AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ

BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

QALİNA MEHDİYEVA, ELVİN ƏZİZBƏYOV

ANALİZİN ƏDƏDİ ÜSULLARI

Ali məktəblər üçün dərs vəsaiti

BAKI - 2014

Elmi redaktor: Bakı Dövlət Universitetinin «Hesablama riyaziyyatı» kafedrasının professoru, f.-r.e.d.,V.R. İbrahimov

Rəyçilər: Bakı Dövlət Universitetinin «Hesablama riyaziyyatı» kafedrasının dosenti, f.-r.e.n., Z.B. Seyidov

Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin «Hesablama riyaziyyatı və informatika» kafedrasının müdiri, dos., f.-r.e.n., Z.Ə. Tağıyeva

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi tərəfindən dərs vəsaiti kimi təsdiq edilmişdir (09.12.2014-cü il tarixli 1220 saylı əmr).

Q.Y.Mehdiyeva, E.İ.Əzizbəyov. Analizin ədədi üsulları.
Ali məktəblər üçün dərs vəsaiti.
Bakı, "NURLAR" Nəşriyyat-Poliqrafiya Mərkəzi, 2014, 152 səh.

Kitab riyazi analizin bir sıra təqribi üsullarına həsr olunmuşdur. Vəsaitdə müxtəlif tərtibli sonlu fərqlər, bölünən fərqlər, mərkəzi fərqlər və onların xassələri, bir-birindən bərabər məsafədə və müxtəlif məsafələrdə yerləşən düyün nöqtələri üçün interpolyasiya çoxhədliləri, interpolyasiya düsturlarının qalıq hədlərinin qiymətləndirilməsi, tərsinə interpolyasiya məsələləri, ədədi diferensiallama düsturuları, kvadratur düsturlar, kubatur düsturlar, onların xüsusi halları və xətaları haqqında ətraflı məlumatlar verilmiş və hər bir üsula aid nümunə misallar həll olunmuşdur.

Kitab ali təhsil müəssisələrinin riyaziyyat, mexanika və tətbiqi riyaziyyat ixtisasları üzrə təhsil alan bakalavr və magistrantlar üçün nəzərdə tutulmuşdur.

M Ü N D Ə R İ C A T

G İ R İ Ş

Riyaziyyat, mexanika, fizika, geologiya, astronomiya və hərbi mühəndisliyin müxtəlif sahələrində elə riyazi məsələlər meydana çıxır ki, bu məsələləri analitik şəkildə həll etmək mümkün olmur. Başqa sözlə, kifayət qədər mürəkkəb təbiətli riyazi məsələlərin dəqiq həllinin tapılması qeyri-mümkün olur. Belə hallarda məlum təqribi üsulların köməyi ilə həmin məsələlərin tələb olunan dəqiqliklə həllinin tapılması zərurəti yaranır. Bəzi mexanika məsələlərində isə baxılan məsələ özünün müəyyən cədvəl qiymətləri ilə xarakterizə olunur və onun hər hansı nöqtədəki qiymətinin hesablanması tələb olunur. Bu halda ümumiyyətlə, dəqiq riyaziyyatın məlum analitik metodlarının istifadə edilməsi nəticə vermir. Bütün bunlar təqribi hesablama üsullarının tətbiqini aktual edir. Əlavə olaraq qeyd edək ki, qoyulan məsələləri məlum təqribi üsullarla həll etdikdə, demək olar ki, həmişə müəyyən hesablama alqoritmi yaranır. Bu isə həmin məsələlərin həlli prosesinin proqramlaşdırılmasına imkan yaradır. Doğrudur, MathCad, MatLab, Maple, Mathematica, Mathics, SMath Studio və s. kimi müasir riyazi proqram paketlərinin köməyi ilə də bir çox dəqiq həllinin tapılması mümkün olmayan elmi və praktiki məsələləri həll etmək olar. Lakin nəzərə almaq lazımdır ki, bütün müasir riyazi proqram paketləri də məhz yüksək dəqiqlikli təqribi hesablama üsulları əsasında yazılır.

Təqdim olunan dərs vəsaiti üç fəsildən ibarətdir. Birinci fəsil funksiyaların interpolyasiya məsələlərini, ikinci fəsil ədədi diferensiallama düsturlarını, üçüncü fəsil isə ədədi inteqrallama üsullarını əhatə edir.

Bu vəsait müəlliflərin son illərdə Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi tərəfindən təsdiq edilmiş proqrama uyğun olaraq, “Hesablama üsulları” fənni üzrə apardıqları mühazirələr əsasında yazılmışdır və ali təhsil müəssisələrində riyaziyyat, mexanika və tətbiqi riyaziyyat ixtisasları üzrə təhsil alan tələbələr, “Hesablama üsulları” fənnini tədris edən müəllimlər və riyazi analizin təqribi üsullarını müstəqil öyrənmək istəyənlər üçün faydalı material ola bilər. Vəsaitin yazılması zamanı, əlyazmaların müzakirəsində yaxından iştirak etdikləri üçün Bakı Dövlət Universitetinin Hesablama riyaziyyatı kafedrasının bütün əməkdaşlarına dərin təşəkkür edirik. Eyni zamanda, dəyərli elmi məsləhətlərinə görə prof. V.R.İbrahimova və dos. Z.B.Seyidova xüsusi minnətdarlığımızı bildiririk.

Müəlliflər
Bakı, 2014

F Ə S İ L I

FUNKSİYALARIN İNTERPOLYASİYASI

§1.1. Müxtəlif tərtibli sonlu fərqlər

Tutaq ki,

$$y = f(x)$$

funksiyası verilmişdir. $\Delta x = h$ ilə arqumentin hər hansı fiksə olunmuş qiymətini işarə edək.

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (1)$$

kimi təyin olunmuş ifadəyə y funksiyasına uyğun birinci tərtib sonlu fərq deyilir.

Qeyd edək ki, yüksək tərtibli sonlu fərqlər də oxşar qayda ilə təyin olunur:

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y) \quad (n = 2,3,\ldots).$$

Məsələn,

$$\Delta^2 y = \Delta[f(x + \Delta x) - f(x)] = [f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)] -$$
$$-[f(x + \Delta x) - f(x)] = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x).$$

Misal. $\Delta x = 1$ qəbul edərək,

$$P(x) = x^4$$

funksiyası üçün bütün sonlu fərqləri qurun.

Həlli: Sonlu fərqlərin tərifinə görə alırıq ki,

$$\Delta P(x) = (x+1)^4 - x^4 =$$
$$= [x^4 + C_4^1 \cdot x^3 \cdot 1 + C_4^2 \cdot x^2 \cdot 1^2 + C_4^3 \cdot x \cdot 1^3 + 1^4] - x^4 =$$
$$= [x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1] - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1,$$

$$\Delta^2 P(x) = [4(x+1)^3 + 6(x+1)^2 + 4(x+1) + 1] - (4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) =$$
$$= 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4 + 6x^2 + 12x + 6 + 4x + 4 + 1 -$$
$$-4x^3 - 6x^2 - 4x - 1 = 12x^2 + 24x + 10,$$

$$\Delta^3 P(x) = [12(x+1)^2 + 24(x+1) + 10] - (12x^2 + 24x + 10) =$$

$$= 12x^2 + 24x + 12 + 24x + 24 + 10 - 12x^2 - 24x - 10 = 24x + 48,$$

$$\Delta^4 P(x) = (24(x+1) + 48) - (24x + 48) = 24x + 24 + 48 - 24x - 48 = 24,$$

....

$\Delta^n P(x) = 0$ ($n > 4$ olduqda).

Göründüyü kimi, verilmiş funksiya üçün dördüncü tərtib sonlu fərq sabitə bərabərdir.

Ümumiyyətlə, aşağıdakı mülahizə doğrudur.

Əgər

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

n dərəcəli çoxhədlidirsə, onda $\Delta^n P_n(x) = n! a_0 h^n = const$ olar. Burada $\Delta x = h$.

Doğrudan da

$$\Delta P_n(x) = P_n(x+h) - P_n(x) = a_0[(x+h)^n - x^n] +$$

$$+ a_1[(x+h)^{n-1} - x^{n-1}] + \ldots\ldots + a_n[(x+h) - h].$$

Nyuton binomundan istifadə edərək adi mötərizələri açsaq, görərik ki, $\Delta P_n(x)$ aşağıdakı şəkildə $n-1$ dərəcəli çoxhədlidir:

$$\Delta P_n(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}.$$

Burada $b_0 = nha_0$.

Analoji mühakimə apararaq alırıq ki, ikinci tərtib sonlu fərq

$$\Delta^2 P_n(x) = c_0 x^{n-2} + c_1 x^{n-3} + \cdots + c_{n-2}$$

kimi $n-2$ dərəcəli çoxhədlidir.

Belə ki,

$$c_0 = (n-1)hb_0 = n(n-1)h^2 a_0.$$

Eyni qayda ilə alırıq ki,

$$\Delta^n P_n(x) = n! a_0 h^n = const.$$

Beləliklə, $s > n$ üçün

$$\Delta^s P_n(x) = 0$$

alınır.

Misal. $\Delta x = 0{,}5$ qəbul edərək

$$P_3(x) = (2x-1)^3$$

funksiyası üçün üçüncü tərtib sonlu fərqi tapın.

Həlli: $\Delta^n P_n(x) = n! a_0 h^n$ düsturuna görə alırıq ki,

$$\Delta^3 P_3(x) = 3! \cdot 8 \cdot 0{,}5^3 = 6 \cdot 8 \cdot 0{,}125 = 6.$$

$y = f(x)$ funksiyası üçün $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ bərabərliyində Δ simvolunu operator kimi qəbul etsək, asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu operator üçün aşağıdakı xassələr ödənir:

1) $\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v$;

2) $\forall C$ sabiti üçün $\Delta(Cu) = C\Delta u$;

3) $\forall m$ və n mənfi olmayan ədədləri üçün $\Delta^m(\Delta^n y) = \Delta^{m+n} y$.

(1) düsturuna əsasən

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f(x)$$

yazaraq, Δ-ya simvolik vuruq kimi baxsaq alarıq ki,

$$f(x+\Delta x) = (1+\Delta) f(x). \tag{2}$$

Eyni qayda ilə

$$f(x+n\Delta x) = (1+\Delta)^n f(x) \tag{3}$$

yaza bilərik.

