5x_{32} + 10x_{33} + 7x_{41} + x_{42} + 3x_{43} \to \min$$
$$\begin{cases} 7x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} \le 1200 \\ 2x_{21} + 8x_{22} + x_{23} \le 2000 \\ 4x_{31} + 6x_{32} + 3x_{33} \le 2350 \\ x_{41} + 5x_{42} + 2x_{43} \le 3500 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 500 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 600 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 300 \end{cases}$$
$$x_{ij} \ge 0 \qquad (i = \overline{1,4};\ \ j = \overline{1,3})$$

Göründüyü kimi, alınmış model nəqliyyat tipli xətti modeldir və onu bu tip modellərin həll metodları ilə reallaşdırmaq olar:

Cavab: $$Z(x) = 6x_{11} + 9x_{12} + x_{13} + 3x_{21} + 4x_{22} + 8x_{23} +$$
$$+ 2x_{31} + 5x_{32} + 10x_{33} + 7x_{41} + x_{42} + 3x_{43} \to \min$$
$$\begin{cases} 7x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} \le 1200 \\ 2x_{21} + 8x_{22} + x_{23} \le 2000 \\ 4x_{31} + 6x_{32} + 3x_{33} \le 2350 \\ x_{41} + 5x_{42} + 2x_{43} \le 3500 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 500 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 600 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 300 \end{cases}$$
$$x_{ij} \ge 0 \qquad (i = \overline{1,4};\ \ j = \overline{1,3})$$ ◀

11.3. Materialların optimal biçilməsi məsələsinin qoyuluşu

Müəssisələr səviyyəsində həll edilən optimallaşdırma məsələlərindən biri də materialların optimal biçilməsi məsələsidir. Məsələnin qoyuluşu aşağıdakı şəkildədir:

Tutaq ki, müəssisədə müəyyən ölçülü materialdan n növ detal

hazırlanmalıdır. Məlumdur ki, i -ci detaldan B_i ədəd hazırlanmalıdır. Materialdan detalları m üsulla kəsmək olar. Hər bir $j-$cu kəsmə üsulu üzrə b_{ij} kəmiyyəti və c_j kəmiyyəti məlumdur. b_{ij} - materialı $j-$cu üsulla kəsdikdə alınan i -ci detalın miqdarı, c_j - bu üsuldan istifadə zamanı alınan itkilərdir. Qarşıya belə bir məsələ çıxır: *Müəssisədə hər üsulla nə qədər material kəsilməlidir ki, hər bir detal növü üzrə istehsal tapşırığı dəqiq yerinə yetirilsin və yaranan material itkilərinin cəmi minimum olsun.*

Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini tərtib edək. Fərz edək ki, $j-$cu üsulla x_j qədər material kəsiləcəkdir. Onda məsələnin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı kimi alınacaqdır:

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to \min \qquad (11.8)$$

$$\sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_j = B_i \qquad (i=\overline{1,n}) \qquad (11.9)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=\overline{1,m}) \qquad (11.10)$$

Modelin məqsəd funksiyası olan (11.8) bütün kəsmə üsulları üzrə məcmu itkilərin minimum olmasını tələb edir. (11.9) xətti məhdudiyyətlər sistemi hər bir detal növü üzrə istehsal tapşırığının tam yerinə yetirilməsini təmin edir. (11.10) sistemi isə modelin endogen parametrlərinin mənfi olmaması şərtləridir. Bu model xətti modeldir və xətti modellərin həll metodları ilə reallaşdırıla bilər.

Indi isə müəssisədə materialların optimal biçilməsi modelinin tərtibinə aid konkret misala baxaq.

►**Məsələ 11.3.** Firmada böyük ölçülü materialdan 3 məmulat biçilməlidir. 1-ci məmulatdan 400 ədəd, 2-ci məmulatdan 500 ədəd, 3-cü məmulatdan isə 300 ədəd istehsal edilməlidir. Materialı 2 üsulla biçmək olar. 1-ci üsulla biçildikdə 20 ədəd 1-ci məmulat, 15 ədəd 2-ci məmulat və 22 ədəd 3-cü məmulat alınır. 2-ci üsulla biçildikdə isə 18 ədəd 1-ci məmulat, 21 ədəd 2-ci məmulat və 17 ədəd 3-cü məmulat alınır. 1-ci üsuldan istifadə zamanı itkilər 30 vahid, 2-ci üsuldan istifadə zamanı isə 35 vahid təşkil edir.

Firmada materialların optimal biçilməsi modelini tərtib edin.

Həlli: Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini tərtib etmək üçün aşağıdakı endogen parametrlərdən istifadə edək:

x_1 - 1-ci üsulla biçiləcək materialın sayı;

x_2 - 2-ci üsulla biçiləcək materialın sayı.

Onda $X = (x_1,\ x_2)$ biçmə variantı üzrə məcmu itkilər $30x_1 + 35x_2$ vahid təşkil edəcəkdir. Qarşıya qoyulmuş məqsədə görə bu kəmiyyət minimum olmalıdır, yəni:

$$Z(x) = 30x_1 + 35x_2 \to \min$$

Beləliklə, məqsəd funksiyasını formalaşdırdıq. Modelin məhdudiyyət şərtləri isə hər bir məmulat növü üzrə istehsal tapşırığının dəqiq yerinə yetirilməsini, yəni uyğun olaraq 400 ədəd 1-ci məmulatın, 500 ədəd 2-ci məmulatın və 300 ədəd 3-cü məmulatın istehsal edilməsini təmin etməlidir. Əgər bu və ya digər üsulla biçiləcək material vahidlərinin sayının mənfi kəmiyyət olmadığını da nəzərə alsaq, onda baxılan məsələnin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı şəkildə alınacaqdır:

$$Z(x) = 30x_1 + 35x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 20x_1 + 18x_2 = 400 \\ 15x_1 + 21x_2 = 500 \\ 22x_1 + 17x_2 = 300 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

Göründüyü kimi, alınmış model xətti optimallaşdırma modelidir və bu tip modellərin həll üsulları ilə reallaşdırıla bilər.

Cavab: $Z(x) = 30x_1 + 35x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 20x_1 + 18x_2 = 400 \\ 15x_1 + 21x_2 = 500 \\ 22x_1 + 17x_2 = 300 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0 \ \blacktriangleleft$$

11.4. Təyinat məsələsinin qoyuluşu

Fərz edək ki, müəssisədə n sayda işçidən ibarət qrup yaradılmışdır və bu qrup n sayda işdən ibarət işlər kompleksini icra etməlidir. İşçilərdən hər biri bu işlərdən hər birini görə bilər. Lakin müxtəlif işçilərin eyni bir işin icrasına sərf etdikləri $t_{ij}\,(i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,n})$ vaxtları eyni deyildir.

Fərz edilir ki, bütün mümkün icra variantları üzrə t_{ij} -un qiymətləri məlumdur və onlar aşağıdakı kvadrat matris şəklində verilmişdir:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Qarşıya belə bir məsələ çıxır: *İşçiləri işlərə təyin etmək üçün elə bir variant tapmaq lazımdır ki, bu varianta görə hər bir işçinin yalnız bir işi görməsi və hər bir işin yalnız bir işçi tərəfindən görülməsi şərti ilə bütün işlərin icrasına sərf ediləcək məcmu vaxt minimum olsun.* Bu məsələyə ***təyinat məsələsi*** deyilir. Məsələnin riyazi ifadəsini vermək üçün x_{ij} məntiqi dəyişəndən istifadə edək. Bu dəyişənin iki diskret qiyməti mümkündür: 0 və 1. Əgər i nömrəli işçi j nömrəli işi icra edirsə, onda $x_{ij} = 1$ olur, əgər icra etmirsə $x_{ij} = 0$ olur.

Onda baxılan məsələnin riyazi ifadəsi aşağıdakı kimi olacaqdır:

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (11.11)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (i = \overline{1,n}) \qquad (11.12)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad (11.13)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} i = \overline{1,n} \\ j = \overline{1,n} \end{pmatrix} \qquad (11.14)$$

(11.11) məqsəd funksiyası göstərir ki, bütün işçilərin bütün işlərin icrasına sərf etdikləri məcmu vaxt minimum olmalıdır. (11.12) sistemi hər bir işçinin yalnız bir işi görməsini təmin edir. (11.13) sistemi hər bir işin yalnız bir işçi tərəfindən görülməsini təmin edir. (11.14) sistemi məsələnin dəyişənlərinin qiymətlərinin tam ədədli (0 və ya 1) olmasını təmin edir.

Göründüyü kimi, baxılan iqtisadi məsələnin (11.11)-(11.14) riyazi ifadəsi nəqliyyat tipli xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirildi.

Təyinat məsələsinin qoyuluşu və iqtisadi-riyazi modelinin tərtibinə aid konkret misala baxaq.

►**Məsələ 11.4.** Müəssisədə 3 işçidən ibarət işçi qrupu 3 elementar

işdən ibarət mürəkkəb işlər kompleksini yerinə yetirir. Işçilər tərəfindən bu işlərin yerinə yetirilməsinə sərf olunan vaxt aşağıdakı matris şəklində verilmişdir:

$$T = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Işçilərin işlərə təyin olunması üçün elə bir plan tərtib edin ki, bu plana görə bütün işlərin icra edilməsinə sərf edilən məcmu vaxt minimum olsun.

Həlli: Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini tərtib edək. Aşağıdakı endogen parametrləri qəbul edək:

x_{ij} - i-ci işçinin j-cu işin icrasına təyin edilməsini əks etdirən, 0 və ya 1 qiyməti ala bilən məntiqi dəyişəndir. Onda işçilərin işlərə təyin edilməsi planı aşağıdakı kvadrat matrislə ifadə ediləcəkdir:

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

Bütün işçilərin bütün işlərin icrasına sərf etdikləri məcmu vaxtı hesablayıb, minimum etsək alarıq:

$$Z(x) = 8x_{11} + 9x_{12} + 7x_{13} + 6x_{21} + 2x_{22} + 8x_{23} +$$
$$+ 4x_{31} + 5x_{32} + 3x_{33} \to \min$$

Beləliklə, məqsəd funksiyasını formalaşdırdıq. Indi isə modelin məhdudiyyət şərtlərini formalaşdıraq. Şərtə görə hər bir işçi yalnız bir işi görməlidir, yəni:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \end{cases}$$

Şərtə görə hər bir iş yalnız bir işçi tərəfindən görülməlidir, yəni:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \end{cases}$$

Əgər modelin endogen parametrlərinin məntiqi dəyişənlər olub,

yalnız 0 və ya 1 qiymətləri ala bilməsini nəzərə alsaq, onda baxılan məsələnin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı kimi alınacaqdır:

$$Z(x) = 8x_{11} + 9x_{12} + 7x_{13} + 6x_{21} + 2x_{22} + 8x_{23} +$$
$$+ 4x_{31} + 5x_{32} + 3x_{33} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad (i = \overline{1,n}, \ \ j = \overline{1,n})$$

Məsələnin iqtisadi-riyazi modeli nəqliyyat tipli modelə gətirildiyi üçün onun həllini Macar üsulu ilə reallaşdırmaq olar (bu metodun həll alqoritmi §5.5-də nəzərdən keçirilmişdir)

Cavab:

$$Z(x) = 8x_{11} + 9x_{12} + 7x_{13} + 6x_{21} + 2x_{22} + 8x_{23} +$$
$$+ 4x_{31} + 5x_{32} + 3x_{33} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad (i = \overline{1,n}, \ \ j = \overline{1,n})$$

◀

11.5. Çoxkriteriyalı müəssisə modelinin qurulması

Biz yuxarıda iqtisadi-riyazi modelləşdirmənin metodoloji əsaslarını nəzərdən keçirən zaman çoxkriteriyalı modellərin qurulması və onların kompromis həllərinin tapılması məsələlərinə toxunmuşduq (bax 1-ci fəsil, §1.1). İndi isə müəssisələr səviyyəsində çoxkriteriyalı modellərin qurulması və onların kompromis həllərinin tapılmasının praktik aspektlərini daha ətraflı nəzərdən keçirək. Aşağıdakı misala baxaq.

►**Məsələ 11.5.** Fərz edək ki, firma A və B məhsulları istehsal edir. Məhsulların satış bazarının təhlili göstərir ki, A məhsulunun bir vahidinin satış qiyməti 2 pul vahidi, bir vahid B məhsulunun satış qiyməti isə 3 pul vahididir.

A və B məhsullarını istehsal etmək üçün 2 növ istehsal ehtiyatından istifadə edilir. Ehtiyatların həcmləri məhduddur və uyğun olaraq $a_1 = 18$ ton və $a_2 = 15$ tondur.

1000 ədəd hesabı ilə A və B məhsullarının istehsalına ehtiyat sərfi normaları (ton hesabı ilə) aşağıdakı texnoloji matris ilə müəyyən edilir:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

A məhsulunun maya dəyəri 1 pul vahidi, B məhsulunun maya dəyəri 2 pul vahididir. Satış bazarının öyrənilməsi göstərir ki, B məhsuluna tələb böyükdür və bu məhsuldan ən azı 1000 ədəd istehsal edilməlidir.

Firmada məhsul istehsalı üçün elə bir istehsal proqramı tərtib etmək lazımdır ki, bu proqrama görə müəssisənin buraxacağı məhsulların sayı və əldə edəcəyi gəlir maksimum olsun, məhsulların məcmu maya dəyəri isə minimum olsun.

Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini qurmaq üçün aşağıdakı endogen parametrlərdən istifadə edək.

$x_1 - A$ məhsulunun istehsalının həcmi (1000 ədədlə);

$x_2 - B$ məhsulunun istehsalının həcmi (1000 ədədlə).

Onda baxılan məsələnin aşağıdakı iqtisadi-riyazi modelini alarıq:

Məqsəd funksiyası:

- $Z_1(x) = x_1 + x_2 \to \max$ (11.15) (Məhsulların sayı maksimum olmalıdır)
- $Z_2(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ (11.16 (Gəlir maksimum olmalıdır)

- $Z_3(x) = x_1 + 2x_2 \to \min$ (11.17) (Maya dəyəri minimum olmalıdır)

Məhdudiyyət şərtləri:

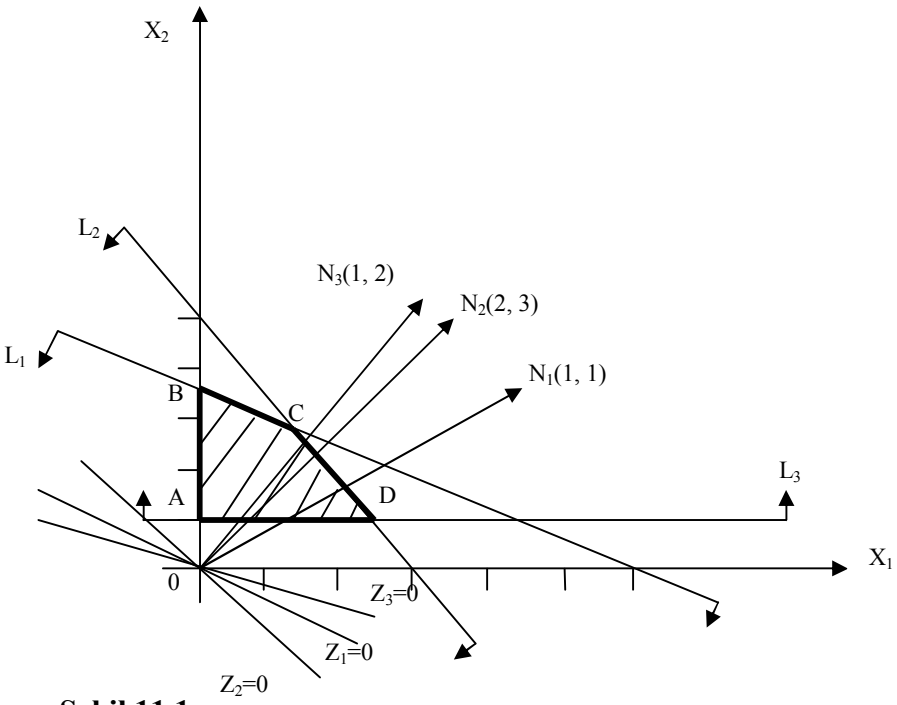
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 18 \\ 5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_2 \ge 1 \end{cases} \qquad (11.18)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \qquad (11.19)$$

Beləliklə biz çoxkriteriyalı iqtisadi-riyazi model aldıq.

Bu çoxkriteriyalı modelin kompromis həllini tapaq.

Əvvəlcə məsələni hər bir məqsəd funksiyasına görə fərdi şəkildə həll edək. Daha doğrusu, birkriteriyalı şəkildə formalaşdırdığımız (11.15)-(11.18)-(11.19), (11.16)-(11.18)-(11.19) və (11.17)-(11.18)-(11.19) modellərinin optimal həllərini tapaq. Bu modellər iki dəyişənli olduğu üçün onların optimal həllini tapmaq üçün Qrafik üsulundan istifadə edək. Hər üç modelin (11.18)-(11.19) məhdudiyyət şərtləri sistemi eyni olduğu üçün onların həllər oblastları da eyni oblast olacaqdır. (şəkil 11.1)



Şəkil 11.1

Qrafikdən göründüyü kimi, (11.15)-(11.18)-(11.19) və (11.16)-

(11.18)-(11.19) xətti optimallaşdırma modellərinin optimal həlləri *ABCD* həllər çoxbucaqlısının *C* təpə nöqtəsində, (11.17)-(11.18)-(11.19) xətti optimallaşdırma modelinin optimal həlli isə *A* təpə noqtəsində alınır.

C təpə nöqtəsinin koordinatlarını tapaq. Bu nöqtə L_1 və L_2 düz xətlərinin kəsişməsi olduğu üçün alırıq:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 18 \\ 5x_1 + 3x_2 = 15 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 5 \\ \cdot 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 15x_1 + 25x_2 = 90 \\ 15x_1 + 9x_2 = 45 \end{cases}$$

$$16x_1 = 45$$

$$x_2 \approx 2{,}8125$$

$$x_1 \approx \frac{18 - 5 \cdot 2{,}8125}{3} \approx \frac{3{,}9375}{3} \approx 1{,}312$$

Beləliklə, *C* təpə nöqtəsinin koordinatları $C(1{,}312;\ 2{,}8125)$ -dir. Onda alırıq:

$$\max Z_1(x) = Z(C) = x_1 + x_2 = 1{,}312 + 2{,}8125 = 4{,}125$$

$$\max Z_2(x) = Z(C) = 2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 1{,}312 + 3 \cdot 2{,}8125 = 2{,}624 + 8{,}439 = 11{,}063$$

(11.17)-(11.18)-(11.19) xətti optitmallaşdırma modelinin optimal həlli isə modelin həllər çoxbucaqlısının *A* təpə nöqtəsində alınır. Bu təpə nöqtəsinin koordinatları $x_1 = 0$, $x_2 = 1-$ dir, yəni $A(0,1)$. Onda alırıq:

$$\min Z_3(x) = x_1 + 2x_2 = 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

Yuxarıda (Fəsil 1, §1.1) verdiyimiz nəzəri izaha əsaslansaq, onda baxılan məsələnin kompromis həllinin tapılması modeli aşağıdakı kimi alınacaqdır:

$$F = x_3 \to \min \qquad (11.20)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4{,}125x_3 \geq 4{,}125 \\ 2x_1 + 3x_2 + 11{,}063x_3 \geq 11{,}063 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 2 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 18 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_2 \geq 1 \end{cases} \qquad (11.21)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \qquad (11.22)$$

Modeli xətti optimallaşdırma modeli kimi Simpleks metodla həll edək.

1-ci mərhələ: Mənfi olmayan $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$, $y_4 \geq 0$, $y_5 \geq 0$, $y_6 \geq 0$ əlavə dəyişənlərin köməyi ilə (11.21) sisteminin bərabərsizliklərini tənliklərə gətirək və bazis dəyişənlərini təyin edək:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 4{,}125x_3 + y_1 = -4{,}125 \\ -2x_1 - 3x_2 - 11{,}063x_3 + y_2 = -11{,}063 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + y_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + y_4 = 18 \\ 5x_1 + 3x_2 + y_5 = 15 \\ \qquad -x_2 + y_6 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + 4{,}125x_3 - 4{,}125 \geq 0 \\ y_2 = 2x_1 + 3x_2 + 11{,}063x_3 - 11{,}063 \geq 0 \\ y_3 = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2 \geq 0 \\ y_4 = -3x_1 - 5x_2 + 18 \geq 0 \\ y_5 = -5x_1 - 3x_2 + 15 \geq 0 \\ y_6 = x_2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Simpleks cədvəlini tərtib edək və dayaq planının axtarışına başlayaq:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-1	-1	$\langle -4{,}125 \rangle$	$-4{,}125$
$y_2 =$	-2	-3	$-11{,}063$	$-11{,}063$
$y_3 =$	1	2	-2	2
$y_4 =$	3	5	0	18
$y_5 =$	5	3	0	15
$y_6 =$	0	-1	0	-1
$F =$	0	0	-1	0

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	1	
$x_3 =$	-1	-1	1	$-4{,}125$	
$y_2 =$	$-2{,}813$	1,312	11,063	0	
$y_3 =$	$-6{,}125$	$-10{,}25$	2	$-16{,}5$	
$y_4 =$	$-12{,}375$	$-20{,}625$	0	$-74{,}25$	$:(-4{,}125)$
$y_5 =$	$-20{,}625$	$-12{,}375$	0	$-61{,}875$	
$y_6 =$	0	4,125	0	4,125	
$F =$	-1	-1	1	$-4{,}125$	

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	1

$x_3 =$	0,24	0,24	$-0,24$	1
$y_2 =$	0,68	$-0,32$	$-2,68$	0
$y_3 =$	1,48	2,48	$-0,48$	4
$y_4 =$	3	5	0	18
$y_5 =$	5	3	0	15
$y_6 =$	0	$\langle -1 \rangle$	0	-1
$F =$	0,24	0,24	$-0,24$	1

	$-x_1$	$-y_6$	$-y_1$	1	
$x_3 =$	$-0,24$	$-0,24$	0,24	$-0,76$	
$y_2 =$	$-0,68$	0,32	2,68	$-0,32$	
$y_3 =$	$-1,48$	$-2,48$	0,48	$-1,52$	$:(-1)$
$y_4 =$	-3	-5	0	-13	
$y_5 =$	-5	-3	0	-12	
$x_2 =$	0	1	0	-1	
$F =$	$-0,24$	$-0,24$	0,24	$-0,76$	

	$-x_1$	$-y_6$	$-y_1$	1
$x_3 =$	0,24	0,24	$-0,24$	0,76
$y_2 =$	0,68	$-0,32$	$-2,68$	0,32
$y_3 =$	1,48	2,48	$-0,48$	1,52
$y_4 =$	3	5	0	13
$y_5 =$	5	3	0	12
$x_2 =$	0	-1	0	1
$F =$	0,24	0,24	$-0,24$	0,76

Sonuncu Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda heç bir mənfi element yoxdur. Deməli, məsələnin dayaq həlli tapılmışdır. Əgər $x_1 = 0,\ \ y_6 = 0,\ \ y_1 = 0$ olarsa, onda aşağıdakı dayaq həlli alırıq:

$$X_{day} = (x_1 = 0,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = 0{,}76)$$

$$Z(X_{day}) = 0{,}76$$

Indi isə Simpleks cədvəlin $Z(x)$ sətirindəki müsbət elementləri yox etməklə modelin optimal həllini tapaq:

	$-x_1$	$-y_6$	$-y_1$	1
$x_3 =$	0,24	0,24	$-0,24$	0,76
$y_2 =$	$\langle 0,68 \rangle$	$-0,32$	$-2,68$	0,32
$y_3 =$	1,48	2,48	$-0,48$	1,52
$y_4 =$	3	5	0	13
$y_5 =$	5	3	0	12
$x_2 =$	0	-1	0	1
$F =$	0,24	0,24	$-0,24$	0,76

	$-y_2$	$-y_6$	$-y_1$	1	
$x_3 =$	$-0,24$	0,24	0,48	0,44	
$x_1 =$	1	$-0,32$	$-2,68$	0,32	
$y_3 =$	$-1,48$	2,16	3,64	0,56	
$y_4 =$	-3	4,36	8,04	7,88	
$y_5 =$	-5	3,64	13,4	6,56	$:(0,68)$
$x_2 =$	0	$-0,68$	0	0,68	
$F =$	$-0,24$	0,24	0,48	0,44	

	$-y_2$	$-y_6$	$-y_1$	1
$x_3 =$	$-0{,}35$	$0{,}35$	$0{,}71$	$0{,}65$
$x_1 =$	$1{,}47$	$-0{,}47$	$-3{,}94$	$0{,}47$
$y_3 =$	$-2{,}18$	$3{,}17$	$\langle 5{,}35 \rangle$	$0{,}82$
$y_4 =$	$-4{,}41$	$6{,}41$	$11{,}82$	$11{,}59$
$y_5 =$	$-7{,}35$	$5{,}35$	$19{,}71$	$9{,}65$
$x_2 =$	0	-1	0	1
$F =$	$-0{,}35$	$0{,}35$	$0{,}71$	$0{,}65$

	$-y_2$	$-y_6$	$-y_3$	1	
$x_3 =$			$-0{,}71$	$2{,}89$	
$x_1 =$			$3{,}94$	$5{,}74$	
$y_1 =$	$-2{,}18$	$3{,}17$	1	$0{,}82$	
$y_4 =$			$-11{,}82$	$52{,}31$	
$y_5 =$			$-19{,}71$	$35{,}47$	$:(5{,}35)$
$x_2 =$			0	$5{,}35$	
$F =$	$-0{,}32$	$-0{,}38$	$-0{,}71$	$2{,}89$	

	$-y_2$	$-y_6$	$-y_3$	1
$x_3 =$				0,54
$x_1 =$				1,07
$y_1 =$				0,15
$y_4 =$				9,78
$y_5 =$				6,63
$x_2 =$				1
$F =$	$-0{,}06$	$-0{,}07$	$-0{,}13$	0,54

Sonuncu Simpleks cədvəlin F sətirində heç bir müsbət element yoxdur. Odur ki, Simpleks cədvəlin yuxarısında yerləşən qeyri-bazis dəyişənlərin sıfır qiymətlərində ($y_2 = 0,\ y_6 = 0$, $y_3 = 0$) (11.20)-(11.22) modelinin aşağıdakı optimal həllini alırıq:

$$X_{opt} = (x_1 \approx 1{,}07,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 \approx 0{,}54)$$

$$\min F(x) = 0{,}54$$

Tapdığımız optimal həll (11.15)-(11.18)-(11.19), (11.16)-(11.18)-(11.19) və (11.17)-(11.18)-(11.19) xətti optimallaşdırma modellərinin kompromis (suboptimal) həllidir.

Beləliklə, müəssisə malik olduğu ehtiyatlar daxilində istehsal ediləcək məhsulun miqdarını və məcmu gəlirini maksimum edəcək, məcmu maya dəyərini isə minimum edəcək kompromis (suboptimal) strategiya tətbiq etmək istəyirsə, onda 1,07 vahid (1070 ədəd) A məhsulu və 1 vahid (1000 ədəd) B məhsulu istehsal etməlidir. Bu halda firmanın 1-ci istehsal ehtiyatından 9,78 ton istifadə edilməmiş qalacaqdır ($y_4 = 9{,}78$), 2-ci istehsal ehtiyatı üzrə isə istifadə edilməmiş hissə 6,63 ton təşkil edəcəkdir ($y_5 = 6{,}63$). Bu kompromis həllə görə

müəssisənin iqtisadi göstəricilərini hesablayaq:

- Müəssisənin buraxacağı məhsulun sayı:

$$Z_1(x) = (1{,}07 + 1) \cdot 1000 = 2{,}07 \cdot 1000 = 2070 \text{ ədəd}$$

- Müəssisənin əldə edəcəyi gəlir:

$$Z_2(x) = (2 \cdot 1{,}07 + 3 \cdot 1) \cdot 1000 = (2{,}14 + 3) \cdot 1000 = 5140 \text{ manat}$$

- Məhsulların məcmu maya dəyəri:

$$Z_3(x) = (1{,}07 + 2 \cdot 1) \cdot 1000 = 3{,}07 \cdot 1000 = 3070 \text{ manat}$$

Cavab: $X^* = (x_1^* = 1{,}07,\ \ x_2^* = 1{,}0)$ **olduqda:**

- $\max Z_1(x) = 2070$ **ədəd (məhsulların sayı);**
- $\max Z_2(x) = 5140$ **pul vahidi (gəlir);**
- $\min Z_3(x) = 3070$ **pul vahidi (məcmu maya dəyəri).◄**

11.6. Müəssisə modellərinin ekzogen parametrlərinin qiymətlərinin dəyişməsinin optimal həllə təsirinin təhlili

Müəssisələr səviyyəsində optimal idarəetmə strategiyalarının qurulmasının riyazi instrumentariləri kimi baxdığımız mikromodellər həm də müəssisələrin malik olduğu ehtiyatların və bazar qiymətlərinin dəyişməsi halında optimal strategiyalarda çevik dəyişikliklər etməyə imkan verir. Qeyd edək ki, bu çeviklik müəssisələrin bazar rəqabətinə davamlılığının təmin edilməsində və qəbul edilən qərarların real iqtisadi şəraitə adekvatlığının yüksəldilməsində mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Bu zaman qarşıya çıxan məsələləri aşağıdakı kimi qruplaşdırmaq olar:

- İstehsal prosesində istifadə edilən ehtiyatların həcmlərinin dəyişməsi qəbul edilmiş idarəetmə strategiyasına necə təsir edir?
- Qarşıya qoyulmuş məqsədin riyazi təsviri olan məqsəd funksiyasının əmsallarının dəyişməsi qəbul edilmiş idarəetmə strategiyasına necə təsir edir?

Müəssisənin optimal istehsal proqramının tapılması modelinin ekzogen parametrlərinin qiymətlərində baş verən dəyişikliklərin optimal həllə göstərdiyi təsirin iqtisadi-riyazi təhlilinə aid konkret misala baxaq.

► **Məsələ 11.6.** «Halal» firması kolbasa və sosis istehsal edir. İstehsal prosesində ilkin material olaraq ətdən və əlavələrdən istifadə olunur. Firmada ətin və əlavələrin günlük ehtiyatları uyğun olaraq 150 kq və 96 kq-dır. 1kq kolbasa istehsal etmək üçün 0,4 kq ət və 0,6 kq

əlavələr tələb edilir. 1 kq sosis istehsal etmək üçün isə 0,6 kq ət və 0,24 kq əlavələr tələb edilir. Məhsulların satış bazarının marketinq təhlili göstərir ki, sosislərə olan gündəlik tələb kolbasaya olan tələbi ən azı 30 kq üstələyir. Digər tərəfdən, məlum olmuşdur ki, kolbasa məmulatına olan gündəlik tələb 100 kq-ı ötmür. 1 kq kolbasanın topdan satış qiyməti 15 manat, 1kq sosisin topdan satış qiyməti isə 10 manatdır.

Müəssisə üçün elə bir istehsal proqramı tapmaq lazımdır ki, bu proqrama görə məhsulların satışından əldə edilən gündəlik gəlir maksimum olsun.

Həlli: Firma səviyyəsində optimallaşdırma məsələsi kimi baxılan bu məsələnin iqtisadi-riyazi modelini quraq.

Aşağıdakı endogen parametrləri qəbul edək:

x_1 – firmada bir gün ərzində istehsal ediləcək kolbasanın miqdarı (kq hesabı ilə);

x_2 – firmada bir gün ərzində istehsal ediləcək sosislərin miqdarı (kq hesabı ilə).

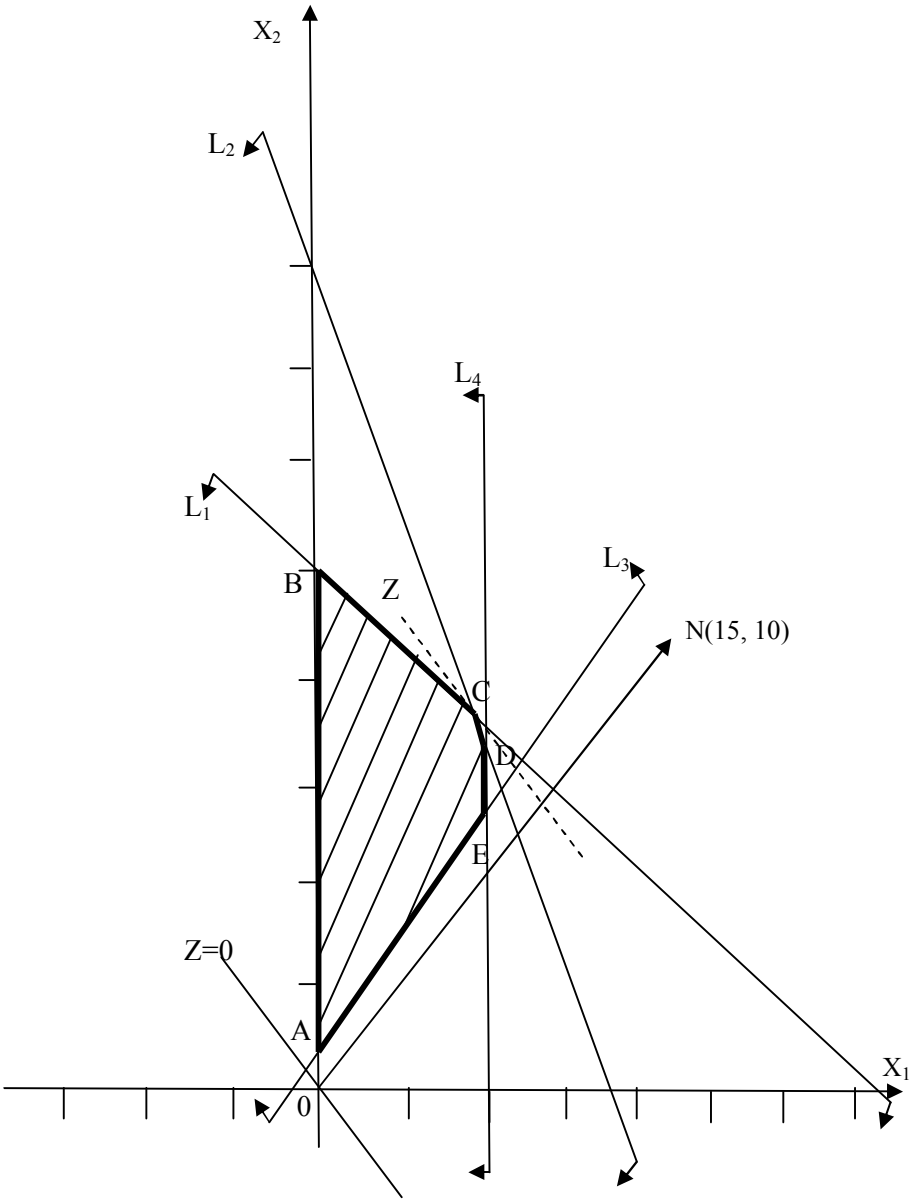
Onda baxılan məsələnin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı şəkildə alınacaqdır:

$$Z(x) = 15x_1 + 10x_2 \to \max \qquad (11.23)$$

$$\begin{cases} 0{,}4x_1 + 0{,}6x_2 \le 150 & (11.24) \\ 0{,}6x_1 + 0{,}24x_2 \le 96 & (11.25) \\ x_2 - x_1 \ge 30 & (11.26) \\ x_1 \le 100 & (11.27) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0 \qquad (11.28)$$

(11.23)-(11.28) modeli 2 dəyişənli xətti proqramlaşdırma modeli olduğu üçün onu Qrafik üsulu ilə həll edək (bax fəsil 3, §3.1). Modelin həllər oblastını müstəvi üzərində, düzbucaqlı koordinat sistemində quraq (şəkil 11.2):



Şəkil 11.2

Şəkildən göründüyü kimi modelin mümkün həllər oblastı $ABCDE$ çoxbucaqlısıdır və (11.23) məqsəd funksiyası özünün ən böyük qiymətini bu oblastın C təpə nöqtəsində alır. C təpə nöqtəsi L_1 və L_2 düz xətlərinin kəsişməsi olduğu üçün bu nöqtənin koordinatlarını tapmaq üçün aşağıdakı tənliklər sistemini həll etmək lazımdır:

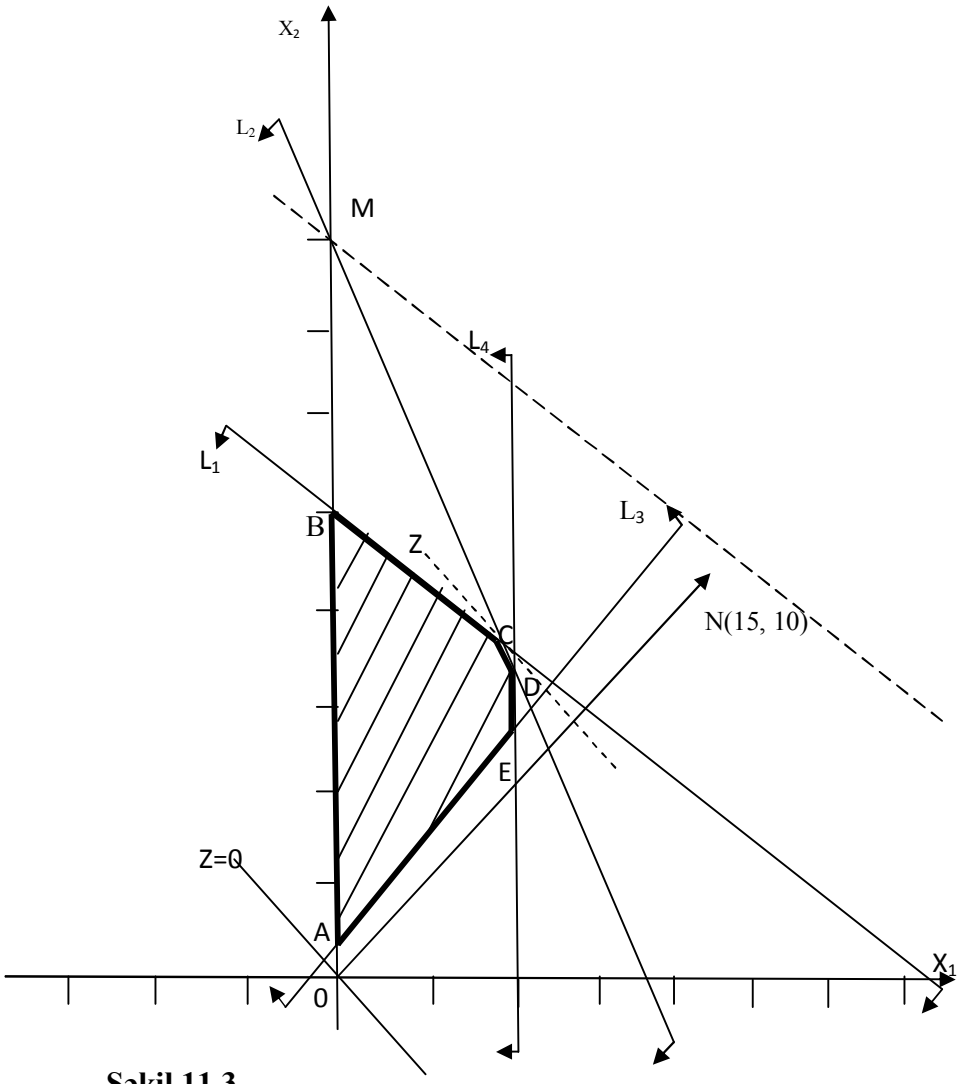
$$\begin{cases} 0{,}4x_1 + 0{,}6x_2 = 150 \\ 0{,}6x_1 + 0{,}24x_2 = 96 \end{cases}$$

Sistemi həll edib C nöqtəsi üçün $C(81,\ 196)$ koordinatlarını tapırıq. Deməli, qoyulmuş məsələnin optimal həlli $X_{opt} = (x_1 = 81,\ x_2 = 196)$ -dır və bu optimal həllə görə modelin məqsəd funksiyası özünün maksimum qiymətini alır, yəni:

$$\max Z(X) = 15 \cdot 81 + 10 \cdot 196 = 3175$$

Beləliklə, "Halal" firması maksimum mənfəət əldə etmək üçün bir gün ərzində 81 kq kolbasa və 196 kq sosis istehsal etməlidir ki, onun gözlənilən gəliri 3175 manata bərabər olsun.