Nyuton binomundan istifadə edərək alırıq ki,

$$f(x+n\Delta x) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \Delta^m f(x). \tag{4}$$

Burada

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots[n-(m-1)]}{m!}.$$

Deməli, $f(x)$ funksiyasının ardıcıl qiymətləri onun müxtəlif tərtibli sonlu fərqləri ilə (4) kimi ifadə olunur.

$$\Delta = (1+\Delta) - 1 \tag{5}$$

eyniliyindən və Nyuton binomundan istifadə etsək,

$$\Delta^n f(x) = [(1+\Delta)-1]^n f(x) = (1+\Delta)^n f(x) - C_n^1 (1+\Delta)^{n-1} f(x) + $$
$$+ C_n^2 (1+\Delta)^{n-2} f(x) - \dots + (-1)^n f(x)$$

alarıq.

Sonuncu bərabərlikdə (3) düsturunu nəzərə alsaq:

$$\Delta^n f(x) = f(x+n\Delta x) - C_n^1 f[x+(n-1)\Delta x] +$$
$$+ C_n^2 f[x+(n-2)\Delta x] - \dots + (-1)^n f(x) \qquad (6)$$

yaza bilərik.

Alınan (6) düsturu $f(x)$ funksiyasının n tərtibli sonlu fərqlərinin həmin funksiyanın ardıcıl qiymətləri ilə ifadəsidir.

Bir çox hallarda $y = f(x)$ funksiyası bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən x_i $(i = 0,1,2,\dots)$ nöqtələr sistemi və bu nöqtələrdəki $y_i = f(x_i)$ qiymətləri ilə cədvəl şəklində verilir. Qeyd edək ki, bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən nöqtələr sistemi dedikdə elə nöqtələr nəzərdə tutulur ki, bu nöqtələr üçün

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = const$$

olsun.

Məlumdur ki, y_i ardıcıllığı üçün sonlu fərqlər aşağıdakı kimi qurulur:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$
$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i.$$

Sonuncu sistemin birinci bərabərliyinə əsasən

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = (1+\Delta) y_i$$

yaza bilərik. Buradan

$$y_{i+2} = (1+\Delta) y_{i+1} = (1+\Delta)^2 y_i,$$
$$y_{i+3} = (1+\Delta) y_{i+2} = (1+\Delta)^3 y_i,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_{i+n} = (1+\Delta)^n y_i.$$

alarıq.

Alınan bu ardıcıllığın axırıncı bərabərliyinə Nyuton binomunu tətbiq etsək,

$$y_{i+n} = y_i + C_n^1 \Delta y_i + C_n^2 \Delta^2 y_i + \cdots + \Delta^n y_i$$

olar. Burada $\Delta^n y_i$ -ləri y_i -lər vasitəsi ilə

$$\Delta^n y_i = [(1+\Delta)-1]^n y_i = (1+\Delta)^n y_i - C_n^1 (1+\Delta)^{n-1} y_i +$$
$$+ C_n^2 (1+\Delta)^{n-2} y_i - \cdots + (-1)^n y_i$$

və ya

$$\Delta^n y_i = y_{n+i} - C_n^1 y_{n+i-1} + C_n^2 y_{n+i-2} - \cdots + (-1)^n y_i$$

kimi ifadə etmək olar.

Məsələn,

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{n+1} + y_i,$$
$$\Delta^3 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i \text{ və s.}$$

Qeyd edək ki, n tərtibli $\Delta^n y_i$ sonlu fərqlərini hesablamaq üçün y_i ardıcıllığının $n+1$ sayda $y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots, y_{i+n}$ hədlərinin qiymətlərini bilmək lazımdır.

Müxtəlif tərtibli sonlu fərqlərin qiymətlərini cədvəllə vermək üçün üfiqi və ya diaqonal sonlu fərqlər cədvəlindən istifadə etmək əlverişlidir. Bu qiymətlərin üfiqi və diaqonal sonlu fərqlər cədvəllərində yerləşdirilməsi qaydası uyğun olaraq aşağıdakı kimidir:

Üfiqi sonlu fərqlər cədvəli

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
1	x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$
2	x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$
3	x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$
…	…	…	…	…	…

Diaqonal sonlu fərqlər cədvəli

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	x_0	y_0			
			Δy_0		
1	x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
			Δy_1		$\Delta^3 y_0$
2	x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
			Δy_2		
3	x_3	y_3			

Misal. $y = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ funksiyası üçün $x_0 = 0$ qəbul edərək, $h = 0,5$ addımı ilə üfiqi və diaqonal sonlu fərqlər cədvəllərini qurun.

Həlli: Məlumdur ki, sonlu fərqlər üçün $\Delta^n P_n(x) = n! a_0 h^n = const$ düsturu doğrudur. Onda verilən misalda

$$\Delta^3 P_3(x) = 3! \cdot a_0 \cdot h^3 = 3! \cdot 2 \cdot 0,5^3 = 6 \cdot 2 \cdot 0,125 = 1,5$$

olar. Deməli, bu misal üçün üçüncü tərtib sonlu fərq həmişə 1,5 sabitinə bərabərdir. Beləliklə, verilən funksiya üçün $x_0 = 0$ qəbul etməklə $h = 0,5$ addımı ilə bütün sonlu fərqləri hesablayaraq üfiqi və diaqonal sonlu fərqlər cədvəllərini qura bilərik:

Üfiqi sonlu fərqlər cədvəli

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	0	-1	2	0	1,5
1	0,5	1	2	1,5	1,5
2	1	3	3,5	3	1,5
3	1,5	6,5	6,5	4,5	1,5
4	2	13	11	6	1,5
…	…	…	…	…	…

Diaqonal sonlu fərqlər cədvəli

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	0	-1			
			2		
1	0,5	1		0	
			2		1,5
2	1	3		1,5	
			3,5		
3	1,5	6,5			

Qeyd edək ki, üfiqi sonlu fərqlər cədvəlində, pilləvari xətlərlə cədvəli qurmaq üçün əsas başlanğıc verilənlər işarə olunmuşdur.

§1.2. Bölünən fərqlər və onların xassələri

Sonlu fərqlər cədvəlini qurarkən gördük ki, verilən funksiyanın arqumentlərinin qiymətləri bir-birindən bərabər məsafədə yerləşir. Yəni arqumentərin ardıcıl qiymətlərinin fərqi hər hansı bir sabit ədədə bərabər olur. Lakin bəzən praktikada arqumentlərinin qiymətləri bir-birindən müxtəlif məsafələrdə yerləşən funksiyanın qiymətləri üçün fərqlər cədvəlini qurmaq zərurəti yaranır. Bu zaman sərbəst dəyişənlərin qiymətləri sonlu fərqlərdən fərqli olaraq bir-birindən müxtəlif məsafələrdə yerləşir. Belə hallarda fərqlər cədvəlini qurmaq üçün sonlu fərqlər anlayışının ümumiləşməsi olan bölünən fərqlər üsulu tətbiq olunur.

Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası və bu parçaya daxil olan ixtiyari $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(x_i \neq x_j,\ i \neq j)$ nöqtələr sistemi verilmişdir. Aşağıdakı şəkildə təyin olunan münasibətlərə $f(x)$ funksiyasına uyğun birinci tərtib bölünən fərqlər deyilir:

$$f(x_0\,;x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0};$$

$$f(x_1\,;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}; \tag{1}$$

………………………………

$$f(x_{n-1}\,;x_n)=\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}.$$

Indi isə aşağıdakı münasibətlərə baxaq:

$$f(x_0\,;x_1\,;x_2)=\frac{f(x_1\,;x_2)-f(x_0\,;x_1)}{x_2-x_0};$$

$$f(x_1\,;x_2\,;x_3)=\frac{f(x_2\,;x_3)-f(x_1\,;x_2)}{x_3-x_1};$$

……………………………………………………

$$f(x_{n-2}\,;x_{n-1}\,;x_n)=\frac{f(x_{n-1}\,;x_n)-f(x_{n-2}\,;x_{n-1})}{x_n-x_{n-2}}.$$

Bu şəkildə təyin olunan ifadələr $f(x)$ funksiyasına uyğun ikinci tərtib bölünən fərqlər adlanır.

Analoji qayda ilə ixtiyari $k+1$ tərtibli bölünən fərqləri, k tərtibli bölünən fərqlərin köməyi ilə

$$f(x_{i-1};x_i;\ldots;x_{i+k})=\frac{f(x_i;x_{i+1};\ldots;x_{i+k})-f(x_{i-1};x_i;\ldots;x_{i+k-1})}{x_{i+k}-x_{i-1}} \tag{2}$$

kimi qura bilərik.

Qeyd edək ki, sıfırıncı tərtib bölünən fərqlərin qiymətləri $f(x)$ funksiyasının $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$ $(x_i\neq x_j,\ i\neq j)$ nöqtələrindəki qiymətlərinə bərabərdir.

Lemma. Aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$f(x_1\,;x_2\,;\ldots;x_k)=\sum_{i=1}^{k}\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{i\neq j}(x_j-x_i)}. \tag{3}$$

İsbatı: Lemmanı isabat etmək üçün riyazi induksiya metodundan istifadə edəcəyik. Aydındır ki, $k=1$ olduqda (3) düsturu $f(x_1)=f(x_1)$ eyniliyinə çevrilir. $k=2$ olduqda isə (3) düsturu (1) düsturları ilə üst-üstə düşür, yəni bu halda bölünən fərqlərin tərifinə görə doğruluq alınır. İndi isə fərz edək ki, lemma ixtiyari $k<l$ üçün doğrudur. Onda

$$f(x_1;x_2;\ldots;x_{l+1})=\frac{f(x_2;x_3;\ldots;x_{l+1})-f(x_1;x_2;\ldots;x_l)}{x_{l+1}-x_1}=$$

$$=\frac{1}{x_{l+1}-x_1}\left(\sum_{j=2}^{l+1}\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{i\neq j\\ 2\le i\le l+1}}(x_j-x_i)}-\sum_{j=1}^{l}\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{i\neq j\\ 1\le i\le l}}(x_j-x_i)}\right).$$

Əgər $j\neq 1,\ l+1$ olarsa, onda sonuncu bərabərliyin sağ tərəfi üçün

$$\frac{1}{x_{l+1}-x_1}\left(\frac{1}{\prod\limits_{\substack{i\neq j\\ 2\le i\le l+1}}(x_j-x_i)}-\frac{1}{\prod\limits_{\substack{i\neq j\\ 1\le i\le l}}(x_j-x_i)}\right)=$$

$$=\frac{(x_j-x_1)-(x_j-x_{l+1})}{(x_{l+1}-x_1)\prod\limits_{\substack{i\neq j\\ 2\le i\le l+1}}(x_j-x_i)}=\frac{1}{\prod\limits_{\substack{i\neq j\\ 1\le i\le l+1}}(x_j-x_i)}$$

yaza bilərik. İsbat etdiyimiz (3) düsturundan aşağıdakı nəticələr alınır:

1) Fiksə olunmuş $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_k$ nöqtələri üçün qurulmuş bölünən fərqlər xəttilik xassəsinə malikdir. Yəni
$$(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)(x_1;x_2;\ldots;x_k)=\alpha_1 f_1(x_1;x_2;\ldots;x_k)+\alpha_2 f_2(x_1;x_2;\ldots;x_k).$$
2) Bölünən fərqlər öz $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_k$ arqumentlərinə nəzərən simmetriklik xassəsinə malikdir. Yəni arqumentlərin ixtiyari yerdəyişməsi zamanı bölünən fərqlərin qiyməti dəyişmir.

Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası aşağıdakı cədvəllə verilmişdir.

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$\dots$
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$\dots$

$f(x)$ funksiyasının bu qiymətlərinə əsasən qurulmuş aşağıdakı cədvəl $y=f(x)$ funksiyasına uyğun bölünən fərqlər cədvəli adlanır:

Bölünən fərqlər cədvəli				
$f(x_i)$	*I tərtib bölünən fərqlər*	*II tərtib bölünən fərqlər*	*III tərtib bölünən fərqlər*	*IV tərtib bölünən fərqlər*
$f(x_0)$				
	$f(x_0;x_1)$			
$f(x_1)$		$f(x_0;x_1;x_2)$		
	$f(x_1;x_2)$		$f(x_0;x_1;x_2;x_3)$	
$f(x_2)$		$f(x_1;x_2;x_3)$		$f(x_0;x_1;x_2;x_3;x_4)$
	$f(x_2;x_3)$		$f(x_1;x_2;x_3;x_4)$	
$f(x_3)$		$f(x_2;x_3;x_4)$		
	$f(x_3;x_4)$			
$f(x_4)$				

Misal. Cədvəllə verilmiş aşağıdakı funksiya üçün bütün bölünən fərqləri qurun.

x_i	0,2	0,7	1	1,8	2	2,1
$f(x_i)$	103,51	118,71	124,64	130,72	135,15	137,41

Həlli: Verilən funksiya üçün bütün bölünən fərqləri tapmaq üçün (2) düsturundan istifadə edək. Əvvəlcə birinci tərtib bölünən fərqləri quraq:

$$f(x_0;x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{118,71-103,51}{0,7-0,2}=\frac{15,2}{0,5}=30,4\,;$$

$$f(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{124{,}64-118{,}71}{1-0{,}7}=\frac{5{,}93}{0{,}3}=19{,}7666\,;$$

$$f(x_2;x_3)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=\frac{130{,}72-124{,}64}{1{,}8-1}=\frac{6{,}08}{0{,}8}=7{,}6\,;$$

$$f(x_3;x_4)=\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}=\frac{135{,}15-130{,}72}{2-1{,}8}=\frac{4{,}43}{0{,}2}=22{,}15\,;$$

$$f(x_4;x_5)=\frac{f(x_5)-f(x_4)}{x_5-x_4}=\frac{137{,}41-135{,}15}{2{,}1-2}=\frac{2{,}26}{0{,}1}=22{,}6\,.$$

Indi isə ikinci tərtib bölünən fərqləri tapaq:

$$f(x_0;x_1;x_2)=\frac{f(x_1;x_2)-f(x_0;x_1)}{x_2-x_0}=\frac{19{,}7666-30{,}4}{1-0{,}2}=-13{,}2918\,;$$

$$f(x_1;x_2;x_3)=\frac{f(x_2;x_3)-f(x_1;x_2)}{x_3-x_1}=\frac{7{,}6-19{,}7666}{1{,}8-0{,}7}=-11{,}0605\,;$$

$$f(x_2;x_3;x_4)=\frac{f(x_3;x_4)-f(x_2;x_3)}{x_4-x_2}=\frac{22{,}15-7{,}6}{2-1}=14{,}55\,;$$

$$f(x_3;x_4;x_5)=\frac{f(x_4;x_5)-f(x_3;x_4)}{x_5-x_3}=\frac{22{,}6-22{,}15}{2{,}1-1{,}8}=1{,}5\,.$$

Üçüncü tərtib bölünən fərqləri isə aşağıdakı kimi tapmaq olar:

$$f(x_0;x_1;x_2;x_3)=\frac{f(x_1;x_2;x_3)-f(x_0;x_1;x_2)}{x_3-x_0}=$$

$$=\frac{-11{,}0605-(-13{,}2918)}{1{,}8-0{,}2}=1{,}3946\,;$$

$$f(x_1;x_2;x_3;x_4)=\frac{f(x_2;x_3;x_4)-f(x_1;x_2;x_3)}{x_4-x_1}=$$

$$=\frac{14{,}55-(-11{,}0605)}{2-0{,}7}=19{,}7\,;$$

$$f(x_2;x_3;x_4;x_5)=\frac{f(x_3;x_4;x_5)-f(x_2;x_3;x_4)}{x_5-x_2}=$$

$$= \frac{1,5 - 14,55}{2,1 - 1} = -11,8636 .$$

Analoji qayda ilə dördüncü və beşinci tərtib bölünən fərqləri də tapa bilərik:

$$f(x_0;x_1;x_2;x_3;x_4) = \frac{f(x_1;x_2;x_3;x_4) - f(x_0;x_1;x_2;x_3)}{x_4 - x_0} =$$

$$= \frac{19,7 - 1,3946}{2 - 0,2} = 10,1697 ;$$

$$f(x_1;x_2;x_3;x_4;x_5) = \frac{f(x_2;x_3;x_4;x_5) - f(x_1;x_2;x_3;x_4)}{x_5 - x_0} =$$

$$= \frac{-11,8636 - 19,7}{2,1 - 1} = -28,6942 .$$

$$f(x_0;x_1;x_2;x_3;x_4;x_5) = \frac{f(x_1;x_2;x_3;x_4;x_5) - f(x_0;x_1;x_2;x_3;x_4)}{x_5 - x_0} =$$

$$= \frac{-28,6942 - 10,1697}{2,1 - 0,2} = -20,4547 .$$

§1.3. İnterpolyasiya məsələsinin qoyuluşu

Sadə interpolyasiya məsələsinin qoyuluşu aşağıdakı kimidir:

Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında düyün nöqtələri adlanan $n+1$ sayda $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(x_i \neq x_j,\ i \neq j)$ nöqtələri və bu parçada təyin olunmuş hər hansı $y = f(x)$ funksiyasının $x_0, x_1, x_2, \ldots,$ $x_n \in [a,b]$ nöqtələr sistemindəki

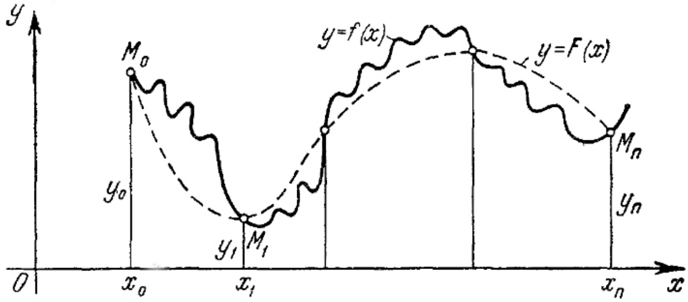
$$f(x_0) = y_0 ,\ f(x_1) = y_1 ,\ \ldots\ ,\ f(x_n) = y_n \tag{1}$$

qiymətləri verilmişdir. Elə interpolyasiyaedici $F(x)$ funksiyası qurmaq tələb olunur ki,

$$F(x_0) = y_0 ,\ F(x_1) = y_1 ,\ \ldots\ ,\ F(x_n) = y_n \tag{2}$$

olsun.

İnterpolyasiya məsələsinin həndəsi mənası, $y = f(x)$ funksiyası üçün, verilmiş $M_i(x_i, y_i)$ nöqtələr sistemindən keçən hər hansı $y = F(x)$ əyrisinin qurulmasından ibarətdir (Şəkil 1).



Şəkil 1.

Qeyd edək ki, interpolyasiya məsələsinin bu cür ümumi qoyuluşu zamanı sonsuz sayda həll alına bilər və ya məsələnin heç bir həlli olmaya bilər. Lakin interpolyasiyaedici $F(x)$ funksiyası əvəzinə dərəcəsi n-i aşmayan və

$$P(x_0) = y_0, \; P(x_1) = y_1, \; \dots \;, \; P(x_n) = y_n$$

şərtini ödəyən çoxhədli qurulduqda interpolyasiya məsələsi birqiymətli həll olunur.

Alınmış interpolyasiya düsturu

$$y = F(x)$$

adətən arqumentin düyün nöqtələrindən fərqli x qiymətində $f(x)$ funksiyasının təqribi qiymətinin tapılmasında istifadə olunur. Bu əməliyyat $f(x)$ funksiyasının interpolyasiya olunması adlanır. Daha dəqiq desək, əgər $x \in [x_0, x_n]$ olarsa, onda bu prosesə $f(x)$ funksiyasının interpolyasiyası, $x \notin [x_0, x_n]$ olduqda isə $f(x)$ funksiyasının ekstrapolyasiyası deyilir.

§1.4. Ümumiləşmiş qüvvət anlayışı

Tərif. Aşağıdakı kimi qurulan hasilə x ədədinin n-ci dərəcədən ümumiləşmiş qüvvəti deyilir:

$$x^{[n]} = x(x-h)(x-2h)\cdots[x-(n-1)h]. \quad (1)$$

Burada h hər hansı sabit ədəddir.