Firmanın istehsal prosesində istifadə etdiyi ət və əlavələrin həcmlərinin dəyişməsinin optimal həllə necə təsir edəcəyini müəyyən edək. Modelin optimal həllinin alındığı C təpə nöqtəsi L_1 və L_2 düz xətlərinin kəsişməsi olduğu üçün bu düz xətlərin aid olduğu 1-ci və 2-ci xətti bərabərsizliklər {(11.24) və (11.25) məhdudiyyət şərtləri} aktiv məhdudiyyətlər hesab edilir. Təbii ki, bu halda (11.26) və (11.27) xətti bərabərsizlikləri passiv məhdudiyyətlər kimi çıxış edəcəklər. (11.24) və (11.25) aktiv məhdudiyyətlər firmanın ət və əlavələrlə bağlı məhdudiyyət şərtləri olduğu üçün bu ehtiyatlar defisit ehtiyatlara aid edilir və onlar istehsal prosesində tam sərf olunur. Ət ehtiyatı üzrə tərtib olunmuş (11.24) məhdudiyyət şərtinin sağ tərəfinin böyüməsini izləyək (şəkil 11.3)



Şəkil 11.3

Göründüyü kimi, məhdudiyyət şərtinin sağ tərəfi böyüdükcə L_1 düz xətti özünə paralel sağa sürüşəcək və ordinat oxunu M nöqtəsində (L_2 düz xəttinin ordinat oxunu kəsdiyi nöqtə) kəsənə qədər aktiv məhdudiyyət olaraq qalacaqdır. M nöqtəsinin koordinatları $M(0,\ 400)$ -dür. Əgər M nöqtəsinin koordinatlarını (11.24) bərabərsizliyində yerinə yazsaq ehtiyatın yuxarı mümkün həddini alarıq:

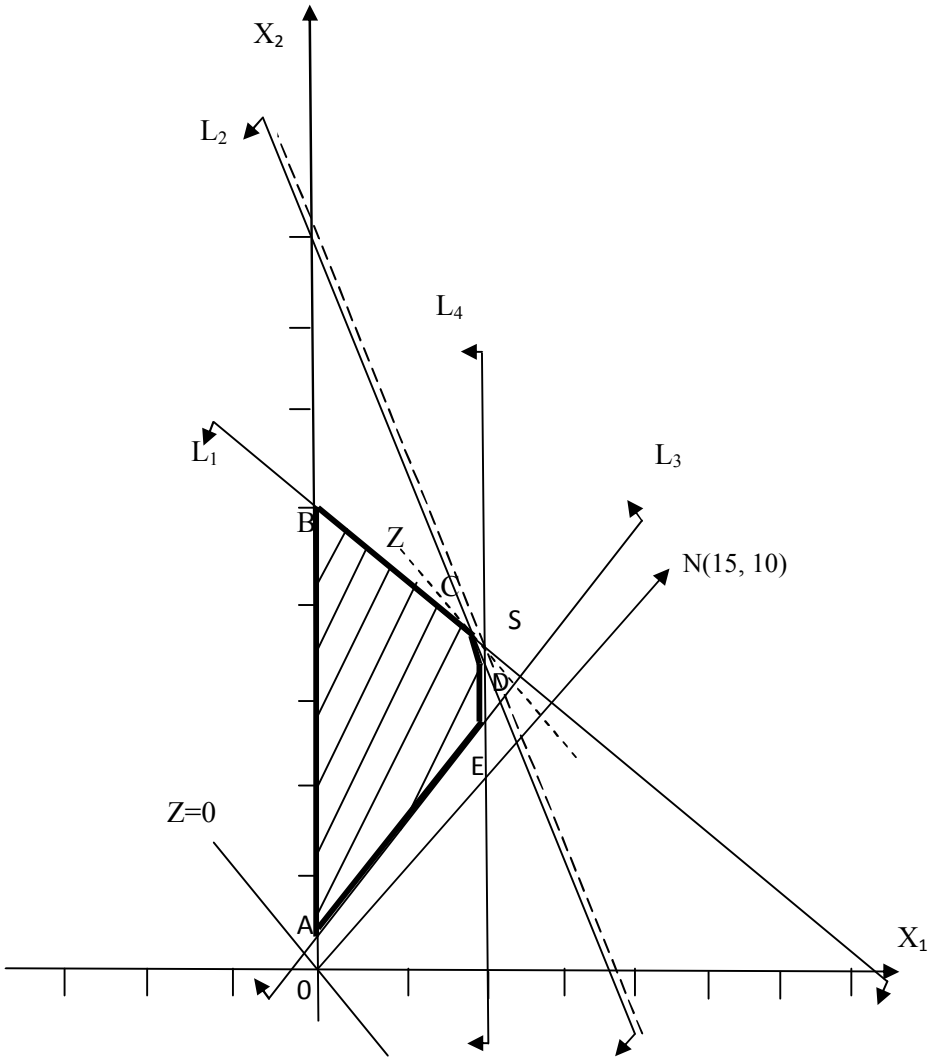
$$0{,}4x_1 + 0{,}6x_2 = 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 400 = 240 \ \ kq$$

Bu halda firmanın gəliri

$$Z(\bar{x}) = 15x_1 + 10x_2 = 15 \cdot 0 + 10 \cdot 400 = 4000 \ \ manat$$

olacaqdır.

Indi isə əlavələr üzrə məhdudiyyətin artımını izləyək. L_2 düz xəttini sağ tərəfə özünə paralel sürüşdürsək, onda bu düz xətt S nöqtəsində L_1 və L_4 düz xətləri ilə kəsişənə qədər (11.25) məhdudiyyəti aktiv olaraq qalacaqdır (şəkil 11.4)



Şəkil 11.4

S nöqtəsi L_1 və L_4 düz xətlərinin kəsişməsi olduğu üçün alırıq:

$$\begin{cases} 0{,}4x_1 + 0{,}6x_2 = 150 \\ x_1 \qquad\qquad = 100 \end{cases}$$

Deməli, S nöqtəsinin koordinatları $S(100,\ 183)$ olacaqdır.

Onda firmada əlavələrin gündəlik miqdarının yuxarı mümkün həddi üçün alırıq:

$$0{,}6x_1 + 0{,}24x_2 = 0{,}6 \cdot 100 + 0{,}24 \cdot 183 \approx 104kq$$

Bu halda firmanın gəliri

$$Z(\bar{x}) = 15 \cdot 100 + 10 \cdot 183 = 3330 \ \ manat$$

təşkil edəcəkdir.

Qeyd edək ki, analoji qaydada passiv məhdudiyyətlərin sağ tərəflərinin dəyişməsinin də imkanlarını qiymətləndirmək olar.

İndi isə modelin məqsəd funksiyasının əmsallarının qiymətlərinin dəyişməsi hüdudlarının sistemli təhlilini verək.

Modeldə (11.23) məqsəd funksiyasının əmsallarının dəyişməsi səviyyə xəttinin meylinə təsir edir. Səviyyə xəttinin tənliyini ümumi şəkildə $p_1x_1 + p_2x_2 = const$ kimi göstərmək olar.

Şəkil 11.2-dən göründüyü kimi, $p_1 -$in qiymətinin artması və ya $p_2 -$nin qiymətinin azalması ilə səviyyə xətti C təpə nöqtəsi ətrafında saat əqrəbi istiqamətində fırlanır. Modelin ekzogen parametrlərinə görə $p_2 = 10 -$dur və $p_1 -$in qiymətini səviyyə xəttinin L_2 düz xətti ilə kəsişməsinə qədər artırmaq olar. Bu halda səviyyə xətinin bucaq əmsalı

$$K = {-p_1}/{p_2} = {-p_1}/{10}$$

-a bərabər olacaqdır.

L_2 düz xəttinin bucaq əmsalı isə (L_2 : $0{,}6x_1 + 0{,}24x_2 = 96$ olduğu üçün)

$$K_{(L_1)} = -\frac{0{,}6}{0{,}24} = -\frac{6}{2{,}4}$$

-ə bərabərdir.

Bu halda $p_1x_1 + p_2x_2 = const$ düz xətti ilə L_2 düz xətti üst-üstə düşdüyü üçün onların bucaq əmsalları bir-birinə bərabər olur. Yəni $K = K_{(L_1)}$ olduğunu nəzərə alaraq yaza bilərik:

$$\frac{-p_1}{10} = -\frac{6}{2,4}$$

Bu nisbətdən p_1-i tapsaq, alarıq:

$$p_{1(\max)} = \frac{60}{2,4} = 25$$

p_1 əmsalının qiymətini o vaxta qədər azaltmaq olar ki, səviyyə xətti L_1 düz xətti ilə üst-üstə düşsün. Odur ki, (L_1: $0,4x_1 + 0,6x_2 = 150$) olduğuna əsaslanaraq yaza bilərik:

$$\frac{p_1}{10} = \frac{4}{6}$$

$$p_{1(\min)} = \frac{40}{6} = 6,6$$

Beləliklə, əgər 1kq kolbasanın topdan satış qiyməti 6,6 manatla 25 manat arasında dəyişərsə, onda baxılan məsələnin optimal həlli dəyişməyəcəkdir.

Bu halda firmanın gəliri 2494,6 manatdan 3985 manata qədər dəyişəcəkdir.

Analoji qaydada sosisin 1 kq-nın qiymətinin dəyişməsi oblastını da müəyyən etmək olar. Asanlıqla müəyyən etmək olar ki:

$$\frac{-15}{p_2} = -\frac{0,6}{2,4}; \qquad p_{2(\min)} = \frac{15 \cdot 2,4}{0,6} = \frac{3,6}{0,6} = 6$$

və

$$\frac{-15}{p_2} = -\frac{4}{6}; \qquad p_{2(\max)} = \frac{15 \cdot 6}{4} = \frac{90}{4} = 22,5$$

olduğu üçün sosisin 1 kq-nın topdan satış qiymətinin 6 manatdan 22,5 manata qədər dəyişməsi məsələnin optimal həllində heç bir dəyişiklik etməyəcəkdir. Daha doğrusu, bu qiymət diapazonunda müəssisəyə yenə də 81 kq kolbasa və 196 kq sosis istehsal etmək sərfəli olacaqdır. Bu halda firmanın gəliri 2391 manatdan 5625 manata qədər dəyişəcəkdir.

Cavab: $X_{opt} = (x_1 = 81,\ x_2 = 196)$ **olduqda** $\max Z(X^*) = 3175$ **olur.**

a) 1 kq kolbasanın qiyməti 6,6 manatdan 95 manata qədər

dəyişdikdə X^* optimal həll müəssisə üçün optimal davranış strategiyası olaraq qalacaqdır;

b) 1 kq sosisin qiyməti 6 manatdan 22,5 manata qədər dəyişdikdə X^* optimal həll müəssisə üçün optimal davranış strategiyası olaraq qalacaqdır ◄

Mövzu üzrə praktikum

11.7. Firma 3 növ məhdud ehtiyatdan istifadə etməklə 3 növ məhsul istehsal edir. Aşağıdakı ekzogen parametrlər verilmişdir:

- xammalların məhdudluğu vektoru A=(200,300,100)
- xammal sərfi normaları matrisi $b = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 6 & 5 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
- məhsul vahidlərinin maya dəyərləri vektoru C= (60,80,30)
- məhsul vahidlərinin gözlənilən bazar qiymətləri vektoru P= (400,120,60).

Maksimum mənfəət kriteriyasına görə firmanın optimal istehsal proqramının təyin edilməsi məsələsinin iqtisadi-riyazi modelini qurun.

11.8. Fərz edək ki, müəssisədə avadanlıqların optimal yüklənməsi modelində m (avadanlıqların sayı) =3, n (məmulatların sayı) =4-dür. Məmulat növləri üzrə istehsal tapşırığı B=(100,120,140,90) vektoru ilə təyin edilmişdir. Əgər x_{ij} – i-ci avadanlıqda emal ediləcək j-cu məmulat vahidlərinin miqdarı olarsa, istehsal proqramının dəqiq yerinə yetirilməsini təmin edəcək məhdudiyyət şərtləri sistemini qurun.

11.9. Firmada böyük ölçülü materialdan 3 məmulat biçilməlidir. 1-ci məmulatdan 150 ədəd, 2-ci məmulatdan 180 ədəd, 3-cü məmulatdan isə 200 ədəd istehsal edilməlidir. Məmulatları 2 üsulla biçmək olar. 1-ci üsulla biçildikdə 13 ədəd 1-ci məmulat, 10 ədəd 2-ci məmulat və 15 ədəd 3-cü məmulat alınır. 2-ci üsulla biçildikdə isə 10 ədəd 1-ci məmulat, 18 ədəd 2-ci məmulat və 12 ədəd 3-cü məmulat alınır. 1-ci üsuldan istifadə zamanı itkilər 30 vahid, 2-ci üsuldan istifadə zamanı isə 40 vahid təşkil edir.

Firmada materialların optimal biçilməsi modelini tərtib edin.

11.10. Müəssisədə 5 nəfər işçidən ibarət işçi qrupu 5 elementar işdən ibarət işlər kompleksini icra etməlidir. Hər bir işçinin yalnız bir işi görməsi şərtinin riyazi təsvirini verin:

11.11. Fərz edək ki, müəssisədə 4 ədəd eyni tipli avadanlıq vardır. Bu avadanlıqlarda 3 növ məhsul istehsal edilməlidir. Avadanlıqlarda

məhsul vahidi istehsalına sərf edilən vaxt aşağıdakı matrislə verilmişdir:

$$b = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \\ 9 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Avadanlıqların iş vaxtı fondlarının məhdudluğu A=(290, 200, 340, 260) vektoru ilə müəyyən edilir. Əgər x_{ij} i-ci avadanlıqda istehsal ediləcək j-cu məhsulun miqdarı olarsa, onda avadanlıqların iş vaxtı fondlarının məhdudluğunu əks etdirən məhdudiyyət şərtləri sistemini tərtib edin.

Mövzu üzrə testlər

1. Müəssisənin optimal davranış strategiyasının seçilməsi modeli riyazi quruluşuna görə aşağıdakı ifadə formalarından hansında ola bilməz:

A) Xətti proqramlaşdırma məsələsi;
B) Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsi;
C) Sahələrarası balans modeli (Leontyev modeli);
D) Tam ədədli proqramlaşdırma məsələsi;
E) Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsi.

2. Xətti müəssisə modelini aşağıdakı üsullardan hansı ilə həll etmək olmaz?

A) Simpleks üsulu;
B) Qoşma Simpleks üsulu;
C) Əgər nəqliyyat modelidirsə, potensiallar metodu;
D) Laqranj vuruqları üsulu;
E) Əgər tam ədədlidirsə, Qomori alqoritmi.

3. Mikromodellərin həll alqoritmləri ilə bağlı aşağıdakı mülahizələrdən hansı doğrudur?

A) İstənilən xətti müəssisə modelini Qrafik üsulu ilə həll etmək olar;
B) İstənilən qeyri-xətti müəssisə modelini Simpleks üsulu ilə həll etmək olar;
C) İstənilən qeyri-xətti müəssisə modelini Qoşma-Simpleks metodla həll etmək olar;
D) İstənilən xətti müəssisə modelini Simpleks metodla həll etmək olar;
E) İstənilən xətti müəssisə modelini Laqranj vuruqları üsulu ilə həll etmək olar.

4. Müəssisə modellərinin riyazi təsviri ilə bağlı aşağıdakı mülahizələrdən hansı doğru deyil?

A) Müəssisə modelini tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsi şəklində qurmaq olar;
B) Müəssisə modelini kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsi şəklində qurmaq olar;
C) Müəssisə modelini parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsi şəklində qurmaq olar;
D) Müəssisə modelini qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsi şəklində qurmaq olar;

E) Müəssisə modelini Leontyev modeli (sahələrarası balans modeli) şəklində qurmaq olar.

5. Xətti müəssisə modellərinin modifikasiyalarına aid aşağıdakı mülahizələrdən hansı doğrudur?

A) Əgər müəssisə modelində iştirak edən bütün ekzogen parametrlər tam ədədlərdirsə, onda belə model tam ədədli model hesab edilir;
B) Əgər müəssisə modelində iştirak edən bütün endogen parametrlər üzərinə tam ədədlilik şərtləri qoyulmuşdursa, onda belə model tam ədədli model hesab edilir;
C) Əgər müəssisə modelinin yalnız məqsəd funksiyasının əmsalları tam ədədlərdirsə, onda belə model tam ədədli model hesab edilir;
D) Əgər müəssisə modelinin yalnız məhdudiyyət şərtlərinin əmsalları tam ədədlərdirsə, onda belə model tam ədədli model hesab edilir;
E) Əgər müəssisə modelinin yalnız məhdudiyyət şərtlərinin sərbəst hədləri tam ədədlərdirsə, onda belə model tam ədədli model hesab edilir.

6. Əgər xətti proqramlaşdırma məsələsi şəklində qurulmuş iqtisadi-riyazi modeldə n dəyişən və m xətti asılı olmayan məhdudiyyət şərti iştirak edirsə və n>m–dirsə, onda modelin optimal planında müsbət qiymətə malik dəyişənlərin sayı:

A) (n+m)-ə bərabər olacaqdır;
B) m-dən çox olmayacaqdır;
C) n-dən çox olmayacaqdır;
D) (n-m)-ə bərabər olacaqdır;
E) (n-m+1)-ə bərabər olacaqdır.

7. Firmanın optimal davranışı məsələsi aşağıdakı kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirilmişdir.

$$Z(x) = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ -6x_1 + 3x_2 \le 18 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Məsələni xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirin:

A) $F(y)=2y_1+y_2\to\min$

$$\begin{cases} 2y_1-3y_2-6y_0\le 0 \\ y_1+y_2-2y_0\le 0 \\ -6y_1+3y_2-18y_0\le 0 \\ y_1+y_2=1 \end{cases}$$

$$y_1\ge 0, y_2\ge 0, y_0>0$$

B) $F(y)=y_1+y_2\to \min$

$$\begin{cases} 2y_1-3y_2\le 6y_0 \\ y_1+y_2\le 2y_0 \\ -6y_1+3y_2\le 18y_0 \\ 2y_1+y_2=1 \end{cases}$$

$$y_1\ge 0, y_2\ge 0, y_0\ge 0$$

C) $F(y)=2y_1+y_2+y_0\to\min$

$$\begin{cases} 2y_1-3y_2-6y_0\le 0 \\ y_1+y_2-2y_0\le 0 \\ -6y_1+3y_2-18y_0\le 0 \\ y_1+y_2+y_0=1 \end{cases}$$

$$y_1\ge 0, y_2\ge 0, y_0>0$$

D) $F(y)=y_1+y_2\to \min$

$$\begin{cases} 2y_1-3y_2\le 6 \\ y_1+y_2\le 2 \\ -6y_1+3y_2\le 18 \end{cases}$$

$$y_1\ge 0, y_2\ge 0$$

E) $F(y)=y_1+y_2+y_0\to\min$

$$\begin{cases} 2y_1-3y_2-6y_0\le 0 \\ y_1+y_2-2y_0\le 0 \\ -6y_1+3y_2-18y_0\le 0 \\ 2y_1+y_2+y_0=1 \end{cases}$$

$$y_1\ge 0, y_2\ge 0, y_0\ge 0$$

FƏSİL 12

İQTİSADİ SİSTEMLƏRİN İDARƏ EDİLMƏSİNDƏ KORRELYASİYA VƏ REQRESSİYA TƏHLİLİ METODUNUN TƏTBİQİ

12.1. Cüt korrelyasiyanın xətti və qeyri-xətti modelləri

Bizi əhatə edən maddi aləmin müxtəlif təyinatlı sistemlərini formalaşdıran elementlər arasında çoxsaylı birbaşa və əks əlaqələr mövcuddur və bu əlaqələr özlərini 2 tip asılılıqlar şəklində biruzə verirlər:

- Funksional asılılıqlar;
- Korrelyasiya asılılıqları.

Funksional asılılıqlar dedikdə hər bir müşahidə zamanı tam və dəqiq ödənən asılılıqlar başa düşülür. Bu tip asılılıqlardan fərqli olaraq *korrelyasiya asılılıqları dedikdə ümumi şəkildə, orta hesabla və yalnız kütləvi müşahidələr zamanı ödənən asılılıqlar başa düşülür*. Funksional asılılıqlar əsasən texniki, bioloji və s. sistemlərdə rast gəlinir. İqtisadi sistemlərdə asılılıqların formalaşmasına obyektiv və subyektiv faktorlarla yanaşı həm də təsadüfi (ehtimallı) faktorların təsir göstərməsi ilə əlaqədar olaraq bu sistemlərdə rast gəlinən asılılıqlar əsasən korrelyasiya tipli asılılıqlardır.

İqtisadi sistemlərin göstəriciləri arasındakı korrelyasiya asılılıqlarının təhlili prosesində qarşıya çıxan əsas problemlərdən biri təhlilə məhz hansı göstəricilərin cəlb edilməsidir. Bu problemlə bağlı aşağıdakı tələblərin gözlənilməsi məqsədəuyğundur:

- İqtisadi sistemin təhlilə cəlb ediləcək hər bir göstəricisi nəzəri cəhətdən tam əsaslandırılmalıdır və bu göstəricilərin sırasına yalnız o göstəriciləri daxil etmək lazımdır ki, onlar iqtisadi sistemin davranışına əhəmiyyətli təsir göstərmiş olsunlar.
- Təhlilə cəlb ediləcək göstəricilərin bir-birini təkrarlamasına yol vermək olmaz. Başqa sözlə desək, iqtisadi sistemin analoji xüsusiyyətlərini müxtəlif göstəricilərlə ifadə etmək olmaz. Əks halda bu göstəricilər bir-birindən xətti asılı olacaq və *multikolleniarlıq halı* yaranacaqdır. Multikolleniarlıq halını aradan qaldırmaq üçün öz aralarında xətti asılı olan göstəricilərdən birini tədqiqatdan kənarlaşdırmaq lazımdır.
- Tədqiqata cəlb ediləcək göstəricilər arasında avtokorrelyasiya

halının mövcud olmasına yol vermək olmaz. Avtokorrelyasiya o halda yarana bilər ki, iqtisadi sistemin davranışının müşahidəsi müxtəlif dövrlərdə aparılır və sonrakı dövrlə əvvəlki dövrləri əks etdirən məlumatlar arasında əlaqə mövcud olur. Avtokorrelyasiyanın aradan qaldırılmasının ən sadə yolu zaman faktorunun qurulacaq korrelyasiya modelinə müstəqil dəyişən kimi daxil etməkdir.

- İqtisadi sistemə bilavasitə təsir göstərən amillər arasında keyfiyyət xarakterli amillər də ola bilər. Əgər onları kəmiyyət baxımından approksimasiya etmək mümkün deyilsə, onda bu amilləri tədqiqata cəlb etmək olmaz.
- İqtisadi sistemi xarakterizə edən göstəricilər arasında addıtıvlik əlaqəsi mövcud olmamalıdır. Yəni tədqiqata həm ayrı-ayrı fərdi göstəriciləri, həm də onların məcmuyu kimi çıxış edən törəmə göstəricini cəlb etmək olmaz.

İqtisadi sistemlərdə korrelyasiya asılılıqlarını öyrənmək üçün ekonometrikanın ***korrelyasiya və reqressiya təhlili nəzəriyyəsi*** adlanan xüsusi tədqiqat metodundan istifadə edilir. Korrelyasiya təhlilinin ən sadə variantında iqtisadi sistemin iki göstəricisi arasındakı korrelyasiya asılılığı öyrənilir. Bu göstəricilərdən biri sərbəst faktor göstəricisi olub x ilə işarə edilir (biz gələcəkdə bu göstəriciyə sərbəst dəyişən deyəcəyik). İkinci göstərici isə nəticə göstəricisi olub (asılı dəyişən) y ilə işarə edilir. Bu göstəricilər arasındakı korrelyasiya asılılığı y=f(x) əlaqə tənliyi vasitəsi ilə ifadə edilir. Göstəricilər arasında korrelyasiya asılılığının mövcudluğu isə kəmiyyət təhlili prosesində deyil, bu təhlili zamana görə qabaqlayan keyfiyyət təhlili prosesində aşkar edilir. Kəmiyyət təhlili prosesində isə aşkar edilmiş bu korrelyasiya asılılığı dəqiqləşdirilir və kəmiyyətcə ifadə edilir. Belə korrelyasiya təhlilinə çox zaman cüt korrelyasiya da deyilir.

Korrelyasiya təhlili çoxmərhələli prosesdir. Təhlilin birinci mərhələsində iqtisadi sistemin y və x göstəriciləri arasındakı korrelyasiya asılılığının tipi müəyyən edilir. Daha doğrusu, asılılığı ifadə etmək üçün elə bir əlaqə tənliyi seçilir ki, bu tənlik həmin asılılığın xarakterini kifayət qədər adekvat əks etdirsin. Iqtisadi sistemin y və x göstəriciləri arasındakı korrelyasiya asılılığının ən sadə ifadə forması

$$y = a_0 + a_1 x \qquad (12.1)$$

düz xətt tənliyidir. Burada y - asılı dəyişən, x - sərbəst dəyişən, a_0 və a_1 - isə əlaqə tənliyinin əmsallarıdır. (12.1) əlaqə tənliyinə korrelyasiya tənliyi, çox zaman isə reqressiya tənliyi deyilir. Bu tənlik göstəricilər

arasındakı elə bir əlaqəni əks etdirir ki, sərbəst dəyişənin müəyyən bir sabit kəmiyyət qədər dəyişməsi ilə asılı dəyişən başqa bir sabit kəmiyyət qədər dəyişir. Məsələn x -in bir vahid dəyişməsi ilə y - a_1 vahid dəyişəcəkdir. Qeyd edək ki, a_1 həm müsbət, həm mənfi, həm tam, həm də kəsr ədəd ola bilər. Əgər a_1 əmsalının işarəsi müsbətdirsə, onda asılılıq artan xətti asılılıq, mənfidirsə, azalan xətti asılılıq tipində olur.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, korrelyasiya asılılığı yalnız kütləvi müşahidələr zamanı aşkar edilir. Odur ki, asılılığın tipini düzgün müəyyən etmək üçün iqtisadi sistemin y və x dəyişənlərinin cüt müşahidələrinin sayı ən azı 20 olmalıdır. Əks halda asılılığın tipini düzgün müəyyən etmək çətin olur və tədqiqatın adekvatlığı xeyli aşağı düşür.

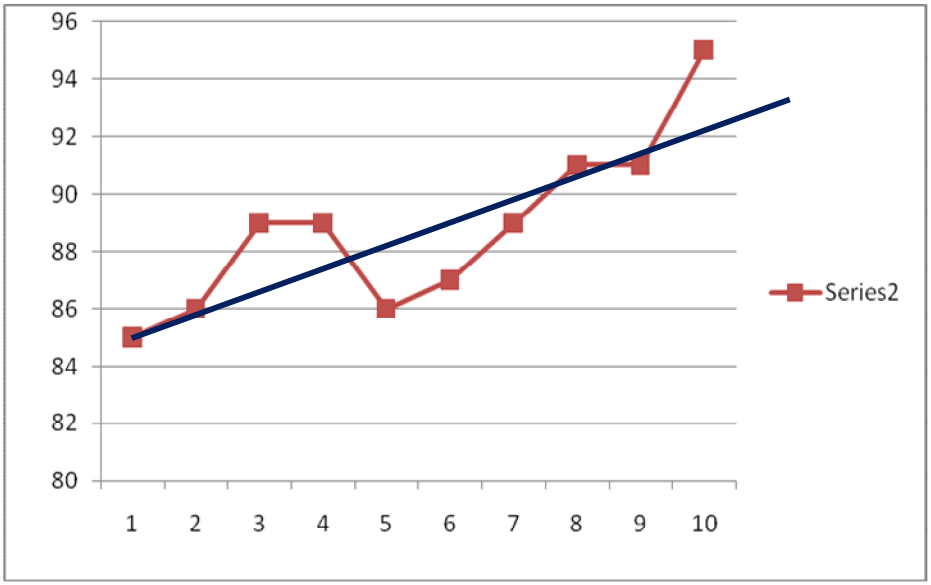
Korrelyasiya təhlilinin **birinci mərhələsində** iqtisadi sistemin y və x göstəriciləri arasında verilmiş tipdə korrelyasiya asılılığının mövcud olması haqqında keyfiyyət təhlilinin irəli sürdüyü fərziyyənin nə dərəcədə həqiqi olduğu yoxlanılır. Bu məqsədlə göstəricilərin müşahidə cütləri bir-biri ilə tutuşdurulur və yaxud qrafiki təhlil aparılır. Qrafiki təhlil zamanı hər bir müşahidə düzbucaqlı koordinat sistemində bir nöqtə ilə göstərilir. Bu nöqtənin absisi x sərbəst dəyişənin qiymətinə, ordinatı isə y asılı dəyişənin qiymətinə uyğun olur. Nöqtələrin koordinat sistemində paylanmasının xarakterinə görə əlaqənin tipi haqqında irəli sürülmüş fərziyənin doğru olub-olmaması haqqında qərar qəbul edilir.

►**Məsələ 12.1.** Fərz edək ki, müəssisədə istehsalın həcminin işçilərin sayından asılılığını əks etdirən aşağıdakı məlumatlar verilmişdir. (Biz izah prosesini sadələşdirmək üçün cəmi 10 müşahidə üzərində dayanacağıq):

Cədvəl 12.1

İşçilərin sayı (x)	İstehsalın həcmi (y)
5 (1)	85
10 (2)	86
15 (3)	89
20 (4)	89
25 (5)	86
30 (6)	87
35 (7)	89
40 (8)	91
45 (9)	91
50 (10)	95

Fərz edilir ki, müəssisədə istehsalın həcminin işçilərin sayından asılılığı (12.1) düz xətt tənliyi ilə ifadə edilən xətti asılılıq tipindədir. Bu fərziyənin həqiqiliyinin qrafiki təhlilini aparaq.



Şəkil 12.1

Şəkil 12.1-dən göründüyü kimi nöqtələrin koordinat müstəvisində yerləşməsi korrelyasiya asılılığının xətti xarakterdə olması haqqında fərziyənin doğru olduğunu sübut edir.

Korrelyasiya təhlilinin **ikinci mərhələsində** iqtisadi sistemin y və x göstəriciləri arasındakı korrelyasiya asılılığını ifadə edən əlaqə tənliyi konkretləşdirilir. Faktiki olaraq əlaqə tənliyinin konkretləşdirilməsi dedikdə (12.1) reqressiya tənliyinin a_0 və a_1 əmsalları üçün ədədi qiymətlərin tapılması başa düşülür. Daha doğrusu, bu tənlik üçün elə bir analitik ifadə tapılır ki, həmin ifadəyə görə y asılı dəyişənin faktiki qiymətləri onun hesabi qiymətlərinə kifayət qədər yaxın olsun. Bu məqsədlə müxtəlif kriteriyalardan istifadə edilir. Həmin kriteriyalardan birinə görə (12.1) reqressiya tənliyinin a_0 və a_1 əmsalları elə seçilməlidir ki, bu qiymətlərdə y asılı dəyişənin faktiki qiymətlərinin onun hesabi qiymətlərindən kənarlaşmalarının kvadratlarının cəmi minimum olsun. Bu metoda ***ən kiçik kvadratlar***

metodu deyilir.

Beləliklə, əgər iqtisadi sistemin y və x göstəriciləri arasında (12.1) reqressiya tənliyi ilə ifadə edilən xətti korrelyasiya asılılığı mövcuddursa, onda korrelyasiya təhlilinin mühüm vəzifələrindən biri tənliyin a_0 və a_1 əmsalları üçün elə ədədi qiymətlər tapmaqdan ibarətdir ki, bu qiymətlərdə y asılı dəyişənin faktiki qiymətlərinin onun hesabi qiymətlərindən kənarlaşmalarının kvadratlarının cəmi minimum olsun:

$$\sum (y_{fakt} - y_{hes})^2 \to \min \qquad (12.2)$$

y_{hes} aşağıdakı formula üzrə hesablanır:

$$y_{hec} = a_0 + a_1 x_{fakt} \qquad (12.3)$$

Əgər (12.3) ifadəsini (12.2)-də nəzərə alsaq və sətiraltı yazıları atsaq, alarıq:

$$\sum (y - a_0 - a_1 x)^2 \to \min \qquad (12.4)$$

(12.4) ifadəsinə a_0 və a_1-ə görə funksiya kimi baxsaq yaza bilərik:

$$f_{a_0, a_1} = \sum (y - a_0 - a_1 x)^2 \to \min \qquad (12.5)$$

Fərz edək ki, (12.5) funksiyası kəsilməz funksiyadır. Məlumdur ki, minimum nöqtəsində kəsilməz funksiyanın dəyişənlərinə görə birinci tərtib törəmələri sıfıra çevrilir. Odur ki, (12.5) funksiyasının a_0 və a_1-ə görə birinci tərtib məxsusi törəmələrini hesablayıb sıfıra bərabər etsək

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a_0} = -2\sum (y - a_0 - a_1 x) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial a_1} = -2\sum (y - a_0 - a_1 x)x = 0 \end{cases} \qquad (12.6)$$

alarıq.

(12.6) sisteminin tənliklərini -2-yə ixtisar edib, hədlər üzrə cəmləsək və məchulları sağ tərəfə keçirsək alarıq:

$$\begin{cases} \sum y = Na_0 + a_1 \sum x \\ \sum yx = a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 \end{cases} \qquad (12.7)$$

burada $N - y$ və x göstəricilərinin cüt müşahidələrinin sayıdır.

(12.7) sisteminə ***normal tənliklər sistemi*** deyilir. Bu sistemi həll etməklə (12.1) reqressiya tənliyinin a_0 və a_1 əmsallarının qiymətlərini müəyyən etmək olar.

Yuxarıda göstərdiyimiz iqtisadi məsələ əsasında $y = a_0 + a_1 x$ reqressiya tənliyinin a_0 və a_1 əmsallarının qiymətlərini müəyyən edək. Normal tənliklər sisteminə keçmək üçün tələb olunan hesablamalar aşağıdakı cədvəldə əks etdirilmişdir:

Cədvəl 12.2

İşçilərin sayı (x)	**İstehsalın həcmi (y)**	**yx**	**x^2**
5	85	425	25
10	86	860	100
15	89	1335	225
20	89	1780	400
25	86	2150	625
30	87	2610	900
35	89	3115	1225
40	91	3640	1600
45	91	4095	2025
50	95	4750	2500
$\sum x = 275$	$\sum y = 888$	$\sum yx = 24760$	$\sum x^2 = 9625$

Deməli, normal tənliklər sistemi aşağıdakı kimi olacaqdır.

$$\begin{cases} 888 = 10a_0 + 275a_1 \\ 24760 = 275a_0 + 9625a_1 \end{cases}$$

Sistemi həll edək:

$$a_0 = \frac{888 - 275\,a_1}{10}$$

$$24760 = \frac{275\,(888 - 275\,a_1)}{10} + 9625\,a_1$$

$$247600 = 244200 - 75625\,a_1 + 96250\,a_1$$

$$3400 = 20625\,a_1$$

$$a_1 \approx 0{,}16$$

$$a_0 = \frac{888 - 275 \cdot 0{,}16}{10} = \frac{888 - 44}{10} = 84{,}4$$

$$a_1 \approx 0{,}16; \qquad a_0 = 84{,}4$$

Deməli, tədqiq edilən iqtisadi sistemin baxılan göstəriciləri (istehsalın həcmi və işçilərin sayı) arasında korrelyasiya asılılığını əks etdirən əlaqə tənliyi aşağıdakı kimi olacaqdır:

$$y = 84{,}4 + 0{,}16x$$

Bu tənliyə görə işçilərin sayının 5 nəfər dəyişməsi ilə müəssisədə istehsalın həcmi 0,16 vahid artacaqdır. ◄

Korrelyasiya təhlilinin **üçüncü mərhələsində** iqtisadi sistemin y və x göstəriciləri arasındakı korrelyasiya asılılığının sıxlığı qiymətləndirilir. Bu məqsədlə müxtəlif statistik əmsallardan istifadə edilir. Bu əmsallara misal olaraq determinasiya əmsalını, korrelyasiya əmsalını, $t-$statistikanı, Fişer əmsalını və s. göstərmək olar.

Determinasiya əmsalı aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\sigma^2 = \frac{S_y^2 - S_{yx}^2}{S_y^2}$$

Burada: $S_y^2 - y-$in özünə görə dispersiyası, S_{yx}^2 - isə $y-$in $x-$ə görə (düz xətdən kənarlaşmaya görə) dispersiyasıdır.

Bu əmsal y asılı dəyişənin qiymətinin formalaşmasına x sərbəst dəyişənin göstərdiyi təsiri kəmiyyətcə ifadə edir. Məsələn, praktiki hesablamalar nəticəsində $\sigma^2 = 0{,}78$ alınmışdırsa, onda bu o deməkdir ki, y asılı dəyişən 78% x sərbəst dəyişənin təsiri ilə formalaşır.

Determinasiya əmsalının kvadrat kökünə ***korrelyasiya əmsalı*** deyilir.

$$r = \sqrt{\frac{s_y^2 - s_{yx}^2}{s_y^2}}$$

Korrelyasiya əmsalının qiyməti $-1 \le r \le 1$ oblastında, mütləq qiymətcə isə $0 \le |r| \le 1$ oblastında dəyişir.

Korrelyasiya əmsalının işarəsi (12.1) reqressiya tənliyində a_1 əmsalının işarəsi ilə üst-üstə düşür. Yəni a_1 əmsalının işarəsi müsbətdirsə, korrelyasiya əmsalı müsbət işarəli, mənfidirsə, mənfi işarəli olacaqdır.

Korrelyasiya əmsalı y və x göstəriciləri arasındakı əlaqənin

sıxlığını ifadə edir. Əgər $r \geq 0{,}5$ olarsa, onda belə hesab edilir ki, göstəricilər arasında kifayət qədər sıx korrelyasiya asılılığı mövcuddur. $r < 0{,}5$ olduqda isə bu əlaqə zəif hesab edilir. Əgər korrelyasiya əmsalının qiyməti 1-ə kifayət qədər yaxındırsa, onda göstəricilər arasındakı korrelyasiya asılılığı funksional asılılığa çevrilir. Əgər əmsalın qiyməti kifayət qədər 0-a yaxındırsa, onda belə hesab edilir ki, göstəricilər arasında ümumiyyətlə heç bir əlaqə mövcud deyildir.

►**Məsələ 12.2.** Fərz edək ki, mənzillərin qiymətlərinin (min manat) onların sahəsindən (kv. metr) asılılığı öyrənilir. Aparılmış müşahidələr nəticəsində əldə edilmiş nəticələr aşağıdakı cədvəldə əks etdirilmişdir:

Cədvəl 12.3

Mənzillərin sahəsi x	**Mənzillərin qiyməti** y
28	5,3
29	9,2
32	15,2
35	20,7
40	21,7
44	36,5
45	39,3
51	52,7
53	55,4
58	64,3
64	76
65	79,1
73	94,8
75	101
80	89,5
83	114,8
93	137,4

Fərz edilir ki, mənzillərin qiymətləri ilə onların sahələri arasında $y = a_0 + a_1 x$ reqressiya tənliyi ilə ifadə edilən xətti korrelyasiya asılılığı mövcuddur. Asılılığı ifadə etmək üçün reqressiya tənliyi qurmaq və

asılılığın sıxlığını qiymətləndirmək tələb edilir.

Həlli: Yuxarıda nəzərdən keçirdiyimiz **Məsələ 12.1-də** biz artıq reqressiya tənliyinin a_0 və a_1 əmsalları üçün ədədi qiymətlərin tapılması qaydasını ətraflı nəzərdən keçirmişdik.

Beləliklə, bu qaydalara əsaslanaraq göstərdiyimiz iqtisadi məsələ əsasında $y = a_0 + a_1 x$ reqressiya tənliyinin a_0 və a_1 əmsallarının qiymətlərini müəyyən edək. Normal tənliklər sisteminə keçmək üçün tələb olunan hesablamalar aşağıdakı cədvəldə əks etdirilmişdir:

Cədvəl 12.4

x	y	xy	x^2
28	5,3	148,4	784
29	9,2	266,8	841
32	15,2	486,4	1024
35	20,7	724,5	1225
40	21,7	868	1600
44	36,5	1606	1936
45	39,3	1768,5	2025
51	52,7	2687,7	2601
53	55,4	2936,2	2809
58	64,3	3729,4	3364
64	76	4864	4096
65	79,1	5141,5	4225
73	94,8	6920,4	5329
75	101	7575	5625
80	89,5	7160	6400
83	114,8	9528,4	6889
93	137,4	12778,2	8649
$\sum x = 948$	$\sum y = 1012{,}9$	$\sum yx = 69189{,}4$	$\sum x^2 = 59422$

Bu cədvəlin məlumatları əsasında normal tənliklər sistemi quraq:

$$\begin{cases} 1012{,}9 = 17a_0 + 948a_1 \\ 69189{,}4 = 948a_0 + 59422a_1 \end{cases}$$

Bu sistemi həll edərək reqressiya tənliyinin əmsalları üçün aşağıdakı ədədi qiymətlər alırıq:

$$a_0 = -48{,}6; \qquad a_1 = 1{,}94$$

Onda reqressiya tənliyi üçün analitik ifadə aşağıdakı şəkildə alınacaqdır:

$$y = -48{,}6 + 1{,}94x$$

Indi isə iqtisadi sistemin baxılan göstəriciləri arasındakı korrelyasiya asılılığının sıxlığını qiymətləndirmək üçün determinasiya və korrelyasiya əmsallarını hesablayaq. Bu məqsədlə cədvəl 12.4-ün davamı olaraq aşağıdakı cədvəli tərtib edək:

Cədvəl 12.5

y_{hesabi}	$y_{fak} - y_{hes}$	$y_{fak} - \bar{y}$	$(y_{fak} - \bar{y})^2$	$(y_{fak} - y_{hes})^2$
5,72	-0,42	-54,28	2946,32	0,18
7,66	1,54	-50,38	2538,14	2,37
13,48	1,72	-44,38	1969,58	2,96
19,3	1,4	-38,88	1511,65	1,96
29	-7,3	-37,88	1434,89	53,29
36,76	-0,26	-23,08	532,69	0,07
38,7	0,6	-20,28	411,28	0,36
50,34	2,36	-6,88	47,33	5,57
54,22	1,18	-4,18	17,47	1,39
63,92	0,38	4,72	22,28	0,14
75,56	0,44	16,42	269,62	0,19
77,5	1,6	19,52	381,03	2,56
93,02	1,78	35,22	1240,45	3,17
96,9	4,10	41,42	1715,62	16,81
106,6	-17,1	29,92	895,21	292,4
112,42	2,38	55,22	3049,25	5,66
131,82	5,58	77,82	6055,95	31,14
$\sum y_{hes} = 1012{,}9$	$\sum (y_f - y_h) \approx 0{,}02$	$\sum (y_f - \bar{y}) \approx 0{,}04$	$\sum (y_{fak} - \bar{y})^2 = 25038{,}76$	$\sum (y_{fak} - y_{hes})^2 = 420{,}23$

Cədvəl məlumatlarından istifadə edərək S_y^2 və S_{yx}^2-i hesablayaq:

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_{fak} - \bar{y})^2}{n} = \frac{25038{,}76}{17} \approx 1472{,}86$$

$$S_{yx}^2 = \frac{\sum (y_{fak} - y_{hes})^2}{n} = \frac{420{,}23}{17} \approx 24{,}72$$

Onda mənzillərin qiymətlərinin onların sahəsindən asılılığını təyin etmək üçün determinasiya əmsalını hesablasaq alarıq:

$$\sigma^2 = \frac{S_y^2 - S_{yx}^2}{S_y^2} = \frac{1472{,}86 - 24{,}72}{1472{,}86} \approx 0{,}98$$

Beləliklə, mənzillərin qiyməti 98% onların sahəsinə görə formalaşır. Qalan 2% isə digər amillərlə (mənzilin yerləşdiyi sahə, kommunikasiyaların mövcudluğu və s.) bağlıdır.

Indi isə korrelyasiya əmsalını hesablayaq:

$$r = \sqrt{\frac{s_y^2 - s_{yx}^2}{s_y^2}} = \sqrt{0{,}98} \approx 0{,}99$$

Korrelyasiya əmsalının qiymətinin vahidə yaxın olması göstərir ki, iqtisadi sistemin baxılan göstəriciləri arasında sıx korrelyasiya asılılığı mövcuddur və bu asılılıq funksional asılılığa yaxındır. ◄

Bəzən iqtisadi sistemin tədqiqata cəlb edilmiş y və x dəyişənlərinin ölçü vahidlərində olan fərqlər üzündən a_1 əmsalının qiymətinə əsaslanaraq x sərbəst dəyişənin y asılı dəyişənə göstərdiyi təsiri kəmiyyətcə dəqiq ifadə etmək mümkün olmur. Bu məqsədlə elastiklik əmsalından və beta-əmsaldan istifadə etmək lazım gəlir.

$y = a_0 + a_1 x$ cüt korrelyasiyanın xətti reqressiya tənliyi üçün elastiklik əmsalı aşağıdakı kimi hesablanır:

$$E = \frac{a_1 \bar{x}}{\bar{y}}$$

Burada: $\bar{x}$ - x sərbəst dəyişənin hesabi ortası;

$\bar{y}$ - y asılı dəyişənin hesabi ortasıdır.

E elastiklik əmsalı x sərbəst dəyişənin 1% dəyişməsi nəticəsində y asılı dəyişənin neçə faiz dəyişəcəyini əks etdirir.

Beta-əmsal isə aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\beta = a_1 \cdot \frac{S_x}{S_y}$$

Burada: S_x - x sərbəst dəyişənin orta kvadratik uzaqlaşması;

S_y - y asılı dəyişənin orta kvadratik uzaqlaşmasıdır.

Beta-əmsal x sərbəst dəyişənin onun orta kvadratik uzaqlaşması qədər dəyişməsi halında y asılı dəyişənin orta hesabla özünün orta kvadratik uzaqlaşmasının hansı hissəsi qədər dəyişəcəyini əks etdirir.

Yuxarıda nəzərdən keçirdiyimiz korrelyasiya asılılıqlarında fərz edilirdi ki, y və x göstəriciləri arasındakı korrelyasiya asılılığı xətti

xarakterdədir. Lakin bəzən bu asılılıq xətti olmayıb, daha mürəkkəb riyazi təbiətli olur. Bu halda əlaqə tənliyi olaraq

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

şəklində olan 2-ci tərtib parabola tənliyindən,

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

şəklində olan 3-cü tərtib parabola tənliyindən, ümumi halda isə

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

n-ci tərtib parabola tənliyindən istifadə edilir.

Qeyd edək ki, cüt korrelyasiyanın qeyri-xətti modellərinin əmsallarını da ən kiçik kvadratlar metodu ilə təyin etmək mümkündür. Məsələn

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

2-ci tərtib parabola tənliyinin a_0, a_1 və a_2 əmsallarının qiymətlərini təyin etmək üçün ən kiçik kvadratlar metodunu tətbiq etsək, bu əmsalların hesablanması üçün aşağıdakı normal tənliklər sistemi alınacaqdır:

$$\begin{cases} \sum y = Na_0 + a_1 \sum x + a_2 \sum x^2 \\ \sum yx = a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3 \\ \sum yx^2 = a_0 \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum x^4 \end{cases}$$

12.2. Xətti və qeyri-xətti çoxkorrelyasiyalı modellər

Yuxarıda nəzərdən keçirdiyimiz korrelyasiya asılılıqlarında fərz edilirdi ki, iqtisadi sistemin y nəticə göstəricisi yalnız bir faktor göstəricisinin (x sərbəst dəyişənin) təsiri altında formalaşır. Lakin bəzən y asılı dəyişənin qiyməti bir deyil, bir neçə sərbəst dəyişənin, yəni $x_1, x_2, ..., x_n$ – nin birgə təsiri ilə formalaşır. Belə korrelyasiya asılılıqlarına çoxkorrelyasiyalı asılılıqlar deyilir və

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

şəklində əlaqə tənliyi vasitəsi ilə əks etdirilir.

Əgər y və $x_1, x_2, ..., x_n$ göstəriciləri arasındakı asılılıq xətti xarakter daşıyırsa, onda çox korrelyasiyalı əlaqə tənliyi olaraq

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$$

şəklində xətti çoxkorrelyasiyalı modeldən, qeyri-xətti olduqda isə

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2^2 + ... + a_n x_n^n$$

şəklində qeyri-xətti çoxkorrelyasiyalı modeldən istifadə edilir. Həm xətti, həm də qeyri-xətti çoxkorrelyasiyalı modellərin əmsallarının qiymətlərini ən kiçik kvadratlar metodu ilə təyin etmək olar.

Çoxkorrelyasiyalı modellərdə əlaqənin sıxlığını qiymətləndirmək üçün $R_{yx_1,x_2,...,x_n}$ ***çoxkorrelyasiya əmsalından*** istifadə edilir. n sayda $x_1, x_2 ... x_n$ sərbəst dəyişənlərin y asılı dəyişənə əlaqələndirilmiş şəkildə birgə təsirinin gücünün kəmiyyət xarakteristikası olan bu əmsal aşağıdakı kimi hesablanır:

$$R_{yx_1,x_2,...,x_n} = \sqrt{\frac{S_y^2 - S_{yx_1,x_2,...,x_n}^2}{S_y^2}}$$

Burada $S_{yx_1,x_2,...,x_n}^2$ y asılı dəyişənin bütün amilləri nəzərə almaqla tapılmış reqressiya tənliyinə görə dispersiyasıdır.

Mütləq qiymətə görə çoxkorrelyasiya əmsalının qiyməti də

$$0 \le \left| R_{yx_1,x_2,...,x_n} \right| \le 1$$

oblastında dəyişir. Bu əmsalın işarəsi haqqında birqiymətli fikir söyləmək mümkün deyil. Belə ki, tədqiqata cəlb edilmiş bir göstərici ilə korrelyasiya müsbət, digəri ilə mənfi, üçüncüsü ilə dəyişkən işarəli ola bilər. Bu əmsalın qiyməti 1-ə nə qədər yaxın olarsa y asılı dəyişənin sərbəst dəyişənlərdən asılılığı bir o qədər yüksək olur. Bu isə nəticə göstəricisinə bilavasitə təsir edən amillərin kifayət qədər dəqiq seçilməsinə və çoxkorrelyasiyalı modelin real iqtisadi şəraitə kifayət qədər yüksək adekvatlığına işarədir.

Qeyd edək ki, korrelyasiya modelləri üçün orta kvadratik uzaqlaşmaları, korrelyasiya əmsallarını və digər parametrləri hesablamaq üçün başqa formulalardan da istifadə etmək olar. Lakin bu formulalar yalnız hesablamaların "texnologiyaları" ilə əlaqədardır və alınacaq kəmiyyət xarakteristikalarında əhəmiyyətli fərq vermir. Bununla belə, həmin parametrlər üçün mövcud olan fərqli alqoritmlərdən bəzilərini nəzərdən keçirək. Sadəlik üçün fərz edək ki,

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

çoxkorrelyasiyalı model verilmişdir və əlaqənin sıxlığı qiymətləndirilməlidir.

Bu məqsədlə əvvəlcə r_{yx_1}, r_{yx_2}, $r_{x_1x_2}$ cüt korrelyasiya əmsalları

hesablanır, sonra isə bu əmsalların qiymətləri əsasında

$$R_{yx_1,x_2} = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1} r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}}$$

çoxkorrelyasiya əmsalı hesablanır. Bu ifadədə iştirak edən fərdi korrelyasiya əmsallarını müxtəlif yanaşmalar əsasında hesablamaq olar. Bu yanaşmalardan birinə görə həmin əmsallar aşağıdakı kimi təyin edilə bilər:

$$r_{yx_1} = \frac{\overline{y \cdot x_1} - \bar{y} \cdot \bar{x}_1}{S_y \cdot S_{x_1}}$$

Burada S_y - y asılı dəyişənin qiymətləri yığımının orta kvadratik səhvidir və aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n}}$$

S_{x_1} - x_1 sərbəst dəyişənin qiymətləri yığımının orta kvadratik səhvidir və aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$S_{x_1} = \sqrt{\frac{\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2}{n}}$$

r_{yx_2}, $r_{x_1x_2}$ əmsallarının qiymətləri də analoji olaraq hesablanır.

Çoxkorrelyasiyalı modellərdə y asılı dəyişənlə x_i sərbəst dəyişən arasındakı əlaqənin sıxlığını qiymətləndirmək üçün (bu halda fərz edilir ki, $x_j (j \neq i)$ sərbəst dəyşənlərin qiymətləri dəyişməz qalır) ***fərdi korrelyasiya əmsallarından*** istifadə edilir. Məsələn, əgər çoxkorrelyasiyalı model $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ şəklindədirsə, onda x_1 sərbəst dəyişənin dəyişməz qalması halında y asılı dəyişənlə x_2 sərbəst dəyişən arasındakı əlaqənin sıxlığını əks etdirən $r_{\tilde{y}x_2(x_1)}$ fərdi korrelyasiya əmsalı aşağıdakı kimi ifadə ediləcəkdir:

$$r_{\tilde{y}x_2(x_1)} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1 - r_{yx_1}^2)(1 - r_{x_1x_2}^2)}}$$

Burada r_{yx_2}, r_{yx_1}, $r_{x_1x_2}$ - yuxarıda izah etdiyimiz cüt korrelyasiya əmsallarıdır.

Çoxkorrelyasiya əmsalı qurulmuş korrelyasiya modelinin key-

fiyyətcə qiymətləndirilməsində mühüm vasitə hesab edilir. Bu məqsədlə əmsalın qiymətinin sıfırdan nə dərəcədə fərqlənməsi yoxlanılır. Əgər çoxkorrelyasiya əmsalının qiyməti sıfıra yaxındırsa, onda bütün reqressiya əmsalları da sıfıra bərabər olacaq. Bu isə o deməkdir ki, qurulmuş model real şəraitə adekvat deyil və ondan istifadə etmək olmaz.

Çoxkorrelyasiya əmsalının əhəmiyyətli olmasının yoxlanması üsullarından biri onun üçün

$$R - 2\sigma_R \le R \le R + 2\sigma_R$$

etibarlılıq intervalının müəyyən edilməsidir. Burada σ_R - R -in orta kvadratik səhvi olub, aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\sigma_R = \frac{1 - R^2}{n - p - 1}$$

burada n - iqtisadi sistemin göstəricilərinin müşahidələrinin sayı;

p - çoxkorrelyasiya modelində sərbəst faktor göstəricilərin (sərbəst dəyişənlərin) sayıdır.

12.3. İstehsal funksiyaları

Kibernetik yanaşma baxımından iqtisadiyyat sonlu sayda giriş və çıxışlara malik olan mürəkkəb, dinamik, tam sistem kimi qarşıya çıxır və girişlərin çıxışlara çeviricisi kimi çıxış edir. Daha doğrusu, fərz edəcəyik ki, iqtisadi sistemin girişlərinə ehtiyatlar daxil olur, çıxışda isə bu sistemin fəaliyyətinin nəticəsi olan məhsul yaranır (makro baxımdan məcmu buraxılış və ya məcmu daxili məhsul, mikro baxımdan isə ayrı-ayrı müəssisələrin və ya firmaların məhsulları). Deməli, iqtisadi sistemin davranış mexanizmi baxımından ehtiyatlara arqument, məhsula isə funksiya kimi baxmaq olar.

Istehsal funksiyaları – istehsalın nəticələrinin ehtiyat sərfindən asılılığını əks etdirən riyazi instrumentarilərdir. İqtisadiyyatın istehsal funksiyaları ilə təsvir edilməsi zamanı iqtisadi sistemlər girişinə R_1, R_2,..., R_n ehtiyatları daxil olan və çıxışında $X_1, X_2, ..., X_n$ müxtəlif növ məhsullar formalaşan "qara qutu" kimi çıxış edir (şəkil 12.2)

Şəkil 12.2.

Makrosəviyyədə iqtisadi sistemin girişinin komponentləri (ehtiyatlar) olaraq K - istehsal fondları (kapital) və L - əmək çıxış edirlər. Çıxış komponenti kimi isə X məcmu məhsul (və ya Y məcmu daxili məhsul) çıxış edir. Qeyd edək ki, bəzən istehsal funksiyalarına istehsala cəlb edilmiş təbii ehtiyatlar da daxil edilir.

Beləliklə, ümumi halda

$$y = F(K, L) \qquad (12.8)$$

qeyri-xətti istehsal funksiyasını iqtisadiyyatın modeli hesab etmək olar. Başqa sözlə desək, məhsul istehsalını ehtiyat sərfinin funksiyası kimi interpretasiya etmək olar.

Istehsal funksiyasının bir sıra əsas xarakteristikalarını nəzərdən keçirək.

İstehsal funksiyaları içərisində

$$y = AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2} \qquad \alpha_1 > 0, \ \alpha_2 > 0 \qquad (12.9)$$

şəklində olan multiplikativ funksiyalar xüsusi maraq doğurur. Burada:

A - neytral texniki tərəqqi əmsalı;

α_1 - fondlar üzrə elastiklik əmsalı;

α_2 - əmək üzrə elastiklik əmsalıdır.

Qeyd edək ki, multiplikativ istehsal funksiyalarını loqorifləmə yolu ilə additiv istehsal funksiyalarına çevirmək mümkün olur. Belə ki, əgər (12.9) multiplikativ istehsal funksiyasını loqorifmləsək alırıq:

$$\ln y = \ln A + \alpha_1 \ln K + \alpha_2 \ln L$$

Əgər müvafiq əvəzləmələr aparsaq, aşağıdakı additiv istehsal funksiyasını alarıq:

$$w = \ln A + \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2$$

(12.9) multiplikativ istehsal funksiyasının xüsusi halı olan

$$y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \qquad (12.10)$$

funksiyası Kobb-Duqlas funksiyası adlanır. (Bu halda $\alpha_1 = \alpha, \ \alpha_2 = 1 - \alpha$ olacaqdır).

Əgər (12.8) multiplikativ istehsal funksiyası hamar funksiyadırsa

və aşağıdakı 4 şərti ödəyirsə, onda bu funksiya neoklassik funksiya hesab edilir:

1. Əgər istehsal ehtiyatlarından hər hansı biri yoxdursa, onda istehsalı təşkil etmək mümkün deyil. Riyazi baxımdan bu şərti aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$\begin{cases} y = F(0,\ L) = 0 \\ y = F(K,\ 0) = 0 \end{cases}$$

2. Əgər istehsal ehtiyatlarında artım baş vermişdirsə, onda bu artım labüd olaraq məhsul istehsalının artmasına gətirib çıxaracaqdır. Riyazi baxımdan bu şərti aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial K} > 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial L} > 0 \end{cases}$$

3. İstehsal ehtiyatlarında baş verən artım məhsul istehsalını artırsa da, artımın sürətində zəifləməyə (yavaşımaya) səbəb olur. Riyazi baxımdan bu xassəni aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0 \end{cases}$$

4. Əgər istehsal ehtiyatlarından hər hansı biri hüdudsuz şəkildə artırsa, onda bu artım istehsalın həcminin də hüdudsuz olaraq artmasına gətirib çıxaracaqdır. Riyazi baxımdan bu şərti aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$\begin{cases} y = F(+\infty,\ L) = +\infty \\ y = F(K,\ +\infty) = +\infty \end{cases}$$

Asanlıqla göstərmək olar ki, (12.9) multiplikativ funksiya (o cümlədən də (12.10) Kobb-Duqlas funksiyası) bu xassələrin hamısına malikdir. Multiplikativ istehsal funksiyasının 1-ci xassəyə malik olmasının isbata ehtiyacı yoxdur. Doğrudan da fondların və ya canlı əməyin mövcud olmaması halında iqtisadi sistemin məhsul istehsal etməsindən danışmaq olmaz.

2-ci xassəyə gəldikdə isə:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 A K^{\alpha_1 - 1} L^{\alpha_2} = \alpha_1 \cdot \frac{A K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}}{K} = \frac{\alpha_1 y}{K} > 0; \quad \alpha_1 > 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 A K^{\alpha_1} L^{\alpha_2 - 1} = \alpha_2 \cdot \frac{A K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}}{L} = \frac{\alpha_2 y}{L} > 0; \quad \alpha_2 > 0$$

olduğu üçün ehtiyatların sərfinin artması ilə istehsalın həcminin artmasını real iqtisadi şəraitə tam adekvat hesab etmək olar. Qeyd edək ki, istehsal faktorları üzrə 1-ci tərtib məxsusi törəmələr hüdud məhsulu və ya hüdud səmərəliliyi adlanır və faktorun kiçik artımı zamanı məhsul istehsalının artımını xarakterizə edir. Bu baxımdan $\frac{\partial F}{\partial K}$-ya fondların hüdud səmərəliliyi kimi, $\frac{\partial F}{\partial L}$-ə əməyin hüdud səmərəliliyi kimi baxmaq olar.

Yuxarıda baxdığımız (12.9) multiplikativ istehsal funksiyası üçün bu göstəricilər aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 \cdot \frac{y}{K} \\ \frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 \cdot \frac{y}{L} \end{cases} \qquad (12.11)$$

(12.11)-ə görə $\alpha_1 < 1$ və $\alpha_2 < 1$ olduqda istehsal faktorlarının hüdud səmərəliliyi orta göstəricilərdən azdır, daha doğrusu məsrəflər artdıqca hüdud səmərəliliyi aşağı düşür:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial K^2} = \alpha_1(\alpha_1 - 1) A K^{\alpha_1 - 2} L^{\alpha_2} = \alpha_1(\alpha_1 - 1)\frac{y}{K^2} < 0; \quad \alpha_1 < 1$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial L^2} = \alpha_2(\alpha_2 - 1) A K^{\alpha_1} L^{\alpha_2 - 2} = \alpha_2(\alpha_2 - 1)\frac{y}{L^2} < 0; \quad \alpha_2 < 1$$

Deməli, multiplikativ istehsal funksiyası üçün 3-cü xassə də ödənilir. Bu faktı məntiqi cəhətdən əsaslandırmaq çətin deyil. Belə ki, həcmi get-gedə artan istehsal ehtiyatı digər ehtiyatların bu artıma görə get-gedə azalan miqdarları ilə birləşməyə məcbur olur. Odur ki, həcmi artan ehtiyatdan istifadənin səmərəliliyi aşağı düşməyə başlayır.

Multiplikativ istehsal funksiyalarının, o cümlədən də Kobb-Duqlas funksiyasının təhlili göstərir ki, bu funksiyalar üçün neoklassik istehsal funksiyalarının 4-cü xassəsi də hökmən ödənir, çünki fondların və ya canlı əməyin (ya da bunların hər ikisinin) məhdudiyyətsiz artma imkanına malik olmasını bir anlığa qəbul etsək (təbii ki, real iqtisadi münasibətlər baxımından bu hal nonsensdir, xüsusən də canlı əməyin

sonsuz artma imkanı), onda istehsalın həcminin də sonsuz artma imkanını qəbul etməliyik.

Beləliklə, (12.9) multiplikativ istehsal funksiyası, o cümlədən də bu funksiyanın xüsusi halı olan (12.10) Kobb-Duqlas funksiyası $0 \le \alpha_1 < 1$ və $0 \le \alpha_2 < 1$ şərtləri daxilində neoklassik funksiyadır.

Biz yuxarıda multiplikativ istehsal funksiyasının A, α_1, α_2 əmsallarının iqtisadi mənalarını açıqlayan zaman A -ya neytral texniki tərəqqi əmsalı kimi, α_1 və α_2 -yə isə əsas fondlara və canlı əməyə görə istehsalın elastikliyi əmsalları kimi məna vermişik.

Doğrudan da, əgər α_1 və α_2 əmsallarının qiymətləri dəyişməz qalarsa, eyni bir K və L -ə görə istehsalın həcmi A əmsalından proporsional şəkildə asılı olacaqdır, yəni A nə qədər böyük olarsa, y nəticə göstəricisinin qiyməti bir o qədər böyük olacaqdır.

α_1 və α_2 əmsallarının iqtisadi məzmunlarını əsaslandırmaq üçün istehsal faktorları kimi qəbul etdiyimiz əsas fondların (K) və əməyin (L) loqarifmik törəmələri anlayışlarından istifadə edək:

$$\begin{cases} \alpha_K = \dfrac{\partial \ln y}{\partial \ln K} = \lim\limits_{\Delta K \to 0} (\dfrac{\Delta y}{y}) : (\dfrac{\Delta K}{K}) \\ \alpha_L = \dfrac{\partial \ln y}{\partial \ln L} = \lim\limits_{\Delta L \to 0} (\dfrac{\Delta y}{y}) : (\dfrac{\Delta L}{L}) \end{cases} \qquad (12.12)$$

(12.9) multiplikativ istehsal funksiyasını loqarifmləsək alarıq:

$$\ln y = \ln A + \alpha_1 \ln K + \alpha_2 \ln L \qquad (12.13)$$

(12.13) ifadəsini (12.12) ifadələrində yerinə yazsaq, alarıq:

$$\alpha_K = \frac{\partial(\ln A + \alpha_1 \ln K + \alpha_2 \ln L)}{\partial \ln K} = \frac{\partial \ln A + \partial\alpha_1 \ln K + \partial\alpha_2 \ln L}{\partial \ln K} = \alpha_1$$

$$\alpha_L = \frac{\partial(\ln A + \alpha_1 \ln K + \alpha_2 \ln L)}{\partial \ln L} = \frac{\partial \ln A + \partial\alpha_1 \ln K + \partial\alpha_2 \ln L}{\partial \ln L} = \alpha_2$$

Beləliklə, α_1 - iqtisadi sistemdə məhsul istehsalının əsas fondlara görə, α_2 - isə canlı əməyə görə elastikliyidir.

Başqa sözlə desək α_1 əmsalı əsas fondların 1% artması ilə istehsalın həcminin neçə faiz artacağını, α_2 əmsalı isə canlı əmək məsrəfinin 1% artması ilə istehsalın həcminin neçə faiz artacağını xarakterizə edir. Təbii ki, $\alpha_1 > \alpha_2$ olarsa, onda iqtisadi sistemdə intensiv inkişaf, $\alpha_2 > \alpha_1$ olduqda isə ekstensiv inkişaf üstünlük təşkil

edəcəkdir.

(12.9) neoklassik multiplikativ istehsal funksiyasına görə iqtisadi sistemdə istehsalın artım tempi aşağıdakı kimi müəyyən ediləcəkdir:

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = (\frac{K_{t+1}}{K_t})^{\alpha} \cdot (\frac{L_{t+1}}{L_t})^{1-\alpha}$$

Burada $\alpha = \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}$ və $1-\alpha = \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}$ kəmiyyətləri istehsal faktorlarının nisbi elastikliklərdir.

Beləliklə, $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ olduqda (12.10) neoklassik multiplikativ Kobb-Duqlas funksiyası artan iqtisadiyyatı əks etdirir.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, iqtisadi artımın iki istiqamətini – ekstensiv inkişafı (istehsalın ölçülərinin artması hesabına təmin olunan inkişaf) və intensiv inkişafı (ehtiyatlardan istifadənin səmərəliliyinin səmərəliliyinin yüksəldilməsi hesabına təmin olunan inkişafdır) fərqləndirmək lazımdır.

Əgər iqtisadi sistemin girişləri və çıxışları müqayisəyə gələn ölçü vahidləri ilə ifadə edilibsə, onda istehsal funksiyaları vasitəsi ilə istehsalın ölçülərinin və səmərəliliyinin təhlilində heç bir problem yaranmır. Əgər istehsal faktorlarının ölçü vahidlərini müqayisəli fəzada yerləşdirmək mümkün deyilsə, onda nisbi (ölçüsüz) göstəricilərə keçmək lazım gəlir.

Nisbi göstəricilər əsasında (12.9) multiplikativ istehsal funksiyasını

$$\frac{y}{y_0} = (\frac{K}{K_0})^{\alpha_1} \cdot (\frac{L}{L_0})^{\alpha_2} \qquad (12.14)$$

şəklində ifadə etmək olar. Bu ifadədən y -i təyin edək:

$$y = y_0 \cdot (\frac{K}{K_0})^{\alpha_1} \cdot (\frac{L}{L_0})^{\alpha_2} = \frac{y_0}{K_0^{\alpha_1} L_0^{\alpha_2}} \cdot K^{\alpha_1} L^{\alpha_2} \qquad (12.15)$$

Əgər $\frac{y_0}{K_0^{\alpha_1} L_0^{\alpha_2}}$ əmsalını A ilə işarə etsək, onda (12.15) ifadəsi (12.9) multiplikativ istehsal funksiyasının ilkin ifadəsini verəcəkdir. Deməli,

$$A = \frac{y_0}{K_0^{\alpha_1} L_0^{\alpha_2}}$$

əmsalına ehtiyatları məhsul istehsalı ilə müqayisə etməyə imkan verən əmsal kimi baxmaq olar.

Əgər iqtisadi sistem tərəfindən ehtiyat sərf edilərək məhsul

istehsalını nisbi vahidlərlə - $\tilde{y}$, $\tilde{K}$ və $\tilde{L}$ parametrlərlə ifadə etsək, onda (12.14) ifadəsini

$$\tilde{y} = \tilde{K}^{\alpha_1} \tilde{L}^{\alpha_2} \qquad (12.16)$$

şəklində göstərə bilərik.

Onda nəticənin məsrəflərə olan nisbəti kimi baxılan səmərəliliyin ümumi göstəricisini aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$E = (\frac{\tilde{y}}{\tilde{K}})^{\alpha} (\frac{\tilde{y}}{\tilde{L}})^{1-\alpha} \qquad (12.17)$$

Burada

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}; \qquad 1 - \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

-dır.

(12.17) ifadəsindən belə bir qənaətə gəlmək olur ki, E iqtisadi səmərəlilik əmsalına əsasən istehsal funksiyasını

$$\tilde{y} = E\tilde{K}^{\alpha} \tilde{L}^{1-\alpha} \qquad (12.18)$$

şəklində Kobb-Duqlas funksiyası şəklinə salmaq mümkündür. Lakin bu halda biz E -yə sabit kəmiyyət kimi deyil, K və L arqumentlərinə görə funksiya kimi baxmalıyıq.

Iqtisadi sistemdə istehsalın ölçülərinə gəldikdə isə qeyd edək ki, bu göstərici sərf edilən ehtiyatların həcmindən asılıdır və buna görə də onun orta ölçüsünü

$$S = \tilde{K}^{\alpha} \tilde{L}^{1-\alpha} \qquad (12.19)$$

şəklində göstərmək olar. Əgər (12.19)-u (12.18)-də nəzərə alsaq yaza bilərik:

$$\tilde{y} = ES \qquad (12.20)$$

Deməli, iqtisadi sistemin çıxışı olan y (istehsalın həcmi) iqtisadi səmərəliliklə (E) istehsalın ölçüsünün (S) hasilinə bərabərdir.

►**Məsələ12.3.** ABŞ iqtisadiyyatının təhlili əsasında müəyyən edilmişdir ki, 1960-1995-ci illər ərzində ölkənin ümumi daxili məhsulu 2,82 dəfə, əsas istehsal fondları 2,88 dəfə, işçilərin sayı isə 1,93 dəfə artmışdır. Ümumi daxili məhsulun əsas fondlarından və işçi qüvvəsindən asılılığı aşağıdakı multiplikativ istehsal funksiyası ilə ifadə edilir:

$$y = 2{,}248\, K^{0{,}404} L^{0{,}803}$$

Istehsalın səmərəliliyinin və ölçüsünün ümumi daxili məhsula göstərdiyi təsiri qiymətləndirin.

Həlli: Məsələnin şərtlərinə görə:

$$\tilde{y} = 2{,}82\ ;\quad \tilde{K} = 2{,}88\ ;\quad \tilde{L} = 1{,}93 \text{ -dür.}$$

- Əsas fondlara və əməyə görə nisbi elastikliklər hesablayaq:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{0{,}404}{0{,}404 + 0{,}803} = \frac{0{,}404}{1{,}207} \approx 0{,}33471$$

$$1 - \alpha = 1 - 0{,}33471 = 0{,}66529$$

- Əsas fondların və əməyin fərdi səmərəliliklərini hesablayaq:

$$E_K = \frac{\tilde{y}}{\tilde{K}} = \frac{2{,}82}{2{,}88} \approx 0{,}9792$$

$$E_L = \frac{\tilde{y}}{\tilde{L}} = \frac{2{,}82}{1{,}93} \approx 1{,}4611$$

- İstehsalın ümumiləşdirilmiş səmərəlilik göstəricisini müəyyən edək (Bu göstərici əsas fondlar və əmək üzrə fərdi səmərəlilik göstəricilərinin həndəsi ortası kimi hesablanır):

$$E = E_K^{\alpha} E_L^{1-\alpha} = 0{,}9792^{\ 0{,}33471} \cdot 1{,}4611^{\ 0{,}66529} \approx 1{,}278$$

- İstehsalın ölçüsünü müəyyən edək (Bu göstərici əsas fondların və əməyin artım templərinin həndəsi ortası kimi hesablanır):

$$S = \tilde{K}^{\alpha} \tilde{L}^{1-\alpha} = 2{,}88^{\ 0{,}33471} \cdot 1{,}93^{\ 0{,}66529} \approx 2{,}207$$

Beləliklə, 1960-1995-ci illərdə ABŞ iqtisadiyyatında yaranmış 2,82 dəfəlik artım istehsalın səmərəliliyinin 1,278 dəfə və ölçüsünün 2,207 dəfə artması hesabına əmələ gəlmişdir.

Yoxlama: $y = ES = 1{,}278 \cdot 2{,}207 \approx 2{,}8205$

Cavab: $E \approx 1{,}278$ ***;*** $S \approx 2{,}207$ **.◄**

Iqtisadi sistemlər səviyyəsində (xüsusən də mikroiqtisadiyyat səviyyəsində) məhsul istehsalı ilə məcmu xərclərin dəyəri arasındakı asılılığı tədqiq etmək üçün biramilli istehsal funksiyalarından geniş istifadə edilir. Bu halda fərz edilir ki, iqtisadi sistem çərçivəsində bütün məsrəf növləri bir istehsal faktoru - məsrəflərin məcmu dəyəri şəklində sintez edilmiş, buraxılan məhsulların müxtəlif növləri isə istehsalın məcmu dəyəri şəklində ifadə olunmuşdur.

Biramilli istehsal funksiyalarına misal olaraq buraxılan məhsulun həcminin müəyyən spesifik ehtiyatdan, məsələn əmək ehtiyatlarından, əsas istehsal fondlarından, kapital qoyuluşlarından, müxtəlif növ xammallardan asılılığını əks etdirən funksiyaları göstərmək olar. Bu halda istehsalda iştirak edən qalan bütün ehtiyatların sərfi sabit qəbul edilir. Belə biramilli istehsal funksiyaları əsasən

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad (a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ x \geq 0)$$

şəklində kvadratik funksiyalar kimi ifadə edilir.

Əgər məhsul vahidi istehsalına məsrəflərin (y) istehsalın həcmindən (x) asılılığı modelləşdirilirsə, onda bu asılılığı ifadə etmək üçün

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x} \qquad (a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ x > 0)$$

şəklində hiperbolik biramilli istehsal funksiyasından istifadə edilir.

Istehsalın həcminin (y) zamandan (x) asılı olaraq dəyişməsinin dinamikasını tədqiq etmək üçün

$$y = a_0 e^{\alpha_1 x} \qquad (a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ x \geq 0)$$

şəklində eksponensial istehsal funksiyalarından istifadə edilir.

Fərz edək ki, iqtisadi sistemdə istehsalın səviyyəsi müəyyən bir a_0 hüdud kəmiyyətindən çox ola bilməz. Bu vəziyyətdə məhsul istehsalının y həcminə müəyyən bir R dəyişkən ehtiyatın sərfinin göstərdiyi təsiri modelləşdirmək üçün

$$y = a_0 - r_0 a_1^x \qquad (a_0 > 0,\ 0 < a_1 < 1,\ k_0 > 0,\ x \geq 0)$$

üstlü funksiyadan istifadə edilir.

Yuxarıda təsvir etdiyimiz biramilli istehsal funksiyaları ilə yanaşı iqtisadi sistemlər səviyyəsində

$$y = a_0 x^{\alpha_1} \qquad (a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ x \geq 0)$$

şəklində qüvvət funksiyalarından da istifadə edilir. Bu funksiyaların köməyi ilə hər hansı bir R ehtiyatın x sərfinin artmasının istehsalın y həcmini qeyri-məhdud şəkildə artırmasına gətirib çıxartması halı riyazi cəhətdən modelləşdirilir.

Iqtisadi sistemlər səviyyəsində optimal idarəetmə strategiyalarının hazırlanmasında biramilli istehsal funksiyalarından istifadəyə aid misala baxaq.

►**Məsələ 12.4.** Sement zavodu gündəlik olaraq x ton sement istehsal edir. Zavod müqaviləyə əsasən hər gün tikinti firmasına ən azı 20 ton sement verməlidir. Zavodun istehsal gücü gündə 90 tondan artıq sement istehsal etməyə imkan vermir. Əgər məsrəfləri xarakterizə edən istehsal funksiyası

$$F = -x^3 + 98x^2 + 200x$$

şəklindədirsə, onda istehsalın həcmi nə qədər olmalıdır ki, 1 ton

sementin istehsalına çəkilən orta məsrəflər minimum (maksimum) olsun.

Həlli: 1 ton sementin istehsalına çəkilən xərcləri hesablayaq:

$$F_1 = \frac{F}{x} = \frac{-x^3 + 98x^2 + 200x}{x} = -x^2 + 98x + 200$$

Deməli, məqsədimiz $[20;\ 90]$ oblastında F_1 funksiyasının minimum (maksimum) qiymətini tapmaqdır.

F_1 funksiyasının törəməsini taparaq, sıfıra bərabər etsək, alarıq:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -2x + 98 = 0$$

$$2x = 98$$

$$x = 49$$

Beləliklə, $x = 49$ kritik nöqtədir.

Funksiyanın $[20;\ 90]$ oblastının sonlarında və kritik nöqtədə qiymətlərini hesablayaq:

$$F_1(20) = -400 + 98 \cdot 20 + 200 = 1960 - 200 = 1760$$

$$F_1(49) = -2401 + 98 \cdot 49 + 200 = 4802 - 2201 = 2601$$

$$F_1(90) = -8100 + 98 \cdot 90 + 200 = 8820 - 7900 = 920$$

Beləliklə, əgər sement zavodu hər gün 90 ton sement istehsal edərsə, onda 1 ton sementin istehsalının orta xərcləri minimum olub, 920 dəyər vahidi təşkil edəcəkdir. Zavodun 49 ton sement istehsal etməsi halında isə bu xərclər maksimum olub, 2601 dəyər vahidi təşkil edəcəkdir.

Cavab: $\max\limits_{[20;90]} F_1 = F(49) = 2601$, $\min\limits_{[20;90]} F_1 = F(90) = 920$ ◀

12.4.Ekonometrik yanaşma əsasında iqtisadı inkişafın proqnozlaşdırılması

Proqnozlaşdırma yunan mənşəli termindir və gələcəkdən xəbər vermək, gələcəyi görmək mənasını verir. Göründüyü kimi, bu termin zamanla bilavasitə bağlıdır, belə ki, biz proqnoz vasitəsi ilə yaşadığımız məkan və zaman daxilində gələcəyi görməyə cəhd edirik. Qeyd edək ki, bəşəriyyət bu cəhdi müxtəlif yanaşmalarla reallaşdırmağa çalışır və bu yol "Ürəyimə damıb ki, ..."dən tutmuş ekspert qiymətləri və mürəkkəb

riyazi modellərə və kompyuter texnologiyalarına kimi uzanır. Odur ki, bu və ya digər vəziyyətin proqnozlaşdırılmasında mühüm əhəmiyyət kəsb edən məqamlardan biri konkret proqnozlaşdırma metodunun düzgün seçilməsidir. Bu seçimə bir cox faktorlar təsir edir və onların bəziləri proqnozlaşdırmanın texniki təminatı ilə bağlıdırsa, digərləri xərc göstəriciləri ilə bağlıdır.

Elmi-konseptual yanaşma baxımından mövcud proqnozlaşdırma metodlarını aşağıdakı kimi qruplaşdırmaq olar:

- Keyfiyyət metodları;
- Kəmiyyət metodları.

Proqnozlaşdırmanın keyfiyyət metodlarına çox zaman ekspert metodları da deyilir. Bu metodların əsasını proqnozların verilməsində müvafiq sahənin mütəxəssislərinin (ekspertlərinin) rəylərinə əsaslanaraq təşkil edilir.

Proqnozlaşdırmanın kəmiyyət metodları isə vəziyyəti xarakterizə edən ədədi məlumat massivlərinin işlənməsinə əsaslanır. Proqnozlaşdırmanın kəmiyyət metodlarını iki qrupa ayırmaq olar:

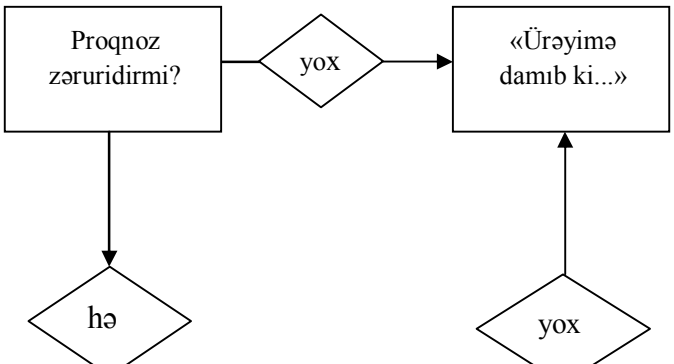
- Səbəb-nəticə metodları (kauzal metodlar);
- Zaman sırasının təhlili metodları.

Əgər keçmişdə baş verənlər gələcəyi qiymətləndirmək üçün kifayət qədər əsas verərsə, onda keçmişin meylinin aşkar edilməsi və bu meylin gələcəyə aid edilməsinin ən əlverişli yolu zaman sırasının təhlili yoludur.

Əgər indiki vəziyyət yalnız zamandan deyil, həm də bir cox başqa dəyişənlərdən asılıdırsa, onda proqnozlaşdırma üçün kauzal metodlardan istifadə edilir. Kauzal metodun əsasını prosesə təsir edən dəyişənlər arasındakı səbəb-nəticə əlaqələrinin riyazi təsvirini vermək (əlaqə tənlikləri və ya bərabərsizliklərini müəyyən etmək) təşkil edir.

Aşağıdakı şəkildə konkret şəraitin ilkin şərtlərindən asılı olaraq proqnozlaşdırma metodunun seçilməsinin məntiqi blok-sxemi əks etdirilmişdir (şəkil12.3).

İndi isə proqnozlaşdırmanın yuxarıda açıqladığımız nəzəri-konseptual müddəaları bazasında iqtisadi sistemlərin proqnozlaşdırılması məsələsini daha ətraflı təhlil edək.



Şəkil 12.3.

İqtisadi ədəbiyyatlarda iqtisadi proqnozlaşdırmaya müxtəlif təriflər verilir. Bu tərifləri birləşdirən ümumi cəhət odur ki, bütün hallarda proq-

noza gələcəyi keyfiyyət və kəmiyyət baxımından xarakterizə edən ehtimallı elmi mülahizə kimi yanaşılır. Başqa sözlə desək, proqnoz – məlum meyllərə və faktorlara əsaslanaraq gələcək haqqında fikir söyləməkdir.

İqtisadi sistemlərin gələcək vəziyyətlərinin proqnozlaşdırılmasında mühüm əhəmiyyət kəsb edən məqamlardan biri planlaşdırma ilə proqnozlaşdırmanın qarşılıqlı əlaqəsinin düzgün müəyyən edilməsidir. Bazar iqtisadiyyatı şəraitində plan dedikdə tədqiq edilən obyektin obrazı, gələcəyin modeli, qarşıya qoyulmuş məqsədə catmağa xidmət edən tədbirlər sistemi başa düşülür.

Proqnozlaşdırma və planlaşdırmanın ümumi cəhətləri ondan ibarətdir ki, onlarda istifadə edilən informasiya qabaqlama xassəsinə malik olur və ümumi informasiya bazasında həyata keçirilir. Onların qarşılıqlı əlaqəsi isə onunla müəyyən edilir ki, proqnozlaşdırma planlaşdirma üçün tədqiqat bazası rolunu oynayır və bir qayda olaraq zamana görə onu qabaqlayır.

Proqnozlarla planlar arasında olan əsas fərqli cəhətləri isə aşağidakı kimi qruplaşdırmaq olar:

- Proqnozlaşdırma tədqiqat, gələcəyi elmi çəhətdən təsvir etmək xarakteri daşıyırsa, plan - məqsədə əsaslanma xarakteri daşıyır;
- Proqnoz ehtimallı xarakter daşıyırsa, plan - normativ xarakter daşıyır;
- Proqnoz çoxvariantlı xarakter daşıyırsa, plan - birqiymətli (alternativsiz) şəkildə müəyyən edilir;
- Əgər planlar ehtiyat təminatı baxımından tam tarazlaşdırılmış şəkildə olmalıdırsa, proqnozlar ehtiyat çatışmamazlığı şəraitində də məqsədə çatma ehtimalını qiymətləndirə bilərlər;
- Planlaşdırma prosesi proqnozlaşdırmaya nəzərən subyektiv faktorların təsiri altında daha çox olur, çünki planların reallaşdırılmasında qərar qəbul edən və nəzarət funksiyasını icra edən insan iştirak edir.

Proqnozlaşdırma cəmiyyətin həyatının bütün sahələrində nəzəriyyə ilə praktikanın əlaqələndiricisi kimi çıxış edir və iki funksiya icra edir:

- gələcək haqqında fikir söyləmək (gələcəyi təsvir etmək) funksiyası;
- gələcəyi göstərmək (gələcək fəaliyyət strategiyasını müəyyən etmək) funksiyası.

Birinçi funksiya proqnozlaşdırmanın nəzəri- dərkedici aspekti ilə bağlı olub, iqtisadi sistemin mümkün və ya arzu olunan vəziyyətlərinin, alternativlərinin təsvirini nəzərdə tutursa, proqnozlaşdırmanın idarəedici aspekti ilə bağlı olan ikinci funksiya gələcək haqqında olan informasiyadan

real davranışda istifadəni nəzərdə tutur.

İqtisadi sistemlər səviyyəsində proqnozlaşdırmanı zəruri edən əsas səbəb odur ki, bu sistemlər daima ətraf mühitin qeyri-müəyyənliyinin (təbii-iqlim hadisələri, bazar konyukturası, iqtisadi böhranlar, inflyasiya və s.) təsiri altındadır. Odur ki, idarəetmə strategiyaları hazırlayan zaman ətraf mühitin konkret vəziyyəti ilə bağlı olaraq daima bu şəraitə adekvat olan informasiya bazasından istifadə edilməlidir.

Proqnozlaşdırma məhz bu istiqamətdə çıxış edərək qeyri-müəyyənliklərin doğurduğu risklərin azaldılması vasitəsi rolunu oynayır və iqtisadi sistemin tabe olduğu ətraf mühitin gözlənilən (ehtimal edilən) vəziyyətlərini qiymətləndirməyə imkan verir. Proqnozlaşdırma həm də qəbul edilən idarəetmə strategiyalarının yaxın gələcəkdə və uzaq gələcəkdə verəcəyi nəticələri qiymətləndirməyə xidmət edir.

Iqtisadi sistemlərin proqnozlaşdırılması imkanları onunla bağlıdır ki, bu sistemlərin davranışı konkret iqtisadi qanunların və səbəb-nəticə əlaqələrinin fəaliyyəti müstəvisində baş verir. Bu qanunların əsas xüsusiyyəti odur ki, onların fəaliyyəti subyektiv faktorun-qərar qəbul edən şəxsin mövcudluğunu tələb etdiyi üçün dəyişənlər arasında dəqiq asılılıqlara deyil, orta hesabla, ümumi şəkildə və yalnız kütləvi müşahidələr zamanı ödənən asılılıqlara əsaslanır. Beləliklə, təbiət elmlərinə aid olan qanunlara xas olan tam determiniklikdən fərqli olaraq iqtisadi qanunlar təsadüfiliklər mustəvisində reallaşırlar. Odur ki, iqtisadi sistemlər səviyyəsində gələcəyi dəqiq görmək sadəcə mümkün deyildir və iqtisadi prosesin inkişafının nə dərəcədə stabil axarda olmasından asılı olaraq proqnozun nə dərəcədə reallığa yaxın olmasını qiymətləndirmək lazım gəlir.