Qeyd edək ki, $n=0$ olduqda $x^{[0]}=1$, $h=0$ olduqda isə $x^{[n]}=x^n$ olur. İndi isə $\Delta x = h$ qəbul edərək ümumiləşmiş qüvvətlər üçün birinci və ikinci tərtib sonlu fərqləri hesablayaq:

$$\begin{aligned}\Delta x^{[n]} &= (x+h)^{[n]} - x^{[n]} = \\ &= (x+h)x\cdots[x-(n-2)h] - x(x-h)\cdots[x-(n-1)h] = \\ &= x(x-h)\cdots[x-(n-2)h]\cdot\{(x+h)-[x-(n-1)h]\} = \\ &= x(x-h)\cdots[x-(n-2)h]nh = nhx^{[n-1]}. \quad (2)\end{aligned}$$

$$\Delta^2 x^{[n]} = \Delta(\Delta x^{[n]}) = \Delta(nhx^{[n-1]}) = nh\cdot(n-1)hx^{[n-2]} = nh^2(n-1)x^{[n-2]}.$$

Riyazi induksiya üsulunun köməyi ilə isbat etmək olar ki,

$$\Delta^k x^{[n]} = n(n-1)\cdots[n-(k-1)]h^k x^{[n-k]} \quad (k=1,2,\ldots,n).$$

Aydındır ki, $k>n$ olduqda $\Delta^k x^{[n]} = 0$.

§1.5. Bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən nöqtələr üçün Nyutonun birinci (irəliyə) interpolyasiya çoxhədlisi

Tutaq ki, $y=f(x)$ funksiyasının arqumentin bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən $x_i = x_0 + ih$ $(i=0,1,\ldots,n)$ nöqtələrinə uyğun $y_i = f(x_i)$ qiymətləri verilmişdir. Burada h interpolyasiya addımıdır.

Dərəcəsi n-i aşmayan elə $P_n(x)$ çoxhədlisi qurmaq tələb olunur ki, arqumentin x_i qiymətlərində

$$P_n(x_i) = y_i, \quad (i=0,1,\ldots,n) \quad (1)$$

olsun. Aydındır ki, (1) şərtini aşağıdakı kimi də yazmaq olar:

$$\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0, \quad (i=0,1,\ldots,m).$$

Qurulması tələb olunan $P_n(x)$ çoxhədlisini aşağıdakı şəkildə axtaraq:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)\times$$

$$\times(x-x_2)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\,. \qquad (2)$$

Ümumiləşmiş qüvvətlərin tərifindən istifadə edərək (2) bərabərliyini

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)^{[1]}+a_2(x-x_0)^{[2]}+$$
$$+a_3(x-x_0)^{[3]}+\cdots+a_n(x-x_0)^{[n]}. \qquad (2')$$

kimi yaza bilərik. Göründüyü kimi $P_n(x)$ çoxhədlisini qurmaq üçün a_i $(i=0,1,2,\ldots,n)$ əmsallarını təyin etməliyik. $(2')$ bərabərliyində $x=x_0$ qəbul etsək:

$$P_n(x_0)=y_0=a_0$$

olar.

a_1 əmsalını tapmaq üçün $(2')$-ə uyğun birinci tərtib sonlu fərqi quraq:

$$\Delta P_n(x)=a_1h+2a_2(x-x_0)^{[1]}h+$$
$$+3a_3(x-x_0)^{[2]}h+\cdots+na_n(x-x_0)^{[n-1]}h\,.$$

Alınan ifadədə $x=x_0$ yazsaq:

$$\Delta P_n(x_0)=\Delta y_0=a_1h\,.$$

Buradan isə

$$a_1=\frac{\Delta y_0}{1!h}$$

alarıq.

a_2 əmsalını təyin etmək üçün $(2')$-ə uyğun ikinci tərtib sonlu fərqi yazaq:

$$\Delta^2P_n(x)=2!h^2a_2+2\cdot 3h^2a_3(x-x_0)^{[1]}+\cdots+(n-1)nh^2a_n(x-x_0)^{[n-2]}h.$$

Sonuncu bərabərlikdə $x=x_0$ əvəzləməsi apararaq

$$\Delta^2P_n(x_0)=\Delta^2y_0=2!h^2a_2\,,\qquad a_2=\frac{\Delta^2y_0}{2!h^2}$$

alarıq.

Bu prosesi davam etdirməklə

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!h^i} \qquad (i = 0,1,2,\ldots,n)$$

yaza bilərik. Qeyd edək ki, burada $0! = 1$ və $\Delta^0 y = y$.

a_i $(i = 0,1,2,\ldots,n)$ əmsalları üçün tapdığımız bu qiymətləri ($2'$) bərabərliyində nəzərə alsaq:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)^{[2]} + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)^{[n]} \quad (3)$$

olar. Alınan bu çoxhədliyə Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisi deyilir.

Aydındır ki, (3) çoxhədlisi üçün qoyulan məsələnin bütün şərtləri ödənir. Doğrudan da, (3) bərabərliyi ilə ifadə olunan $P_n(x)$ çoxhədlisinin dərəcəsi n-i aşmır və

$$P_n(x_0) = y_0$$

bərabərliyi ödənilir. Eyni zamanda bu çoxhədli üçün

$$P_n(x_k) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x_k - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x_k - x_0)(x_k - x_1) + \cdots +$$

$$+ \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots +$$

$$+ \frac{k(k-1)\ldots 1}{k!}\Delta^k y_0 = (1 + \Delta)^k y_0 = y_k \quad (k = 1,2,\ldots,n).$$

Qeyd edək ki, $h \to 0$ olduqda (3) düsturu y funksiyası üçün Teylor çoxhədlisinə çevrilir. Öz növbəsində

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta^k y_0}{h^k} = \left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)_{x = x_0} = y^{(k)}(x_0).$$

Bundan başqa, aydındır ki,

$$\lim_{h \to 0}(x - x_0)^{[n]} = (x - x_0)^n.$$

Alırıq ki, $h \to 0$ olduqda (3) düsturu uyğun Teylor çoxhədlisi ilə üst-üstə düşür:

$$P_n(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Praktik cəhətdən əlverişli olması üçün (3) düsturunu nisbətən sadə şəkildə yazmaq olar. Bu məqsədlə aşağıdakı kimi təyin olunan yeni

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

dəyişəni daxil edək. Onda

$$\frac{(x-x_0)^{[i]}}{h^i} = \frac{(x-x_0)}{h} \cdot \frac{(x-x_0-h)}{h} \cdot \frac{(x-x_0-2h)}{h} \cdots \frac{[x-x_0-(i-1)h]}{h} =$$
$$= q(q-1)(q-2)\cdots(q-i+1) \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

olar.

Sonuncu ifadəni (3) düsturunda nəzərə alsaq:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (4)$$

alarıq. Burada

$$q = \frac{x - x_0}{h} .$$

(4) düsturu bərabər məsafədə yerləşən nöqtələr üçün Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisidir.

Əgər (4) düsturunda $n = 1$ qəbul etsək, Nyutonun xətti interpolyasiya çoxhədlisi alınar:

$$P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0 .$$

Nyuton çoxhədlisində $n = 2$ olduqda alınan

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0$$

çoxhədliyə Nyutonun parabolik və ya kvadratik interpolyasiya çoxhədlisi deyilir.

Misal. Düyün nöqtələrini $x_0 = 0{,}3$, $x_1 = 0{,}9$ və $x_2 = 1{,}5$ kimi qəbul edərək $y = 2^x - 2x$ funksiyası üçün Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisini qurun.

Həlli: Göründüyü kimi, məsələnin şərtində üç düyün nöqtəsi verilmişdir. Deməli, axtarılan Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisi aşağıdakı kimi iki dərəcəli çoxhədlidir:

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 .$$

İndi isə verilən funksiyanın düyün nöqtələrindəki qiymətlərini hesablayaq və uyğun sonlu fərqlər cədvəlini quraq:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	0,3	0,631		
			-0,565	
1	0,9	0,066		0,327
			-0,238	
2	1,5	-0,172		

Aydındır ki, $h = 0{,}6$. Onda

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 0{,}3}{0{,}6}$$

yaza bilərik.

Deməli,

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 =$$

$$= 0{,}631 + \frac{x-0{,}3}{0{,}6}\cdot(-0{,}565) + \frac{\frac{x-0{,}3}{0{,}6}\cdot\left(\frac{x-0{,}3}{0{,}6} - 1\right)}{2}\cdot 0{,}327 =$$

$$= 0{,}631 + \frac{-0{,}565x + 0{,}1695}{0{,}6} + \frac{\frac{x^2 - 0{,}6x + 0{,}09}{0{,}36} - \frac{0{,}6x - 0{,}18}{0{,}36}}{2}\cdot 0{,}327 =$$

$$= 0{,}45416x^2 - 1{,}4866x + 1{,}036125 .$$

Bu isə verilən funksiyaya uyğun Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisidir.

Doğrudan da,

$P_2(0,3)=0,45416\cdot 0,3^2-1,4866\cdot 0,3+1,036125=0,6310194\approx y_0$;

$P_2(0,9)=0,45416\cdot 0,9^2-1,4866\cdot 0,9+1,036125=0,0660546\approx y_1$;

$P_2(1,5)=0,45416\cdot 1,5^2-1,4866\cdot 1,5+1,036125=-0,171915\approx y_2$.

Misal. Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisinin köməyi ilə ilk n natural ədədin kvadratları cəmini tapın.

Həlli: Məlumdur ki, ilk n natural ədədin kvadratları cəmi

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

kimidir. Onda

$$\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = (n+1)^2$$

yaza bilərik. Buradan alırıq ki,

$$\Delta^3 S_n = 2 .$$

Deməli, S_n n-ə nəzərən üç dərəcəli çoxhədlidir. ΔS_1 və $\Delta^2 S_1$ fərqlərini təyin etmək üçün, S_1, S_2 və S_3 qiymətlərini hesablayaq:

$$S_1 = 1,$$

$$S_2 = S_1 + 2^2 = 1 + 4 = 5,$$

$$S_3 = S_2 + 3^2 = 5 + 9 = 14.$$

Onda

$$\Delta S_1 = 5 - 1 = 4,$$

$$\Delta S_2 = 14 - 5 = 9,$$

$$\Delta^2 S_1 = \Delta S_2 - \Delta S_1 = 9 - 4 = 5,$$

və

$$\Delta^3 S_n = 2 .$$

Burada $q = \dfrac{n-1}{1} = n-1$ olduğunu nəzərə almaqla Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisini tətbiq etsək alarıq ki,

$$S_n = 1 + 4(n-1) + \frac{5(n-1)(n-2)}{2} + \frac{2(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

və ya

$$S_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Misal. Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisindən istifadə edərək, aşağıdakı cədvəllə verilmiş funksiyanın $x = 0{,}26$ və $x = 0{,}53$ nöqtələrindəki qiymətlərini hesablayın.

x_i	0,2	0,4	0,6	0,8
$f(x_i)$	1,35	1,7	2,08	2,46

Həlli: Əvvəlcə, verilən funksiyanın $x = 0{,}26$ nöqtəsindəki qiymətini tapaq. Cədvəldən göründüyü kimi, verilən funksiyanın dörd düyün nöqtəsindəki qiymətləri məlumdur. Yəni axtarılan Nyuton çoxhədlisi aşağıdakı kimi üç dərəcəli çoxhədlidir:

$$P_3(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 .$$

Digər tərəfdən də $h = 0{,}2$ olduğundan

$$q = \frac{0{,}26 - 0{,}2}{0{,}2} = 0{,}3$$

yaza bilərik.

İndi də, verilən funksiyanın düyün nöqtələrindəki qiymətlərinə uyğun sonlu fərqlər cədvəlini quraq:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	0,2	1,35			
			0,35		
1	0,4	1,7		0,03	
			0,38		-0,03
2	0,6	2,08		0	
			0,38		
3	0,8	2,46			

Deməli,

$$P_3(0{,}26) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 =$$

$$= 1{,}35 + 0{,}3 \cdot 0{,}35 + \frac{0{,}3 \cdot (0{,}3-1)}{2} \cdot 0{,}03 +$$

$$+ \frac{0{,}3 \cdot (0{,}3-1)(0{,}3-2)}{6} \cdot (-0{,}03) =$$

$$= 1{,}35 + 0{,}105 - 0{,}00315 - 0{,}001785 =$$

$$= 1{,}450065.$$

Beləliklə, alırıq ki, $P_3(0{,}26) = 1{,}450065$.

İndi isə verilən funksiyanın $x = 0{,}53$ nöqtəsindəki qiymətini hesablayaq. Bu nöqtə $[0{,}4\,;\,0{,}6]$ parçasına daxil olduğu üçün düsturda, funksiyanın başlanğıc y_0 qiyməti əvəzinə y_1, Δy_0 və $\Delta^2 y_0$ sonlu fərqləri əvəzinə isə uyğun olaraq Δy_1 və $\Delta^2 y_1$ fərqlərini götürəcəyik (Cədvəldə altdan qoşa xətt çəkilmiş fərqlər). Onda

$$P_2(x) = y_1 + q\Delta y_1 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_1 .$$

Funksiyanın verilən nöqtədəki qiymətini tapmaq üçün əvvəlcə q-nü tapaq:

$$q = \frac{0{,}53 - 0{,}4}{0{,}2} = 0{,}65 .$$

Buradan

$$P_2(0{,}53) = y_1 + q\Delta y_1 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_1 =$$

$$= 1{,}7 + 0{,}65 \cdot 0{,}38 + \frac{0{,}65 \cdot (0{,}65-1)}{2} \cdot 0 =$$

$$= 1{,}7 + 0{,}4199 + 0 = 2{,}1199 .$$

Beləliklə, alırıq ki, $P_3(0{,}53) = 2{,}1199$.

§1.6. Bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən nöqtələr üçün Nyutonun ikinci (geriyə) interpolyasiya çoxhədlisi

Əvvəlcə qeyd edək ki, əgər cədvəllə verilmiş funksiyanın təyin oblastının hər hansı nöqtəsindəki qiymətinin tapılması zamanı, arqumentin verilən qiyməti cədvəlin sonlarındakı düyün noqtələri arasında yerləşərsə bu zaman Nyutonun birinci (irəliyə) interpolyasiya çoxhədlisinin tətbiq olunması əlverişli olmur. Daha dəqiq desək, bu halda məsələnin həllinin tapılmasında nəzərə çarpacaq qədər xətaya yol verilir. Bu çatışmazlığı aradan qaldırmaq üçün bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən nöqtələr üçün Nyutonun ikinci (geriyə) interpolyasiya düsturundan istifadə edilir. İndi isə bu düsturun qurulmasına baxaq.

Tutaq ki, bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0,1,2,\dots,n)$$

qiymətlərində, $y = f(x)$ funksiyasının

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 0,1,2,\dots,n)$$

qiymətləri məlumdur.

İnerpolyasiyaedici çoxhədlini aşağıdakı şəkildə axtaraq:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + a_3(x - x_n)(x - x_{n-1}) \times$$
$$\times (x - x_{n-2}) + \cdots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1) .$$

Bu çoxhədlini ümumiləşmiş qüvvətlərin köməyi ilə

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n)^{[1]} + a_2(x - x_{n-1})^{[2]} +$$
$$+ a_3(x - x_{n-2})^{[3]} + \cdots + a_n(x - x_1)^{[n]}$$

kimi yazaq.

Aydındır ki, $P_n(x)$ çoxhədlisini qurmaq üçün $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ əmsallarını elə seçməliyik ki,

$$P_n(x_i) = y_i \quad (i = 0,1,2,\dots,n)$$

bərabərliyi həmişə doğru olsun. Qeyd edək ki, burada aşağıdakı bərabərliyin doğru olması zəruri və kafidir

$$\Delta^i P_n(x_{n-i}) = \Delta^i y_{n-i} \quad (i = 0,1,2,\dots,n). \qquad (2)$$

(1) düsturunda $x = x_n$ qəbul etsək:

$$P_n(x_n) = y_n = a_0,$$

buradan isə

$$a_0 = y_n$$

alarıq.

Sonra (1) bərabərliyinin sol və sağ tərəfləri üçün birinci tərtib sonlu fərqləri yazaraq:

$$\Delta P_n(x) = a_1 \cdot 1h + a_2 \cdot 2h(x - x_{n-1})^{[1]} + a_3 \cdot 3h(x - x_{n-2})^{[2]} +$$
$$+ a_4 \cdot 4h(x - x_{n-3})^{[3]} + \cdots + a_n \cdot nh(x - x_1)^{[n-1]}.$$

Sonuncu bərabərlikdə $x = x_{n-1}$ qəbul etsək və (2) münasibətini nəzərə alsaq:

$$\Delta P_n(x_{n-1}) = \Delta y_{n-1} = a_1 h$$

olar.

Deməli,

$$a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}.$$

Analoji olaraq (1) bərabərliyinin sol və sağ tərəfləri üçün ikinci tərtib sonlu fərqləri quraraq alarıq ki,

$$\Delta^2 P_n(x) = a_2 \cdot 2h^2 + a_3 \cdot 3 \cdot 2h^2 (x - x_{n-2})^{[1]} +$$
$$+ a_4 \cdot 4 \cdot 3h^2 (x - x_1)^{[2]} + \cdots + a_n \cdot n(n-1)h^2 (x - x_1)^{[n-2]}.$$

Burada $x = x_{n-2}$ qəbul edərək

$$\Delta^2 P_n(x_{n-2}) = \Delta^2 y_{n-2} = a_2 \cdot 2! \cdot h^2$$

və ya

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! \cdot h^2}$$

alarıq.

Göründüyü kimi, a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ əmsallarının tapılmasında müəyyən qanunauyğunluq var. Riyazi induksiya üsulunun köməyi ilə asanlıqla göstərmək olar ki,

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-1}}{i! \cdot h^i} \quad (i = 0,1,2,\ldots,n).$$

Nəhayət, a_i əmsallarının tapılan qiymətlərini (1) düsturunda nəzərə almaqla

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$
$$+ \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \cdots +$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)\cdots(x - x_1) \qquad (4)$$

yaza bilərik.

Alınan (4) düsturu bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən nöqtələr üçün Nyutonun ikinci (geriyə) interpolyasiya düsturu adlanır.

Indi isə bu düsturu praktik cəhətdən daha əlverişli şəkildə yazaq. Tutaq ki,

$$q = \frac{x - x_n}{h}.$$

Onda

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - x_n + h}{h} = q + 1, \quad \frac{x - x_{n-2}}{h} = q + 2 \text{ və s.}$$

Sonuncu ifadələri (4) düsturunda nəzərə alsaq

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \ldots +$$
$$+ \frac{q(q+1)\cdots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (4')$$

alınar. Bu isə Nyutonun ikinci interpolyasiya çoxhədlisinin ən çox istifadə olunan şəklidir.

Misal. Düyün nöqtələrini $x_0 = 1{,}2$, $x_1 = 1{,}6$ və $x_2 = 2$ kimi qəbul edərək, $y = \sqrt{x+1}$ funksiyası üçün Nyutonun ikinci interpolyasiya çoxhədlisini qurun.

Həlli: Məsələnin şərtində üç düyün nöqtəsi verilmişdir. Deməli, qurulması tələb olunan Nyutonun ikinci interpolyasiya çoxhədlisi aşağıdakı kimi iki dərəcəli çoxhədlidir:

$$P_2(x) = y_2 + q\Delta y_1 + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_0 .$$

$y = \sqrt{x+1}$ funksiyasının verilən düyün nöqtələrindəki qiymətlərini hesablayaq və uyğun sonlu fərqlər cədvəlini quraq:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	1,2	1,483		
			0,129	
1	1,6	1,612		<u>-0,009</u>
			<u>0,12</u>	
2	2	<u>1,732</u>		

Göründüyü kimi, $h = 0{,}4$. Onda

$$q = \frac{x - x_2}{h} = \frac{x-2}{0{,}4}$$

yaza bilərik.

Deməli,

$$P_2(x) = y_2 + q\Delta y_1 + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_0 =$$

$$= 1{,}732 + \frac{x-2}{0{,}4}\cdot 0{,}12 + \frac{\frac{x-2}{0{,}4}\cdot\left(\frac{x-2}{0{,}4}+1\right)}{2}\cdot(-0{,}009) =$$

$$= -0{,}028125x^2 + 0{,}42375x + 0{,}997 .$$

Bu isə $y = \sqrt{x+1}$ funksiyasına uyğun Nyutonun ikinci interpolyasiya çoxhədlisidir.