Iqtisadi sistemlər səviyyəsində fəaliyyət göstərən iqtisadi qanunlara misal olaraq böyük ədədlər qanununu (iqtisadi sistemlərə xas olan kəmiyyət asılılıqları yalnız coxsaylı müşahidələr nəticəsində aşkar təzahür edir), Valras qanununu (hər bir ölkə üçün tələb edilən məhsulların dəyəri bu ölkə içərisində satılan məhsulların dəyərinə bərabərdir), Keyns qanununu (gəlirlər artdıqca əhalinin istehlaka olan meylliliyi aşağı düşür), Engel qanununu (əhalinin gəlirləri artdıqca ayrı-ayrı nemətlərin istehlakı müxtəlif nisbətlərdə artır, daha doğrusu qidalanmaya çəkilən xərclərin artımı uzun müddət istifadə olunan məhsullara, əmanətlərə çəkilən xərclərin artımından daha zəif gedir), zəruri müxtəliflik qanununu (idarəedici sistemin müxtəlifliklərinin sayı idarə olunan obyektin müxtəlifliklərinin sayından az olmamalıdır) və s. göstərmək olar. Iqtisadi sistemlərin proqnozlaşdırılması prosesində bu qanunların tələblərinin gözlənilməsi ilə yanaşı həm də onlara xas olan ətalətliliyi, yəni mövcud xüsusiyyətləri müəyyən dövr ərzində

qoruyub saxlaması və dəyişikliklərə ani reaksiya verməməsini də nəzərə almaq lazım gəlir. Belə ki, ətalətliliyə nəzərən fərz edə bilərik ki, iqtisadi sistemə (t-1) zaman momentində xas olan dinamik xarakteristikaları proqnozlasdırılan (t+1), (t+2), (t+3),... dövrlərə də şamil etmək olar.

Iqtisadi sistemlərin proqnozlaşdırılmasının əsas prinsiplərinə aşağıdakıları aid etmək olar:

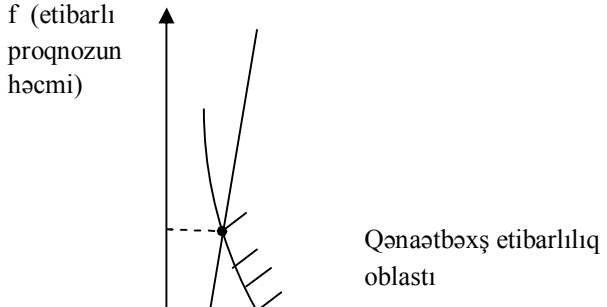
- sistemlilik prinsipi;
- əlaqələndirmə prinsipi;
- variantlılıq (alternativlik) prinsipi;
- fasiləsizlik prinsipi;
- adekvatlılıq prinsipi.

İqtisadi sistemlər üzrə verilən proqnozları müxtəlif əlamətlərə görə təsnifləşdirmək olar. Bu əlamətlərə misal olaraq proqnozlaşdırmaya yanaşmanı, proqnozlaşdırma üfüqünün uzunluğunu, proqnozlaşdırma obyektinin səviyyəsini, xarakteristikaların ölçüsünü, proqnoz fonunun nəzərə alınma səviyyəsini və bu xarakteristikaların dəqiqliyini göstərmək olar. Digər əlamətlər üzrə təsnifatları oxucuların ixtiyarına verməklə yanaşı qeyd edək ki, proqnozlaşdırma üfüqünün uzunluğuna görə proqnozlar operativ proqnozlara (1 aya qədər), qısa müddətli proqnozlara (1 ilə qədər), orta müddətli proqnozlara (5 ilə qədər), uzun müddətli proqnozlara (15 ilə qədər) və uzaq müddətli proqnozlara (15 ildən yuxarı), xarakteristikaların dəqiqliyinə görə isə nöqtəvi və interval proqnozlara bölünürlər.

İqtisadi sistemlər üzrə hesablanan proqnozların etibarlılığı ilə onların əhatə etdiyi planlaşdırma üfüqü arasında bilavasitə əlaqə vardır. Belə ki, proqnozlaşdırılan zaman momentinin real zaman ölçüsündən uzaqlaşması artdıqca proqnozun etibarlılıq göstəricisi pisləşir (şəkil 12.4)

İqtisadi sistemlər üzrə proqnozlar qurulan zaman bu sistemlərin zamana görə inkişafını əks etdirən məlumatlar xüsusi maraq doğurur. Belə ki, bu informasiya bazası ekstrapolyasiya yolu ilə aşkar edilmiş inkişaf meylini ətalətli hesab edərək gələcək dövrə şamil etməyə imkan verir.

Məlum olduğu kimi iqtisadi sistemin hər hansı bir göstəricisinin digər göstəricinin artan və ya azalan qiymətləri ardıcıllığından asılı olaraq nizamlanmış müşahidələri coxluğuna ***dinamik sıra*** deyilir. Əgər dinamik sırada nizamlanma əlaməti olaraq zamandan istifadə olunmuşdursa, onda belə sıraya ***zaman sırası*** deyilir. Zaman sırası üçün proqnozlaşdırma üsulunun secilməsi məlumatların dinamikası modelinin tipindən asılıdır.



Şəkil 12.4

Bu model tipinə aşağıdakıları aid etmək olar:

- Üfüqü model
- Trend modeli
- Mövsümü model
- Dövrü model

Proqnozlaşdırma üçün zaman sırasının təhlili metodu tətbiq edilən zaman üfüqi modeldən o zaman istifadə edilir ki, zaman sırası stasionar xarakterdə olsun, daha doğrusu müşahidələr orta qiymətə görə kənarlaşsınlar. Bu zaman xarici mühitin təsirləri sabit qəbul edilir.

Əgər zaman sırasının qiymətləri kifayət qədər böyük zaman hüdudu daxilində artır və ya azalırsa, onda trend modelindən istifadə edilir.

Əgər müşahidə qiymətlərinə yalnız inkişafın ümumi qanunauyğunluqları deyil, həm də mövsümü faktorlar təsir edirsə, onda dinamik sıraların təhlili metodu üzrə proqnozlaşdırma mövsümü modelin bazasında aparılır.

Əgər iqtisadi sistemi xarakterizə edən məlumatların artması və azalması zamandan asılı olmayaraq baş verirsə, onda dövrü modeldən istifadə edilir.

Trend modelləri proqnoz ekstropolyasiyalarının aparılmasını nəzərdə tutur. ***Ekstrapolyasiya*** dedikdə retrospektiv dövrdə proqnozlaşdırma obyektinin dinamikasının təhlilinə əsaslanan proqnozlaşdırma metodu başa düşülür. Ekstrapolyasiya metodu iqtisadi obyektin tədqiq edilən xarakteristikalarının dinamikasını əks etdirən funksiyanı təsvir

etməyə imkan verir.

Hadisəni təsvir etmək üçün funksiyanın secilməsi prosesin dinamikasının tipindən asılıdır. Proqnoz ekstropolyasiyası üçün istifadə edilən funksiyalara aşağıdakıları aid etmək olar:

- Xətti funksiya: $y = a_0 + a_1 t$
- 2-ci tərtib parabola: $y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$
- 3-cü tərtib parabola: $y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$
- Qüvvət funksiyası: $y = a_0 t^{a_1}$
- Eksponensial funksiya: $y = a_0 e^{a_1 t}$
- Modifikasiya olunmus eksponensial funksiya: $y = R - a_0 e^{a_1 t}$
- Məntiqi (S şəkilli əyri) funksiya: $y = \dfrac{R}{1 + a_1 e^{-a_0 t}}$
- Hiperbola: $y = a_0 + \dfrac{a_1}{c + t}$
- Döyüntülü: $y = a_0 + a_1 t + \sum_{i=1}^{n} c_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$

Qeyd edək ki, sosial-iqtisadi proqnozlaşdırmada ekstropolyasiyadan əsasən xətti, 2-ci tərtib parabola və 3-cü tərtib parabola tipli dinamikalar üçün istifadə edilir.

$y = a_0 + a_1 t$ xətti funksiya bərabər ölçülü inkişafı xarakterizə edir. Yəni, fərz edilir ki, iqtisadi artım daima mütləq artma üzrə gedir və bu artma hər bir zaman intervalı üçün funksiyanın a_1 əmsalının mütləq qiymətinə bərabərdir.

$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ 2-ci tərtib parabola bərabər sürətlənən (bərabər yavaşıyan) artımı xarakterizə edir. Yəni fərz edilir ki, iqtisadi artım daima artma tempi ilə gedir. Funksiyanın a_2 əmsalı vaxt vahidi ərzində inkişafın intensivliyinin sabit dəyişkənliyini xarakterizə edir. Əgər $a_2 > 0$ olarsa, onda iqtisadi sistemin öyrənilən xarakteristikasına surətlənən dinamika, $a_2 < 0$ olduqda isə yavaşıyan dinamika xasdır. Bu halda a_1 əmsalının işarəsi həm müsbət, həm də mənfi ola bilər.

$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ 3-cü tərtib parabola isə dəyişkən sürətlənən (yavaşiyan) inkişafı xarakterizə edir. Yəni fərz edilir ki,

iqtisadi sistemdə stabil dəyişən artma (azalma) templi iqtisadi artım müşahidə edilir.

Proqnoz ekstrapolyasiyası funksiyalarının parametrlərinin qiymətlərini hesablamaq üçün yuxarıda ətraflı nəzərdən keçirdiyimiz ən kiçik kvadratlar metodundan istifadə etmək olar.

Proqnoz ekstrapolyasiyası funksiyası konkretləşdirildikdən sonra iqtisadi sistemin tədqiq edilən xarakteristikasının proqnoz qiymətlərini hesablamaq üçün bu funksiyada t zamanın planlaşdırma üfüqünün proqnoz dövrünü xarakterizə edən qiyməti yerinə yazılır. Nəticədə $(n+s)$ zaman momenti üçün nöqtəvi proqnoz müəyyən edilir. Nöqtəvi proqnozlar müəyyən edildikdən sonra proqnozlaşdırılan xarakteristikanın proqnoz qiymətlərinin mümkün dəyişmələrinin sərhədləri müəyyən edilə bilər, daha doğrusu interval proqnozları müəyyən edilir:

$$y'_{n+s} = y_{n+s} \pm \delta \qquad (12.21)$$

Burada y'_{n+s} – planlaşdırma üfüqünün $(n+s)$ momenti üçün proqnozun interval qiyməti;

y_{n+s} – həmin zaman momenti üçün nöqtəvi proqnozun qiyməti;

δ – proqnozun səhvidir.

Xətti və aşağı tərtibli parabola trendləri üçün δ kəmiyyəti aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\delta = S_{\bar{y}} \cdot t_q$$

Burada $S_{\bar{y}}$ – proqnozlaşdırılan xarakteristikanın qiymətinin orta kvadratik səhvidir:

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sum (y_t - \bar{y})^2}{n-k}}$$

(n – ilkin sırada müşahidə cütlərinin sayı; k – isə modelin parametrlərinin sayıdır);

t_q – isə sərbəstlik dərəcəsinin sayı $n-2$ olduqda Styudent kriteriyasının cədvəl qiymətidir.

Qeyd edək ki, (12.21) ifadəsinə görə interval proqnozu yalnız o halda adekvat müəyyən edilə bilər ki, ehtibarlılıq intervalı S – dən asılı olmasın (daha doğrusu proqnoz dövrünün uzunluğu proqnozun etibarlılıq intervalına təsir etməsin)

Indi isə zaman sırasının ekstropolyasiyası yolu ilə iqtisadi

inkişafın nöqtəvi proqnozlarının verilməsinə aid konkret misala baxaq.

►Məsələ 12.5. Aşağıdakı cədvəldə ölkə üzrə əhalinin gəlirlərinin zaman faktoru və ümumi daxili məhsulun təsiri altında dəyişməsini əks etdirən məlumatlar verilmişdir (milyon manatla) (cədvəl 12.6):

Cədvəl 12.6.

Göstəricilər / İllər (x_1)	Əhalinin gəlirləri (y)	Ümumi daxili məhsul (x_2)
2000	4047,3	4718,1
2001	4612,1	5315,6
2002	5018,6	6062,5
2003	5738,1	7146,5
2004	6595,1	8530,2
2005	8063,6	12522,5
2006	10198,5	18746,2
2007	14305,6	28360,5
2008	20735,4	40137,2
2009	22396,1	34578,7

2010-2014-cü illər üçün əhalinin gəlirlərinin dəyişməsinin nöqtəvi proqnozlarını müəyyən edin.

Həlli: Dinamik sıraların təhlili metodunu tətbiq etməklə 2010-2014-cü illəri əhatə edən proqnozlaşdırma üfüqü üçün əhalinin gəlirlərinin zaman faktorundan və ümumi daxili məhsuldan asılı olaraq dəyişməsi proqnozunu verək. Bu məqsədlə 1-ci mərhələdə tədqiqata cəlb

edilmiş göstəricilər arasındakı korrelyasiya asılılığını əks etdirmək üçün əlaqə tənliyini seçək. Əlaqə tənliyi olaraq

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

xətti çoxkorrelyasiya modelindən istifadə edəcəyik. Modelin əmsallarının qiymətləndirilməsi üçün ən kiçik kvadratlar metodu tətbiq edilmişdir. Aparılmış hesablamalar nəticəsində aşağıdakı normal tənliklər sistemi alınmışdır:

$$\begin{cases} 101710,4 = 10a_0 + 55a_1 + 166118\,a_2 \\ 729050,7 = 55a_0 + 385a_1 + 1245038\,a_2 \\ 2475864201,51 = 166118\,a_0 + 1245038\,a_1 + 4330339049,98a_2 \end{cases}$$

Sistemin həlli nəticəsində a_0, a_1, a_2 əmsalları üçün aşağıdakı qiymətlər alınır:

$$a_0 = 1218{,}2$$

$$a_1 = 329{,}05$$

$$a_2 = 0{,}43$$

Onda əlaqə tənliyi aşağıdakı kimi alınacaq:

$$y = 1218{,}2 + 329{,}05x_1 + 0{,}43x_2$$

Əlaqə tənliyi üçün ümumi korrelyasiya əmsalının qiyməti $R_{yx_1x_2} \approx 0{,}98$ olduğu müəyyən edilmişdir.

Korrelyasiya əmsalının qiymətinin kifayət qədər yüksək olması göstərir ki, reqressiya tənliyinin real iqtisadi şəraitə adekvatlığı kifayət qədər yüksəkdir və bu riyazi instrumentari proqnozlaşdırma üçün yararlıdır.

Planlaşdırma üfüqü üzrə nöqtəvi proqnozları hesablamaq üçün reqressiya tənliyinə daxil olan göstəricilərin fərdi proqnozları məlum olmalıdır.

Zaman faktoru üzrə artım zaman oxunun diskret nöqtələri üzrə getdiyinə görə (n+1), (n+2), (n+3) və s. zaman momentləri üçün ümumi daxili məhsulun zamandan asılılığının nöqtəvi proqnozlarını müəyyən edək. Fərz edəcəyik ki, ölkə üzrə ümumi daxili məhsulun zamandan asılılığı $y = a_0 + a_1 x$ xətti reqressiya tənliyi vasitəsi ilə ifadə edilir. Aparılmış hesablamalar nəticəsində bu tənliyin əmsalları üçün aşağıdakı qiymətlər tapılmışdır:

$$x_2 = -5480{,}82 + 4016{,}84t$$

Bu əlaqə tənliyinə görə 2010-2014 illəri üçün ümumi daxili

məhsulun zamana görə dəyişməsinin nöqtəvi proqnozlarını hesablayaq:

$$x_2^{2010} = -5480{,}82 + 4016{,}84 \cdot 11 = 38704{,}42 \text{ mln manat}$$

$$x_2^{2011} = -5480{,}82 + 4016{,}84 \cdot 12 = 42721{,}26 \text{ mln manat}$$

$$x_2^{2012} = -5480{,}82 + 4016{,}84 \cdot 13 = 46738{,}1 \text{ mln manat}$$

$$x_2^{2013} = -5480{,}82 + 4016{,}84 \cdot 14 = 50754{,}94 \text{ mln manat}$$

$$x_2^{2014} = -5480{,}82 + 4016{,}84 \cdot 15 = 54771{,}78 \text{ mln manat}$$

Alınmış nöqtəvi proqnozlara görə əhalinin gəlirlərinin planlaşdırma üfüqünün 2010-2014 zaman momentləri üçün proqnozlarını hesablayaq:

$$y_{2010} = 1218{,}2 + 329{,}05 \cdot 11 + 0{,}43 \cdot 38704{,}42 = 21480{,}65 \text{ mln manat}$$

$$y_{2011} = 1218{,}2 + 329{,}05 \cdot 12 + 0{,}43 \cdot 42721{,}26 = 23536{,}94 \text{ mln manat}$$

$$y_{2012} = 1218{,}2 + 329{,}05 \cdot 13 + 0{,}43 \cdot 46738{,}1 = 25593{,}23 \text{ mln manat}$$

$$y_{2013} = 1218{,}2 + 329{,}05 \cdot 14 + 0{,}43 \cdot 50754{,}94 = 27649{,}52 \text{ mln manat}$$

$$y_{2014} = 1218{,}2 + 329{,}05 \cdot 15 + 0{,}43 \cdot 54771{,}78 = 29705{,}82 \text{ mln manat}$$

Cavab: Əgər ölkənin ümumi daxili məhsulunun dəyişməsi meylində kəskin dəyişikliklər baş verməzsə, onda 2010-cu ildə əhalinin gəlirlərinin 21481 mln manat, 2011-ci ildə 23537 mln manat, 2012-ci ildə 25593 mln manat, 2013-cü ildə 27650 mln manat, 2014-cü ildə 29706 mln manat olacağı proqnozlaşdırılır. ◄

Mövzu üzrə praktikum

12.6. Aşağıdakı cədvəldə 8 ailə qrupu üzrə ailənin gəlirlərinin səviyyəsindən asılı olaraq qida məhsullarına çəkilən xərclər haqqında

məlumatlar verilmişdir.

Ailənin gəlirləri (x)	1,4	3,3	5,5	7,6	9,8	12,0	14,7	18,9
Qida məhsullarına çəkilən xərclər (y)	1,1	1,4	2,0	2,4	2,8	3,1	3,5	4,0

Cədvəl məlumatlarından istifadə edərək:

1.Qida məhsullarına çəkilən xərclərin ailənin gəlirlərindən asılılığını əks etdirən reqressiya tənliyini qurun;

2.Determinasiya əmsalını hesablamaqla qida məhsullarına çəkilən xərclərin ailənin gəlirlərindən asılılığını kəmiyyətcə qiymətləndirin;

3.Korrelyasiya əmsalını hesablamaqla qida məhsullarına çəkilən xərclərlə əhalinin gəlirləri arasındakı korrelyasiya asılılığının sıxlığını qiymətləndirin.

12.7. Aşağıdakı cədvəldə dənli bitkilərin məhsuldarlığının 1 hektar əkin sahəsinə verilən gübrələrin miqdarından asılılığını əks etdirən məlumatlar verilmişdir.

Dənli bitkilərin məhsuldarlığı	3,5	5,0	6,5	0,5	13	4	7,5	8,5	6	12,5
Gubrənin miqdarı (1hektar)	16,4	5,2	4,6	0,8	6,6	2,7	5,5	17	14,2	25,9

Cədvəl məlumatlarından istifadə edərək:

1. Dənli bitkilərin məhsuldarlığının gübrənin miqdarından asılılığını əks etdirən reqressiya tənliyini qurun;

2.Determinasiya əmsalını hesablamaqla dənli bitkilərin məhsuldarlığının gübrənin miqdarından asılılığını kəmiyyətcə qiymətləndirin;

3.Korrelyasiya əmsalını hesablamaqla dənli bitkilərin məhsuldarlığı ilə gübrənin miqdarı arasında korrelyasiya asılılığının sıxlığını qiymətləndirin.

12.8. Aşağıdakı cədvəldə firmada istehsalın həcminin zamana görə dəyişməsi haqqında 10 illik məlumatlar verilmişdir:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

y	30	32	34	33	36	35	36	38	34	40

Istehsalın həcminin zamandan asılılığını əks etdirən reqressiya tənliyini qurun və əlaqənin sıxlığını qiymətləndirin.

12.9. İqtisadi sistemin y və x göstəriciləri arasındakı korrelyasiya asılılığı aşağıdakı dinamik sıra ilə ifadə edilir:

x	1,5	2,1	2,7	3,2	3.4	3,6	3.7	4
y	0,9	1,2	1,8	2,2	2,6	2,9	3,3	3,8

Asılılığın əlaqə tənliyini müəyyən edin və sıxlığını qiymətləndirin.

12.10. Aşağıdakı cədvəldə firmada istehsalın həcminin zamana görə dəyişməsi haqqında 10 illik məlumatlar verilmişdir:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	20	22	24	23	26	25	28	26	27	30

Istehsalın həcminin zamandan asılılığını əks etdirən reqressiya tənliyini qurun və əlaqənin sıxlığını qiymətləndirin.

12.11.Aşağıdakı cədvəldə firmanın 10 filialı üzrə iqtisadi göstəricilər əks etdirilmişdir.

Əmək məhsuldarlığı (y)	74	84	73	93	56	71	117	111	135	125
Fond tutumu (x_1)	33	34	36	35	33	37	39	42	43	44
Enerji tutumu (x_2)	56	58	67	70	73	77	78	99	93	96

Cədvəl məlumatlarından istifadə edərək:

1. Fond tutumu və enerji tutumunun əmək məhsuldarlığına birgə təsirini xarakterizə edən coxkorrelyasiyalı model tərtib edin;

2.Determinasiya əmsalını hesablamaqla tədqiqata cəlb edilmiş faktorların əmək məhsuldarlığının formalaşdırılmasında oynadığı rolu kəmiyyətcə qiymətləndirin;

3.Korrelyasiya əmsalı vasitəsilə əmək məhsuldarlığı ilə təsiredici faktor arasındakı korrelyasiya asılılığının sıxlığını qiymətləndirin.

12.12. Aşağıdakı cədvəldə mağazanın əmtəə dövriyyəsinin işçilərin sayından və mağazanın sahəsindən asılılığını əks etdirən məlumatlar verilmişdir.

Işçilərin sayı (x_1)	31	34	35	41	38	32	29	39
Mağazanın sahəsi (x_2)	29,5	14,2	18	21,3	47,5	10	21	36,5
Əmtəə dövriyyəsi (y)	22	14	23	43	66	7,6	12	36

Cədvəl məlumatlarından istifadə edərək:

1.İşçilərin sayının və mağazanın sahəsinin əmtəə dövriyyəsinə birgə təsirini xarakterizə edən coxkorrelyasiyalı model tərtib edin;

2.Determinasiya əmsalını hesablamaqla tədqiqata cəlb edilmiş faktorların əmtəə dövriyyəsinin formalaşdırılmasında oynadığı rolu kəmiyyətcə qiymətləndirin;

3.Korrelyasiya əmsalı vasitəsilə əmtəə dövriyyəsi ilə təsiredici faktor arasındakı korrelyasiya asılılığının sıxlığını qiymətləndirin.

Mövzu üzrə testlər

1. Hansı asılılığa funksional asılılıq deyilir?

A) Hər bir müşahidə zamanı tam və dəqiq ödənən asılılıq;
B) Bəzi müşahidələr zamanı tam və dəqiq ödənən asılılıq;
C) Orta hesabla və ümumi şəkildə ödənən asılılıq;
D) Ehtimalla ödənən asılılıq;
E) Yalnız kütləvi müşahidələr zamanı ödənən asılılıq.

2. Hansı asılılığa korrelyasiya asılılığı deyilir?

A) Hər bir müşahidə zamanı tam və dəqiq ödənən asılılıq;
B) Bəzi müşahidələr zamanı tam və dəqiq ödənən asılılıq;
C) Orta hesabla, ümumi şəkildə və yalnız kütləvi müşahidələr zamanı ödənən asılılıq;
D) Ehtimalla ödənən asılılıq;
E) Determinik ödənən asılılıq.

3. İqtisadi göstəricilər arasındakı qarşılıqlı əlaqələrin öyrənilməsində korrelyasiya təhlilindən istifadənin əsas səbəbi hansıdır?

A) Korrelyasiya təhlili daha sadədir;
B) Korrelyasiya təhlili daha az vaxt aparır;
C) İqtisadi göstəricilərin qiymətlərinə çoxsaylı obyektiv və təsadüfi faktorlar təsir göstərir və asılılıqlar dəqiq aşkar edilmir;
D) İqtisadi göstəricilərin qiymətləri zamana görə dəyişən xarakterlidir;
E) İqtisadi göstəricilərin qiymətləri zamana görə sabit xarakterlidir.

4. Cüt korrelyasiya dedikdə nə başa düşülür:

A) İqtisadi sistemin iki göstəricisi arasındakı korrelyasiya asılılığının təhlili;
B) İqtisadi sistemin bütün göstəriciləri arasındakı korrelyasiya asılılıqlarının təhlili;
C) İqtisadi sistemin iki göstəricisi arasındakı funksional asılılığın təhlili;
D) İqtisadi sistemin bütün göstəriciləri arasındakı funksional asılılıqların təhlili;
E) İqtisadi sistemin iki göstəricisi arasındakı həm funksional, həm də korrelyasiya asılılığının qoşa təhlili.

5. Reqressiya tənliyi:

A) İqtisadi sistemin göstəriciləri arasındakı funksional asılılığı ən yaxşı şəkildə əks etdirən riyazi əlaqə tənliyidir;

B) İqtisadi sistemin göstəriciləri arasındakı korrelyasiya asılılığını ən yaxşı şəkildə əks etdirən riyazi əlaqə tənliyidir;
C) İqtisadi sistemə maksimum mənfəət təmin edən modelin məqsəd funksiyasıdır;
D) İqtisadi sistemdə xərcləri minimumlaşdıran modelin məqsəd funksiyasıdır;
E) İqtisadi sistemdə ehtiyatların qoşma qiymətlərini müəyyən edən modelin məqsəd funksiyasıdır.

6. $y = a_0 + a_1 x$ reqressiya tənliyi iqtisadi sistemdə hansı asılılığı əks etdirir?

A) x sərbəst dəyişənlə y asılı dəyişən arasındakı xətti funksional asılılığı;
B) y sərbəst dəyişənlə x asılı dəyişən arasındakı xətti funksional asılılığını;
C) x sərbəst dəyişənlə y asılı dəyişən arasındakı xətti korrelyasiya asılılığı;
D) y sərbəst dəyişənlə x asılı dəyişən arasındakı xətti korrelyasiya asılılığını;
E) x sərbəst dəyişənlə y asılı dəyişən arasındakı qeyri-xətti asılılığı.

7. Aşağıdakı əlaqə tənliklərindən hansı cüt korrelyasiyanın qeyri-xətti modeli deyil?

A) $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$
B) $y = ax^b$
C) $y = ab^x$
D) $y = a_0 + a_1 x$
E) $y = a_0 + a_1 \frac{1}{x^2}$

8. Əgər iqtisadi sistemin y asılı dəyişəni $x_1 . x_2, ..., x_n$ sərbəst dəyişənlərin birgə təsiri altında formalaşırsa, onda belə asılılığa:

A) Cüt korrelyasiyalı asılılıq deyilir;
B) Orta korrelyasiyalı asılılıq deyilir;
C) Çoxkorrelyasiyalı asılılıq deyilir;
D) Nisbi korrelyasiyalı asılılıq deyilir;
E) Qeyri-xətti korrelyasiyalı asılılıq deyilir.

9. İqtisadi sistemlərdə çoxkorrelyasiyalı asılılıqları əks etdirmək üçün:

A) Cüt korrelyasiyanın xətti modellərindən istifadə edilir;
B) Cüt korrelyasiyanın qeyri-xətti modellərindən istifadə edilir;
C) Xətti optimallaşdırma modellərindən istifadə olunur;
D) Balans modellərindən istifadə olunur;
E) Çoxkorrelyasiyalı modellərdən istifadə olunur.

10 Aşağıdakı reqressiya tənliklərindən hansı tənlik çoxkorrelyasiyalı model hesab edilə bilər:

1. $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$
2. $y = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{1}{x}$
3. $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$
4. $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2^2$
5. $y = a_0 + a_1 \frac{1}{x} + a_2 \frac{1}{x^2}$

A) 1 və 2
B) 2 və 3
C) 3 və 4
D) 4 və 5
E) 1 və 5

11. Reqressiya tənliyi $y = a_0 + a_1 x$ şəklindədir. Əgər S_y^2 - y asılı dəyişənin qiymətlərinin dispersiyası, S_{yx}^2 - y asılı dəyişənin x sərbəst dəyişənə görə dispersiyasıdırsa, onda determinasiya əmsalı necə hesablanacaqdır?

A) $\frac{S_y^2}{S_{yx}^2}$

B) $\frac{S_{yx}^2}{S_y^2}$

C) $\frac{S_y^2 - S_{yx}^2}{S_y^2}$

D) $\frac{S_y^2 - S_{yx}^2}{S_{yx}^2}$

E) $\dfrac{S_y^2 + S_{yx}^2}{S_y^2 + S_{yx}^2}$

12. Reqressiya tənliyi $y = a_0 + a_1 x$ şəklindədir. Əgər S_y^2 - y asılı dəyişənin qiymətlərinin dispersiyası, S_{yx}^2 - y asılı dəyişənin x sərbəst dəyişənə görə dispersiyasıdırsa, onda korrelyasiya əmsalı necə hesablanacaqdır?

A) $r = \sqrt{\dfrac{S_y^2}{S_{yx}^2}}$

B) $r = \sqrt{\dfrac{S_{yx}^2}{S_y^2}}$

C) $r = \sqrt{\dfrac{S_y^2 - S_{yx}^2}{S_{yx}^2}}$

D) $r = \sqrt{\dfrac{S_y^2 - S_{yx}^2}{S_y^2}}$

E) $r = \sqrt{\dfrac{S_y^2 + S_{yx}^2}{S_y^2 - S_{yx}^2}}$

13. Determinasiya əmsalı nəyi göstərir?

A) İqtisadi sistemin göstəriciləri arasındakı əlaqənin sıxlığını;
B) İqtisadi sistemin göstəricilərinin zamandan asılılığını;
C) İqtisadi sistemin bir göstəricisinin onunla bağlı olan digər göstəriciyə təsirinin gücünü;
D) İqtisadi sistemin göstəricilərinin sərbəstlik dərəcəsini;
E) İqtisadi sistemin göstəriciləri arasında avtokorrelyasiyanın olub-olmamasını.

14. Korrelyasiya əmsalı nəyi göstərir?

A) İqtisadi sistemin göstəriciləri arasındakı əlaqənin sıxlığını;
B) İqtisadi sistemin göstəricilərinin zamandan asılılığını;
C) İqtisadi sistemin bir göstəricisinin onunla bağlı olan digər göstəriciyə təsirin gücünü;
D) İqtisadi sistemin göstəricilərinin sərbəstlik dərəcəsini;

E) İqtisadi sistemin göstəriciləri arasında avtokorrelyasiyanın olub-olmamasını.

15. $y = a_0 + a_1 x$ **reqressiya tənliyi üçün korrelyasiya əmsalının işarəsi necə təyin edilir?**

A) Əmsalın işarəsi həmişə müsbətdir;
B) Əmsalın işarəsi həmişə mənfidir;
C) Əmsalın işarəsi tənliyin a_0 əmsalının işarəsi ilə üst-üstə düşür;
D) Əmsalın işarəsi tənliyin a_1 əmsalının işarəsi ilə üst-üstə düşür;
E) Əmsalın işarəsi tənliyin a_1 əmsalının işarəsinin əksidir.

16. Determinasiya əmsalı ilə korrelyasiya əmsalı arasında hansı asılılıq vardır?

A) Bu əmsallar arasında heç bir asılılıq yoxdur;
B) Korrelyasiya əmsalı determinasiya əmsalının kvadratı kimi hesablanır;
C) Korrelyasiya əmsalı determinasiya əmsalından yalnız işarə ilə fərqlənir;
D) Korrelyasiya əmsalı determinasiya əmsalının yarısına bərabərdir;
E) Korrelyasiya əmsalı determinasiya əmsalının kvadrat kökü kimi hesablanır.

17. Korrelyasiya əmsalının qiyməti mütləq qiymətcə hansı hüdudlar daxilində dəyişir:

A) $1 \le r \le 2$
B) $0 \le r \le 1$
C) $0 \le r \le +\infty$
D) $1 \le r \le +\infty$
E) $2 \le r \le 1$

18. Əgər korrelyasiya əmsalının işarəsi mənfidirsə, onda:

A) İqtisadi sistemin baxılan göstəriciləri arasında heç bir əlaqə yoxdur;
B) İqtisadi sistemin baxılan göstəriciləri arasında funksional əlaqə mövcuddur;
C) İqtisadi sistemin baxılan göstəriciləri arasında mənfi asılılıq mövcuddur;
D) İqtisadi sistemin baxılan göstəriciləri arasında müsbət asılılıq mövcuddur;

E) İqtisadi sistemin baxılan göstəriciləri arasında qeyri-xətti asılılıq mövcuddur.

19. Əgər korrelyasiya əmsalının işarəsi müsbətdirsə, onda iqtisadi sistemin baxılan göstəriciləri arasında:

A) Heç bir əlaqə yoxdur;
B) Xətti asılılıq mövcuddur;
C) Mənfi asılılıq mövcuddur;
D) Müsbət asılılıq mövcuddur;
E) Funksional asılılıq mövcuddur.

20. Əgər korrelyasiya əmsalının qiyməti sıfıra yaxındırsa, onda:

A) y və x dəyişənləri arasında sıx korrelyasiya asılılığı vardır;
B) y və x göstəriciləri arasında zəif korrelyasiya asılılığı vardır;
C) y və x göstəriciləri arasında funksional asılılıq vardır;
D) y və x göstəriciləri arasında xətti asılılıq vardır;
E) y və x göstəriciləri arasında qeyri-xətti asılılıq vardır.

21. Əgər korrelyasiya əmsalının qiyməti 1-ə yaxındırsa, onda:

A) y və x dəyişənləri arasında sıx korrelyasiya asılılığı vardır;
B) y və x göstəriciləri arasında zəif korrelyasiya asılılığı vardır;
C) y və x göstəriciləri arasında funksional asılılıq vardır;
D) y və x göstəriciləri arasında xətti asılılıq vardır;
E) y və x göstəriciləri arasında qeyri-xətti asılılıq vardır.

22. İstehsal funksiyaları dedikdə:

A) İstehsalla istehlak arasındakı əlaqəni əks etdirən modellər başa düşülür;
B) İstehsalın nəticələri ilə ona təsir edən əsas amillər arasındakı qarşılıqlı əlaqələri əks etdirən modellər başa düşülür;
C) Tələb və təklif modelləri başa düşülür;
D) Makroiqtisadiyyatın ayrı-ayrı funksional alt bölmələri arasındakı əlaqələri əks etdirən modellər başa düşülür;
E) İstehsalla daşınmalar arasındakı əlaqəni əks etdirən modellər başa düşülür.

23. Bir amilli istehsal funksiyası dedikdə:

A) Konkret bir məhsul növünün istehsalını əks etdirən funksiya başa

düşülür;

B) Bir texnoloji üsulla məhsul istehsalını əks etdirən funksiya başa düşülür;

C) Məhsul istehsalının bir istehsal amilinin sərfindən asılılığını əks etdirən funksiya başa düşülür;

D) Bir istehsalçı ilə bir istehlakçı arasındakı əlaqəni əks etdirən funksiya başa düşülür;

E) Bir ehtiyatın digərindən asılılığını əks etdirən funksiya başa düşülür.

24. Çoxamilli istehsal funksiyası dedikdə:

A) Bir neçə istehsal ehtiyatının sərfi və buraxılan məhsulun həcmi arasındakı asılılığı müəyyən edən çoxdəyişənli funksiya başa düşülür;

B) Bir neçə istehsal ehtiyatından istifadə əsasında konkret bir məhsul istehsalının mümkünlüyünü əks etdirən funksiya başa düşülür;

C) Bir istehsal ehtiyatından istifadə etməklə neçə növ məhsul istehsal etməyin mümkünlüyünü müəyyən edən funksiya başa düşülür;

D) Bir istehsalçının bir neçə istehlakçı ilə qarşılıqlı əlaqəsini əks etdirən çoxdəyişənli funksiya başa düşülür;

E) Konkret bir ehtiyatın qalan bütün ehtiyatlardan asılılığını əks etdirən funksiya başa düşülür.

25. Aşağıdakı funksiyalardan hansı Kobb-Duqlas funksiyası ola bilər:

A) $Y = \alpha_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}$

B) $Y = \alpha_0 (K^{\alpha_1} + L^{\alpha_2})$

C) $Y = \alpha_1 K^{\alpha_2} L$

D) $Y = \alpha_1 K \ L^{\alpha_2}$

E) $Y = \alpha_0 K^{\alpha_1 + \alpha_2} L^{\alpha_1 - \alpha_2}$

FƏSİL 13

İQTİSADİ QEYRİ-MÜƏYYƏNLİK VƏ RİSK ŞƏRAİTİNDƏ OPTİMAL QƏRARLARIN QƏBULU MODELLƏRİ

13.1. Oyunlar nəzəriyyəsi – münaqişəli vəziyyətlərin riyazi nəzəriyyəsi kimi

İqtisadi sistemlərin səmərəli davranışı və inkişafının təmin edilməsi idarəetmə qərarlarının qəbul edilməsi yolu ilə həyata keçirilir. Bu sistemlərin idarə edilməsi təcrübəsi göstərir ki, hər bir idarəetmə qərarlarının qəbul edilməsi münaqişəli vəziyyətdə aparılır. Bu münaqişənin yaranmasının əsas səbəbi odur ki, iqtisadi sistemin bir sıra göstəricilərinin qiymətlərinin yaxşılaşdırılması digər göstəricilərin qiymətlərinin pisləşməsi hesabına təmin edilir. Məsələn, müəssisənin mənfəətinin artırılması istehsalın həcminin artırılması hesabına təmin edilə bilər. Bu halda isə müəssisənin xərcləri artır. Deməli, müəssisənin mənfəətinin artması (yaxşılaşma) müəssisənin xərclərinin artması (pisləşmə) hesabına təmin edilir. Nəticədə bu göstəricilər öz aralarında özünəməxsus münaqişəyə girirlər. Münaqişə bir tərəfin udması və digər tərəfin uduzması ilə başa çatır. İqtisadiyyatda belə münaqişəli vəziyyətlərə misal olaraq məhdud investisiyaların alternativ məqsədlər arasında bölüşdürülməsi ilə əlaqədar olan münaqişələri, bazarda istehsalçılarla istehlakcılar arasında olan münaqişələri, bazar konyukturası ilə qiymət sistemi arasında olan münaqişələri və s. göstərmək olar

İqtisadi sistemlər səviyyəsində münaqişələrin yaranmasına çoxsaylı faktorlar təsir göstərir və bu faktorlardan bəziləri obyektiv, bəziləri subyektiv, bəziləri isə təsadüfi xarakter daşıyır. Təsiredici faktorların çoxsaylı olması münaqişəli vəziyyətlərin təhlilində böyük çətinliklər doğurur. Odur ki, bir sıra ikinci dərəcəli faktorların təsirini nəzərə almamaq yolu ilə prosesi sadələşdirmək, daha doğrusu onun riyazi modelini tərtib etmək lazım gəlir. *Hər bir münaqişəli vəziyyətin belə formal-riyazi modelinə* ***oyun*** *deyilir*. Belə oyunları təhlil etmək üçün ekonometrikanın xüsusi bölməsi olan oyunlar nəzəriyyəsindən istifadə edilir. Beləliklə ***oyunlar nəzəriyyəsi- münaqişəli vəziyyətlərin riyazi nəzəriyyəsidir***. Bu nəzəriyyənin məqsədi münaqişə iştirakçıları üçün elə təkliflər hazırlamaqdan ibarətdir ki, bu təkliflərə görə udan

tərəf bacardıqca çox udsun, uduzan tərəf isə bacardıqca az uduzsun.

Münaqişə iştirakçıları şərti olaraq ***oyunçu*** adlandırılır. Əgər oyunda iki tərəfin mənafeyi toqquşursa , onda belə oyuna ***iki şəxsin oyunu*** deyilir. Əgər münaqişə iştirakcılarının sayı ikidən coxdursa, onda oyun ***çox şəxsin oyununa*** çevrilir. Hər bir çox şəxsin oyununda tərəflər öz mənafelərinin bəzi məqamlarını uzlaşdırmaqla koalisiya (birlik) yarada bilirlər. Bu yolla hər bir çox şəxsin oyununu iki şəxsin oyununa gətirmək olur.

İki şəxsin oyunu timsalında oyunlar nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarını nəzərdən keçirək. Bu anlayışlara misal olaraq oyunun qaydası anlayışını, oyunçuların şəxsi və təsadüfi gedişləri anlayışını, oyunçuların strategiyaları anlayışını, oyunun aşağı və yuxarı qiyməti anlayışını, ödəmə matrisi anlayışını və s. göstərmək olar.

Tutaq ki, oyunda mənafeləri bir-birinə zidd olan iki oyunçu - A və B iştirak edir. Oyunun özü isə həmin oyunçular tərəfindən müəyyən qaydaları gözləməklə icra edilən ardıcıl davranışlardan ibarətdir.

Oyunun qaydası dedikdə oyunçuların mümkün davranışları haqqında, əks tərəfin cavab davranışı haqqında və bu davranışların verəcəyi nəticələr haqqında informasiyaların məcmuyu başa düşülür.

Oyunçuların davranışları ***gediş*** adlanır. Bu gedişlər onların seçilməsi qaydasından asılı olaraq şəxsi və təsadüfi gedişlərə ayrılırlar.

Oyunçunun ***şəxsi gedişi*** dedikdə oyunun qaydaları ilə nəzərdə tutulmuş elə bir gediş başa düşülür ki, bu gedişi oyunçunun özü seçir və icra edir. ***Təsadüfi gediş*** dedikdə isə oyunun qaydaları ilə nəzərdə tutulmuş elə bir gediş başa düşülür ki, bu gedişi oyunçunun özü icra etsə də, onun özü tərəfindən deyil, müəyyən təsadüfi seçmə mexanizmi tərəfindən seçilir. Əgər oyunda təsadüfi gedişlərdən istifadə nəzərdə tutulmuşdursa, bu gedişlərin verəcəyi nəticələrin ehtimallarının paylanması məlum olmalıdır.

Oyunçunun strategiyası dedikdə oyunda yaranmış vəziyyətdən asılı olaraq ona özünün bu və digər gedişini seçməyi tövsiyə edən qaydaların məcmuyu başa düşülür. Deməli, oyunçunun gedişlərinin sayı onun strategiyalarının sayına bərabərdir. Strategiya - davranış variantının seçilməsi haqqında tövsiyə, məsləhətdirsə, gediş – bu davranış variantının reallaşdırılmasıdır.

Oyunlar nəzəriyyəsinin məqsədi oyunçular üçün optimal strategiyalar tapmaqdan ibarətdir. ***Optimal strategiya*** dedikdə elə bir strategiya başa düşülür ki, bu strategiya oyunun çoxsaylı təkrarlanması zamanı udan oyunçuya maksimal mümkün orta uduş, uduzan oyunçuya isə minimal mümkün orta uduzmanı təmin etsin.

13.2. Matris oyunlarının riyazı aparatı. Minimaks prinsipi

Əgər oyunda bir oyunçunun uduşu tamamilə digərinin uduzmasına bərabərdirsə, onda belə oyuna ***sıfır məbləğli oyun və ya matris oyunu*** deyilir. İki şəxsin matris oyunu timsalında oyunlar nəzəriyyəsində istifadə olunan riyazi aparatı nəzərdən keçirək.

Tutaq ki, oyunda mənafeləri bir-birinə zidd olan A və B oyunçuları iştirak edir. Bu halda oyun A və B oyunçuları tərəfindən oyunun qaydaları müstəvisində icra edilən ardıcıl davranışlardan (reallaşdırılan strategiyalardan) ibarət olacaqdır. Tutaq ki, A oyunçusunun m sayda $A_1, A_2, ..., A_m$ şəxsi strategiyaları var, B oyunçusu isə n sayda $B_1, B_2, ..., B_n$ şəxsi strategiyalarla ona cavab verə bilər.

Belə oyuna ***iki şəxsin*** $(m \times n)$ ***ölçülü oyunu*** deyilir. Əgər m və n sonlu ədədlərdirsə, oyuna sonlu oyun, əks halda isə sonsuz oyun deyilir.

Tutaq ki, A oyunçusu özünün A_i şəxsi strategiyasını tətbiq edir. B oyunçusu isə ona B_j şəxsi strategiyası ilə cavab verir. Oyunda $\{A_i, B_j\}$ strategiya cütünün verilməsi nəticəsində bir tərəfin udması və digərinin uduzmasını əks etdirən a_{ij} ədədini birqiymətli müəyyən etmək olur. Əgər $a_{ij} > 0$ olarsa, bu kəmiyyəti A udur, B uduzur. $a_{ij} < 0$ olduqda isə əksinə, B udur, A uduzur.

Oyunlar nəzəriyyəsinin konsepsiyasına görə A oyunçusu həmişə udan tərəfdir. Odur ki, $a_{ij} < 0$ olduqda A oyunçusunun mənfi udduğu fərz olunur.

Tutaq ki, baxılan oyunda oyunun qaydaları ilə müəyyən edilən bütün mümkün $\{A_i, B_j\}$ strategiya cütləri üçün a_{ij} – ın qiymətləri məlumdur. Bu qiymətləri aşağıdakı cədvəl formasında göstərək (cədvəl 13.1):

Cədvəl 13.1

B_j / A_i	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…		…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

Bu cədvələ oyunun ***ödəmə matrisi*** deyilir. Bu matrisdə sətirlər A-nın mümkün strategiyalarına, sütunlar isə B-nin mümkün strategiyalarına uyğun gəlir. Ödəmə matrisinin qurulması kifayət qədər mürəkkəb proses olsa da, hər bir sonlu oyun üçün bu matrisi qurmaq həmişə mümkün olur.

Ödəmə matrisinin qurulmasına aid aşağıdakı adi misalı nəzərdən keçirək.

►**Məsələ 13.1.** «Axtarış» oyununa baxaq. İki A və B oyunçusunun iştirak etdiyi bu oyunun məzmunu ondan ibarətdir ki, A oyunçusu gizlənir, B oyunçusu isə onu axtarır. A oyunçusu yalnız iki yerdə gizlənə bilər. Gizlənmək yerlərinin seçilməsi A oyunçusunun özündən asılıdır. Əgər A oyunçusu birinci daldalanacağı seçirsə, onda deyəcəyik ki, o A_1 strategiyasını seçib. İkinci daldalanacaq seçildikdə isə, A oyunçusunun A_2 strategiyasını seçdiyini nəzərdə tutacağıq. Uyğun olaraq B oyunçusu A oyunçusunu birinci və ikinci daldalanacaqda axtara bilər. Deməli, B oyunçusunun ixtiyarında da B_1 və B_2 olmaqla iki strategiya vardır.

Oyunun aşağıdakı şərtini müəyyən edək. Əgər B oyunçusu A oyunçusunu tapsa, onda A oyunçusu ona bir manat verir, tapmasa, B oyunçusunun özü bir manat verməlidir. Beləliklə, A oyunçusu $+1$ manat və ya -1 manat uda bilər (sonuncu halda o bir manat uduzur). B oyunçusu isə +1 manat və ya -1 manat uduza bilər (sonuncu halda o 1 manat udmuş olur). Bu oyun üçün ödəmə matrisi quraq. A və B oyunçularından hər birinin ixtiyarında yalnız iki strategiya olduğundan, bu oyun 2×2 oyunu olacaq. Oyunun ödəmə matrisi aşağıdakı şəkildədir (cədvəl 13.2):

Cədvəl 13.2

A \ B	B_1	B_2
A_1	-1	+1
A_2	+1	-1

Cavab: Baxılan 2×2 oyunun ödəmə matrisi aşağıdakı şəkildədir:

$$a=\begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \blacktriangleleft$$

Yuxarıda nəzərdən keçirdiyimiz iki şəxsin $m\times n$ ölçülü oyununa qayıdaq. Tutaq ki, baxılan oyunda A və B oyunçuları üçün mümkün strategiyalar içərisində ən yaxşısını tapmaq tələb edilir. Əvvəlcə bu məsələni A oyunçusu üçün həll edək. Tutaq ki, A özünün A_i şəxsi strategiyasını tətbiq edir. Onda B oyunçusu ona elə bir B_j şəxsi strategiyası ilə cavab verəcək ki, A-nın gözlənilən uduşu minimum olsun. Bu uduşu α_i işarə etsək alarıq:

$$\alpha_i=\min_j a_{ij}$$

A oyunçusunun şəxsi strategiyaları dəyişdikdə α_i kəmiyyətləri də dəyişəcəkdir və təbii ki, A özünün elə bir şəxsi strategiyasına üstünlük verəcəkdir ki, bu strategiyaya görə α_i kəmiyyəti maksimum olsun. Bu uduşu α ilə işarə etsək, alarıq:

$$\alpha=\max_i(\alpha_i)=\max_i\min_j a_{ij}$$

α kəmiyyətinə ***oyunun aşağı qiyməti və ya*** A ***oyunçusunun maksimin uduşu*** deyilir. A oyuncusuna α uduşunu təmin edən şəxsi strategiyaya onun maksimin strategiyası deyilir.

İndi isə oyunu B oyunçusunun mənafeyindən öyrənək və onun üçün mümkün strategiyalardan ən yaxşısını tapmağa çalışaq. Əgər yuxarıda apardığımız mülahizələrə analoji olan mülahizələr aparsaq, alarıq:

$$\beta_j = \max_i a_{ij}$$

$$\beta = \min_j(\beta_j) = \min_j \max_i a_{ij}$$

β kəmiyyətinə ***oyunun yuxarı qiyməti və*** B ***oyunçusunun minimaks uduzması*** deyilir. B oyunçusuna β uduzmasını təmin edən şəxsi strategiyaya isə bu oyunçunun minimaks strategiyası deyilir . Bu strategiya B oyunçusunun ən ehtiyatlı strategiyasıdır. Çünki həmin strategiya B-yə A-nın düzgün davranması zamanı β-ya bərabər, ixtiyari davranışı zamanı isə β-dan böyük olmayan uduzma təmin edir.

Oyunçulara oyunda özlərinin maksimin və minimaks strategiyalarından istifadə etməyi tövsiyə edən prinsipə oyunlar nəzəriyyəsində ***minimaks prinsipi*** deyilir. Bu prinsipin əsasını oyunu hər iki oyunçunun mənafeyinə uyğun həll etmək istəyi təşkil edir.

Əgər oyunda $\alpha = \beta$ olarsa, onda belə oyuna ***düyün nöqtəli oyun*** deyilir. Düyün nöqtəli oyunların həlli xalis strategiyalar şəklində mövcud olur. Belə ki, maksimin strategiya A-nın, minimaks strategiyası isə B-nin optimal strategiyası olur. Əgər $\alpha \neq \beta$-sa, daha doğrusu oyunda düyün nöqtəsi yoxdursa, onda belə oyunun həlli xalis strategiyalar şəklində mövcud deyil və qarışıq strategiyalara keçmək lazımdır.

13.3. Qarışıq strategiyaların tətbiqi. Əsas teoremlər

Tutaq ki, iki şəxsin matris oyununda A oyunçusu özünün şəxsi strategiyalarını seçən zaman yalnız ona məlum olan müəyyən bir qanunauyğunluqdan istifadə edir. O bu qanunauyğunluğu B oyunçusundan gizlətməyə çalışsa da B tez ya gec bu qanunauyğunluğu aşkar edəcək və ona uyğunlaşaraq daima A-nı udacaqdır. Odur ki, A üçün vəziyyətdən yeganə çıxış yolu öz şəxsi strategiyalarını seçən zaman heç bir qanunauyğunluğa riayət etməmək, yəni bu strategiyaları təsadüfi

seçməkdır. Onda B artıq oyuna uyğunlaşa bilmir və təbii ki, o da öz şəxsi strategiyalarını təsadüfi olaraq seçməli olur.

Yuxarıda nəzərdən keçirdiyimiz "Axtarış" oyununa qayıdaq (**Məsələ 13.1**). Fərz edək ki, birinci halda A oyunçusu A_1 strategiyasını seçib, daha doğrusu birinci daldalanacaqda gizlənib. Əgər B oyunçusu B_1 strategiyasını seçərsə, onda o A oyunçusunu tapır və sonuncu bir manat uduzur (cədvəl 13.2-də A_1 -ci sətir və B_1 -ci sütununun kəsişməsindəki xana), daha doğrusu B oyunçusu A oyunçusundan bir manat udur. Fərz edək ki, oyun davam edir. Əgər bu halda A oyunçusu daima eyni bir strategiyanı seçirsə, (məsələn, A_1 strategiyasını) onda B oyunçusu əvvəlki vəziyyəti yadda saxlayaraq, şəraitə uygunlaşır və hər dəfə A oyunçusundan bir manat udur. Əgər A oyunçusu daima A_2 strategiyasını seçsə və ya müəyyən qanunauyğunluq üzrə A_1 və A_2 strategiyalarını növbələşdirirsə, yenə də B oyunçu analoji olaraq udacaq. Çünki A oyunçusu özünün A_1 və A_2 strategiyalarının seçilməsindəki qanunauyğunluğu B oyunçusundan gizlətməyə çalışsa da müəyyən vaxtdan sonra B oyunçusu bu qanunauyğunluğu tapacaq, öz strategiya seçimini bu qanunauyğunluq üzərində quracaq və daima udacaq. Bu halda A oyunçusunu yəqin uduzmaqdan mühafizə edən yeganə üsul ondan ibarətdir ki, A_1 və A_2 strategiyalarının seçilməsində heç bir qanunauyğunluq olmasın, daha doğrusu, bu strategiyalar təsadüfi şəraitdə seçilsin. Məsələn, dəmir pulu göyə atmaqla strategiya seçmək olar. Əgər pulun rəqəm olan üzü düşürsə, onda A_1 strategiyası seçilir, əks halda A_2 strategiyası seçilir. Bu halda B oyunçusu öz fəaliyyətini A oyunçusunun fəaliyyətinə uyğunlaşdırmaqdan məhrum olur və o da özünün B_1 və B_2 strategiyalarının seçilməsini təsadüfi şəkildə qurmaq məcburiyyətində qalır.

Oyuna bu cür yanaşma *qarışıq strategiyalardan istifadə* adlanır. Beləliklə, oyunçuların qarışıq strategiyaları onların ayrı-ayrı xalis strategiyalarının təsadüfi növbələşməsi yolu ilə əldə edilir. Bu halda qarışıq strategiyaların əmələ gəlməsində xalis strategiyalardan istifadə ehtimalları anlayışından istifadə edilir. Yuxarıda nəzərdən keçirdiyimiz «Axtarış» oyununda A_1 və A_2 strategiyalarının ehtimallarının bir-birinə bərabər olması və 0,5 olması qəbul edilirdi. Çoxsaylı xalis strategiyalara malik daha mürəkkəb oyunlarda bu ehtimalları müəyyən etmək, daha doğrusu, qarışıq strategiyalarda xalis strategiyalardan istifadənin

ehtimallarının paylanmasını müəyyən etmək lazım gəlir.

Daha bir misala baxaq.

►**Məsələ 13.2.** Fərz edək ki, bazarda satışa çoxdan daxil olan və alıcıların tələbi yaxşı öyrənilmiş 3 köhnə mal - A_1, A_2, A_3 malları vardır. Müəyyən zaman momentindən başlayaraq bazara bu köhnə malları əvəz edə bilən B_1, B_2, B_3 malları daxil olmağa başlayır. Başqa sözlə desək, bu yeni mallar «köhnə» A_1, A_2, A_3 mallarına olan tələbi azaldır. Tələbin əvvəlcədən öyrənilməsi ilə əlaqədar olaraq ticarət şəbəkəsinə yeni malların daxil olması zamanı «köhnə malların» satış ehtimalları müəyyən edilməlidir. Oyunun şərtlərinin aşağıdakı ödəmə matrisi şəklində göstərildiyini fərz edək (cədvəl 13.3):

Cədvəl 13.3

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	0,5	0,6	0,8
A_2	0,9	0,7	0,8
A_3	0,7	0,5	0,6

Məsələnin şərtlərinin bu şəkildə yazılışı o deməkdir ki, əgər satışa yeni B_1 malı buraxılarsa, onda A_1 malına olan tələb bu mala B_1 malı satışa çıxarılana qədər olan tələbin yalnız 0,5 hissəsi qədər olacaqdır. Uyğun olaraq A_2 malına olan tələb əvvəlkinin 0,9 hissəsi qədər, A_3 malına olan tələb əvvəlkinin 0,7 hissəsi qədər olacaqdır. B_2 və B_3 mallarının satışa buraxılması zamanı da analoji mülahizələr edilməlidir. Bizim məqsədimiz bazara köhnə A və yeni B mallarının buraxılmasında elə strategiya seçməkdən ibarətdir ki, «köhnə» və «yeni» malların satışında optimal nisbət gözlənilsin (bu oyun ədəbiyyatlarda "köhnə və yeni mallar oyunu" adlandırılır).

Bu məsələ həll edilərkən (oyunun həlli tapılarkən) aşağıdakı kimi mühakimə irəli sürəcəyik: A və B malları əks mənafeli oyunçular kimi çıxış edirlər: A oyunçusunun itirdiyi tələbi B oyunçusu qazanır.

Əvvəlcə A oyunçusunun bütün mümkün strategiyalarını nəzərdən

keçirək. A oyunçusunun A_1 strategiyasına onun rəqibi $B - B_1, B_2$ və B_3 strategiyalarından hər hansı biri ilə cavab verə bilər (cədvəl 13.3). Aydındır ki, B oyunçusu B_1 strategiyasını seçsə, onun üçün daha əlverişli şərait yaranar. Belə ki, bu halda o A oyunçusundan tələbin yarısını götürür. A_2 strategiyasına cavab olaraq B oyunçusu B_2 strategiyası ilə cavab verməli və A oyunçusunun tələbinin 0,3 hissəsini özünə götürməlidir. A_3 strategiyasına da B oyunçusu B_2 strategiyası ilə cavab verməli və tələbin 0,5 hissəsini götürməlidir.

İndi isə B oyunçusunun tərəfinə keçək. Əgər o, B_1 strategiyasını seçirsə, onda A oyunçusu bu strategiyaya A_1, A_2 və A_3 strategiyaları ilə cavab verə bilər. Aydındır ki, bu şəraitdə A_2 strategiyası daha əlverişlidir, çünki bu strategiya A oyunçusuna əvvəlki tələbin 0,9 hissəsini qoruyub saxlamağa imkan verir. B_2 strategiyasına A oyunçusu yenə də A_2 strategiyası ilə cavab verməli (tələbin 0,7 hissəsi qorunur), B_3 strategiyası şəraitində isə, A_1 və ya A_2 strategiyasını seçməlidir (bu strategiyaların hər ikisi, A oyunçusu üçün eyni bir nəticəni- tələbin 0,8 hissəsinin saxlanmasını təmin edir).

Beləliklə, A və B oyunçularının fəaliyyəti rəqibə üstünlük qazanmağa mane olmağa yönəldilmişdir. Maraqlıdır, onlar arasında elə bir razılıq ola bilməzmi ki, daha doğrusu elə bir A_i və B_j strategiyaları seçmək olmazmı ki, bu strategiyalar verilmiş oyunun şərtləri daxilində hər iki oyunçu üçün əlverişli olsun? Doğrudan da, A_2 və B_2 strategiyaları hər iki tərəf üçün optimal strategiyadır. A oyunçusuna A_2 strategiyasından əl çəkmək əlverişli deyil, çünki onun ən böyük uduşu məhz bu strategiya zamanı təmin edilir. B oyunçusunun isə A oyunçusu tərəfindən A_2 strategiyasının seçilməsi zamanı B_2 strategiyasını seçməkdən başqa çarəsi olmur, çünki B_2 strategiyasından başqa qalan hər iki strategiya onun uduzmasını artırır və uyğun olaraq A oyunçusunun uduşunun artmasına gətirib çıxarır (A_2B_1 strategiyasında A oyunçusu 0,9 qədər, A_2B_3 strategiyasında 0,8 qədər, A_2B_2 strategiyası zamanı isə, yalnız 0,7 qədər udur). A_2B_2 strategiyaları haqqında əldə edilən razılıq bir növ tarazlıq vəziyyəti olur. Əgər A oyunçusu A_2 strategiyasını seçərsə, onda B oyunçusu məcburən B_2

strategiyasını seçməli, B oyunçusu B_2 strategiyasını seçdikdə isə, A oyunçusu hökmən A_2 strategiyasını seçməlidir.

Cavab: $\{A_2;\ B_2\}$ **strategiya cütü oyunda tarazlıq yaratdığı üçün yeni malların daxil olması zamanı köhnə malların satış ehtimalı 0,7-ə bərabər olacaqdır.** ◄

Yuxarıda göstərdiyimiz misaldakı xüsusiyyətlərə malik olan strategiyalar optimal strategiyalar adlanır və oyunun həllini əmələ gətirirlər. Oyunlar nəzəriyyəsinin məqsədi müxtəlif konkret məsələlər üçün oyunun həllinin tapılması metodlarının hazırlanmasından ibarətdir.

Oyunun həllinin tapılması qaydalarını ümumiləşdirmək üçün fərz edək ki, (13.1) ödəmə matrisi ilə verilmiş iki şəxsin $m \times n$ ölçülü oyununa baxılır və oyunda $\alpha \neq \beta$ -dır, yəni düyün nöqtəsi yoxdur və oyunun həlli qarışıq strategiyalar şəklində tapılmalıdır.

A və B oyunçularının qarışıq strategiyalarını aşağıdakı kimi işarə edək:

$$S_A = S_A(p_1, p_2, ..., p_m)$$
$$S_B = S_B(q_1, q_2, ..., q_n)$$

Burada $p_i (i = \overline{1,m})$ A oyunçusunun qarışıq strategiyasında onun $A_i (i = \overline{1,m})$ şəxsi strategiyalarının iştirak etməsinin ehtimalları, $q_j (j = \overline{1,n})$ isə B oyunçusunun qarışıq strategiyasında onun $B_j (j = \overline{1,n})$ şəxsi strategiyalarının iştirak etməsinin ehtimallarıdır.

Oyunda oyunçuların bütün mümkün davranışları nəzərə alındığı üçün bu davranışlar hadisələrin tam qrupunu əmələ gətirir və buna görə də onların ehtimallarının cəmi vahidə bərabərdir:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \end{cases}$$

Oyunlar nəzəriyyəsində qarışıq strategiyalar haqqında aşağıdakı teorem isbat edilir:

Fon-Neyman teoremi: *Hər bir matris oyununun qarışıq strategiyalarda həlli mövcuddur.*

Bu teoremin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, hər bir matris oyununda

oyunun aşagı α və yuxarı β qiymətləri arasında elə bir γ qiyməti mövcuddur ki, $\alpha \le \gamma \le \beta$ şərti ödənir. γ -ya ***oyunun qiyməti və ya həlli*** deyilir.

Oyunçuların optimal qarışıq strategiyalarının tərkibinə sıfırdan böyuk ehtimallarla daxil olan şəxsi strategiyalara onların ***aktiv strategiyaları*** deyilir. Oyunlar nəzəriyyəsində aktiv strategiyalar haqqında aşağıdakı teorem isbat olunur.

Teorem: *Əgər iki şəxsin matris oyununda oyunçulardan biri özünün optimal qarışıq strategiyasını tətbiq edirsə, onda bu oyun həmin oyunçu üçün γ -dan pis olmayan nəticə ilə bitəcəkdir.*

Bu teoremin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, əgər oyunda oyunçulardan biri özünün optimal qarışıq strategiyasını tətbiq edirsə, onda digər oyunçu oyunun gedişində artıq heç bir dəyişiklik edə bilməz və hökmən özünün optimal qarışıq strategiyasından istifadə etməlidir.

İndi isə «Axtarış» oyununun həllini tapmaq üçün qarışıq strategiyalardan necə istifadə olunduğuna baxaq. Bu oyunda hər bir oyunçunun yalnız iki şəxsi strategiyası var: A_1, A_2 və B_1, B_2. Bu şəxsi strategiyalardan qarışıq strategiyalar düzəldək:

$$S_A = S_A(p_1,\ p_2) \qquad \text{və} \qquad S_B = S_B(q_1,\ q_2)$$

Burada $p_1,\ p_2$ və q_1, q_2 A və B oyunçuları tərəfindən özlərinin xalis strategiyalarından istifadə ehtimallarıdır.

Bu halda ödəmə matrisi aşağıdakı kimi olur (cədvəl 13.4):

Cədvəl 13.4

A \ B	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Aktiv strategiyalar haqqında teoremə nəzərən demək olar ki, A oyunçusu p_1, p_2 ehtimalları ilə A_1 və A_2 strategiyalarından istifadə etdikdə B oyunçusu özünün xalis strategiyalarından ixtiyarisini tətbiq edə bilərsə, bu halda A oyunçusunun uduşu həmişə oyunun qiymətinə

bərabər olacaqdır. Buradan aşağıdakı iki tənlik alınır:

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \gamma$$

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \gamma$$

Birinci tənliklərdə nəzərə alınıb ki, B oyunçusu B_1 strategiyasını seçir, ikinci tənlikdə isə onun B_2 strategiyasını seçdiyi nəzərə alınıb. $p_1 + p_2 = 1$ şərtini nəzərə alsaq, alarıq:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad p_2 = 1 - p_1$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad p_1 = 1 - p_2$$

$$\gamma = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Analoji olaraq B oyunçusu üçün alırıq:

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \gamma$$

$$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = \gamma$$

$q_1 + q_2 = 1$ şərtini nəzərə alsaq, alarıq:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad q_2 = 1 - q_1$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad q_1 = 1 - q_2$$

$$\gamma = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21_2}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

«Axtarış» oyunu üçün uduşların qiymətləri aşağıdakı kimidir:

$$a_{11} = -1, a_{12} = 1, a_{21} = 1, a_{22} = -1$$

Bu qiymətləri alınmış ifadələrdə nəzərə alsaq, alarıq:

$$p_1 = 0{,}5, p_2 = 0{,}5, q_1 = 0{,}5, q_2 = 0{,}5$$

Onda A və B oyunçularının optimal qarışıq strategiyaları aşağıdakı kimi olacaqdır:

$$S_A^* = S_A^*(0{,}5;\ 0{,}5) \qquad S_B^* = S_B^*(0{,}5;\ 0{,}5)$$

Deməli, oyunçuların optimal strategiyası xalis strategiyaların 0,5 ehtimalı ilə növbələşməsindən ibarətdir. Bu halda orta uduş sıfıra bərabər olacaq. Beləliklə, dəqiq həll əvvəlcədən optimal strategiyalar

haqqında aldığımız nəticənin doğru olduğunu sübut etdi.

13.4. Oyunların sadələşdirilməsi. Koalisiya anlayışı

Əgər oyunda düyün nöqtəsi yoxdursa, onda m və n-nin kifayət qədər böyük qiymətlərində məsələnin həllini tapmaq çətin olur. Odur ki, məsələni həll edərkən, oyunun sədələşdirilməsinin müxtəlif metodlarından istifadə etmək faydalı olur.

Sadələşdirmənin ən geniş yayılmış metodu əlverişsiz və bir-birini təkrarlayan strategiyaların atılmasıdır.

►**Məsələ 13.3. Oyunun sədələşdirilməsinə misal olaraq aşağıdakı ödəmə matrisi ilə verilmiş oyunu nəzərdən keçirək** (cədvəl 13.5):

Cədvəl 13.5

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_2	0	2	3	2
A_3	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

Cədvəl 13.5-ki ödəmə matrisindən göründüyü kimi, A_1 strategiyası A_3 strategiyasını təkrar edir. Odur ki, bu strategiyalardan birinin üzərindən xətt çəkmək olar. A_3 strategiyasının üzərindən xətt çəkək. A_1 və A_2 strategiyalarını hədlər üzrə müqayisə etsək, görərik ki, A_2 strategiyasının elementləri A_1 strategiyasının elementlərindən böyük deyil.

Deməli, A_2 strategiyası da A oyunçusu üçün tamamilə əlverişsiz-

dir. A_2 strategiyasını da silsək, oyunun ödəmə matrisi aşağıdakı şəklə düşər: (cədvəl 13.6)

Cədvəl 13.6

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

İndi isə, B oyunçusunun mövqeyində duraq və mülahizələrimizi davam etdirək. Bu oyunçu üçün B_1 və B_3 strategiyaları B_2 və B_4 strategiyalarından daha əlverişsizdir. Çünki B oyunçusu B_1 və ya B_3 strategiyasını tətbiq edərsə, A oyunçusu 4 vahid udmaq imkanına malik olur. B oyunçusu B_2 və ya B_4 strategiyası tətbiq etdikdə isə, A-nın uduşu 3 vahiddən çox olmur. Odur ki, B_1 və B_3 strategiyalarını silirik. Nəticədə ilkin 4×4 oyunu 2×2 oyununa çevrilir ki, sonuncunun təhlili əvvəlki oyunla müqayisədə əhəmiyyətli dərəcədə sadə olur (cədvəl 13.7):

Cədvəl 13.7

$A \backslash B$	B_2	B_4
A_1	2	3
A_4	3	0

Cavab: Baxılan 4×4 ölçülü oyun sadələşdirilərək 2×2 ölçülü oyuna gətirildi və bu oyunun ödəmə matrisi $a=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ şəklindədir. ◄

Beləliklə, istənilən $m \times n$ olçülü oyunun həlli prosesində aşağıdakı fəalliyyət ardıcıllığını gözləmək məqsədəuyğundur:

- *Bütün α_i və β_j qiymətlərini tapmaq və oyunun düyün nöqtəsinin olub-olmamasını təyin etmək lazımdır. Əgər belə bir nöqtə varsa (yəni oyunun yuxarı qiyməti aşağı qiymətinə bərabərdirsə), onda məsələ həll edilmişdir;*

- *Əgər düyün nöqtəsi yoxdursa, onda oyunu sadələşdirməyə çalışmaq lazımdır. Bunun üçün ödəmə matrisinin sətir və sütunları hədd-hədd müqayisə edilir və təkrarlanan və aşkar əlverişsiz strategiyalar silinir;*

- *Bütün mümkün sədələşdirmələr yerinə yetirildikdən sonra ümumi qaydalarla məsələnin həllinə başlamaq lazımdır.*

Biz indiyə qədər yalnız iki şəxsin oyununu, yəni - A və B oyunçusunun oyununu nəzərdən keçirirdik. Lakin ümumi halda oyunda 2 deyil, daha çox, yəni A, B, C, D..... və s. oyunçu iştirak edə bilər. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, bu cür oyunlar N oyunçunun oyunu və ya N şəxsin oyunu adlanır. N oyunçunun oyununu həll etmək 2 oyunçunun oyununu həll etməkdən qat-qat çətindir. Odur ki, bu cür oyunları müxtəlif üsullarla sadələşdirmək əlverişlidir.

N oyunçunun oyununun sədələşdirilməsinin ən geniş yayılmış yolu koalisiyaların yaradılmasıdır. Bu zaman oyunçular birləşərək 2 koalisiya yaradırlar. Məsələn, oyunda $A, B, C, D, E - 5$ oyunçu iştirak edirsə $(N = 5)$ onda biz A, B və C, D, E oyunçularından koalisiya yaradaraq onların mənafelərini müvəqqəti birləşdiririk. Bu halda koalisiyalar ayrı-ayrı oyunçular kimi çıxış edir. Nəticədə 5 oyunçunun oyunu 2 oyunçunun - (A, B) və (C, D, E) oyunçularının oyununa gətirilir. Bu oyunçulardan hər biri rəqiblə oyununda öz uduşunu maksimumlaşdırmağa çalışır. Bu cür oyunda uduş müəyyən edildikdən sonra koalisiyalar parçalanır və oyun koalisiya daxilində başlanır. Tam uduş bu oyunda koalisiya iştirakçıları arasında bölüşdürülür. Bu zaman yenidən koalisiyalar yarana bilər. Məsələn, C, D, E üç oyunçunun oyununda C, D oyunçuları E oyunçusuna qarşı koalisiya yaradırlar. Bu oyunun həllindən sonra C, D oyunçularının koalisiyası yenidən dağılır və oyun artıq C və D oyunçuları arasında gedir. Beləliklə, son nəticədə 5 şəxsin oyunu ardıcıl olaraq 2 şəxsin oyunlarına gətirilməklə həll edilmiş olur və hər bir oyunçunun uduşu məlum olur. Göründüyü kimi, 5 şəxsin oyununu sadələşdirərək 2 oyunçunun oyununa gətirmək olar.

13.5. Oyunun Qrafik üsulu ilə həll alqoritmi

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, əgər 2 şəxsin matris oyununda $\alpha \neq \beta$ olarsa (daha doğrusu oyunda düyün nöqtəsi yoxdursa), onda belə oyunun həlli qarışıq strategiyalar şəklində mövcud olur. Oyunun qarışıq strategiyalarda həlli həndəsi baxımdan interpretasiya oluna bildiyi üçün bəzi bu tip məsələləri Qrafik üsulu ilə həll etmək mümkün olur. Daha doğrusu məsələni yalnız o halda Qrafik üsulu ilə həll etmək mümkün olur ki, oyunçulardan heç olmazsa birinin ən çoxu 2 strategiyası olsun. Başqa sözlə desək, $\alpha \neq \beta$ olduqda yalnız aşağıdakı matris oyunlarının həllərini Qrafik üsulu ilə tapmaq mümkün olur:

- (2×2) ölçülü oyunları;
- $(2 \times n)$ ölçülü oyunları;
- $(m \times 2)$ ölçülü oyunları.

Oyunun Qrafik üsulu ilə həll alqoritmini $(2 \times n)$ ölçülü matris oyununun timsalında nəzərdən keçirək.

Fərz edək ki, oyunun ödəmə matrisi aşağıdakı şəkildədir:

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix} \qquad (13.2)$$

$\alpha \neq \beta$ olduğunu şərtləşək.

A oyunçusunun sərəncamında A_1 və A_2 strategiyaları olduğu üçün həmin oyunçunun özünün A_1 şəxsi strategiyasından istifadəsi ehtimalını x_1 ilə, A_2 şəxsi strategiyasından istifadəsi ehtimalını isə x_2 ilə işarə edək. Təbii ki, $x_1 + x_2 = 1$ olduğu üçün $x_2 = 1 - x_1$ olacaqdır. B oyunçusunun sərəncamında isə n sayda $B_1, B_2, ..., B_n$ strategiyaları olduğunu nəzərə alaraq onun özünün bu şəxsi strategiyalarından istifadəsi ehtimallarını $y_1, y_2, ..., y_n$ ilə işarə edək.

Fərz edək ki, B oyunçusu özünün B_1 şəxsi strategiyasını tətbiq edir. Onda (13.2) ödəmə matrisinə görə A oyunçusunun əldə edəcəyi uduş

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = a_{11}x_1 + a_{21}(1 - x_1) = a_{11}x_1 - a_{21}x_1 + a_{21} = (a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21}$$

qədər olacaqdır.

B oyunçusunun özünün $B_1, B_2, ..., B_n$ şəxsi strategiyalarını tətbiq etməsi halında A oyunçusunun uduşu x_1 ehtimalının xətti funksiyası

kimi müəyyən ediləcəkdir:

B oyunçusunun şəxsi strategiyaları	A oyunçusunun gözlənilən uduşları
B_1	$(a_{11}-a_{21})x_1+a_{21}$
B_2	$(a_{12}-a_{22})x_1+a_{22}$
...	...
B_n	$(a_{1n}-a_{2n})x_1+a_{2n}$

Düzbucaqlı koordinat sisteminin absis oxu üzərində uzunluğu 1-ə bərabər olan parça ayıraq. Parçanın sol hüdudu ($x=0$ nöqtəsi) A oyunçusunun A_1 şəxsi strategiyasına, sağ hüdudu isə ($x=1$ nöqtəsi) onun A_2 şəxsi strategiyasına uyğun gəlir. Bu nöqtələrdən absis oxuna perpendikulyar düz xətlər keçirək. Absis oxunda x-in bu iki hüdud nöqtəsi arasında yerləşən qiymətləri A -nın müəyyən $S_i(p_1,\ p_2)$ qarışıq strategiyaların ehtimallarına uyğun gələcəkdir.

A oyunçusu elə strategiyalar seçməlidir ki, özünün minimal mümkün uduşunu maksimum etsin. Odur ki, A-nın optimal strategiyası onun minimal mümkün uduşunu maksimum edəcək düz xətlərin kəsişməsi nöqtəsi kimi müəyyən ediləcəkdir.

B oyunçusu üçün optimal qarışıq strategiya da analoji olaraq tapılır. Daha doğrusu, bu strategiya B oyunçusunun maksimal mümkün uduzmasını minimum edəcək düz xətlərin kəsişmə nöqtəsi kimi müəyyən ediləcəkdir.

►**Məsələ 13.4.** $(m\times n)$ **ölçülü oyunun sadələşdirilərək** (2×2) **ölçülü oyuna gətirilməsi və Qrafik üsulu ilə həllinə aid misala baxaq.**

Fərz edək ki, 2 şəxsin (4×5) ölçülü matris oyununun ödəmə matrisi aşağıdakı şəkildədir:

$$a=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Bu matris oyununda oyunçular üçün optimal strategiyalar və oyunun γ qiymətini tapmaq tələb olunur.

Oyunun aşağı və yuxarı qiymətlərini hesablayaq:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \{2,\ 2,\ 3,\ 2\} = 3$$

$$\beta = \min_j \max_i \alpha_{ij} = \min_j \{7,\ 6,\ 6,\ 4,\ 5\} = 4$$

$\alpha \neq \beta$ olduğu üçün oyunda düyün nöqtəsi yoxdur və onun həllini qarışıq strategiyalar şəklində tapmaq lazımdır.

A oyunçusunun qarışıq strategiyasını $S_A = S_A(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ ilə, B -nin qarışıq strategiyasını isə $S_B = S_B(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5)$ ilə işarə edək. Burada $\sum_{i=1}^{4} x_i = 1$ və $\sum_{j=1}^{5} y_j = 1$-dir. Bu şəkildə oyunu Qrafik üsulu ilə həll etmək mümkün deyil. Oyunun ödəmə matrisində təkrarlanan və aşkar şəkildə əlverişli olmayan strategiyaların olub-olmadığını müəyyən edək.

a ödəmə matrisində 2-ci sətir elementləri 3-cü sətir elementlərindən əsasən kiçikdir (yalnız 1 halda bərabərdir). Deməli, A oyunçusu üçün A_2 strategiyası əlverişli hesab oluna bilməz. Odur ki, a ödəmə matrisində 2-ci sətiri silmək olar. 4-cü sətirin bütün elementləri isə 3-cü sətir elementlərindən kiçikdir. Deməli, A_4 strategiyası da A oyunçusu üçün əlverişli olmayan strategiyadır. Odur ki, a ödəmə matrisində 4-cü sətiri silmək məqsədəuyğundur. Onda alırıq:

$$a' = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Indi isə a' ödəmə matrisini B oyunçusunun mənafeyindən təhlil edək. Matrisin 1-ci sütununun elementləri 4-cü sütunun elementlərindən böyük olduğu üçün B_1 strategiyası B oyunçusunun mənafeyinə cavab vermir. Odur ki, a' ödəmə matrisində 1-ci sütunu silirik. Bu matrisin 2-ci sütununun elementləri 3-cü sütun elementlərindən "$\geq$" olduğu üçün B_2 strategiyası da B oyunçusunun mənafeyinə uyğun deyil. Odur ki, a' ödəmə matrisində 2-ci sütunu da silirik. Nəhayət, a' ödəmə matrisinin 3-cü sütun elementləri də 4-cü sütun elementlərindən böyük olduğu üçün 3-cü sütun da silinməlidir. Onda oyunun ödəmə matrisi aşağıdakı şəklə düşəcəkdir:

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Beləliklə, oyunçuların optimal qarışıq strategiyalarında

$x_2 = 0,\ x_4 = 0$ və $y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0$ -dır:

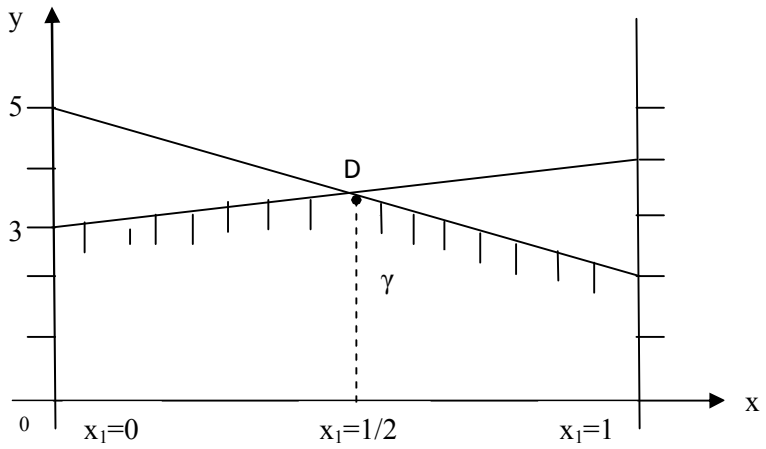
$$S_A = S_A(x_1,\ 0,\ x_3,\ 0)$$

$$S_B = S_B(0,\ 0,\ 0,\ y_4,\ y_5)$$

Baxılan matris oyunu (2×2) ölçülü oyun şəklinə gəldiyi üçün onun həllinə Qrafik üsulunu tətbiq etmək olar. Alınmış yeni matris oyunu üçün A oyunçusunun gözlənilən uduşları matrisi aşağıdakı şəkildə olacaqdır:

B oyunçusunun şəxsi strategiyaları	**A oyunçusunun gözlənilən uduşları**
B_1'	$(a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21} = (4-3)x_1 + 3 = x_1 + 3$
B_2'	$(a_{12} - a_{22})x_1 + a_{22} = (2-5)x_1 + 5 = -3x_1 + 5$

$x_1 + 3$ ifadəsindən $x_1 = 0$ olduqda 3 qiyməti, $x_1 = 1$ olduqda 4 qiyməti alınır. Odur ki, absis oxunda $x_1 = 0$ və $x_1 = 1$ hüdud nöqtələrində bu koordinat oxuna perpendikulyar keçirilmiş düz xətlər üzərində 3 və 4 nöqtələrini müəyyən edib, onları birlədirsək, $x_1 + 3$ düz xəttini alırıq. $-3x_1 + 5$ ifadəsindən $x_1 = 0$ olduqda 5 qiyməti, $x_1 = 1$ olduqda 2 qiyməti alınır. Bu qiymətlərə görə analoji olaraq $-3x_1 + 5$ düz xətti qurulur (şəkil 13.1)



Şəkil 13.1

$x_1 + 3$ və $-3x_1 + 5$ düz xətləri düzbucaqlı koordinat sistemində D

nöqtəsində kəsişir. Odur ki, bu nöqtənin absisini aşağıdakı kimi tapa bilərik:

$$x_1 + 3 = -3x_1 + 5$$
$$4x_1 = 2$$
$$x_1 = 1/2$$

$x_1 + x_3 = 1$ olduğu üçün alırıq: $x_3 = 1 - x_1 = 1 - 1/2 = 1/2$

Beləliklə, A oyunçusunun optimal qarışıq strategiyası aşağıdakı kimidir:

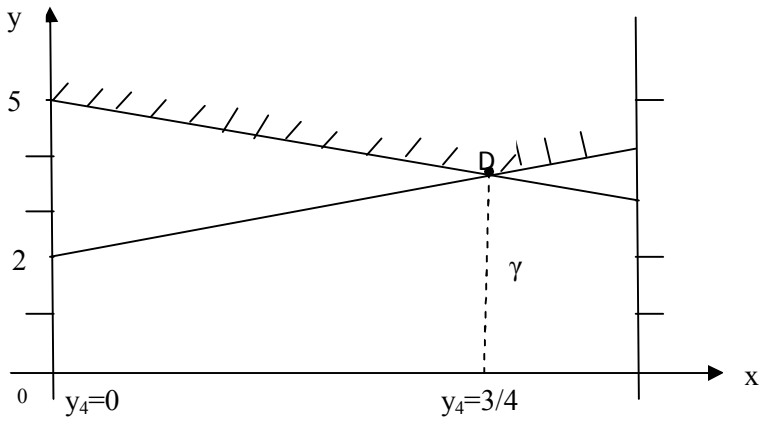
$$S_A^* = S_A^*(1/2,\ 0,\ 1/2,\ 0)$$

Oyunun qiymətini tapaq: $\gamma = x_1 + 3 = 1/2 + 3 = 3\frac{1}{2}$

Indi isə Qrafik üsulu ilə B oyunçusunun gözlənilən uduzmaları matrisini tərtib edək:

A **oyunçusunun şəxsi strategiyaları**	B **oyunçusunun gözlənilən uduzmaları**
A_1'	$(a_{11} - a_{12})y_4 + a_{12} = (4-2)y_4 + 2 = 2y_4 + 2$
A_2'	$(a_{21} - a_{22})y_4 + a_{22} = (3-5)y_4 + 5 = -2y_4 + 5$

Yuxarıdakına analoji qaydada bu düz xətləri düzbucaqlı koordinat sistemində yerləşdirək və onların kəsişməsi nöqtəsini tapaq (şəkil 13.2).