Doğrudan da,

$$P_2(1{,}2) = -0{,}028125\cdot 1{,}2^2 + 0{,}42375\cdot 1{,}2 + 0{,}997 = 1{,}465 \approx y_0 ;$$

$$P_2(1{,}6) = -0{,}028125 \cdot 1{,}6^2 + 0{,}42375 \cdot 1{,}6 + 0{,}997 = 1{,}603 \approx y_1;$$

$$P_2(2) = -0{,}028125 \cdot 2^2 + 0{,}42375 \cdot 2 + 0{,}997 = 1{,}732 \approx y_2.$$

Misal. Nyutonun ikinci interpolyasiya çoxhədlisini tətbiq edərək aşağıdakı cədvəllə verilmiş funksiyanın $x = 0{,}44$ nöqtəsindəki qiymətini tapın.

x_i	-0,4	-0,1	0,2	0,5
$f(x_i)$	0,324	0,846	1,286	1,674

Həlli: Cədvəldən göründüyü kimi, funksiya dörd düyün nöqtəsindəki qiymətləri ilə verilmişdir. Deməli, uyğun Nyuton çoxhədlisi aşağıdakı kimi üç dərəcəli çoxhədlidir.

$$P_3(x) = y_3 + q\Delta y_2 + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_1 + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_0.$$

Düyün nöqtələri arasındakı addım, $h = 0{,}2$ olduğundan, alırıq ki,

$$q = \frac{x - x_3}{h} = \frac{0{,}44 - 0{,}5}{0{,}3} = -0{,}2.$$

İndi isə verilən funksiyanın düyün nöqtələrindəki qiymətlərinə uyğun sonlu fərqlər cədvəlini quraq:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	-0,4	0,324			
			0,522		
1	-0,1	0,846		-0,082	
			0,44		0,03
2	0,2	1,286		-0,052	
			0,388		
3	0,5	1,674			

Deməli,

$$P_3(0{,}44) = y_3 + q\Delta y_2 + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_1 + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_0 =$$

$$= 1{,}674 + (-0{,}2)\cdot 0{,}388 + \frac{(-0{,}2)\cdot(-0{,}2+1)}{2}\cdot(-0{,}052) +$$

$$+ \frac{(-0{,}2)\cdot(-0{,}2+1)(-0{,}2+2)}{6}\cdot 0{,}03 =$$

$$= 1{,}674 - 0{,}0776 + 0{,}00416 - 0{,}00144 = 1{,}59912 .$$

Nəhayət, alırıq ki, $P_3(0{,}44) = 1{,}59912$.

§1.7. Mərkəzi fərqlər cədvəli

Məlumdur ki, Nyutonun interpolyasiya çoxhəlilərini qurarkən adətən funksiyanın başlanğıc qiymətlərinə nəzərən bir tərəfdə (yuxarıda və ya aşağıda) yerləşən sonlu fərqlərdən istifadə edilir. Yəni bu düsturlar birtərəfli xarakter daşıyır. Lakin bir çox hallarda elə interpolyasiya çoxhədliləri qurmaq zərurəti yaranır ki, bu funksiyanın başlanğıc x_0 və y_0 qiymətlərinə nəzərən əvvəlki (yuxarıdakı) və sonrakı (aşağıdakı) sonlu fərqlərdən də istifadə etmək lazım gəlir. Məsələn, x_0 və y_0 başlanğıc verilənlər olduqda Δy_{-1}, Δy_0, $\Delta^2 y_{-1}$ və s. kimi sonlu fərqlər də interpolyasiya çoxhədlisinə daxil ola bilər. Bu cür qurulan fərqlərə mərkəzi fərqlər deyilir. Qeyd edək ki, burada

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad y_i = f(x_i),$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i; \quad \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \quad \text{və s.}$$

Mərkəzi fərqlərin köməyi ilə qurulan interpolyasiya çoxhədliləri, mərkəzi fərqli interpolyasiya çoxhədliləri adlanır. Belə interpolyasiya çoxhədlilərinə Qauss, Stirlinq və Bessel çoxhədlilərini misal göstərmək olar.

Aşağıdakı cədvəldə mərkəzi fərqlərin qurulma qaydası göstərilmişdir:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
x_{-4}	y_{-4}						
		Δy_{-4}					
x_{-3}	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$				
		Δy_{-3}		$\Delta^3 y_{-4}$			
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$		
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		$\Delta^5 y_{-4}$	
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		$\Delta^6 y_{-4}$
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$	
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		$\Delta^6 y_{-3}$
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$	
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$		$\Delta^6 y_{-2}$
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		$\Delta^5 y_{-1}$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$		
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$			
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$				
		Δy_3					
x_4	y_4						

§1.8. Qaussun interpolyasiya çoxhədliləri

Tutaq ki, $2n+1$ sayda bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən

$$x_{-n}, x_{-(n-1)}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n,$$

düyün nöqtələri verilmişdir.

Qeyd edək ki, burada

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = const \quad [\, i = -n, -(n-1), \ldots, n-1 \,]$$

və $y = f(x)$ funksiyasının bu düyün nöqtələrindəki

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n)$$

qiymətləri məlumdur.

Dərəcəsi $2n$-i aşmayan elə $P(x)$ çoxhədlisi qurmaq tələb olunur ki,

$$P(x_i) = y_i \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n)$$

olsun.

Sonuncu şərtdən çıxır ki, i və k-nın ixtiyari uyğun qiymətləri üçün

$$\Delta^k P(x_i) = \Delta^k y_i \tag{1}$$

bərabərliyi doğrudur.

Tələb olunan $P(x)$ çoxhədlisini aşağıdakı kimi axtaracağıq:

$$\begin{aligned}P(x) = {} & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_{-1})(x - x_0)\times \\ & \times (x - x_1) + a_4(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + a_5(x - x_{-2})\times \\ & \times (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + a_{2n-1}(x - x_{-(n-1)})\cdots \\ & \cdots (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) + a_{2n}(x - x_{-(n-1)})\cdots \\ & \cdots (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

(2) düsturunu ümimiləşmiş qüvvətlərin köməyi ilə aşağıdakı kimi yazaq:

$$\begin{aligned}P(x) = {} & a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + a_3(x - x_{-1})^{[3]} + a_4(x - x_{-1})^{[4]} + \\ & + \cdots + a_{2n-1}(x - x_{-(n-1)})^{[2n-1]} + a_{2n}(x - x_{-(n-1)})^{[2n]}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Sonuncu bərabərlikdə a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$ əmsallarını Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisini daxil edərkən istifadə etdiyimiz üsulun köməyi ilə təyin edərək və (2) düsturunu nəzərə almaqla

$$a_0 = y_0\,, \quad a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!h}\,, \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!h^2}\,, \quad a_3 = \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!h^3}\,,$$

$$a_4 = \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!h^4}\,, \quad \ldots\,, \quad a_{2n-1} = \frac{\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{(2n-1)!h^{2n-1}}\,, \quad a_{2n} = \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)!h^{2n}}$$

yaza bilərik.

İndi isə

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

kimi yeni dəyişən daxil edək və q-nün bu qiymətini (1) düsturunda nəzərə alaq. Onda

$$P(x)= y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$$

$$+\frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2}+$$

$$+\cdots+\frac{(q+n-1)\cdots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} +$$

$$+\frac{(q+n-1)\cdots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \qquad (4)$$

və ya

$$P(x) = y_0+ q\Delta y_0+ \frac{q^{[2]}}{2!}\Delta^2 y_{-1}+ \frac{(q+1)^{[3]}}{3!}\Delta^3 y_{-1}+ \frac{(q+1)^{[4]}}{4!}\Delta^4 y_{-2}+$$

$$+\cdots+ \frac{(q+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}+ \frac{(q+n-1)^{[2n]}}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \quad (4')$$

alarıq.

Qeyd edək ki, burada

$$x = x_0 + qh \quad \text{və} \quad q^{[m]} = q(q-1)\cdots[q-(m-1)].$$

Alınan (4) və $(4')$ çoxhədlilərinə Qaussun birinci interpolyasiya çoxhədlisi deyilir.

Misal. Qaussun birinci interpolyasiya çoxhədlisinin köməyi ilə, aşağıdakı cədvəllə verilmiş funksiyanın $x = 2{,}34$ nöqtəsindəki qiymətini tapın.

x_i	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2
$f(x_i)$	0,72	0,93	0,99	0,91	0,68	0,34	-0,06

Həlli: Cədvəldən göründüyü kimi, funksiya yeddi düyün nöqtəsindəki qiymətləri ilə verilmişdir. Bu o deməkdir ki, uyğun Qauss çoxhədlisi aşağıdakı kimi altı dərəcəli çoxhədli olacaq:

$$P(x) \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$$

$$+\frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} +$$

$$+\frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)(q-3)}{6!}\Delta^6 y_{-3}\,.$$

Göründüyü kimi, $h = 0{,}4$. Onda alırıq ki,

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{2{,}34 - 2}{0{,}4} = 0{,}85\,.$$

İndi isə, verilən funksiyanın qiymətlərinə uyğun fərqlər cədvəlini quraq:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
-3	0,8	0,72						
			0,21					
-2	1,2	0,93		-0,15				
			0,06		0,01			
-1	1,6	0,99		-0,14		-0,02		
			-0,08		-0,01		0,07	
0	2	0,91		-0,15		0,05		-0,11
			-0,23		0,04		-0,04	
1	2,4	0,68		-0,11		0,01		
			-0,34		0,05			
2	2,8	0,34		-0,06				
			-0,4					
3	3,2	-0,06						

Deməli,

$$P(2{,}34) \approx 0{,}91 + 0{,}85\cdot(-0{,}23) + \frac{0{,}85(0{,}85-1)}{2!}\cdot(-0{,}15) +$$

$$+\frac{(0,85+1)\cdot 0,85\cdot(0,85-1)}{3!}\cdot 0,04+$$

$$+\frac{(0,85+1)\cdot 0,85\cdot(0,85-1)(0,85-2)}{4!}\cdot 0,05+$$

$$+\frac{(0,85+2)(0,85+1)\cdot 0,85\cdot(0,85-1)(0,85-2)}{5!}\cdot(-0,04)+$$

$$+\frac{(0,85+2)(0,85+1)\cdot 0,85\cdot(0,85-1)(0,85-2)(0,85-3)}{6!}\cdot(-0,11)=$$

$$=0,91-0,1955+0,095625-0,0015725+$$

$$+0,000452-0,000258+0,000253=0,8089995\,.$$

Beləliklə, alırıq ki, $P(2,34)=0,8089995$.