Şəkil 13.2 .

D nöqtəsinin absisini tapaq:

$$2y_4 + 2 = -2y_4 + 5$$

$$4y_4 = 3$$

$$y_4 = 3/4$$

$y_4 + y_5 = 1$ olduğu üçün alırıq:

$$y_5 = 1 - y_4 = 1 - 3/4 = 1/4$$

Beləliklə, B oyunçusunun optimal qarışıq strategiyası aşağıdakı kimidir:

$$S_B^* = S_B^*(0,\ 0,\ 0,\ 3/4,\ 1/4)$$

Oyunun qiymətini tapaq:

$$\gamma = 2y_4 + 2 = 3/2 + 2 = 3\frac{1}{2}$$

Cavab: $S_A^* = S_A^*(1/2,\ 0,\ 1/2,\ 0)$ **və** $S_B^* = S_B^*(0,\ 0,\ 0,\ 3/4,\ 1/4)$ **olduqda** $\gamma = 3\frac{1}{2}$ **olur.** ◄

►**Məsələ 13.5.** $(2 \times n)$ **ölçülü oyunun Qrafik üsulu ilə həllinə aid misala baxaq.**

Fərz edək ki, 2 şəxsin (2×4) ölçülü matris oyununun ödəmə matrisi aşağıdakı şəkildədir:

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Oyunun həllini tapaq. Əvvəlcə oyunun aşağı və yuxarı qiymətlərini hesablayaq:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \{-1,\ 2\} = 2$$

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \{4,\ 5,\ 3,\ 6\} = 3$$

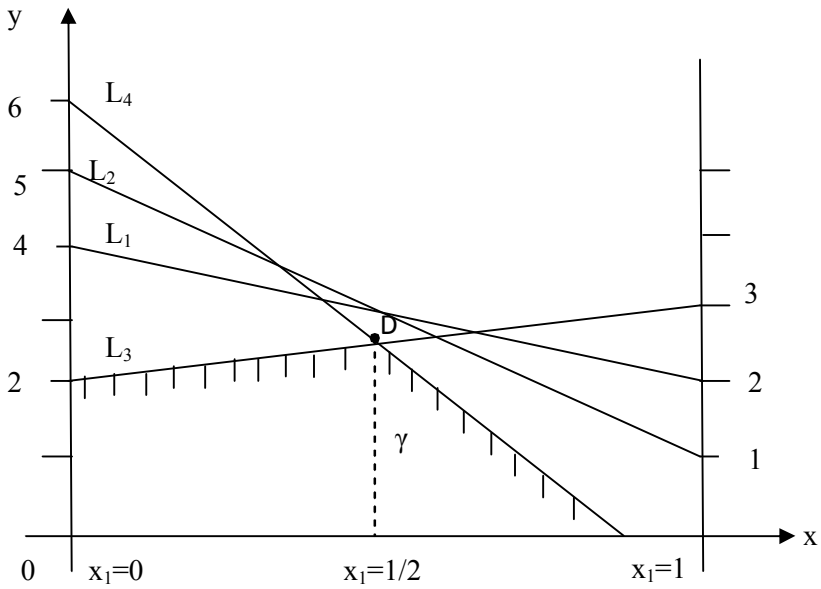
$\alpha \neq \beta$ olduğundan oyunda düyün nöqtəsi yoxdur. Odur ki, onun həllini qarışıq strategiyalar şəklində axtarmaq lazımdır.

A oyunçusunun qarışıq strategiyasını $S_A = S_A(x_1,\ x_2)$ ilə, B oyunçusunun qarışıq strategiyasını isə $S_B = S_B(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$ ilə işarə edək.

B oyunçusunun B_1, B_2, B_3, B_4 xalis strategiyalarında A oyunçusunun gözlənilən uduşları aşağıdakı cədvəldə əks etdirilmişdir:

B oyunçu-sunun şəxsi strategiyaları	**A oyunçusunun gözlənilən uduşları**
B_1	$(a_{11}-a_{21})x_1+a_{21}=(2-4)x_1+4=-2x_1+4$
B_2	$(a_{12}-a_{22})x_1+a_{22}=(1-5)x_1+5=-4x_1+5$
B_3	$(a_{13}-a_{23})x_1+a_{23}=(3-2)x_1+2=x_1+2$
B_4	$(a_{14}-a_{24})x_1+a_{24}=(-1-6)x_1+6=-7x_1+6$

Alınmış düz xətləri koordinat sistemində quraq (şəkil 13.3)



Şəkil 13.3

Şəkil 13.3-dən göründüyü kimi, A oyunçusunun qarışıq optimal strategiyası B oyunçusunun B_3 və B_4 şəxsi strategiyalarına uyğun olan

L_3 və L_4 düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsi kimi müəyyən edilir. Odur ki, alırıq:

$$x_1 + 2 = -7x_1 + 6$$
$$8x_1 = 4$$
$$x_1 = 1/2$$
$$x_2 = 1 - x_1 = 1 - 1/2 = 1/2$$

Beləliklə, A oyunçusunun optimal qarışıq strategiyası aşağıdakı kimidir:

$$S_A^* = S_A^*(1/2,\ 1/2)$$

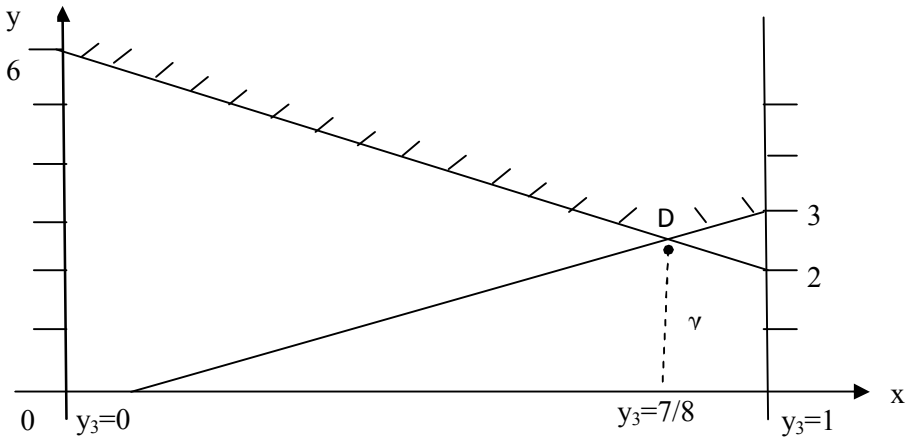
Oyunun qiymətini tapaq:

$$\gamma = x_1 + 2 = 1/2 + 2 = 2\frac{1}{2}$$

Indi isə B oyunçusu üçün optimal qarışıq strategiya tapaq. Şəkil 13.3-dən göründüyü kimi A oyunçusunun optimal qarışıq strategiyası B oyunçusunun B_3 və B_4 şəxsi strategiyalarına uyğun gələn düz xətlərin kəsişməsi olduğu üçün $y_1 = 0,\ y_2 = 0$ alınır. Əgər $y_4 = 1 - y_3$ olduğunu nəzərə alsaq, onda A oyunçusunun A_1 və A_2 şəxsi strategiyalarında B oyunçusunun gözlənilən uduzmaları aşağıdakı cədvəldə göstərildiyi kimi olacaqdır:

A oyunçusunun şəxsi strategiyaları	**B oyunçusunun gözlənilən uduzmaları**
A_1'	$(a_{13} - a_{14})y_3 + a_{14} = (3+1)y_3 - 1 = 4y_3 - 1$
A_2'	$(a_{23} - a_{24})y_3 + a_{24} = (2-6)y_3 + 6 = -4y_3 + 6$

Alınmış düz xətləri koordinat sistemində yerləşdirək (şəkil 13.4):



Şəkil 13.4

D nöqtəsinin koordinatlarını tapaq:

$$4y_3 - 1 = -4y_3 + 6$$

$$8y_3 = 7$$

$$y_3 = 7/8$$

$$y_4 = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

Beləliklə, B oyuncusunun optimal qarışıq strategiyası aşağıdakı kimidir:

$$S_B^* = S_B^*(0,\ 0,\ 7/8,\ 1/8)$$

Oyunun qiymətini hesablayaq:

$$\gamma = 4y_3 - 1 = 4 \cdot \frac{7}{8} - 1 = \frac{7}{2} - 1 = 2\frac{1}{2}$$

Cavab: $S_A^* = S_A^*(1/2,\ 1/2)$ **və** $S_B^* = S_B^*(0,\ 0,\ 7/8,\ 1/8)$ **olduqda** $\gamma = 2\frac{1}{2}$ **olur.**◄

13.6. Matris oyununun optimallaşdırma modelinə gətirilməsi

Oyunçular üçün optimal qarışıq strategiyanın tapılması kifayət qədər mürəkkəb riyazi aparatdan istifadəni nəzərdə tutur. Lakin hər bir sonlu matris oyununun həllini, yəni oyunçular üçün optimal qarışıq strategiyanın tapılmasını xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinə gətirmək mümkün olur.

Tutaq ki, iki şəxsin $m \times n$ ölçülü matris oyunu (13.1) ödəmə matrisi ilə verilmişdir və $\alpha \neq \beta$ -dır. Bu oyunda oyunçular üçün S_A^* və S_B^* optimal qarışıq strategiyaları tapaq.

Əvvəlcə oyunu A oyunçusunun mənafeyindən öyrənək və onun üçün $S_A^* = S_A^*(p_1, p_2, ..., p_m)$ optimal qarışıq strategiyanın tapılmasını araşdıraq.

Tutaq ki, A oyunçusu özünün S_A^* optimal qarışıq strategiyasını tətbiq edir. Onda aktiv strategiyalar haqqında teoremə görə B oyunçusunun hansı şəxsi strategiya ilə cavab verməsindən asılı olmayaraq A oyunçusunun uduşu γ -dan az olmayacaqdır. Tutaq ki, $\gamma > 0$. Bu şərtin ödənməsi üçün (13.1) ödəmə matrisində $a_{ij} \geq 0$ şərtinin ödənməsi kifayət edir. Əgər bu şərt ödənmirsə, onda ödəmə matrisinin bütün elementlərinə elə bir böyük $M > 0$ ədədi əlavə edilir ki, $a'_{ij} = a_{ij} + M > 0$ şərti ödənsin. Bu halda optimal strategiyanın seçimi dəyişməyəcək, oyunun qiyməti isə M qədər artacaq, yəni $\gamma + M$ -ə bərabər olacaqdır.

Məsələn, tutaq ki, oyunun ödəmə matrisi aşağıdakı şəkildədir:

$$a = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 8 & 5 \\ 2 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

a ödəmə matrisinin bütün elementlərinə $M = 10$ ədədini əlavə edək:

$$a' = \begin{pmatrix} 13 & 17 & 12 & 9 \\ 14 & 8 & 18 & 15 \\ 12 & 16 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

Göründüyü kimi, a' ödəmə matrisinin heç bir elementi mənfi

deyil.

Beləliklə, əgər A oyunçusu özünün S_A^* optimal qarışıq strategiyasını tətbiq edirsə, aktiv strategiyalar haqqında teoremə görə B-nin istənilən cavabında A-nın uduşu γ -dan az olmayacaqdır. Yəni:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{m1}p_m \geq \gamma \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{m2}p_m \geq \gamma \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{mn}p_m \geq \gamma \end{cases} \qquad (13.1)$$

(13.1) sisteminin bərabərsizliklərini $\gamma > 0$ $(\gamma \neq 0)$ şərti daxilində γ-ya bölsək və $\frac{p_i}{\gamma} = x_i$ $(i = \overline{1,m})$ əvəzetmələrindən istifadə etsək, onda bu sistem aşağıdakı şəkilə düşəcəkdir:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq 1 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq 1 \end{cases} \qquad (13.2)$$

(13.2) sistemində $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0$ olduğu məlumdur, çünki $p_i \geq 0$ olduğundan, $p_i = 0$ olduqda $x_i = \frac{0}{\gamma} = 0$ alınır, $p_i > 0$ olduqda isə $x_i = \frac{p_i > 0}{\gamma > 0} > 0$ olur.

Digər tərəfdən $x_1 + x_2 + ... + x_m = \frac{1}{\gamma}$ şərti ödənir.

A oyunçusu özünün γ uduşunu maksimum etməyə çalışır. Odur ki, $\frac{1}{\gamma} \to \min$ olmalıdır. Beləliklə, baxılan oyunda A oyunçusu üçün S_A^* optimal qarışıq strategiyanın tapılması aşağıdakı xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinə gətirilir:

$$L_x = x_1 + x_2 + ... + x_m \to \min \qquad (13.3)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq 1 \\ ... \quad ... \quad ... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq 1 \end{cases} \qquad (13.4)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_m \geq 0 \qquad (13.5)$$

İndi isə həmin oyunda B oyunçusu üçün S_B^* optimal qarışıq strategiyanın tapılmasını xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirək. Əgər yuxarıdakılara analoji olan mülahizələr aparsaq, onda bu strategiyanın tapılması aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətiriləcəkdir:

$$L_y = y_1 + y_2 + ... + y_n \to \max \qquad (13.6)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \leq 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{1n}y_n \leq 1 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_m \leq 1 \end{cases} \qquad (13.7)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, ..., y_n \geq 0 \qquad (13.8)$$

(13.6)-(13.8) xətti proqramlaşdırma məsələsində $y_j = \frac{q_j}{\gamma} (j = \overline{1,n})$ əvəzetmələrindən istifadə olunmuşdur və $y_1 + y_2 + ... + y_n = \frac{1}{\gamma}$ – dır.

Beləliklə, baxılan matris oyununda A və B oyunçuları üçün S_A^* və S_B^* optimal qarışıq strategiyaların tapılması (13.3)-(13.5) və (13.6)-(13.8) bir cüt simmetrik qoşma məsələyə gətirildi. Qoşmalığın birinci teoreminə görə əgər bu məsələlərdən birinin optimal həlli varsa, digərinin də optimal həlli var və $\min L_x = \max L_y$ şərti ödənir. Odur ki, bu məsələlərdən hər hansı birini Simpleks metodla həll etməklə sonuncu Simpleks cədvəlindən hər iki oyunçu üçün optimal qarışıq strategiya tapmaq mümkündür.

Indi isə iki şəxsin matris oyununun xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirilməsi və həllinə aid misala baxaq.

►**Məsələ 13.6.** Fərz edək ki, iki şəxsin 3×4 ölçülü matris oyununun ödəmə matrisi aşağıdakı şəkildədir:

$$a = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 8 & 4 \\ 9 & 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

A və B oyunçuları üçün optimal strategiyalar tapmaq tələb edilir

Həlli: Əvvəlcə oyunun düyün nöqtəsinin olub-olmadığını müəyyən edək. Bu məqsədlə oyunun aşağı və yuxarı qiymətlərini müəyyən edək.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max\{2,3,4\} = 4$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min\{9,7,8,6,\} = 6$$

Göründüyü kimi, A_3 strategiyası A oyunçusunun maksimin strategiyası, B_4 strategiyası isə B oyunçusunun minimaks strategiyasıdır. $\alpha \neq \beta$ olduğu üçün oyunda düyün nöqtəsi yoxdur. Deməli, A_3 və B_4 şəxsi strategiyalar oyunçuların optimal strategiyaları deyildir, yəni oyunun həlli xalis strategiyalar şəklində mövcud deyil. Odur ki, qarışıq strategiyalara keçək.

A oyunçusunun qarışıq strategiyasını $S_A = S_A(p_1, p_2, p_3)$ ilə, B oyunçusunun qarışıq strategiyasını $S_B = S_B(q_1, q_2, q_3, q_4)$ ilə işarə edək.

Yuxarıda verdiyimiz alqoritmə görə A oyunçusu üçün $S_A^* = S_A(p_1, p_2, p_3)$ optimal qarışıq strategiyasının tapılması aşağıdakı xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinə gətirilir:

$$L_X = x_1 + x_2 + x_3 \to \min \qquad (13.9)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 \geq 1 \\ 7x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq 1 \\ 4x_1 + 8x_2 + 7x_3 \geq 1 \\ 6x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 1 \end{cases} \qquad (13.10)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \qquad (13.11)$$

Burada $x_1 = \dfrac{P_1}{\gamma}$; $\quad x_2 = \dfrac{P_2}{\gamma}$; $\quad x_3 = \dfrac{P_3}{\gamma}$ – dır və

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{\gamma}$$

şərti ödənilir.

Analoji olaraq B oyunçusu üçün $S_B^* = S_B(q_1, q_2, q_3, q_4)$ optimal qarışıq strategiyanın tapılması aşağıdakı xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinə gətirilir:

$$L_Y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to \max \qquad (13.12)$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 7y_2 + 4y_3 + 6y_4 \le 1 \\ 3y_1 + 5y_2 + 8y_3 + 4y_4 \le 1 \\ 9y_1 + 4y_2 + 7y_3 + 6y_4 \le 1 \end{cases} \qquad (13.13)$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0 \qquad (13.14)$$

Göründüyü kimi, baxılan oyunda A və B oyunçuları üçün S_A^* və S_B^* optimal qarışıq strategiyaların tapılması (13.9)-(13.11) və (13.12)-(13.14) bir cüt simmetrik qoşma məsələyə gətirildi. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi qoşmalığın birinci teoreminə görə əgər bu məsələlərdən birinin optimal həlli varsa, onda digər məsələnin də optimal həlli var və bu məsələlərin məqsəd funksiyalarının ekstremumları bir-birinə bərabərdir, yəni $\min L_X = \max L_Y$

Odur ki, bu məsələlərdən hər hansı birininin Simpleks metodla həll edilməsi hər iki oyunçu üçün optimal qarışıq strategiya tapmağa imkan verir.

(13.12)-(13.14) xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks metodla həll edək: (Biz prosesin daha əyani təsviri üçün Qoşma Simpleks cədvəldən istifadə edəcəyik).

1-ci mərhələ: Mənfi olmayan $t_1 \ge 0, t_2 \ge 0, t_3 \ge 0$ əlavə dəyişənləri daxil etməklə (13.13) sisteminin bərabərsizliklərini tənliklərə gətirək:

$$\begin{cases} 2y_1 + 7y_2 + 4y_3 + 6y_4 + t_1 = 1 \\ 3y_1 + 5y_2 + 8y_3 + 4y_4 + t_2 = 1 \\ 9y_1 + 4y_2 + 7y_3 + 6y_4 + t_3 = 1 \end{cases} \qquad (13.15)$$

(13.15) sisteminin t_1, t_2, t_3 bazis dəyişənlərini təyin edək:

$$\begin{cases} t_1 = -2y_1 - 7y_2 - 4y_3 - 6y_4 + 1 \ge 0 \\ t_2 = -3y_1 - 5y_2 - 8y_3 - 4y_4 + 1 \ge 0 \\ t_3 = -9y_1 - 4y_2 - 7y_3 - 6y_4 + 1 \ge 0 \end{cases} \qquad (13.16)$$

Qoşma Simpleks cədvəlini tərtib edək:

	$S_1 =$ $-y_1$	$S_2 =$ $-y_2$	$S_3 =$ $-y_3$	$S_4 =$ $-y_4$	L_X 1
x_1 $t_1 =$	2	7	4	6	1
x_2 $t_2 =$	3	5	8	4	1
x_3 $t_3 =$	9	4	7	6	1
1 $L_y =$	-1	-1	-1	-1	0

2-ci mərhələ: Simpleks cədvəlin sərbəst hədlər sütununda heç bir mənfi element yoxdur. Odur ki, məsələnin dayaq həlli alınmışdır və $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 0$ olduqda:

$$Y_{day} = (y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 0)$$

$$L(Y_{day}) = 0$$

alırıq.

3-cü mərhələ: Məsələnin optimal həllini tapmaq üçün Simpleks cədvəlin L_y sətirindəki mənfi elementləri yox edək. Əvvəlcə bu sətirdəki 1-ci mənfi elementi yox edək. $\min\left\{\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{9}\right\} = \frac{1}{9}$ olduğu üçün yeni bazisə keçid $a_{31} = 9$ əsas elementinə görə aparılacaqdır.

	$S_1 =$ $-y_1$	$S_2 =$ $-y_2$	$S_3 =$ $-y_3$	$S_4 =$ $-y_4$	L_X 1
x_1 $t_1 =$	2	7	4	6	1
x_2 $t_2 =$	3	5	8	4	1
x_3 $t_3 =$	$\langle 9 \rangle$	4	7	6	1
1 $L_y =$	-1	-1	-1	-1	0

		$x_3 =$ $-t_3$	$S_2 =$ $-y_2$	$S_3 =$ $-y_3$	$S_4 =$ $-y_4$	L_X 1
x_1	$t_1 =$	-2	55	22	42	7
x_2	$t_2 =$	-3	33	51	18	6
S_1	$y_1 =$	1	4	7	6	1
1	$L_y =$	1	-5	-2	-3	1

: (9)

		$x_3 =$ $-t_3$	$S_2 =$ $-y_2$	$S_3 =$ $-y_3$	$S_4 =$ $-y_4$	L_X 1
x_1	$t_1 =$	$-2/9$	$55/9$	$22/9$	$42/9$	$7/9$
x_2	$t_2 =$	$-3/9$	$33/9$	$51/9$	$18/9$	$6/9$
S_1	$y_1 =$	$1/9$	$4/9$	$7/9$	$6/9$	$1/9$
1	$L_y =$	$1/9$	$-5/9$	$-2/9$	$-3/9$	$1/9$

L_y məqsəd funksiyası sətirində olan $\left\{-5/9\right\}$ elementini yox edək.

$$\min\left\{ (7/9 : 55/9);\ (6/9 : 33/9);\ (1/9 : 4/9) \right\} = 7/9 : 55/9$$

olduğu üçün əsas element olaraq $a_{12} = 55/9$ elementini götürəcəyik.

	$x_3 =$ $-t_3$	$S_2 =$ $-y_2$	$S_3 =$ $-y_3$	$S_4 =$ $-y_4$	L_X 1
x_1 $t_1 =$	$-2/9$	$\langle 55/9 \rangle$	$22/9$	$42/9$	$7/9$
x_2 $t_2 =$	$-3/9$	$33/9$	$51/9$	$18/9$	$6/9$
S_1 $y_1 =$	$1/9$	$4/9$	$7/9$	$6/9$	$1/9$
1 $L_y =$	$1/9$	$-5/9$	$-2/9$	$-3/9$	$1/9$

	$x_3 =$ $-t_3$	$x_1 =$ $-t_1$	$S_3 =$ $-y_3$	$S_4 =$ $-y_4$	L_X 1	
S_2 $y_2 =$	$-2/9$	1	$22/9$	$42/9$	$7/9$	
x_2 $t_2 =$		$-33/9$			$11/9$	: (55/9)
S_1 $y_1 =$		$-4/9$			$3/9$	
1 $L_y =$	$5/9$	$5/9$	0	$5/9$	$10/9$	

	$x_3 =$ $-t_3$	$x_1 =$ $-t_1$	$S_3 =$ $-y_3$	$S_4 =$ $-y_4$	L_X 1
S_2 $y_2 =$ x_2 $t_2 =$ S_1 $y_1 =$					$7/55$ $11/55$ $3/55$
1 $L_y =$	$5/55$	$5/55$	0	$5/55$	$10/55$

Sonuncu Simpleks cədvəlin L_y sətirində heç bir mənfi element yoxdur. Odur ki, qeyri-bazis dəyişənlərin sıfır qiymətlərində (yəni $t_3 = 0,\ t_1 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0$ olduqda) (13.12)-(13.14) xətti proqramlaşdırma məsələsi üçün aşağıdakı optimal plan alınır:

$$Y^* = (y_1 = 3/55; y_2 = 7/55; y_3 = 0; y_4 = 0)$$

$$\max L(Y^*) = 10/55$$

Bu cədvəlin məqsəd funksiyası sətirindən (həmin sətir (13.9)-(13.11) xətti proqramlaşdırma məsələsi üçün sərbəst hədlər sütunu rolunu oynayır) (13.9)-(13.11) xətti proqramlaşdırma məsələsi üçün aşağıdakı optimal plan tapılır:

$$X^* = (x_1 = 5/55, x_2 = 0, x_3 = 5/55)$$

$$\min L(X^*) = 10/55$$

İndi isə X^* və Y^* optimal həllərə əsasən A və B oyunçuları üçün S_A^* və S_B^* optimal qarışıq strategiyalar müəyyən edək və oyunun γ qiymətini tapaq.

$\min L(X^*) = \max L(Y^*) = \dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{10}{55}$ olduğundan, oyunun qiyməti

üçün alırıq:

$$\gamma = \frac{55}{10}$$

$S_A^* = (p_1, p_2, p_3)$ - ü təyin edək:

$$p_1 = x_1 \cdot \gamma = \frac{5}{55} \cdot \frac{55}{10} = \frac{1}{2}$$

$$p_2 = x_2 \cdot \gamma = 0$$

$$p_3 = x_3 \cdot \gamma = \frac{5}{55} \cdot \frac{55}{10} = \frac{1}{2}$$

Beləliklə, A oyunçusuna 5,5 vahid uduş təmin edən S_A^* optimal qarışıq strategiya aşağıdakı şəkildədir:

$$S_A^* = S_A^*(1/2, 0, 1/2)$$

$S_B^* = S_B^*(q_1, q_2, q_3, q_4)$ -ü təyin edək:

$$q_1 = y_1 \cdot \gamma = \frac{3}{55} \cdot \frac{55}{10} = \frac{3}{10}$$

$$q_2 = y_2 \cdot \gamma = \frac{7}{55} \cdot \frac{55}{10} = \frac{7}{10}$$

$$q_3 = y_3 \cdot \gamma = 0$$

$$q_4 = y_4 \cdot \gamma = 0$$

Beləliklə, B oyunçusu üçün 5,5 vahid uduzma təmin edən S_B^* optimal qarışıq strategiya aşağıdakı şəkildədir:

$$S_B^* = S_B^{(1)*}(3/10, 7/10, 0, 0)$$

Asanlıqla yəqin etmək olar ki, S_A^* və S_B^* üçün

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = 1/2 + 0 + 1/2 = 1; \qquad \sum_{i=1}^{4} q_j = 3/10 + 7/10 + 0 + 0 = 1$$

olur.

Sonuncu Simpleks cədvəlin məqsəd funksiyası sətirində sıfır elementinin olması göstərir ki, B oyunçusu üçün tapdığımız optimal qarışıq strategiya yeganə deyildir və alternativ həll mövcuddur. Alternativ hal üçün məsələnin həllinin davamını vermədən göstərə bilərik ki, bu alternativ optimal strategiya

$$S_B^{(2)*} = S_B^*(1/7, 25/42, 11/42)$$

şəklindədir. Bu halın araşdırılması oxucunun ixtiyarına verilir.

Cavab: $S_A^* = S_A^*(1/2, 0, 1/2)$ **və** $S_B^* = S_B^{(1)*}(3/10, 7/10, 0, 0)$, $S_B^{(2)*} = S_B^*(1/7, 25/42, 11/42)$ **olduqda** $\gamma = 5{,}5$ **olur.**◄

Ödəmə matrisində mənfi elementin olması halında oyunun xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirilməsi və həllinə aid misala baxaq.

►**Məsələ 13.7.** Tutaq ki, iki şəxsin (2×4) ölçülü matris oyununun ödəmə matrisi aşağıdakı şəkildədir.

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Oyunun həllinə baxaq, yəni A və B oyunçuları üçün optimal strategiyalar tapaq. Əvvəlcə oyunda düyün nöqtəsinin olub-olmadığını müəyyən edək.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \{-1, 2\} = 2$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min_j \{4, 5, 3, 6\} = 3$$

olduğu ücün $\alpha \neq \beta$ olur və oyunda düyün nöqtəsi yoxdur. Deməli, oyunun qiyməti $2 \le \gamma \le 3$ oblastındadır və bu qiymət qarışıq strategiyalar şəklində tapılacaqdır. A oyunçusunun optimal qarışıq strategiyasını $S_A^* = S_A^*(p_1,\ p_2)$ ilə, B oyunçusunun optimal qarışıq strategiyasını isə $S_B^* = S_B^*(q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4)$ ilə işarə edək. Aydındır ki, $\sum_{i=1}^{2} p_i = 1$ və $\sum_{j=1}^{4} q_j = 1$ şərtləri ödənməlidir.

Bu optimal qarışıq strategiyaların tapılmasını xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirək.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, matris oyununu xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirmək üçün ödəmə matrisində $a_{ij} \ge 0$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ şərtləri ödənməlidir. Bizim misalda bu şərt ödənmir, çünki $a_{14} = -1 < 0$ – dır. Odur ki, a ödəmə matrisinin bütün elementlərinə (+10) ədədini əlavə edək (əlavə edilən element ödəmə matrisinin mənfi elementindən böyük olmalıdır). Onda oyunun ödəmə matrisi aşağıdakı şəkildə olacaqdır:

$$a' = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 13 & 9 \\ 14 & 15 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

S_A^* optimal qarışıq strategiya ücün

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$\begin{cases} 12p_1 + 14p_2 \geq \gamma \\ 11p_1 + 15p_2 \geq \gamma \\ 13p_1 + 12p_2 \geq \gamma \\ 9p_1 + 16p_2 \geq \gamma \end{cases}$$

S_B^* optimal qarışıq strategiya ücün

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$$

$$\begin{cases} 12q_1 + 11q_2 + 13q_3 + 9q_4 \leq \gamma \\ 14q_1 + 15q_2 + 12q_3 + 16q_4 \leq \gamma \end{cases}$$

Əgər $x_i = p_i / \gamma$ $(i = \overline{1,2})$ və $y_j = q_j / \gamma$ $(j = \overline{1,4})$ əvəzetmələri qəbul etsək, onda S_A^* və S_B^* optimal qarışıq strategiyaların tapılması aşağıdakı bir cüt simmetrik qoşma məsələyə gətiriləcəkdir:

$$L_x = x_1 + x_2 \to \min \qquad (13.17)$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 14x_2 \geq 1 \\ 11x_1 + 15x_2 \geq 1 \\ 13x_1 + 12x_2 \geq 1 \\ 9x_1 + 16x_2 \geq 1 \end{cases} \qquad (13.18)$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \qquad (13.19)$$

$$L_y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to \max \qquad (13.20)$$

$$\begin{cases} 12y_1 + 11y_2 + 13y_3 + 9y_4 \leq 1 \\ 14y_1 + 15y_2 + 12y_3 + 16y_4 \leq 1 \end{cases} \qquad (13.21)$$

$$y_1 \geq 0, \ y_2 \geq 0, \ y_3 \geq 0, \ y_4 \geq 0 \qquad (13.22)$$

(13.20)-(13.22) xətti proqramlaşdırma məsələsini Simpleks metodla həll edək:

1-ci mərhələ: Simpleks cədvəli tərtib edək:

	$-x_1$	$-x_2$	1
$y_1 =$	-12	-14	-1
$y_2 =$	-11	-15	-1
$y_3 =$	$\langle -13 \rangle$	-12	-1
$y_4 =$	-9	-16	-1
$Z(x) =$	-1	-1	0

2-ci mərhələ: Dayaq planı tapaq:

	$-y_3$	$-x_2$	1
$y_1 =$	12	38	1
$y_2 =$	11	63	2
$x_1 =$	1	-12	-1
$y_4 =$	9	100	4
$Z(x) =$	1	1	-1

$: (-13)$

	$-y_3$	$-x_2$	1
$y_1 =$	$-12/13$	$\langle -38/13 \rangle$	$-1/13$
$y_2 =$	$-11/13$	$-63/13$	$-2/13$
$x_1 =$	$-1/13$	$12/13$	$1/13$
$y_4 =$	$-9/13$	$-100/13$	$-4/13$
$Z(x) =$	$-1/13$	$-1/13$	$1/13$

	$-y_3$	$-y_1$	1

$x_2 =$	$-12/13$	1	$-1/13$	
$y_2 =$	$-26/13$	$63/13$	$1/13$	
$x_1 =$	$14/13$	$-12/13$	$-2/13$	$:(-38/13)$
$y_4 =$	$-66/13$	$100/13$	$4/13$	
$Z(x) =$	$2/13$	$1/13$	$-3/13$	

	$-y_3$	$-y_1$	1
$x_2 =$	$12/38$	$-13/38$	$1/38$
$y_2 =$	$26/38$	$\langle -63/38 \rangle$	$-1/38$
$x_1 =$	$-14/38$	$12/38$	$2/38$
$y_4 =$	$66/38$	$-100/38$	$-4/38$
$Z(x) =$	$-2/38$	$-1/38$	$3/38$

	$-y_3$	$-y_2$	1
$x_2 =$	$-11/38$	$13/38$	$-2/38$
$y_1 =$	$26/38$	1	$-1/38$
$x_1 =$	$15/38$	$-12/38$	$-3/38$
$y_4 =$	$-41/38$	$100/38$	$4/38$
$Z(x) =$	$4/38$	$1/38$	$-5/38$

$: (-63/38)$

	$-y_3$	$-y_2$	1
$x_2 =$	$11/63$	$-13/63$	$2/63$
$y_1 =$	$-26/63$	$-38/63$	$1/63$
$x_1 =$	$-15/63$	$12/63$	$3/63$
$y_4 =$	$41/63$	$\langle -100/63 \rangle$	$-4/63$
$Z(x) =$	$-4/63$	$-1/63$	$5/63$

	$-y_3$	$-y_4$	1	
$x_2 =$		$13/63$	$-4/63$	
$y_1 =$		$38/63$	$-4/63$	
$x_1 =$		$-12/63$	$-4/63$	
$y_2 =$	$41/63$	1	$-4/63$	$:(-100/63)$
$Z(x) =$	$7/63$	$1/63$	$-8/63$	

	$-y_3$	$-y_4$	1
$x_2 =$			$4/100$
$y_1 =$			$4/100$
$x_1 =$			$4/100$
$y_2 =$			$4/100$
$Z(x) =$	$-7/100$	$-1/100$	$8/100$

Beləliklə, sonuncu Simpleks cədvəldən ilkin və qoşma məsələ

ücün aşağıdakı optimal həlləri tapırıq:

$$X^* = (x_1^* = 4/100,\ x_2^* = 4/100)$$

$$\min L(X^*) = 8/100$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{8}{100}; \qquad \gamma = \frac{100}{8}$$

$$Y^* = (y_1^* = 0, y_2^* = 0, y_3 = 7/100; y_4 = 1/100)$$

$$\max L(Y^*) = 8/100$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{8}{100}; \qquad \gamma = \frac{100}{8}$$

A və B oyunçuları ücün optimal qarışıq strategiyalar tapaq:

$$p_1 = \gamma \cdot x_1 = \frac{100}{8} \cdot \frac{4}{100} = \frac{1}{2}$$

$$p_2 = \gamma \cdot x_2 = \frac{100}{8} \cdot \frac{4}{100} = \frac{1}{2}$$

$$S_A^* = S_A^*(1/2,\ 1/2)$$

$$q_1 = \gamma \cdot y_1 = \gamma \cdot 0 = 0$$

$$q_2 = \gamma \cdot y_2 = \gamma \cdot 0 = 0$$

$$q_3 = \gamma \cdot y_3 = \frac{100}{8} \cdot \frac{7}{100} = \frac{7}{8}$$

$$q_4 = \gamma \cdot y_4 = \frac{100}{8} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{8}$$

$$S_B^* = S_B^*(0,\ 0,\ 7/8, 1/8)$$

Indi isə oyunun real qiymətini hesablayaq:

$$\gamma' = \gamma - 10 = \frac{100}{8} - 10 = \frac{100-80}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

Göründüyü kimi, aldığımız cavablar oyunun qrafik üsulu ilə həllinə aid olan **Məsələ 13.5**–in həlli ilə üst-üstə düşür.

Cavab: $S_A^* = S_A^*(0{,}5,\ 0{,}5)$ **və** $S_B^* = S_B^*(0,\ 0,\ 0{,}875,\ 0{,}125)$ **olduqda** $\gamma = 2{,}5$ ◀

13.7. İnsanın təbiətlə oyunları. Təbiətin vəziyyətinin qiymətləndirilməsi kriteriyaları

Bəzən elə oyunlara rast gəlinir ki, bu oyunlarda biz tərəflərin şüurlu qarşıdurması ilə deyil, qərarın qəbul olunduğu vəziyyət haqqında kifayət qədər etibarlı informasiyanın olmaması ilə qarşılaşırıq. Bu tip oyunlarda qərar qəbul etmək üçün obyektiv reallığı nəzərə almaq lazım gəlir. Belə obyektiv reallığa «təbiət» deyilir. Müvafiq oyunlar isə ***«insanın təbiətlə oyunları»*** adlanır.

İnsanın təbiətlə oyunlarında qərar qəbul etmək prosesində ödəmə matrisi ilə yanaşı həm də, risk matrisindən istifadə edilir. Odur ki, oyunçunun strategiyasının riski anlayışını verək.

Fərz edək ki, insanın təbiətlə oyununda oyunçunun ixtiyarında m sayda $(A_1, A_2, ..., A_m)$ strategiya var. Təbiət isə n sayda $(T_1, T_2, ..., T_n)$ vəziyyətlərdə ola bilər. Onda təbiətin T_j vəziyyətində oyunçunun A_i strategiyasının riski dedikdə elə bir sonlu r_{ij} ədədi başa düşülür ki, bu ədəd oyunçunun təbiətin T_j vəziyyətini əvvəlcədən biləcəyi halda əldə edəcəyi potensial uduşla onun əldə etdiyi faktiki uduş arasındakı fərq kimi hesablanır:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} \qquad (13.23)$$

Burada:

$$\beta_j = \max_j a_{ij}$$

Verilmiş $a = \left\| a_{ij} \right\|_{m,n}$ ödəmə matrisinə görə $r = \left\| r_{ij} \right\|_{m,n}$ risk matrisini qurmaq üçün bu matrisin hər bir elementini (13.23) formulası üzrə hesablamaq lazımdır.

►**Məsələ 13.8. Risk matrisinin qurulmasına aid misala baxaq**. Fərz edək ki, əvvəlcədən məlum olmayan T bazar konyukturası şəraitində ticarət əməliyyatları planlaşdırılır. Bu şərtlər daxilində T_1, T_2, T_3, T_4 təsəvvürlər yığımı verilmişdir, daha doğrusu fərz edilir ki, bazar konyukturasının yalnız 4 diskret vəziyyəti ola bilər.

A oyunçusunun üç - A_1, A_2 və A_3 şəxsi strategiyası vardır. Ödəmə matrisini aşağıdakı cədvəl şəklində göstərək (cədvəl 13.8):

Cədvəl 13.8

$A \backslash T$	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	2	6	2	9
A_2	3	8	4	3
A_3	4	6	6	2

Risk matrisinə keçək. Bunun üçün ödəmə matrisinin hər bir sütunundakı elementlərin içərisində ən böyüyünü tapaq. Birinci sütunda bu element $\beta_1 = a_{31} = 4$, ikinci sütunda $\beta_2 = a_{22} = 8$, üçüncü sütunda $\beta_3 = a_{33} = 6$, dördüncü sütunda isə $\beta_4 = a_{14} = 9$ olacaqdır. Sonra hər bir sütunda tapdığımız β_j elementindən bu müvafiq sütunun bütün a_{ij} elementlərini çıxırıq və alınan fərqləri risk matrisinin uyğun mövqelərində yazırıq (cədvəl 13.9):

Cədvəl 13.9

$A \backslash T$	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	2	2	4	0
A_2	1	0	2	6
A_3	0	2	0	7

Bu matrisin nəzərdən keçirilməsi zamanı baxdığımız oyunun müəyyən xüsusiyyətləri aşkara çıxır. Məsələn, A oyunçusu A_2 strategiyasından istifadə edirsə, onda ödəmə matrisinə görə ikinci sətirdə $a_{21} = a_{24} = 3$ alırıq. Həqiqətdə isə məlum olur ki, təbiətin T_1 vəziyyətində biz ən çoxu 4 vahid uda bilərik və A_2 strategiyası bu baxımdan heç də pis strategiya sayılmamalıdır və oyunçuya maksimal mümkün uduşdan cəmi 1 vahid az olan uduş gətirir. Əgər təbiətin vəziyyəti T_4 olarsa, onda A_2 strategiyası artıq pis strategiya olacaqdır,

çünki risk matrisinə görə (cədvəl 13.10) uduzmağın riski çox böyükdür ($r_{24} = 6$ olduğuna görə). A_1 strategiyası isə təbiətin bütün mümkün vəziyyətlərində bu risklə müqayisədə daha kiçik riskə malik olduğu üçün $\left[\max_j r_{1j} = \max_j \{2,\ 2,\ 4,\ 0\} = 4\right]$ A_2 strategiyası ilə müqayisədə daha əlverişli strategiya sayıla bilər.◀

Qeyri-müəyyənlik şəraitində qərarın qəbul edilməsini əsaslandırmaq üçün təbiətin vəziyyətlərinin qiymətləndirilməsi kriteriyaları haqqında razılığa gəlmək lazımdır. Bu vəziyyətlər haqqında informasiyanın növündən asılı olaraq kriteriyalar müxtəlif ola bilər. Nəticədə qəbul edilmiş qərarlar da müxtəlif olacaqdır.

Təbiətin bütün $T_1, T_2, ..., T_n$ vəziyyətlərinin ehtimalları məlum olduqda qeyri-müəyyənlik şəraitində qərarın qəbul edilməsi məsələsi daha sadə həll edilir. Bu ehtimalları $q_1, q_2, .., q_n$ ilə işarə edək. Aydındır ki, bu halda $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$ şərti ödənməlidir.

Maksimum etməyə çalışdığımız effektivlik kriteriyası olaraq uduşun orta qiymətini (riyazi gözləməsini) götürək. Bu kəmiyyət təbiətin vəziyyətlərinin q_j ehtimallarını nəzərə almaqla müəyyən edilir. A oyunçusunun hər bir strategiyası üçün bu orta qiymətləri $\overline{a_i}$ ilə işarə edək. Onda:

$$\overline{a_i} = a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + ... + a_{in}q_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}q_j$$

alırıq.

Optimal strategiya olaraq A_i strategiyalarından elə biri seçilməlidir ki, bu strategiyaya görə $\overline{a_i}$ maksimum olsun, yəni:

$$a_i^* = \max_i \overline{a_i}$$

burada a_i^* – oyunun verilmiş şərtlərində A oyunçusunun maksimal orta uduşudur.