Göründüyü kimi Qaussun birinci interpolyasiya çoxhədlisində

$$\Delta y_0\,,\ \Delta^2 y_{-1}\,,\ \Delta^3 y_{-1}\,,\ \Delta^4 y_{-2}\,,\ \Delta^5 y_{-2}\,,\ \Delta^6 y_{-3}\,,\ \ldots$$

mərkəzi fərqləri iştirak edir.

Qaussun ikinci interpolyasiya çoxhədlisinə daxil olan mərkəzi fərqlər isə analoji olaraq

$$\Delta y_{-1}\,,\ \Delta^2 y_{-1}\,,\ \Delta^3 y_{-2}\,,\ \Delta^4 y_{-2}\,,\ \Delta^5 y_{-3}\,,\ \Delta^6 y_{-3}\,,\ \ldots$$

kimidir.

Qaussun ikinci interpolyasiya çoxhədlisi aşağıdakı şəkildədir:

$$P(x)=y_0+q\Delta y_{-1}+\frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2}+$$
$$+\frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+$$
$$+\cdots+\frac{(q+n-1)\cdots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1}y_{-n}+$$
$$+\frac{(q+n)(q+n-1)\cdots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n}\,, \qquad (5)$$

və ya

$$P(x)=y_0+q\Delta y_{-1}+\frac{(q+1)^{[2]}}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(q+1)^{[3]}}{3!}\Delta^3 y_{-2}+$$

$$+\frac{(q+2)^{[4]}}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\cdots+\frac{(q+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1}y_{-n}+$$

$$+\frac{(q+n)^{[2n]}}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n}. \qquad (5')$$

Burada $x = x_0 + qh$.

Misal. Qaussun ikinci interpolyasiya çoxhədlisindən istifadə edərək aşağıdakı cədvəllə verilmiş funksiyanın $x = 2{,}24$ nöqtəsindəki qiymətini hesablayın.

x_i	1,1	1,4	1,7	2	2,3	2,6	2,9
$f(x_i)$	1,05	1,18	1,31	1,41	1,52	1,61	1,70

Həlli: Misalın şərtindən göründüyü kimi, funksiya yeddi düyün nöqtəsindəki qiymətləri ilə verilmişdir. Deməli, uyğun Qauss çoxhədlisi aşağıdakı kimi altı dərəcəli çoxhədli olacaq.

$$P(x) \approx y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} +$$

$$+\frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} +$$

$$+\frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-3} +$$

$$+\frac{(q+3)(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{6!}\Delta^6 y_{-3}.$$

Aşkardır ki, $h = 0{,}3$. Onda

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{2{,}24 - 2}{0{,}3} = 0{,}8$$

yaza bilərik.

İndi isə funksiyanın qiymətlərinə uyğun mərkəzi fərqlər cədvəlini quraq:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
-3	1,1	1,05						
			0,13					
-2	1,4	1,18		0				
			0,13		-0,03			
-1	1,7	1,31		-0,03		0,07		
			0,1		0,04		-0,14	
0	2	1,41		0,01		-0,07		0,26
			0,11		-0,03		0,12	
1	2,3	1,52		-0,02		0,05		
			0,09		0,02			
2	2,6	1,61		0				
			0,09					
3	2,9	1,70						

Onda

$$P(2{,}24) \approx 1{,}41 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 + \frac{(0{,}8+1)\cdot 0{,}8}{2!}\cdot 0{,}01 +$$

$$+\frac{(0{,}8+1)\cdot 0{,}8\cdot(0{,}8-1)}{3!}\cdot 0{,}04 +$$

$$+\frac{(0{,}8+2)(0{,}8+1)\cdot 0{,}8\cdot(0{,}8-1)}{4!}\cdot(-0{,}07) +$$

$$+\frac{(0{,}8+2)(0{,}8+1)\cdot 0{,}8\cdot(0{,}8-1)(0{,}8-2)}{5!}\cdot(-0{,}14) +$$

$$+\frac{(0{,}8+3)(0{,}8+2)(0{,}8+1)\cdot 0{,}8\cdot(0{,}8-1)(0{,}8-2)}{6!}\cdot 0{,}26 =$$

$$= 1{,}41 + 0{,}08 + 0{,}0072 - 0{,}00192 + 0{,}002352 -$$

$$- 0{,}00112896 + 0{,}001327872 = 1{,}497830912\,.$$

Beləliklə, $P(2{,}24) \approx 1{,}497830912\,.$

§1.9. Stirlinqin interpolyasiya çoxhədlisi

Qaussun birinci və ikinci interpolyasiya çoxhədlilərinin ədədi ortasını tapsaq aşağıdakı çoxhədli alınar:

$$P(x) = y_0 + q\cdot\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1^2)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2} +$$

$$+\frac{q^2(q^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{5!}\cdot\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2} +$$

$$+\frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \cdots +$$

$$+\frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)(q^2-3^2)\cdots[q^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}\times$$

$$\times\frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} +$$

$$+\frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)(q^2-3^2)\cdots[q^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}.$$

Bu çoxhədliyə Stirlinqin interpolyasiya çoxhədlisi deyilir. Burada

$$q = \frac{x-x_0}{h}.$$

Göründüyü kimi

$$P(x_i) = y_i \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n).$$

Misal. Stirlinqin interpolyasiya çoxhədlisindən istifadə etməklə aşağıdakı cədvəllə verilmiş funksiyanın $x = 2{,}15$ nöqtəsindəki qiymətini tapın.

x_i	0,2	0,7	1,2	1,7	2,2	2,7	3,2
$f(x_i)$	0,75	0,23	-0,11	-0,15	0,19	1,09	2,79

Həlli: Cədvəldən göründüyü kimi, funksiyanın yeddi düyün nöqtəsindəki qiymətləri ilə verilmişdir. Onda uyğun Stirlinq çoxhədlisi aşağıdakı kimi olar:

$$P(x)=y_0+q\cdot\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}+\frac{q^2}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{q(q^2-1^2)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+$$
$$+\frac{q^2(q^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{5!}\cdot\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}+$$
$$+\frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3}.$$

Şərtə görə $h=0{,}5$. Deməli,

$$q=\frac{x-x_0}{h}=\frac{2{,}15-1{,}7}{0{,}5}=0{,}9$$

yaza bilərik.

İndi isə verilən funksiya üçün uyğun fərqlər cədvəlini quraq:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
-3	0,2	0,75						
			-0,52					
-2	0,7	0,23		0,18				
			-0,34		0,12			
-1	1,2	-0,11		0,3		-0,04		
			-0,04		0,08		0,14	
0	1,7	-0,15		0,38		0,1		-0,18
			0,34		0,18		-0,04	
1	2,2	0,19		0,56		0,06		
			0,9		0,24			
2	2,7	1,09		0,8				
			1,7					
3	3,2	2,79						

Buradan

$$P(2{,}15)\approx -0{,}15+0{,}9\cdot\frac{-0{,}04+0{,}34}{2}+\frac{0{,}9^2}{2!}\cdot 0{,}38+$$

$$+\frac{0{,}9\cdot(0{,}9^2-1)}{3!}\cdot\frac{0{,}08+0{,}18}{2}+\frac{0{,}9^2(0{,}9^2-1)}{4!}\cdot 0{,}1+$$

$$+\frac{0{,}9\cdot(0{,}9^2-1)(0{,}9^2-4)}{5!}\cdot\frac{0{,}14+(-0{,}04)}{2}+$$

$$+\frac{0{,}9^2(0{,}9^2-1)(0{,}9^2-4)}{6!}\cdot(-0{,}18)=.$$

$$=-0{,}15+0{,}135+0{,}1539-0{,}003705+0{,}00064125+$$

$$+0{,}0002272875-0{,}00012273525=0{,}13594080225.$$

Beləliklə, $P(2{,}24)\approx 0{,}13594080225$.

§1.10. Besselin interpolyasiya çoxhədlisi

Mexanikada meydana çıxan bir çox məsələlərin həlli zamanı tətbiq olunan interpolyasiya çoxhədlilərindən biri də Besselin interpolyasiya çoxhədlisidir. Bessel interpolyasiya çoxhədlisini qurmaq üçün Qaussun ikinci interpolyasiya çoxhədlisindən istifadə edəcəyik.

Sabit h addımı ilə, $2n+2$ sayda bərabər məsafədə yerləşən

$$x_{-n}, x_{-(n-1)}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$$

düyün nöqtələrini götürək. $y_i=f(x_i)$ $(i=-n,\ldots,n+1)$ ilə $y=f(x)$ funksiyasının verilən düyün nöqtələrindəki uyğun qiymətlərini işarə edək. Əgər başlanğıc qiymətlər kimi $x=x_0$ və $y=y_0$ seçsək, onda x_k $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm n)$ düyün nöqtələrindən istifadə edərək

$$P(x)=y_0+q\Delta y_{-1}+\frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2}+$$

$$+\frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\cdots+$$

$$+\frac{(q+n-1)\cdots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n}+$$

$$+\frac{(q+n)(q+n-1)\cdots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n} \tag{1}$$

alarıq.

İndi isə başlanğıc qiymətləri $x = x_1$ və $y = y_1$ kimi seçək və x_{k+1} $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n)$ düyün nöqtələrindən istifadə edək. Onda

$$\frac{x-x_1}{h} = \frac{x-x_0-h}{h} = q-1$$

olar. Bu zaman (1) düsturunun sağ tərəfindəki bütün fərqlərin indeksləri bir vahid artır. (1) düsturunun sağ tərəfindəki q əvəzinə $q-1$ yazsaq və bütün sonlu fərqlərin indekslərini bir vahid artırsaq aşağıdakı kimi köməkçi interpolyasiya düsturunu almış olarıq:

$$P(x) = y_1 + (q-1)\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$$
$$+\frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)(q-3)}{5!}\Delta^5 y_{-2} +$$
$$+\cdots+\frac{(q+n-2)\cdots(q-n)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1}y_{-(n-1)} +$$
$$+\frac{(q+n-1)\cdots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n}\,. \tag{2}$$

Qaussun birinci (irəliyə) interpolyasiya düsruru ilə (2) düsturunun ədədi ortasını taparaq sadə çevirmələr aparsaq:

$$P(x) = \frac{y_0+y_1}{2} + \left(q-\frac{1}{2}\right)\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\cdot\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2} +$$
$$+\frac{\left(q-\frac{1}{2}\right)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!}\times$$
$$\times\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2} + \frac{\left(q-\frac{1}{2}\right)q(q-1)(q+1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} +$$

$$+\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)(q-3)}{6!}\cdot\frac{\Delta^6 y_{-3}+\Delta^6 y_{-2}}{2}+\cdots+$$

$$+\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\cdots(q-n)(q+n-1)}{(2n)!}\cdot\frac{\Delta^{2n} y_{-n}+\Delta^{2n} y_{-n+1}}{2}+$$

$$+\frac{\left(q-\frac{1}{2}\right)q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\cdots(q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1}y_{-n} \qquad (3)$$

olar. Burada $q=\dfrac{x-x_0}{h}$.