Bu cür yanaşma əsasında qeyri-müəyyənlik şəraitində qərarın qəbul edilməsi məsələsi faktiki olaraq müəyyənlik şəraitində qərarın qəbul edilməsi məsələsinə çevrilir (bütün A_i strategiyaları üçün $\overline{a_i}$ uduşları birqiymətli şəkildə məlumdur). Lakin bu halda qəbul edilmiş qərar ayrılıqda götürülmüş hal üçün deyil, orta hesabla, yəni, eyni bir

oyunun çoxsaylı təkrarlanması zamanı optimal olur. Məsələn, tutaq ki, mallar açıq havada saxlanılır. Bu halda hava şəraiti malların keyfiyyətinə bilavasitə təsir göstərir. Fərz edək ki, əvvəlcədən məlum olmayan meteoroloji şərait 4 vəziyyətə T_1, T_2, T_3 və T_4 vəziyyətlərinə ayrıla bilər. Bu vəziyyətlərin ehtimalları uyğun olaraq $q_1 = 0{,}1; q_2 = 0{,}2; q_3 = 0{,}5; q_4 = 0{,}2 -$ dir (məsələn, ay ərzində bütün günlərin yağışlı keçəcəyi ehtimalı 0,1-ə, aydın olmasının ehtimalı 0,5-ə, aralıq vəziyyətlərin ehtimalı isə 0,2-yə bərabərdir). Fərz edək ki, A oyunçusu A_1, A_2, A_3 kimi üç müxtəlif strategiya tətbiq edə bilər. Bu halda o, hər bir həlldən müxtəlif məbləğdə mənfəət alacaq. Bu mənfəətləri ilkin şərtlərlə bərabər cədvəl şəklində göstərək (cədvəl 13.10):

Cədvəl 13.10

$A \backslash T$	T_1	T_2	T_3	T_4	$\overline{a_i}$
A_1	1	4	5	9	5,2
A_2	3	8	4	3	4,5
A_3	4	6	6	2	5,0
q_j	0,1	0,2	0,5	0,2	

Bu cədvəlin son sətirində təbiətin vəziyyətlərinin q_j ehtimalları göstərilmişdir. Sonuncu sütunda isə, gözlənilən $\overline{a_i}$ qiymətləri göstərilmişdir. Bu sütundan görünür ki, A_1 strategiyası oyunçuya 5,2-yə bərabər ən böyük orta uduş verən optimal strategiyadır.

Biz insanın təbiətlə oyununun həllinə başlayan zaman bir qayda olaraq təbiətin müxtəlif vəziyyətlərinin ehtimalları haqqında informasiyaya malik olmuruq. Bu halda həmin ehtimalları subyektiv müəyyən etmək lazım gəlir. Ən sadə yanaşmada bu vəziyyətlər bərabər ehtimallı hesab edilir.

$$q_1 = q_2 = ... = q_n = \frac{1}{n}$$

Burada $(q_1, q_2, ..., q_n)$ təbiətin $(T_1, T_2, ..., T_n)$ vəziyyətlərinin ehtimallarıdır. Bu yanaşmaya ***«Laplasın qeyri-kafi əsaslandırma»*** prinsipi deyilir.

Daha mürəkkəb yanaşmada bu vəziyyətlər qeyri bərabər ehtimallı hesab edilir. Belə olduqda təbiətin vəziyyətlərini qiymətləndirmək üçün yuxarıda nəzərdən keçirdiyimiz minimaks prinsipindən istifadə oluna bilər. Bu prinsipə görə təbiətin vəziyyətinin qiymətləndirilməsi aşağıdakı kriteriyalar üzrə aparılır:

1. Vald kriteriyası: $W_i = \max_i \min_j a_{ij}$

2. Sevidj kriteriyası: $S_i = \min_i \max_j r_{ij}$

3. Qurvits kriteriyası: $H_i = \max_i (x \min_j a_{ij} + (1-x) \max_j a_{ij})$

$$0 \le x \le 1$$

Vald və Sevidj kriteriyaları pessimist kriteriyalardır. Belə ki, oyunçu belə hesab edir ki, təbiət ona qarşı şüurlu oyunçu kimi çıxış edir və hər vasitə ilə onun uduşunu azaltmağa çalışır. Bu vəziyyətdə birinci kriteriyaya görə oyunçu minimum uduşunu maksimum edir, ikinci halda isə maksimum riskini minimum edir. Bu kriteriyalardan fərqli olaraq Qurvits kriteriyası pessimist-optimist kriteriyadır. Belə ki, $x = 1$ olduqda bu kriteriya Valdın pessimist kriteriyasına çevrilir. $x = 0$ olduqda isə

$$H_i = \max_i \max_j a_{ij}$$

alınır və ifrat dərəcədə nikbin kriteriya formalaşır. Daha doğrusu, oyunçu belə hesab edir ki, hər şey onun ürəyincə olacaq və belə əlverişli şəraitdə o, özünün maksimal uduşunu maksimum etmək istəyir.

Qeyd edək ki, x sabitinin qiymətinin seçilməsi qərar qəbul edən şəxsin riskə nə dərəcədə meylli olması ilə bağlıdır. Belə ki, əgər qərar qəbul edən şəxs riskə meylli deyilsə, onda x – in qiymətini vahidə yaxın götürür ($x = 0{,}6; 0{,}7$ və s.). Əgər qərar qəbul edən şəxs risk etməyə meyllidirsə, onda x – in qiyməti 0-a yaxın qəbul edir ($x = 0{,}4; 0{,}3$ və s.).

Təbiətin vəziyyətinin bu kriteriyalardan hər hansı birinə görə qiymətləndirilməsi çox zaman düzgün olmayan nəticəyə gətirib çıxarır. Odur ki, təbiətin vəziyyətini bu kriteriyalardan hər birinə görə qiymətləndirmək, sonra isə yekun qərar vermək lazımdır.

Təbiətin vəziyyətinin qiymətləndirilməsi kriteriyalarının tətbiqinə aid misala baxaq.

►**Məsələ 13.9.** Fərz edək ki, ticarət müəssisəsi yarmarkada öz mallarını satmaq üçün aşağıdakı 4 strategiyanı tətbiq edə bilər: A_1, A_2, A_3, A_4. Bu və ya digər strategiyanın seçilməsi alınacaq nəticənin

mümkün variantları olan T_1, T_2, T_3 -dən asılıdır. Uduş matrisi (mənfəətin qiymətləndirilməsi, min manat) aşağıdakı kimidir:

$\underline{x = 0{,}4}$

Cədvəl 13.11

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3
A_1	2	3	1,5
A_2	7,5	2	3,5
A_3	2,5	8	2,5
A_4	8,5	5	4,5

Qeyri müəyyənlik şəraitində optimal qərarların qəbul edilməsi kriteriyaları, başqa sözlə desək, Vald, Sevidj və Qurvits kriteriyaları əsasında ticarət müəssisəsinin optimal təsərrüfat strategiyasını müəyyən etmək lazımdır.

Həlli: Vald, Sevidj və Qurvits kriteriyalarını tətbiq etməklə ticarət müəssisəsinin optimal davranış strategiyasını seçək:

Vald kriteriyası üzrə:

Uduş matrisinin hər bir sətirində ən kiçik a_i uduşu tapaq (cədvəl 13.12).

Cədvəl 13.12

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	a_i
A_1	2	3	1,5	1,5
A_2	7,5	2	3,5	2
A_3	2,5	8	2,5	2,5
A_4	8,5	5	4,5	4,5

Bu a_i uduşları içərisində ən böyüyü 4,5-dir. Deməli, Vald kriteriyasına görə optimal strategiya minimum mənfəətlər içərisində maksimumu təmin edən A_4 strategiyasıdır.

<u>Sevidj kriteriyası üzrə.</u>

Risk matrisi quraq. Bunun üçün ödəmə matrisindəki hər bir

elementi həmin elementin yerləşdiyi sütundakı ən böyük elementdən çıxırıq. Nəticədə aşağıdakı risk matrisini alırıq (cədvəl 13.13):

Cədvəl 13.13

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	r_i
A_1	6,5	5,0	3,0	6,5
A_2	1,0	6,0	1,0	6,0
A_3	6,0	0	2,0	6,0
A_4	0	3,0	0	3,0

Əlavə r_i sütununda hər bir sətrin maksimal r_i riski əks etdirilmişdir. r_i -lərin içərisində ən kiçik qiymət 3-dür. Deməli, Sevidj kriteriyası üzrə optimal təsərrüfat strategiyası maksimal riskin minimal kəmiyyətini təmin edən A_4 strategiyasıdır.

Qurvits kriteriyası üzrə:

Fərz edək ki, $x = 0{,}4$ -dür. Yəni qərar qəbul edən şəxs azacıq optimizm tərəfə meyllidir. Oyunun ilkin ödəmə (uduş) matrisinə sağdan daha 3 sütun əlavə edək. 1-ci sütuna oyunçunun hər bir strategiyası üzrə uduşunun α_i minimal qiymətləri ("pessimistik" qiymətlər), 2-ci sütuna oyunçunun hər bir strategiyası üzrə uduşunun ω_i maksimal qiymətləri ("optimist" qiymətlər), 3-cü sütuna isə onların

$$h_i = xa_i + (1-x)\omega_i = 0{,}4a_i + 0{,}6\omega_i$$

burada:

$$a_i = \min_j a_{ij}$$

$$\omega_i = \max_j a_{ij}$$

formulası üzrə hesablanmış orta çəkilərini, daha doğrusu

$$h_1 = 0{,}4 \cdot 1{,}5 + 0{,}6 \cdot 3 = 0{,}6 + 1{,}8 = 2{,}4$$

$$h_2 = 0{,}4 \cdot 2 + 0{,}6 \cdot 7{,}5 = 0{,}8 + 4{,}5 = 5{,}3$$

$$h_3 = 0{,}4 \cdot 2{,}5 + 0{,}6 \cdot 8 = 1 + 4{,}8 = 5{,}8$$

$$h_4 = 0{,}4 \cdot 4{,}5 + 0{,}6 \cdot 8{,}5 = 1{,}8 + 5{,}1 = 6{,}9$$

ədədlərini yerləşdirək (cədvəl 13.14):

Cədvəl 13.14

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	a_i	ω_i	h_i
A_1	2	3	1,5	1,5	3	2,4
A_2	7,5	2	3,5	2	7,5	5,3
A_3	2,5	8	2,5	2,5	8	5,8
A_4	8,5	5	4,5	4,5	8,5	6,9

Cədvəldən görünür ki, h_i-lərin içərisindən maksimal qiymət 6,9-dur. Deməli, Qurvits kriteriyasına görə optimizm tərəfə azacıq üstünlüklə ($x = 0{,}4 < 0{,}5$) optimal təsərrüfat strategiyası A_4 hesab edilir və qərar qəbul edən şəxs bu strategiyaya üstünlük verməlidir.

Göründüyü kimi, hər üç kriteriya A_4 strategiyasına üstünlük verir. Deməli, A_4 strategiyası optimal təsərrüfat strategiyasıdır.

Cavab: Hər 3 kriteriyaya görə ticarət müəssisəsinin optimal təsərrüfat strategiyası A_4 strategiyasıdır.◄

Mövzu üzrə praktikum

Aşağıdakı matris oyunlarını Qrafik üsulu ilə həll edin			
13.10	$a=\begin{bmatrix}7 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$	13.11	$a=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix}$
13.12	$a=\begin{bmatrix}4 & 6 & 2\\ 5 & 1 & 3\end{bmatrix}$	13.13	$a=\begin{bmatrix}2 & 4 & 5 & 6 & 3\\ 8 & 3 & 7 & 1 & -2\end{bmatrix}$
13.14	$a=\begin{bmatrix}2 & 7\\ 8 & 3\\ 6 & 4\end{bmatrix}$	13.15	$a=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & 8\\ 9 & 1\\ 6 & 7\end{bmatrix}$
Aşağıdakı matris oyunlarının həllini tapın			
13.16	$a=\begin{bmatrix}8 & 7 & 4\\ 5 & 9 & 2\\ 6 & 3 & 1\end{bmatrix}$	13.17	$a=\begin{bmatrix}8 & 5\\ 6 & 2\\ 7 & 3\end{bmatrix}$
13.18	$a=\begin{bmatrix}6 & 9 & 12 & 4\\ 5 & 7 & 8 & 1\\ 3 & 10 & 5 & 2\end{bmatrix}$	13.19	$a=\begin{bmatrix}8 & 2 & 4\\ 5 & 7 & 1\\ 14 & 9 & 6\end{bmatrix}$
13.20	$a=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 8 & 2\\ 9 & 7\end{bmatrix}$	13.21	$a=\begin{bmatrix}7 & 4 & 5 & 1\\ 8 & 2 & 3 & 10\\ 9 & 6 & 8 & 12\end{bmatrix}$
13.22	$a=\begin{bmatrix}10 & 2 & 8\\ 16 & 7 & 9\end{bmatrix}$	13.23	$a=\begin{bmatrix}2 & 6 & 5\\ 3 & 8 & 4\end{bmatrix}$

13.24	$a=\begin{bmatrix}1 & 6 & 4\\ 5 & 2 & 3\\ 11 & 9 & 15\\ 8 & 7 & 6\end{bmatrix}$	13.25	$a=\begin{bmatrix}5 & 6 & 7 & 8\\ 3 & 4 & 6 & 7\\ 8 & 7 & 9 & 10\\ 3 & 5 & 8 & 9\end{bmatrix}$
13.26	$a=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 6 & 5 & 3\end{bmatrix}$	13.27	$a=\begin{bmatrix}5 & 6 & 2\\ 3 & 4 & 8\\ 7 & 5 & 1\end{bmatrix}$
13.28	$a=\begin{bmatrix}7 & 1\\ 2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$	13.29	$a=\begin{bmatrix}4 & 9\\ 5 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$
13.30	$a=\begin{bmatrix}6 & 2 & 4\\ 5 & 8 & 1\\ 2 & 3 & 7\end{bmatrix}$	13.31	$a=\begin{bmatrix}3 & 6 & 2\\ 1 & 4 & 7\\ 5 & 8 & 1\end{bmatrix}$
13.32	$a=\begin{bmatrix}1 & 7 & 3 & 9\\ 5 & 6 & 2 & 4\end{bmatrix}$	13.33	$a=\begin{bmatrix}6 & 2 & 1\\ 3 & 8 & 4\end{bmatrix}$
13.34	$a=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6 & 8\\ 9 & 2 & 3 & 7\\ 1 & 3 & 10 & 2\end{bmatrix}$	13.35	$a=\begin{bmatrix}1 & 7 & 2 & 3\\ 5 & 8 & 1 & 6\\ 3 & 4 & 9 & 10\end{bmatrix}$

13.36-13.40. Pərakəndə ticarət müəssisəsi bazar konyukturasının və alıcıların tələbinin dəyişməsini nəzərə almaqla yarmarkada mallarını satmaq üçün bir necə satış strategiyası variantını hazırlamışdır. Mənfəətin məbləği uduş matrisi (ödəmə matrisi) şəklində formalaşdırılmışdır. Malların optimal satış strategiyasını tapın:

$x = 0{,}7$

13.36

Mənfəətin miqdarı, min manatla					
Satış strateqiyası	***Bazar konyukturasının və tələbin vəziyyəti***				
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
A_1	*7,1*	*9,3*	*9,2*	*8,4*	*6,6*
A_2	*9,3*	*7,2*	*8,7*	*6,5*	*8,9*
A_3	*5,9*	*8,8*	*7,3*	*9,4*	*5,1*
A_4	*8,8*	*6,4*	*6,4*	*7,4*	*9,5*
A_5	*6,3*	*5,8*	*5,5*	*9,3*	*7,5*

$x = 0{,}8$

13.37

Mənfəətin miqdarı, min manatla					
Satış strateqiyası	***Bazar konyukturasının və tələbin vəziyyəti***				
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
A_1	*5,6*	*7,4*	*7,3*	*6,2*	*4,4*
A_2	*3,9*	*5,7*	*3,2*	*4,3*	*6,1*
A_3	*6,6*	*4,4*	*5,8*	*3,5*	*7,1*
A_4	*4,5*	*3,8*	*6,3*	*5,9*	*3,2*
A_5	*7,6*	*6,4*	*4,9*	*7,2*	*5,1*

$x = 0{,}6$

13.38

Mənfəətin miqdarı, min manatla					
Satış strateqiyası	***Bazar konyukturasının və tələbin vəziyyəti***				
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
A_1	*9,1*	*6,4*	*8,2*	*5,6*	*8,6*
A_2	*6,5*	*9,2*	*6,3*	*8,4*	*10,8*
A_3	*5,9*	*10,0*	*9,4*	*6,2*	*5,4*
A_4	*10,0*	*8,3*	*10,6*	*9,5*	*6,1*
A_5	*8,1*	*5,9*	*5,7*	*10,2*	*9,3*

$x = 0{,}5$

13.39

Mənfəətin miqdarı, min manatla					
Satış strateqiyası	***Bazar konyukturasının və tələbin vəziyyəti***				
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
A_1	*7,1*	*6,4*	*5,7*	*11*	*9,2*
A_2	*11*	*7,2*	*8,1*	*9,4*	*8,3*
A_3	*5,6*	*9,3*	*7,3*	*8,2*	*5,6*
A_4	*9,1*	*11*	*9,5*	*7,4*	*6,3*
A_5	*6,5*	*8,5*	*11*	*5,8*	*7,5*

$x = 0{,}4$

13.40

Mənfəətin miqdarı, min manatla					
Satış strateqiyası	***Bazar konyukturasının və tələbin vəziyyəti***				
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
A_1	*11,1*	*9,4*	*5,8*	*6,7*	*10,2*
A_2	*7,5*	*11,2*	*9,3*	*10,3*	*6,9*
A_3	*6,3*	*10,4*	*11,3*	*9,2*	*8,1*
A_4	*1,5*	*8,2*	*7,6*	*11,4*	*9,1*
A_5	*5,7*	*4,9*	*13,0*	*7,8*	*11,7*

13.41. Regionun elektrik enerjisinə olan tələbini ödəmək üçün 3 strategiya tətbiq oluna bilər:

A_1 – su elektrik stansiyasının tikilməsi;

A_2 – istilik elektrik stansiyasının tikilməsi;

A_3 – atom elektrik stansiyasının tikilməsi;

Elektrik stansiyasinıın tikilməsinin iqtisadi səmərəliliyini təbiətin $T_i (i = \overline{1, s})$ vəziyyətlərinin coxluğunu formalaşdiran təsadüfü faktorlardan asilidir.

İqtisadi səmərəliliyin hesablanmasinin nəticələri aşağıdakı çədvəldə verilmişdir:

Stansiyanın tipi	***Təbiətin vəziyyəti***				
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
A_1	*40*	*70*	*30*	*25*	*45*
A_2	*60*	*50*	*45*	*20*	*30*
A_3	*50*	*30*	*40*	*35*	*60*

$x = 0{,}4$ qəbul edərək, səmərəli elektrik stansiyası variantını seçin.

13.42. Firma minik avtomobillərinin kütləvi istehsalı ücün hazırlıq işləri görür. Avtomobilin layihəsinin dörd variantı $A_j\,(j=\overline{1,4})$ vardır. Istehsalın rentabelliyindən asılı olaraq hər bir variantın v_{ji} iqtisadi səmərəliliyi müəyyən edilmişdir. Bu göstərici 3 dövrün (T_1, T_2, T_3) başa çatmasından asılı olaraq təbiətin vəziyyəti kimi qiymətləndirilir. Müxtəlif layihələr üçün iqtisadi səmərəliliyin qiyməti və təbiətin vəziyyətləri aşağıdakı cədvəldə göstərilmişdir. $x=0{,}1$ qəbul edərək Vald, Sevidj və Qurvits kriteriyaları üzrə istehsal ediləcək avtomobilin ən yaxşı layihə variantını tapın.

Layihələr	***Təbiətin vəziyyəti***		
	T_1	T_2	T_3
A_1	*20*	*25*	*15*
A_2	*25*	*24*	*10*
A_3	*15*	*28*	*12*
A_4	*9*	*30*	*20*

Mövzu üzrə testlər

1. Oyunlar nəzəriyyəsinin əsas anlayışları ilə bağlı aşağıdakı mülahizələrdən doğru olanını seçin:

- Şəxsi gediş dedikdə

A) Oyunun qaydalarında nəzərdə tutulmayan gediş başa düşülür;
B) Oyunçu tərəfindən icra edilən, lakin bu oyunçu tərəfindən deyil, oyunun qaydalarını gözləməklə təsadüfi seçmə mexanizmi tərəfindən seçilən gediş başa düşülür;
C) Oyunun qaydalarını gözləməklə oyunçu tərəfindən seçilən və icra edilən gediş başa düşülür;
D) Oyunun qaydalarını gözləməklə oyunçu tərəfindən seçilən, lakin bu oyunçu tərəfindən deyil, digər oyunçu tərəfindən icra edilən gediş başa düşülür;
E) Ehtimallı gediş başa düşülür.

2. Oyunlar nəzəriyyəsinin əsas anlayışları ilə bağlı aşağıdakı mülahizələrdən doğru olanını seçin.

- Təsadüfi gediş dedikdə:

A) Oyunun qaydalarında nəzərdə tutulmayan gediş başa düşülür;
B)Oyunçu tərəfindən icra edilən, lakin bu oyunçu tərəfindən deyil, oyunun qaydalarını gözləməklə təsadüfi seçmə mexanizmi tərəfindən seçilən gediş başa düşülür;
C) Oyunun qaydalarını gözləməklə oyunçu tərəfindən seçilən və icra edilən gediş başa düşülür;
D) Oyunun qaydalarını gözləməklə oyunçu tərəfindən seçilən, lakin bu oyunçu tərəfindən deyil, digər oyunçu tərəfindən icra edilən gediş başa düşülür;
E) Ehtimallı gediş başa düşülür.

3. Oyunlar nəzəriyyəsinin riyazi aparatı ilə bağlı aşağıdakı mülahizələrdən doğru olanını seçin.

-Oyunun aşağı qiyməti dedikdə:

A) A oyunçusunun maksimin uduşu başa düşülür;
B) A oyunçusunun orta uduşu başa düşülür;
C) B oyunçusunun minimaks uduzması başa düşülür;
D) B oyunçusunun orta uduzması başa düşülür;
E) A oyunçusunun minimaks uduşu başa düşülür.

4. Oyunlar nəzəriyyəsinin riyazi aparatına aid aşağıdakı mülahizələrdən doğru olanını seçin.

-Oyunun yuxarı qiyməti dedikdə:

A) A oyunçusunun maksimin uduşu başa düşülür;
B) A oyunçusunun orta uduşu başa düşülür;
C) B oyunçusunun minimaks uduzması başa düşülür;
D) B oyunçusunun orta uduzması başa düşülür;
E) B oyunçusunun maksimum uduzması başa düşülür.

5. Oyunçulara oyunda özlərinin maksimin və minimaks strategiyalarından istifadə etməyi tövsiyə edən prinsipə ……deyilir:

A) Optimallıq prinsipi;
B) Kriteriyalılıq prinsipi;
C) Minimaks prinsipi;
D) Zərurilik prinsipi;
E) Kafilik prinsipi.

6. Əgər oyunda $\alpha = \beta$ olarsa, onda belə oyuna:

A) Qarışıq strategiyalı oyun deyilir;
B) Xalis strategiyalı oyun deyilir;
C) Düyün nöqtəli oyun deyilir;
D) Sonlu oyun deyilir;
E) Sonsuz oyun deyilir.

7. Əgər oyun düyün nöqtəlidirsə, onda oyunçuların optimal strategiyaları necə təyin olunur?

A) Maksimin strategiya A oyunçusunun, minimaks strategiya isə B oyunçusunun optimal strategiyası olur;
B) Maksimin strategiya B oyunçusunun, minimaks strategiya isə A oyunçusunun optimal strategiyası olur;
C) Maksimin strategiya A oyunçusunun optimal strategiyası olur, B oyunçusu üçün isə optimal strategiya mövcud olmur;
D) Minimaks strategiya B oyunçusunun optimal strategiyası olur, A oyunçusu üçün isə optimal strategiya mövcud olmur;
E) Oyunun həlli xalis strategiyalar şəklində mövcud olmadığı üçün qarışıq strategiyalara keçmək lazımdır.

8. Əgər oyunda düyün nöqtəsi yoxdursa, onda oyunçuların optimal strategiyaları necə təyin olunur?

A) Maksimin strategiya *A* oyunçusunun, minimaks strategiya isə *B* oyunçusunun optimal strategiyası olur;
B) Maksimin strategiya *B* oyunçusunun, minimaks strategiya isə *A* oyunçusunun optimal strategiyası olur;
C) Maksimin strategiya *A* oyunçusunun optimal strategiyası olur, *B* oyunçu üçün isə optimal strategiya mövcud olmur;
D) Minimaks strategiya *B* oyunçusunun optimal strategiyası olur, *A* oyunçu üçün isə optimal strategiya mövcud olmur;
E) Oyunun həlli xalis strategiyalar şəklində mövcud olmadığı üçün qarışıq strategiyalara keçmək lazımdır.

9. Oyunlar nəzəriyyəsinin riyazi aparatı ilə bağlı aşağıdakı mülahizələrdən doğru olanını seçin.

-Oyunçunun qarışıq strategiyası dedikdə:

A) Oyunçunun xalis strategiyalarından hər hansı biri başa düşülür;
B)Oyunçunun xalis strategiyalarının təsadüfi növbələşməsi yolu ilə yaradılan strategiya başa düşülür;
C)Oyunçunun xalis strategiyalarının qanunauyğun şəkildə növbələşməsi yolu ilə yaradılmış strategiya başa düşülür;
D) Oyunçunun maksimin strategiyası başa düşülür;
E) Oyunçunun minimaks strategiyası başa düşülür.

10. Oyunlar nəzəriyyəsində aktiv strategiyalarla bağlı aşağıdakı təriflərdən doğru olanını seçin.

- Oyunçunun aktiv strategiyaları dedikdə:

A) Optimal qarışıq strategiyaya daxil olmayan xalis strategiyalar başa düşülür;
B) Optimal qarışıq strategiyaya sıfırdan böyük ehtimalla daxil olan xalis strategiyalar başa düşülür;
C) Optimal qarışıq strategiyada iştirak ehtimalları məlum olmayan xalis strategiyalar başa düşülür;
D) Optimal qarışıq strategiyada iştirak ehtimalları məlum olan xalis strategiyalar başa düşülür;
E) Cəmi 1-ə bərabər olan xalis strategiyalar başa düşülür.

11. Oyunçunun optimal strategiyası dedikdə:

A) Oyunçuya maksimum uduş təmin edən strategiya başa düşülür;
B) Oyunun çoxsaylı təkrarlanması zamanı oyunçuya maksimal mümkün orta uduş və ya minimal mümkün orta uduzma təmin edən strategiya

başa düşülür;
C) Oyunçuya minimum uduzma təmin edən strategiya başa düşülür;
D) Oyunçuya orta uduş təmin edən strategiya başa düşülür;
E) Oyunçuya orta uduzma təmin edən strategiya başa düşülür.

12. $a = \left\| a_{ij} \right\|_{m,n}$ **ödəmə matrisi ilə verilmiş oyunda** $S_A^* = S_A^*(p_1, p_2, ..., p_m)$ **və** $S_B = S_B^*(q_1, q_2, ..., q_n)$ **optimal qarışıq strategiyaların tapılması aşağıdakı bir cüt simmetrik qoşma məsələyə gətirilmişdir:**

$$L_x = \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min \qquad L_y = \sum_{j=1}^{n} y_j \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1 \quad (j = \overline{1,n}) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq 1 \quad (i = \overline{1,m})$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}) \qquad y_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n})$$

Bu məsələlərdə x_i *və* y_j *dəyişənləri nəyi əks etdirir?*

A) $x_i = p_i$; $y_j = q_j$

B) $x_i = \dfrac{p_i}{q_j}$; $y_j = \dfrac{q_j}{P_i}$

C) $x_i = \dfrac{p_i}{\gamma}$; $y_j = \dfrac{q_j}{\gamma}$

D) $x_i = \dfrac{\gamma}{p_i}$; $y_j = \dfrac{\gamma}{q_j}$

E) $x_i = \dfrac{q_j}{\gamma}$; $y_j = \dfrac{p_i}{\gamma}$

13. İnsanın təbiətlə oyunlarında «Laplasın qeyri-kafi əsaslandırma prinsipi»nə görə təbiətin müxtəlif vəziyyətləri aşağıdakı kimi qiymətləndirilir:

A) Bütün vəziyyətlər qeyri-bərabər ehtimallı hesab edilir;
B) Bütün vəziyyətlər bərabər ehtimallı hesab edilir;
C) Bir vəziyyətin ehtimalı 1-ə, qalanları isə sıfıra bərabər götürülür;
D) Vəziyyətlər bərabər və qeyri-bərabər ehtimallı ola bilər;
E) Vəziyyətlərdən heç olmazsa birinin ehtimalı 0-a bərabər olmalıdır.

14. İnsanın təbiətlə oyunlarında aşağıdakı ifadələrdən hansı Vald kriteriyası ola bilər:

A) $w = \max_i \min_j a_{ij}$

B) $w = \max_i \max_j a_{ij}$

C) $w = \min_i \max_j a_{ij}$

D) $w = \min_i \min_j a_{ij}$

E) $w = \max_i a_{ij} + \min_j a_{ij}$

15. İnsanın təbiətlə oyunlarında aşağıdakı ifadələrdən hansı Sevidj kriteriyası ola bilər:

A) $S_i = \max_i \min_j r_{ij}$

B) $S_i = \min_i \max_j r_{ij}$

C) $S_i = \max r_{ij} + \max r_{ij}$

D) $S_i = \min \min r_{ij}$

E) $S_i = \max r_{ij} - \min r_{ij}$

16. İnsanın təbiətlə oyunlarında aşağıdakı ifadələrdən hansı Qurvits kriteriyası ola bilər:

A) $H = \max_i [x \min_j a_{ij} + (1-x) \max_j a_{ij}]$

B) $H = \max_i [x \min_j a_{ij} + (1-x) \min_j a_{ij}]$

C) $H = \max_i [x \max_j a_{ij} - (1-x) \max_j a_{ij}]$

D) $H = \max_i [(1-x) \max_j a_{ij} + (1-x) \min_j a_{ij}]$

E) $H = \max_i [(1+x) \max_j a_{ij} + (1-x) \min_j a_{ij}]$

17. $H = \max_i [x \min_j a_{ij} + (1-x) \max_j a_{ij}]$ **Qurvits kriteriyasında** x **sabitinin qiyməti neçəyə bərabər götürülür?**

A) $-\infty \le x \le +\infty$

B) $-1 \le x \le +1$

C) $0 \le x \le 1$
D) $1 \le x \le 2$
E) $0 \le x \le +\infty$

18. Risk şəraitində aparılan oyunlarda verilmiş ödəmə matrisinə görə risk matrisini qurmaq üçün:

A) Ödəmə matrisinin hər bir sətirindəki ən böyük elementdən bu sətirin bütün elementlərini çıxmaq lazımdır;
B) Ödəmə matrisinin hər bir sütunundakı ən böyük elementdən bu sütunun bütün elementlərini çıxmaq lazımdır;
C) Ödəmə matrisinin hər bir sətirindəki ən kiçik elementi bu sətirin bütün elementlərindən çıxmaq lazımdır;
D) Ödəmə matrisinin hər bir sütunundakı ən kiçik elementi bu sütunun bütün elementlərindən çıxmaq lazımdır;
E) Ödəmə matrisindəki ən böyük elementdən bu matrisin bütün elementlərini çıxmaq lazımdır.

19. Fərz edək ki, risk şəraitində aparılan oyunda «təbiət» T_j vəziyyətindədir. Oyunçunun A_i strategiyasının riskinin hesablanması formulası necə ifadə ediləcəkdir?

A) $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$

B) $r_{ij} = \beta_j + a_{ij}$

C) $r_{ij} = a_{ij} - \beta_j$

D) $r_{ij} = a_{ij} + \beta_j$

E) $r_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{\beta_j}$

CAVABLAR

I BÖLMƏ

Fəsil 1

1.4. Məsələnin iqtisadi riyazi modelini qurmaq üçün aşağıdakı endogen parametrlərdən istifadə edək:

x_1 – investorun F_1 firmasının səhmlərinə sərf etdiyi vəsait;

x_2 – investorun F_2 firmasının səhmlərinə sərf etdiyi vəsait;

x_3 – investorun F_3 firmasının səhmlərinə sərf etdiyi vəsait.

Onda məsələnin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı kimi olaçaqdır:

$$Z(x) = 0{,}14x_1 + 0{,}11x_2 + 0{,}22x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 400.000 \\ x_3 - 0{,}15(x_1 + x_2) \le 0 \\ x_2 \ge 40.000 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

1.5.Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini qurmaq üşün aşağıdakı endogen parametrlərdən istifadə edək:

x_1 – qida əlavəsi hazırlamaq üçün istifadə ediləcək ağ unun miqdarı (kq-la);

x_2 – qida əlavəsi hazırlamaq üçün istifadə ediləcək kəpəkli unun miqdarı (kq-la).

Onda məsələnin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı kimi olacaqdır:

$$Z(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 800 \\ 0{,}04x_1 + 0{,}3x_2 - 0{,}25(x_1 + x_2) \geq 0 \\ 0{,}01x_1 + 0{,}03x_2 - 0{,}04(x_1 + x_2) \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

1.6. Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini qurmaq üşün aşağıdakı endogen parametrlərdən istifadə edək:

$x_1 -$ gün ərzində dəmiryol vağzalından yola salınacaq sürət qatarlarının sayı;

$x_2 -$ gün ərzində dəmiryol vağzalından yola salınacaq sərnişin qatarlarının sayı.

Onda məsələnin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı kimi olacaqdır:

$$Z(x) = 656x_1 + 626x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_1 \leq 8 \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 90 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 80 \\ x_1 + 3x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$x_1, x_2 -$ tam ədədlərdir.

1.7. Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini qurmaq üçün aşağıdakı endogen parametrlərdən istifadə edək:

$x_1 - 1 -$ ci növbəyə təyin edilən əlavə işçilərin sayı;

$x_2 - 2 -$ ci növbəyə təyin edilən əlavə işçilərin sayı;

$x_3 - 3 -$ cü növbəyə təyin edilən əlavə işçilərin sayı;

$x_4 - 4 -$ cü növbəyə təyin edilən əlavə işçilərin sayı;

$x_5 - 5 -$ ci növbəyə təyin edilən əlavə işçilərin sayı;

$x_6 - 6 -$ cı növbəyə təyin edilən əlavə işçilərin sayı;

$x_7 - 7 -$ ci növbəyə təyin edilən əlavə işçilərin sayı;

$y_1 - 1 -$ ci növbəyə təyin edilən daimi işçilərin sayı;

$y_2 - 2 -$ ci növbəyə təyin edilən daimi işçilərin sayı;

$y_3 - 3 -$ cü növbəyə təyin edilən daimi işçilərin sayı;

$y_4 - 4 -$ cü növbəyə təyin edilən daimi işçilərin sayı;

$y_5 - 5 -$ ci növbəyə təyin edilən daimi işçilərin sayı və 6-7-8- ci növbələr də daxil olmaqla işləyəcək işçilərin sayı.

$$Z(x) = 10(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + 20(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 \geq 5 \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \geq 10 \\ x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 \geq 22 \\ x_3 + x_4 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 16 \\ x_4 + x_5 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 12 \\ x_5 + x_6 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 20 \\ x_6 + x_7 + y_4 + y_5 \geq 17 \\ x_7 + y_5 \geq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 \geq 1 \\ y_5 \geq 1 \\ y_1 \leq 3 \\ y_2 \leq 3 \\ y_3 \leq 3 \\ y_4 \leq 3 \\ y_5 \leq 3 \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,7})$

$y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,5})$

x_j və y_i – tam ədədlərdir

Fəsil 3

3.14. $X^* = (8,\ 4)$ olduqda $\max Z(x) = 20$ olur, $X^{(1)*} = (2,\ 0)$, $X^{(2)*} = (1,\ 2)$ olduqda $\min Z(x) = 4$ olur. **3.15.** $\max Z(x) = +\infty$, $X^* = (0,\ 1)$ olduqda $\min Z(x) = 1$ olur. **3.16.** $X^* = (2,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 2$ olur, $\min Z(x) = -\infty$. **3.17.** Məsələnin şərtləri ziddiyətlidir. **3.18.** $X^* = (6,\ 5)$ olduqda $\max Z(x) = 9$ olur, $X^* = (3,\ 8)$ olduqda $\min Z(x) = -12$ olur. **3.19.** $X^* = (6,\ 4)$ olduqda $\max Z(x) = 32$ olur, $X^* = (3/8,\ 3/4)$ olduqda $\min Z(x) = 9/2$ olur. **3.20.** $X^* = (0,\ 8)$ olduqda $\max Z(x) = 32$ olur, $X^* = (6,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = -6$ olur. **3.21.** $X^{(1)*} = (3,\ 5)$, $X^{(2)*} = (6,\ 4)$ olduqda $\max Z(x) = 18$ olur. **3.22**. $X^{(1)*} = (0,\ 6)$, $X^{(2)*} = (4,\ 4)$ olduqda $\max Z(x) = 12$ olur. **3.23.** $\max Z(x) = +\infty$, $X^* = (4,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = 4$ olur. **3.24.** $\max Z(x) = +\infty$, $X^* = (2,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = 6$ olur. **3.25.** $-3x_1 + 2x_2 = 12$ düz xəttinin $x_1 0 x_2$ koordinat sisteminin 1-ci

kvadrantında yerləşən parçasının bütün nöqtələrində $\max Z(x) = 12$ olur, $\min Z(x) = -\infty$. **3.26.** $\max Z(x) = +\infty$, $X^* = (2,\ 5)$ nöqtəsində və $-x_1 + 2x_2 = 8$ düz xəttinin $(2,\ 5)$ nöqtəsindən sağda yerləşən bütün nöqtələrində $\min Z(x) = -16$ olur. **3.27.** $X^{(1)*} = (6,\ 4)$, $X^{(2)*} = (5,\ 2)$ olduqda $\max Z(x) = 8$ olur, $X^* = (2,\ 4)$ olduqda $\min Z(x) = 0$ olur. **3.28.** $X^* = (3,\ 4)$ olduqda $\max Z(x) = 18$ olur. **3.29.** $\max Z(x) = +\infty$. **3.30.** $\max Z(x) = +\infty$. **3.31.** $X^* = (5,\ 5)$ olduqda $\max Z(x) = 30$ olur, $X^* = (3,\ 3)$ olduqda $\min Z(x) = 18$ olur. **3.32.** $X^{(1)*} = (4,\ 6)$, $X^{(2)*} = (6,\ 4)$ olduqda $\max Z(x) = 20$ olur. **3.33.** $X^* = (3,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 3$ olur, $X^* = (1,\ 4)$ olduqda $\min Z(x) = -11$ olur. **3.34.** $X^{(1)*} = (4,\ 6)$, $X^{(2)*} = (6,\ 3)$ olduqda $\max Z(x) = 120$ olur, $X^* = (8/13,\ 9/13)$ olduqda $\min Z(x) = 210/13$ olur. **3.35.** $X^* = (6,\ 2)$ olduqda $\max Z(x) = 16$ olur, $X^* = (0,\ 3)$ olduqda $\min Z(x) = -3$ olur. **3.36.** $X^* = (6,\ 8)$ olduqda $\max Z(x) = 34$ olur. **3.37.** $X^* = (6,\ 4)$ olduqda $\max Z(x) = -2$ olur, $X^{(1)*} = (3,\ 5)$, $X^{(2)*} = (9,\ 8)$ olduqda $\min Z(x) = -7$ olur. **3.38.** $X^* = (1,\ 4)$ olduqda $\max Z(x) = 27$ olur. **3.39.** $\max Z(x) = +\infty$, $X^{(1)*} = (3/2,\ 1)$, $X^{(2)*} = (15/11,\ 12/11)$ olduqda $\min Z(x) = 12$ olur. **3.40.** $\max Z(x) = +\infty$, $X^* = (3/5,\ 16/5)$ olduqda $\min Z(x) = 19$ olur. **3.41.** $\max Z(x) = +\infty$, $X^* = (2,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = -2$ olur. **3.42.** $X^{(1)*} = (6,\ 4)$, $X^{(2)*} = (4,\ 6)$ olduqda $\max Z(x) = -10$ olur, $X^* = (48/7,\ 52/7)$ olduqda $\min Z(x) = -100/7$ olur. **3.43.** $X^* = (0,\ 3)$ olduqda $\max Z(x) = 12$ olur, $X^* = (0,\ 2)$ olduqda $\min Z(x) = 8$ olur. **3.44.** $\max Z(x) = +\infty$, $X^* = (0,\ 5)$ olduqda $\min Z(x) = -5$ olur. **3.45.** $X^* = (18/7,\ 6/7)$ olduqda

$\max Z(x) = -6/7$ olur, $X^* = (18/5,\ 18/5)$ olduqda $\min Z(x) = -54/5$ olur. **3.46.** $\max Z(x) = +\infty$, $X^* = (1,\ 9/2)$ olduqda $\min Z(x) = 13$ olur. **3.47.** $X^* = (3,\ 2)$ olduqda $\max Z(x) = -13$ olur, $\min Z(x) = -\infty$. **3.48.** $X^* = (1,\ 2)$ olduqda $\min Z(x) = -5$ olur. **3.49.** $X^* = (6,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 24$ olur, $X^* = (2,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = 8$ olur. **3.50**. $\max Z(x) = +\infty$, $X^* = (3/2,\ 1)$ olduqda $\min Z(x) = 6$ olur. **3.51.** $\max Z(x) = +\infty$, $X^* = (3,\ 3)$ olduqda $\min Z(x) = 15$ olur. **3.52.** $X^* = (6,\ 8)$ olduqda $\max Z(x) = 10$ olur. **3.53.** $X^* = (30/11,\ 12/11)$ olduqda $\min Z(x) = 48/11$ olur. **3.54.** $X^* = (12/7,\ 22/7)$ olduqda $\min Z(x) = 58/7$ olur. **3.55.** Məsələnin şərtləri ziddiyyətlidir. **3.56.** $X^* = (54/11,\ 10/11)$ olduqda $\max Z(x) = 84/11$ olur. **3.57.** $X^* = (9/2,\ 1)$ olduqda $\max Z(x) = 25/2$ olur, $X^* = (15/11,\ 80/11)$ olduqda $\min Z(x) = -35/11$ olur. **3.58.** $X^* = (0,\ 4)$ olduqda $\max Z(x) = 4$ olur, $X^* = (6,\ 10)$ olduqda $\min Z(x) = -2$ olur. **3.59.** $X^* = (4,\ 2)$ olduqda $\max Z(x) = -10$ olur, $X^* = (9,\ 12)$ olduqda $\min Z(x) = -15$ olur. **3.60.** $X^* = (3,\ 6)$ olduqda $\max Z(x) = 9$ olur. **3.61**. $X^* = (4,\ 4)$ olduqda $\min Z(x) = 4$ olur. **3.62.** $X^* = (24/5,\ 7/5)$ olduqda $\min Z(x) = 86/5$ olur. **3.63.** $X^* = (0,\ 6)$ olduqda $\max Z(x) = 18$ olur, $X^* = (4,\ 4)$ olduqda $\min Z(x) = 8$ olur. **3.64.** $X^{(1)*} = (6,\ 0,\ 0,\ 10)$, $X^{(2)*} = (2,\ 6,\ 0,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = 52$ olur. **3.65.** $X^* = (3,\ 2,\ 0,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 18$ olur. **3.66.** $X^* = (3,\ 0,\ 0,\ 14)$ olduqda $\max Z(x) = 45$ olur. **3.67.** $\max Z(x) = +\infty$. **3.68.** $X^{(1)*} = (5,\ 1,\ 0,\ 0,\ 10)$, $X^{(2)*} = (6,\ 4,\ 8,\ 0,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 60$ olur. **3.69.** $X^* = (3,\ 7,\ 3,\ 0,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = -53$ olur. **3.70.**

$X^* = (1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 3)$ olduqda $\min Z(x) = 4$ olur. **3.71.** $\min Z(x) = -\infty$ **3.72.** $\min Z(x) = -\infty$ **3.73.** $X^* = (4,\ 1,\ 8,\ 0,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 14$ olur. **3.74.** $X^* = (2/3,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 4/3$ olur. **3.75.** $X^* = (4/7,\ 9/7,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = -19/7$ olur. **3.76.** $X^* = (3,\ 4,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 18$ olur. **3.77.** $X^{(1)*} = (6,\ 6,\ 0)$, $X^{(2)*}(0,\ 18,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = -36$ olur. **3.78.** $X^* = (2/3,\ 14/3,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 62/3$ olur. **3.79.** $X^* = (6,\ 4,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = -26$ olur. **3.80.** $X^{(1)*} = (0,\ 7,\ 0)$, $X^{(2)*} = (2,\ 5,\ 0)$, $X^{(3)*} = (0,\ 6,\ 1)$ olduqda $\max Z(x) = 7$ olur. **3.81.** $X^* = (2,\ 0,\ 4)$ olduqda $\min Z(x) = -14$ olur. **3.82.** $X^* = (1,\ 4,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = -11$ olur. **3.83.** $X^* = (0,\ 1,\ 1)$ olduqda $\min Z(x) = 16$ olur. **3.84.** $X^* = (2,\ 4,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = -2$ olur. **3.85.** $X^* = (2,\ 3,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 14$ olur. **3.86.** $X^* = (3,\ 0,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = -12$ olur. **3.87.** $X^{(1)*} = (2,\ 1,\ 0)$, $X^{(2)*} = (7/4,\ 9/4,\ 3/4)$ olduqda $\min Z(x) = 5$ olur. **3.88.** $X^* = (4,\ 0,\ 5)$ olduqda $\max Z(x) = 9$ olur. **3.89.** $\max Z(x) = +\infty$. **3.90.** $X^* = (4,\ 0,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 20$ olur. **3.91.** $X^{(1)*} = (4,\ 1,\ 0)$, $X^{(2)*} = (7,\ 2,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 1$ olur. **3.92.** $X^* = (1,\ 4,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = 11$ olur. **3.93.** $X^* = (2,\ 2,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = -14$ olur. **3.94.** $X^{(1)*} = (4,\ 2,\ 0)$, $X^{(2)*} = (0,\ 2,\ 4)$, $X^{(3)*} = (1,\ 3,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = -10$ olur. **3.95.** $X^* = (0,\ 3,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 6$ olur. **3.96.** $X^* = (0,\ 3,\ 6)$ olduqda $\max Z(x) = 30$ olur. **3.97.** $\max Z(x) = +\infty$. **3.98**. $X^* = (3,\ 1,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = -8$ olur. **3.99.** $X^{(1)*} = (4,\ 0,\ 0)$, $X^{(2)*} = (4/3,\ 8/3,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 8$ olur. **3.100**. $X^{(1)*} = (0,\ 0,\ 10)$, $X^{(2)*} = (0,\ 2,\ 4)$, $X^{(3)*} = (2/3,\ 8/3,\ 4/3)$, $X^{(4)*} = (2,\ 8/3,\ 0)$, $X^{(5)*} = (10,\ 0,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = 10$ olur. **3.101.**

$X^* = (2,\ 3,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = -12$ olur. **3.102.** $X^* = (0,\ 4/3,\ 1)$ olduqda $\max Z(x) = 6$ olur. **3.103.** $X^* = (8,\ 0,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = -16$ olur. **3.104.** $X^* = (0,\ 28,\ 26)$ olduqda $\min Z(x) = -74$ olur. **3.105**. $X^* = (1/3,\ 2,\ 1/3)$ olduqda $\min Z(x) = 19$ olur. **3.106.** $X^{(1)*} = (2,\ 0,\ 0)$, $X^{(2)*} = (5/3,\ 0,\ 1/6)$ olduqda $\min Z(x) = 2$ olur. **3.107.** $X^* = (3,\ 0,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 15$ olur. **3.108.** $\max Z(x) = +\infty$.**3.109.** $X^{(1)*} = (4,\ 5,\ 0)$, $X^{(2)*} = (7,\ 5,\ 3)$ olduqda $\min Z(x) = 22$ olur. **3.110.** $X^* = (10,\ 0,\ 6,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = -62$ olur. **3.111.** $X^* = (2,\ 0,\ 4,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 14$ olur. **3.112.** $X^* = (12/7,\ 0,\ 22/7)$ olduqda $\min Z(x) = -1$ olur. **3.113.** $\max Z(x) = +\infty$. **3.114.** $X^* = (-35/8,\ 0,\ 1/8)$ olduqda $\min Z(x) = -59/8$ olur. **3.115.** $X^* = (0,\ 2,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 25$ olur. **3.116.** $X^{(1)*} = (0,\ 1/7,\ 37/7)$, $X^{(2)*} = (0,\ 9/8,\ 3/8)$ olduqda $\max Z(x) = 6$ olur. **3.117.** $X^{(1)*} = (0,\ 0,\ 4)$, $X^{(2)*}(0,\ 1/5,\ 22/5)$ olduqda $\min Z(x) = 0$ olur. **3.118.** $\max Z(x) = +\infty$. **3.119.** $X^* = (0,\ -8/5,\ 26/5)$ olduqda $\min Z(x) = -1/5$ olur. **3.120.** $X^* = (-9,\ 5,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = -33$ olur. **3.121.** $X^* = (0,\ 3,\ 5)$ olduqda $\min Z(x) = 4$ olur. **3.122.** $X^* = (15,\ 4,\ 2)$ olduqda $\min Z(x) = 29$ olur. **3.123.** $X^* = (0,\ 4,\ 6)$ olduqda $\max Z(x) = -31$ olur.

Fəsil 4

4.16. $X^* = (0,\ 4,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = 12$ olur. **4.17.** $X^* = (1/2,\ 3/2,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = 11$ olur. **4.18.** $X^* = (0,\ 5,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = 10$ olur. **4.19.** $X^* = (2,\ 1,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = 3$ olur. **4.20.** Məsələnin şərtləri ziddiyyətlidir. **4.21.** $X^* = (0,\ 0,\ 3)$

olduqda $\min Z(x)=3$ olur. **4.22.** $X^*=(0,\ 4/3,\ 13/3)$ olduqda $\min Z(x)=22$ olur. **4.23.** $X^*=(1,\ 2,\ 0)$ olduqda $\min Z(x)=14$ olur. **4.24.** Məsələnin şərtləri ziddiyyətlidir. **4.25.** $X^*=(0,\ 38/7,\ 16/7)$ olduqda $\min Z(x)=124/7$ olur. **4.26.** $X^*=(4,\ 3,\ 0)$ olduqda $\min Z(x)=7$ olur. **4.27.** $X^*=(5,\ 2,\ 0)$ olduqda $\max Z(x)=7$ olur. **4.28.** $X^*=(0,\ 1/3,\ 2/3)$ olduqda $\min Z(x)=10$ olur. **4.29.** $X^*=(1,\ 4,\ 0)$ olduqda $\max Z(x)=11$ olur. **4.30.** $X^*=(0,\ 1,\ 0)$ olduqda $\max Z(x)=3$ olur. **4.31.** $X^*=(1/2,\ 0,\ 0)$ olduqda $\max Z(x)=3$ olur**.** **4.32.** Məsələnin şərtləri ziddiyyətlidir. **4.33.** $X^*=(1/3,\ 0,\ 0)$ olduqda $\max Z(x)=1$ olur. **4.34.** $X^*=(10,\ 2,\ 0)$ olduqda $\max Z(x)=10$ olur. **4.35.** $X^*=(0,\ 11/2,\ 1)$ olduqda $\max Z(x)=7$ olur. **4.36.** $\min Z(x)=-\infty$ **4.37.** $X^*=(1/2,\ 0,\ 0)$ olduqda $\max Z(x)=5/2$ olur. **4.38.** $X^*=(2,\ 4,\ 0)$ olduqda $\max Z(x)=-2$ olur. **4.39.** $X^*=(0,\ 0,\ 2)$ olduqda $\max Z(x)=2$ olur. **4.40.** İlkin məsələnin şərtləri ziddiyyətlidir; Qoşma məsələnin məqsəd funksiyası yuxarıdan qeyri-məhduddur, yəni $\max F(y)=+\infty$. **4.41.** $X^*=(1/2,\ 3/2,\ 0)$ və $Y^*=(3,\ 4,\ 0)$ olduqda $\min Z(x)=\max F(y)=18$ olur. **4.42.** $X^{(1)*}=(0,\ 1,\ 5)$, $X^{(2)*}=(1,\ 0,\ 4)$ və $Y^*=(5,\ 0,\ 1)$ olduqda $\min Z(x)=\max F(y)=8$ olur. **4.43.** İlkin məsələnin şərtləri ziddiyyətlidir; Qoşma məsələnin məqsəd funksiyası yuxarıdan qeyri-məhduddur, yəni $\max F(y)=+\infty$. **4.44.** $X^*=(1,\ 0,\ 2)$ və $Y^{(1)*}=(2,\ 1,\ 0)$, $Y^{(2)*}=(5/2,\ 0,\ 1/2)$, olduqda $\max Z(x)=\min F(y)=7$ olur**.** **4.45.** $X^*=(0,\ 28,\ 26)$ və $Y^*=(0,\ 1,\ -3)$ olduqda $\min Z(x)=\max F(y)=-74$ olur. **4.46.** $X^*=(0,\ 9/11,\ 19/11)$ və $Y^*=(3/11,\ 0,\ 20/11)$ olduqda $\min Z(x)=\max F(y)=123/11$ olur. **4.47.**

$X^* = (2,\ 3,\ 0)$ və $Y^* = (0,\ 1,\ 4)$ olduqda $\max Z(x) = \min F(y) = 12$ olur. **4.48.** $X^* = (0,\ 2,\ 0)$ və $Y^* = (0,\ 1,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = \max F(y) = 2$ olur. **4.49.** $X^* = (1,\ 1,\ 0)$ və $Y^* = (0,\ 3/14,\ 0,\ 16/14)$ olduqda $\max Z(x) = \min F(y) = -2$ olur. **4.50.** $X^{(1)*} = (2,\ 1,\ 0)$, $X^{(2)*} = (2,\ 2,\ 1)$, $X^{(3)*} = (4,\ 0,\ 3)$, $X^{(4)*} = (5/2,\ 0,\ 0)$, və $Y^* = (1,\ 0,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = \max F(y) = 5$ olur. **4.51.** $X^* = (2,\ 3,\ 0)$ və $Y^* = (11/7,\ 6/7,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = \min F(y) = 14$

Fəsil 5

5.8. $\min Z(x) = 7495$. **5.9.** $\min Z(x) = 6740$. **5.10.** $\min Z(x) = 11470$. **5.11.** $\min Z(x) = 9970$. **5.12.** $\min Z(x) = 10980$. **5.13.** $\min Z(x) = 10830$. **5.14.** $\min Z(x) = 7540$. **5.15.** $\min Z(x) = 5410$. **5.16.** $\min Z(x) = 5600$. **5.17.** $\min Z(x) = 12055$. **5.18.** $\min Z(x) = 5740$. **5.19.** $\min Z(x) = 5740$. **5.20.** $\min Z(x) = 6520$. **5.21.** $\min Z(x) = 6890$. **5.22.** $\min Z(x) = 12630$. **5.23.** $\min Z(x) = 9280$. **5.24.** $\min Z(x) = 9630$. **5.25.** $\min Z(x) = 5350$. **5.26.** $\min Z(x) = 5140$. **5.27.** $\min Z(x) = 3940$. **5.28.** $\min Z(x) = 120$. **5.29.** $\min Z(x) = 4600$. **5.30.** $\min Z(x) = 2800$. **5.31.** $\min Z(x) = 110$. **5.32.** $\min Z(x) = 720$. **5.33.** $\min Z(x) = 95$. **5.34.** $\min Z(x) = 10500$. **5.35.** $\min Z(x) = 2700$. **5.36.** $\min Z(x) = 19500$. **5.37.** $\min Z(x) = 1050$. **5.38.** $\min Z(x) = 1900$. **5.39.** $\min Z(x) = 1650$. **5.40.** $\min Z(x) = 510$. **5.41.** $\min Z(x) = 340$.

Fəsil 6

6.2. $X^* = (12,\ 13)$ olduqda $\max Z(x) = 37$ olur. **6.3.** $X^* = (10,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 28$ olur. **6.4.** $X^* = (8,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 16$ olur. **6.5.** $X^* = (2,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = 12$ olur. **6.6.** $X^* = (2,\ 1)$ olduqda $\max Z(x) = 9$ olur. **6.7.** $X^* = (1,\ 2,\ 0,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 9$ olur. **6.8.** $X^* = (7,\ 0,\ 1,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 23$ olur. **6.9.** $X^* = (0,\ 1,\ 3,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 11$ olur. **6.10.** $X^* = (1,\ 0,\ 20,\ 18)$ olduqda $\max Z(x) = 133$ olur. **6.11.** $X^* = (1,\ 0,\ 0,\ 2)$ olduqda $\max Z(x) = 9$ olur. **6.12.** $X^* = (1,\ 2,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 1$ olur. **6.13.** $X^* = (2,\ 1,\ 2)$ olduqda $\min Z(x) = -6$ olur. **6.14.** $X^* = (0,\ 3,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = 6$ olur. **6.15.** Məsələnin tam ədədli həlli yoxdur. **6.16.** $X^* = (2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1)$ olduqda $\max Z(x) = 19$ olur.

Fəsil 7

7.3. $X^* = (1,\ 0,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 3$ olur. **7.4.** $X^* = (1,\ 0,\ 4)$ olduqda $\max Z(x) = 3/2$ olur. **7.5.** $X^{(1)*} = (1\,1/5,\ 0,\ 4/5)$, $X^{(2)*} = (0,\ 0,\ 3)$ olduqda $\max Z(x) = 1$ olur. **7.6.** $X^* = (4,\ 0,\ 3)$ olduqda $\min Z(x) = 1/2$ olur. **7.7.** $X^* = (0,\ 7,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = -1$ olur. **7.8.** $X^* = (2,\ 0,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 3$ olur. **7.9**. $X^* = (8,\ 0,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = -2$ olur. **7.10.** $X^* = (1/2,\ 0,\ 3/2)$ olduqda $\max Z(x) = 8/5$ olur. **7.11.** $X^* = (2,\ 0,\ 0)$ olduqda $\max Z(x) = 3$ olur. **7.12.** $X^* = (0,\ 0,\ 5,\ 0)$ olduqda $\min Z(x) = -2$ olur.

Fəsil 8

8.2. $\left[0;\ \frac{3}{2}\right]$ oblastında $X^* = (0,\ 0,\ 2)$ təpə nöqtəsində $\max Z(x) = 12 - 2t$ və $\left[\frac{3}{2};\ 10\right]$ oblastında $X^* = (0,\ 11/7,\ 3/7)$ təpə nöqtəsində $\max Z(x) = 51/7 + 22/7\,t$ olur. **8.3.** $\left[-\infty;\ \frac{9}{7}\right]$ oblastında $X^* = (40/14,\ 0,\ 12/14)$ təpə nöqtəsində $\max Z(x) = 180/14 - 28/14\,t$ və $\left[\frac{9}{7};\ +\infty\right]$ oblastında $X^* = (0,\ 20,\ 8)$ təpə nöqtəsində $\max Z(x) = 8t$ olur. **8.4.** $[1;\ 8]$ oblastında $X^* = (16,\ 0,\ 0)$ təpə nöqtəsində $\max Z(x) = 112 + 16\ t$ olur. **8.5.** $[1;\ 15]$ oblastında $X^* = (5,\ 0)$ təpə nöqtəsində $\max Z(x) = 10 + 10\ t$ olur. **8.6.** $[0;\ 2]$ oblastında $X^* = (5,\ 0)$ təpə nöqtəsində $\max Z(x) = 20$ və $[2;\ 8]$ oblastında $X^* = (1/2,\ 9/2)$ təpə nöqtəsində $\max Z(x) = 11 + 9/2\,t$ olur. **8.7.** $[1;\ 10]$ oblastında $X^* = (0,\ 3/2,\ 0)$ təpə nöqtəsində

$\max Z(x) = 27/2 + 3/2\ t$ olur. **8.8.** $[1;\ 7]$ oblastında $X^* = (20/19,\ 72/19)$ təpə nöqtəsində $\max Z(x) = 72/19 + 92/19\,t$ olur. **8.9.** $[0;\ 5]$ oblastında $X^* = (0,\ 20,\ 0)$ təpə nöqtəsində $\max Z(x) = 240 - 20t$ və $[5;\ 10]$ oblastında $X^* = (20,\ 0,\ 0)$ təpə nöqtəsində $\max Z(x) = 40 + 20\ t$ olur. **8.10.** $[1;\ 2]$ oblastında $X^* = (3,\ 2,\ 0,\ 0)$ təpə nöqtəsində $\max Z(x) = 7 + t$ və $[2;\ 20]$ oblastında $X^* = (3,\ 0,\ 0,\ 0)$ təpə nöqtəsində $\max Z(x) = 3 + 3\ t$ olur. **8.11**. $[-\infty;\ 7]$ oblastında $X^* = (28,\ 0,\ 0,\ 48,\ 38)$ təpə nöqtəsində $\max Z(x) = 744 - 48t$, $[7;\ 8]$ oblastında $X^* = (0,\ 0,\ 28,\ 20,\ 24)$ təpə nöqtəsində $\max Z(x) = 352 + 8\ t$ olur və $[8;\ +\infty]$ oblastında $X^* = (0,\ 20/3,\ 104/3,\ 0,\ 32/3)$ təpə nöqtəsində $\max Z(x) = 416/3 + 104/3\,t$ olur.

Fəsil 9

9.2. $X^* = (\pm 1,\ \pm 1)$ olduqda $\min Z(x) = 1$ olur. **9.3.** $X^* = (2,\ 2)$ olduqda $\min Z(x) = 4$ olur. **9.4.** $X^* = (3,\ -2,\ -12)$ olduqda $\min Z(x) = 72$, $X^* = (-1/3,\ -26/3,\ -28/39)$ olduqda $\max Z(x) = -728/351$ olur. **9.5.** $X^* = (1,\ 1)$ olduqda $\min Z(x) = 2$ olur. **9.6**. $X^* = (63/26,\ -31/13,\ 103/26)$ olduqda $\min Z(x) = 10491/676$ olur. **9.7.** $X^* = (2,\ 2,\ 2)$ olduqda $\min Z(x) = 8$ olur. **9.8.** $X^* = (-2,\ -4,\ 4)$ olduqda $\min Z(x) = -8$ olur. **9.9.** $X^* = (9/4,\ 1/4,\ 5/4)$ olduqda $\min Z(x) = 33/4$ olur. **9.10.** $X^* = (21/20,\ 17/20)$ olduqda $Z(x) = 199/40$ olur. **9.11.** $X^* = (-66/39,\ 282/39,\ 186/39)$ olduqda $Z(x) = 1206/39$ olur.

II BÖLMƏ

Fəsil 10

10.4. $X \approx \begin{pmatrix} 199{,}52 \\ 99{,}6 \\ 150{,}04 \end{pmatrix}$. **10.5.** $X \approx \begin{pmatrix} 199{,}80 \\ 99{,}16 \\ 99{,}88 \end{pmatrix}$. **10.6.** $Y = \begin{pmatrix} 70 \\ 60 \\ 130 \end{pmatrix}$. **10.7.** $Y = \begin{pmatrix} 290 \\ 10 \\ 90 \end{pmatrix}$.

10.8. $Y = \begin{pmatrix} 145 \\ 30 \\ 75 \end{pmatrix}$ **10.9.** $Y = \begin{pmatrix} 100{,}5 \\ 226 \\ 22{,}5 \end{pmatrix}$ **.10.10.** $x_3 \approx 333{,}33, \quad y_1 \approx 206{,}67,$

$y_2 \approx 200$ **10.11.** $x_1 \approx 233{,}33, \quad y_2 \approx 81{,}67, \quad y_3 \approx 153{,}33$

10.12. $Z_1 = 40, \quad Z_3 = 80$ **.** **10.13.** $Z_1 = 125, \quad Z_2 = 36, \quad Z_3 = 154$

10.14. $a = \begin{pmatrix} 0{,}23 & 0{,}20 & 0{,}06 \\ 0{,}19 & 0{,}06 & 0{,}17 \\ 0{,}15 & 0{,}11 & 0{,}19 \end{pmatrix}$ **10.15.** $a = \begin{pmatrix} 0{,}39 & 0{,}12 & 0{,}09 \\ 0{,}18 & 0{,}19 & 0{,}12 \\ 0{,}21 & 0{,}09 & 0{,}15 \end{pmatrix}$

10.16. $a = \begin{pmatrix} 0{,}27 & 0{,}21 & 0{,}11 \\ 0{,}17 & 0{,}25 & 0{,}24 \\ 0{,}18 & 0{,}34 & 0{,}14 \end{pmatrix}$ **10.17.** $a = \begin{pmatrix} 0{,}19 & 0{,}21 & 0{,}43 \\ 0{,}18 & 0{,}31 & 0{,}36 \\ 0{,}12 & 0{,}13 & 0{,}23 \end{pmatrix}$

10.18. $a = \begin{pmatrix} 0{,}13 & 0{,}09 & 0{,}22 \\ 0{,}15 & 0{,}14 & 0{,}05 \\ 0{,}07 & 0{,}41 & 0{,}11 \end{pmatrix}$ **10.19.** $A = \begin{pmatrix} 1{,}731 & 0{,}577 & 0{,}962 \\ 0{,}577 & 1{,}621 & 0{,}797 \\ 0{,}385 & 0{,}604 & 1{,}484 \end{pmatrix}$

10.20. $A = \begin{pmatrix} 1{,}747 & 0{,}708 & 0{,}962 \\ 0{,}886 & 1{,}519 & 0{,}633 \\ 0{,}987 & 0{,}835 & 1{,}848 \end{pmatrix}$ **10.21.** $A = \begin{pmatrix} 2{,}664 & 0{,}154 & 0{,}347 \\ 0{,}811 & 1{,}351 & 0{,}541 \\ 0{,}656 & 0{,}618 & 1{,}390 \end{pmatrix}$

10.22. $A = \begin{pmatrix} 1{,}793 & 1{,}310 & 0{,}552 \\ 0{,}736 & 1{,}563 & 0{,}483 \\ 0{,}989 & 0{,}851 & 1{,}586 \end{pmatrix}$ **10.23.** $A = \begin{pmatrix} 1{,}529 & 0{,}559 & 0{,}735 \\ 0{,}824 & 1{,}647 & 0{,}588 \\ 0{,}471 & 0{,}941 & 1{,}765 \end{pmatrix}$

10.24. $A = \begin{pmatrix} 1{,}355 & 0{,}553 & 0{,}363 \\ 0{,}401 & 1{,}431 & 0{,}248 \\ 0{,}496 & 0{,}344 & 1{,}260 \end{pmatrix}$

Fəsil 11

11.7. $Z(x) = 340x_1 + 40x_2 + 30x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 \le 200 \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 300 \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 100 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$

11.8
$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 100 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 120 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 140 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 90 \end{cases}$$

11.9. $Z(x) = 30x_1 + 40x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 13x_1 + 10x_2 = 150 \\ 10x_1 + 18x_2 = 180 \\ 15x_1 + 12x_2 = 200 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0$

11.10.
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1 \end{cases}$$

11.11.
$$\begin{cases} 6x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} \le 290 \\ 7x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} \le 200 \\ 5x_{31} + \qquad 4x_{33} \le 340 \\ 9x_{41} + 8x_{42} + 2x_{43} \le 260 \end{cases}$$

Fəsil 12

12.6. $y = 0{,}99 + 0{,}17x$, $\sigma^2 \approx 0{,}98,\ r \approx 0{,}99$. **12.7.** $y = 7{,}73 + 1{,}32x$, $\sigma^2 \approx 0{,}83,\ r \approx 0{,}91$. **12.8.** $y = 30{,}4 + 0{,}8x$, $\sigma^2 \approx 0{,}69,\ r \approx 0{,}8$ **.12.9.**

$y=-1{,}08+1{,}13x$, $\sigma^2 \approx 0{,}94,\ r \approx 0{,}96$ **.12.10.** $y=20{,}14+0{,}9x$, $\sigma^2 \approx 0{,}85,\ r \approx 0{,}9$ **.12.11.** $y=-181{,}05+9{,}74x_1-1{,}19x_2$, $\sigma^2 \approx 0{,}77,\ R_{yx_1x_2} \approx 0{,}87$. **12.12.** $y=-39{,}69+2{,}08x_1+0{,}2x_2$, $\sigma^2 \approx 0{,}15,\ R_{yx_1x_2} \approx 0{,}39$.

Fəsil 13

13.10. $\alpha \neq \beta$ olduğu üçün $S_A^* = (1/6,\ 5/6)$ və $S_B^* = (1/3,\ 2/3)$ optimal qarışıq strategiyalarda $\gamma = 11/3$ olur. **13.11.** $\alpha \neq \beta$ olduğu üçün $S_A^* = (1/2,\ 1/2)$ və $S_B^* = (1/3,\ 2/3)$ optimal qarışıq strategiyalarda $\gamma = 3$ olur. **13.12.** $\alpha \neq \beta$ olduğu üçün $S_A^* = (1/3,\ 2/3)$ və $S_B^* = (0,\ 1/6,\ 5/6)$ optimal qarışıq strategiyalarda $\gamma = 8/3$ olur. **13.13.** $\alpha \neq \beta$ olduğu üçün $S_A^* = (10/11,\ 1/11)$ və $S_B^* = (5/11,\ 0,\ 0,\ 0,\ 6/11)$ optimal qarışıq strategiyalarda $\gamma = 28/11$ olur. **13.14.** $\alpha \neq \beta$ olduğu üçün $S_A^* = (1/2,\ 1/2,\ 0)$ və $S_B^* = (2/5,\ 3/5)$ optimal qarışıq strategiyalarda $\gamma = 5$ olur. **13.15.** $\alpha \neq \beta$ olduğu üçün $S_A^* = (0,\ 0,\ 1/9,\ 8/9)$ və $S_B^* = (2/3,\ 1/3)$ optimal qarışıq strategiyalarda $\gamma = 19/3$ olur. **13.16.** $\alpha = \beta = 4$ olduğu üçün A_1 xalis strategiya A oyunçusunun, B_3 xalis strategiya isə B oyunçusunun optimal strategiyasıdır. **13.17.** $\alpha = \beta = 5$ olduğu üçün A_1 xalis strategiya A oyunçusunun, B_2 xalis strategiya isə B oyunçusunun optimal strategiyasıdır. **13.18.** $\alpha = \beta = 4$ olduğu üçün A_1 xalis strategiya A oyunçusunun, B_4 xalis strategiya isə B oyunçusunun optimal strategiyasıdır. **13.19**. $\alpha = \beta = 6$ olduğu üçün A_3 xalis strategiya A oyunçusunun, B_3 xalis strategiya isə B oyunçusunun optimal strategiyasıdır. **13.20**. $\alpha = \beta = 7$ olduğu üçün A_3 xalis strategiya A oyunçusunun, B_2 xalis strategiya isə B oyunçusunun optimal

strategiyasıdır. **13.21.** $\alpha = \beta = 6$ olduğu üçün A_3 xalis strategiya A oyunçusunun, B_2 xalis strategiya isə B oyunçusunun optimal strategiyasıdır. **13.22.** $\alpha = \beta = 7$ olduğu üçün A_2 xalis strategiya A oyunçusunun, B_2 xalis strategiya isə B oyunçusunun optimal strategiyasıdır. **13.23.** $\alpha = \beta = 3$ olduğu üçün A_2 xalis strategiya A oyunçusunun, B_1 xalis strategiya isə B oyunçusunun optimal strategiyasıdır. **13.24.** $\alpha = \beta = 9$ olduğu üçün A_3 xalis strategiya A oyunçusunun, B_2 xalis strategiya isə B oyunçusunun optimal strategiyasıdır. **13.25.** $\alpha = \beta = 7$ olduğu üçün A_3 xalis strategiya A oyunçusunun, B_2 xalis strategiya isə B oyunçusunun optimal strategiyasıdır. **13.26**. $\alpha \neq \beta$ olduğu üçün $S_A^* = (1/2,\ 1/2)$ və $S_B^* = (0,\ 1/4,\ 3/4)$ optimal qarışıq strategiyalarda $\gamma = 7/2$ olur. **13.27.** $\alpha \neq \beta$ olduğu üçün $S_A^* = (1/6,\ 3/6,\ 2/6)$ və $S_B^* = (4/12,\ 5/12,\ 3/12)$ optimal qarışıq strategiyalarda $\gamma = 14/3$ olur. **13.28.** $\alpha \neq \beta$ olduğu üçün $S_A^* = (1/7,\ 0,\ 6/7)$ və $S_B^* = (4/7,\ 3/7)$ optimal qarışıq strategiyalarda $\gamma = 31/7$ olur. **13.29.** $\alpha \neq \beta$ olduğu üçün $S_A^* = (3/8,\ 5/8,\ 0)$ və $S_B^* = (7/8,\ 1/8)$ optimal qarışıq strategiyalarda $\gamma = 37/8$ olur. **13.30.** $\alpha \neq \beta$ olduğu üçün $S_A^* = (19/59,\ 18/59,\ 22/59)$ və $S_B^* = (21/59,\ 15/59,\ 23/59)$ optimal qarışıq strategiyalarda $\gamma = 248/59$ olur. **13.31.** $\alpha \neq \beta$ olduğu üçün $S_A^* = (0,\ 2/5,\ 3/5)$ və $S_B^* = (3/5,\ 0,\ 2/5)$ optimal qarışıq strategiyalarda $\gamma = 17/5$ olur. **13.32.** $\alpha \neq \beta$ olduğu üçün $S_A^* = (3/5,\ 2/5)$ və $S_B^* = (1/5,\ 0,\ 4/5,\ 0)$ optimal qarışıq strategiyalarda $\gamma = 13/5$ olur. **13.33.** $\alpha \neq \beta$ olduğu üçün $S_A^* = (1/6,\ 5/6)$ və $S_B^* = (1/2,\ 0,\ 1/2)$ optimal qarışıq strategiyalarda

$\gamma = 7/2$ olur. **13.34.** $\alpha \neq \beta$ olduğu üçün $S_A^* = (7/8,\ 1/8,\ 0)$ və $S_B^* = (3/8,\ 5/8,\ 0,\ 0)$ optimal qarışıq strategiyalarda $\gamma = 37/8$ olur. **13.35.** $\alpha \neq \beta$ olduğu üçün $S_A^* = (0,\ 3/5,\ 2/5)$ və $S_B^* = (4/5,\ 0,\ 1/5,\ 0)$ optimal qarışıq strategiyalarda $\gamma = 21/5$ olur. **13.36.** Vald kriteriyası: A_1, Sevidc kriteriyası: $A_1(A_2, A_4)$, Qurvits kriteriyası: A_1. **13.37.** Vald kriteriyası: A_5, Sevidc kriteriyası: A_5, Qurvits kriteriyası: A_5. **13.38.**Vald kriteriyası: A_2, Sevidc kriteriyası: A_2, Qurvits kriteriyası: A_2. **13.39.** Vald kriteriyası: A_2, Sevidc kriteriyası: A_4, Qurvits kriteriyası: A_2. **13.40.** Vald kriteriyası: A_2, Sevidc kriteriyası: $A_2, (A_3)$, Qurvits kriteriyası: A_5. **13.41.** Vald kriteriyası: A_3, Sevidc kriteriyası: A_1, Qurvits kriteriyası: A_1 .**13.42.** Vald kriteriyası: A_1, Sevidc kriteriyası: A_1, Qurvits kriteriyası: A_4.

Ə D Ə B İ Y Y A T

1. B.S.Musayev, Ş.Səmədzadə - Planlaşdırmanın riyazi üsulları və modelləri, Baki,1973
2. B.S.Musayev, S.M.Şamoyev, Y.İ.Hacızalov – Ticarətdə riyazi üsullar və modellər. Bakı,1979
3. B.S.Musayev, Y.İ.Hacızalov – Ticarət-iqtısadi proseslərin modelləşdirilməsi. Bakı,1984
4. B.S.Musayev – Optimallaşdırma - iqtisadi inkişafın həlledici mərhələsidir. Bakı,1983
5. Y.İ.Hacızalov, M.Y.Zeynalov – İdarəetmə sistemlərinin qurulması. Bakı, 1995
6. Ə.M.Mirzəyev, S.M.Əbdürəhmanov – Optimallaşdırma üsulları. Bakı,1984
7. M.Y.Zeynalov, B.Ə.Muxtarov, İ.B.Əliyev –Planlaşdırmada riyazi üsullar və modellər. Bakı,1983
8. S.M.Əbdürəhmanov, Ə.M.Mirzəyev, S.M.Şamoyev – Riyazi proqramlaşdırma. Bakı,1983
9. A.H.Əliyev – Riyazi proqramlaşdırma. Bakı, 2010
10. B.S.Musayev, A.Q.Qəhrəmanov - İqtisadiyyatda riyazi modelləşdirmə və proqnozlaşdırma. Bakı,2000
11. S.Ə.Şabanov - Excel paketində iqtisadi-riyazi modellərin həlli. Bakı,2007
12. Y.S.Kundışeva – İqtisadiyyatda riyazi modelləşdirmə. Bakı,2009
13. А.С.Шапкин, Н.П.Мазаева - Математические методы и модели исследования операций. М.,2004
14. Е.В.Бережная, Б.И.Бережной - Математические методы моделирования экономических систем. М.,2001
15. А.И.Стрикалов, И.А.Печенежская – Экономико-математические методы и модели: Пособие к решению задач, Ростов-на-Дону,2008
16. М.Г.Зайцев, С.Е.Варюхин – Методы оптимизации управления и принятия решений: Примеры, задачи, кейсы, М.,2007
17. Н.Коршунов, В.Плясунов – Математика в экономике. М.,1996
18. Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, Н.М.Тришин – Исследование операций в экономике. М.,1997
19. Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко – Эконометрика. М.,2002

20. О.О.Замков, Ю.А.Черемных, А.И.Толстопятенко – Математические методы в экономике. М.,1999
21. Сборник задач по высшей математике для экономистов. Под ред. Проф. В.И.Ермакова. М.,2007
22. Экономико-математические методы и прикладные модели. Под редакцией В.Федосеева, М.,1999
23. П.Конюховский - Математические методы исследования операций в экономике. Санкт-Петербург, 2000
24. Ю.Н.Кузнецов, В.И.Кузубов, А.Б.Волощенко – Математическое программирование. М.,1980
25. Л.Л Терехов – Экономико-математические методы. М.,1972
26. Х.Таха – Введение в исследование операций. I-II том. М.,1985
27. И.Л.Акулич – Математическое программирование в примерах и задачах. М.,1986
28. А.С.Солодовников, В.А.Бабайцев, А.В.Браилов – Математика в экономике. Часть I-II М.,2000
29. Ю.А.Черняк – Системный анализ в управлении экономикой. М.,1975
30. В.И.Малыхин – Математическое моделирование экономики. М.,1998
31. В.И.Малыхин – Математика в экономике. М.,2001
32. В.А.Абчук – Экономика–математические методы. Санкт-Петербург, 1999
33. С.И.Зуховицкий, Л.И.Авдеева– Линейное и выпуклое программирование. М.,1964
34. Л.И Елисеева – Эконометрика. М.,2003
35. В.Колемаева – Математическая экономика. М.,2002
36. А.И.Орлов - Эконометрика. М.,2003
37. Е.В.Щикин, А.Г.Чхарташвили – Математические методы и модели в управлении. М.,2002
38. М.Эддоус, Р.Стенсфилд – Методы принятия решений. М.,1997
39. М.Интрилигатор – Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.,2002

MÜNDƏRİCAT

Giriş..... **3**

Fəsil 1. Ekonometrika – iqtisadi sistemlərin optimal idarə edilməsinin riyazi aparatı kimi..... **7**
1.1.İqtisadi-riyazi modelləşdirmənin metodoloji əsasları..... 7
1.2.İqtisadi proseslərin riyazi modellərinin qurulmasına aid nümunələr..... 15

Mövzu üzrə praktikum..... 21
Mövzu üzrə testlər..... 23

I BÖLMƏ
RIYAZI PROQRAMLAŞDIRMA

Fəsil 2. Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin qoyuluşu..... 28
2.1.Xətti cəbrin elementləri..... 28
2.2. Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin riyazi təsviri..... 34
2.3. Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həndəsi mənası..... 38
2.4.Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin iqtisadi mənası..... 40

Mövzu üzrə praktikum..... 44
Mövzu üzrə testlər..... 46

Fəsil 3. Xətti proqramlaşdırmanın əsas məsələsinin həll üsulları... 49
3.1.Qrafik üsulu..... 49
3.2. Simpleks metod..... 66
3.3.Qarışıq şərtli və sərbəst dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələlərinin Simpleks metodla həll alqoritmi..... 83

Mövzu üzrə praktikum..... 102
Mövzu üzrə testlər..... 112

Fəsil 4. Xətti proqramlaşdırmada qoşmalıq..... 117
4.1. Qoşma məsələlərin tərtibi qaydaları və iqtisadi izahı..... 117
4.2. Qoşmalıq teoremləri və onların iqtisadi izahı..... 120

4.3.Qoşmalıq nəzəriyyəsi əsasında iqtisadi-riyazi modellərin dayanıqlılığının və həssaslılığının təhlili..... 122
4.4. Qoşma Simpleks metod – xətti proqramlaşdırma məsələsinin alternativ həll üsulu kimi..... 137

Mövzu üzrə praktikum..... 158
Mövzu üzrə testlər..... 162

Fəsil 5. Nəqliyyat məsələsi..... 165
5.1. Nəqliyyat məsələsinin qoyuluşu və iqtisadi-riyazi modeli..... 165
5.2. Qapalı və açıq nəqliyyat məsələləri..... 168
5.3. Nəqliyyat məsələsinin həll üsulları..... 171
5.4. Nəqliyyat məsələsinin modifikasiyaları və onların həll üsulları.... 205
5.5.Nəqliyyat məsələlərinin macar metodu ilə həll alqoritmi..... 223

Mövzu üzrə praktikum..... 234
Mövzu üzrə testlər..... 242

Fəsil 6. Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsi..... 246
6.1. Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu. Həndəsi və iqtisadi izahı..... 246
6.2. Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin həll üsulları..... 248

Mövzu üzrə praktikum..... 258
Mövzu üzrə testlər..... 261

Fəsil 7. Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsi..... 264
7.1. Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu..... 264
7.2. Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin həll üsulu..... 266

Mövzu üzrə praktikum..... 281
Mövzu üzrə testlər..... 283

Fəsil 8. Parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsi..... 287
8.1. Parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu..... 287
8.2. Parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsinin həll alqoritmi 289

Mövzu üzrə praktikum..... 297
Mövzu üzrə testlər..... 300

Fəsil 9. Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsi..... 302
9.1. Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu..... 302

9.2. Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin həll üsulları..... 303

Mövzu üzrə praktikum..... 307
Mövzu üzrə testlər..... 308

II BÖLMƏ
İQTİSADİ-RİYAZİ MODELLƏR

Fəsil 10. İqtisadiyyatın makromodelləri..... 311
10.1. Statik Leontyev modelinin çıxarılışı..... 311
10.2. Birbaşa və tam məsrəf əmsalları matrislərinin riyazi xarakteristikaları..... 322
10.3. Leontyev makromodelinin xətti optimallaşdırma modelinə gətirilməsi..... 332
10.4. Dinamik Leontyev makromodelinin çıxarılışı..... 344

Mövzu üzrə praktikum..... 348
Mövzu üzrə testlər..... 351

Fəsil 11. İqtisadiyyatın mikromodelləri..... 356
11.1.Müəssisələrin optimal istehsal güclərinin təyin edilməsi məsələsinin qoyuluşu..... 356
11.2. Avadanlıqların optimal yüklənməsi məsələsinin qoyuluşu..... 359
11.3. Materialların optimal biçilməsi məsələsinin qoyuluşu..... 362
11.4. Təyinat məsələsinin qoyuluşu..... 364
11.5. Çoxkriteriyalı müəssisə modelinin qurulması..... 368
11.6. Müəssisə modellərinin ekzogen parametrlərinin qiymətlərinin dəyişməsinin optimal həllə təsirinin təhlili..... 378

Mövzu üzrə praktikum..... 387
Mövzu üzrə testlər..... 389

Fəsil 12. İqtisadi sistemlərin idarə edilməsində korrelyasiya və reqressiya təhlili metodunun tətbiqi..... 392
12.1. Cüt korrelyasiyanın xətti və qeyri-xətti modelləri..... 392
12.2. Xətti və qeyri-xətti çoxkorrelyasiyalı modellər..... 403
12.3. İstehsal funksiyaları..... 406
12.4. Ekonometrik yanaşma əsasında iqtisadı inkişafın proqnozlaşdırılması..... 415

Mövzu üzrə praktikum..... 427
Mövzu üzrə testlər..... 430

Fəsil 13. İqtisadi qeyri-müəyyənlik və risk şəraitində optimal qərarların qəbulu modelləri..... 437
13.1. Oyunlar nəzəriyyəsi – münaqişəli vəziyyətlərin riyazi nəzəriyyəsi kimi..... 437

13.2. Matris oyunlarının riyazı aparatı. Minimaks prinsipi..... 439
13.3. Qarışıq strategiyaların tətbiqi. Əsas teoremlər..... 442
13.4. Oyunların sadələşdirilməsi. Koalisiya anlayışı..... 449
13.5. Oyunun Qrafik üsulu ilə həll alqoritmi..... 452
13.6. Matris oyununun optimallaşdırma modelinə gətirilməsi..... 461
13.7. İnsanın təbiətlə oyunları. Təbiətin vəziyyətinin qiymətləndirilməsi kriteriyaları..... 478

Mövzu üzrə praktikum..... 486
Mövzu üzrə testlər..... 492

Cavablar..... 498

Ədəbiyyat..... 515