Alınan (3) düsturuna Besselin interpolyasiya düsturu deyilir. Besselin interpolyasiya düsturu adlanan (3) düsturunun çıxarılışı qaydasından görünür ki, alınan çoxhədlinin qiymətləri $y=f(x)$ funksiyasının $2n+2$ sayda

$$x_{-n}, x_{-(n-1)}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$$

düyün nöqtələrindəki qiymətləri ilə üst-üstə düşür.

Xüsusi halda (3) düsturunda $n=1$ olduqda Besselin aşağıdakı kvadratik interpolyasiya düsturu alınır:

$$P(x)=\frac{y_0+y_0+\Delta y_0}{2}+\left(q-\frac{1}{2}\right)\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2}\cdot\frac{\Delta y_0-\Delta y_{-1}+\Delta y_1-\Delta y_0}{2}$$

və ya

$$P(x)=y_0+q\Delta y_0-q_1(\Delta y_1-\Delta y_{-1}).$$

Burada $q_1=\dfrac{q(1-q)}{4}$.

Göründüyü kimi Bessel düsturunda tək tərtibli sonlu fərqləri özündə saxlayan bütün hədlərdə $q-1/2$ vuruğu iştirak edir. Ona görə $q-1/2$ olduqda (3) düsturu kifayət qədər sadələşir:

$$P\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)=\frac{y_0+y_1}{2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+$$

$$+\frac{3}{128}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2}-\frac{5}{1024}\cdot\frac{\Delta^6 y_{-3}+\Delta^6 y_{-2}}{2}+\cdots+$$

$$+(-1)^n \frac{[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)]^2}{2^{2n}(2n)!}\cdot\frac{\Delta^{2n}y_{-n}+\Delta^{2n}y_{-n+1}}{2}.$$

Bessel düsturunun bir xüsusi halı da orta interpolyasiya düsturu adlanır. Əgər (3) düsturunda $q-1/2=p$ əvəzləməsi aparsaq Bessel düsturu aşağıdakı kimi simmetrik şəklə düşər:

$$P(x)=\frac{y_0+y_1}{2}+p\Delta y_0+\frac{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)}{2!}\cdot\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+\frac{p\left(p^2-\frac{1}{4}\right)}{3!}\Delta^3 y_{-1}+$$

$$+\frac{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)}{4!}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2}+\frac{p\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)}{5!}\Delta^5 y_{-2}+$$

$$+\frac{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)\left(p^2-\frac{25}{4}\right)}{6!}\cdot\frac{\Delta^6 y_{-3}+\Delta^6 y_{-2}}{2}+\cdots+$$

$$+\frac{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)\cdots\left[p^2-\frac{(2n-1)^2}{4}\right]}{(2n)!}\cdot\frac{\Delta^{2n}y_{-n}+\Delta^{2n}y_{-n+1}}{2}+$$

$$+\frac{p\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)\cdots\left[p^2-\frac{(2n-1)^2}{4}\right]}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1}y_{-n+1}. \qquad (3')$$

Burada

$$p=\frac{1}{h}\left(x-\frac{x_0+x_1}{2}\right).$$

Misal. Besselin interpolyasiya çoxhədlisini tətbiq edərək, aşağıdakı cədvəllə verilmiş funksiyanın $x=1,26$ nöqtəsindəki qiymətini hesablayın.

x_i	-0,9	-0,3	0,3	0,9	1,5	2,1	2,7
$f(x_i)$	-1,26	0,21	1,83	3,67	5,82	8,49	11,9

Həlli: Cədvələ görə düyün nöqtələrinin sayı yeddidir. Deməli, uyğun Bessel çoxhədlisini aşağıdakı kimi yaza bilərik.

$$P(x)=\frac{y_0+y_1}{2}+\left(q-\frac{1}{2}\right)\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2}\cdot\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+$$

$$+\frac{\left(q-\frac{1}{2}\right)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}+\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2}+$$

$$+\frac{\left(q-\frac{1}{2}\right)q(q-1)(q+1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2}\,.$$

Aydındır ki, $h=0{,}6$. Onda

$$q=\frac{x-x_0}{h}=\frac{1{,}26-0{,}9}{0{,}6}=0{,}6$$

alarıq.

İndi isə cədvəllə verilmiş funksiya üçün uyğun fərqlər cədvəlini quraq:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
-3	-0,9	-1,26						
			1,47					
-2	-0,3	0,21		0,15				
			1,62		0,07			
-1	0,3	1,83		0,22		0,02		
			1,84		0,09		0,1	
0	0,9	3,67		0,31		0,12		-0,21
			2,15		0,21		-0,11	
1	1,5	5,82		0,52		0,01		
			2,67		0,22			
2	2,1	8,49		0,74				
			3,41					
3	2,7	11,9						

Buradan

$$P(1{,}26) \approx \frac{3{,}67+5{,}82}{2} + \left(0{,}6-\frac{1}{2}\right)\cdot 2{,}15 + \frac{0{,}6\cdot(0{,}6-1)}{2}\times$$

$$\times\frac{0{,}31+0{,}52}{2} + \frac{\left(0{,}6-\frac{1}{2}\right)\cdot 0{,}6\cdot(0{,}6-1)}{3!}\cdot 0{,}21+$$

$$+\frac{0{,}6\cdot(0{,}6-1)(0{,}6+1)(0{,}6-2)}{4!}\cdot\frac{0{,}12+0{,}01}{2}+$$

$$+\frac{\left(0{,}6-\frac{1}{2}\right)\cdot 0{,}6\cdot(0{,}6-1)(0{,}6+1)(0{,}6-2)}{5!}\cdot(-0{,}11) =$$

$$= 4{,}745 + 0{,}215 - 0{,}0498 - 0{,}0042 +$$

$$+ 0{,}001456 - 0{,}00004928 = 4{,}90740672\,.$$

Beləliklə, $P(1{,}26) \approx 4{,}90740672$.

Qeyd. Sabit addımlı interpolyasiya düsturlarında sonlu fərqlərin seçilmə qaydası aşağıdakı cədvələ uyğun yerinə yetirilir:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	Qeyd
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$	Nyutonun ikinci interpolyasiya düsturu
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$	
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$	Stirlinq düsturu
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		Bessel düsturu
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		Nyutonun birinci interpolyasiya düsturu
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	

§1.11. Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisi

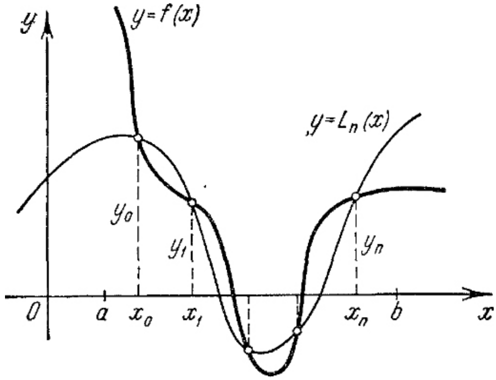
Bilirik ki, interpolyasiya məsələsinin həlli zamanı düyün nöqtələri bir-brindən bərabər məsafədə yerləşərsə, onda bu məsələnin həlli üçün Nyutonun birinci və ikinci interpolyasiya düsturu, Qaussun birinci və ikinci interpolyasiya düsturu, Stirlinqin interpolyasiya düsturu və ya Besselin interpolyasiya düsturu tətbiq olunur. Lakin bəzən elə interpolyasiya məsələlərinə rast gəlinir ki, bu məsələlərdə düyün nöqtələri bir-birindən müxtəlif məsafələrdə yerləşir. Bu halda yuxarıda sadalanan üsullardan istifadə etmək mümkün olmur. Düyün nöqtələri arasındakı məsafə sabit olmadıqda daha ümumi interpolyasiya düsturu olan Laqranjın interpolyasiya düsturundan istfadə olunur.

Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında arqumentin $n+1$ sayda müxtəlif $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ $(x_i \neq x_j,\ i \neq j)$ qiymətləri və $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş $y = f(x)$ funksiyasının bu nöqtələrdəki

$$f(x_0) = y_0,\ f(x_1) = y_1,\ \dots\ ,\ f(x_n) = y_n$$

qiymətləri verilmişdir.

Dərəcəsi n-i aşmayan elə $L_n(x)$ çoxhədlisi qurmaq tələb olunur ki, bu çoxhədlinin $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ düyün nöqtələrindəki qiymətləri ilə $f(x)$ funksiyasının qiymətləri üst-üstə düşsün (Şəkil 2). Yəni $L_n(x_i) = y_i$ $(i = 0,1,2,\dots,n)$.



Şəkil 2.

Əvvəlcə qoyulan məsələnin xüsusi halına baxaq. $\exists p_i(x)$ çoxhədlisi quraq ki,

$$p_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ olduqda}; \\ 0, & i \neq j \text{ olduqda} \end{cases} \tag{1}$$

olsun. Burada δ_{ij} Kroneker simvoludur. Bu çoxhədlinin qiyməti n sayda $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n$ nöqtələrində sıfır olduğundan

$$p_i(x) = C_i(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n) \tag{2}$$

yaza bilərik. Burada C_i hər hansı sabit əmsaldır. (2) düsturunda $x = x_i$ qəbul etsək və $p_i(x_i) = 1$ olduğunu nəzərə alsaq:

$$C_i(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n) = 1$$

alarıq. Buradan

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

olar.

C_i-nin tapdığımız qimətlərini (2) düsturunda yerinə yazsaq:

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} \tag{3}$$

alarıq.

Indi isə $L_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ şərtini ödəyən $L_n(x)$ çoxhədlisinin qurulması məsələsinə baxaq. Bu çoxhədlinin ümumi şəkli aşağıdakı kimidir:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) y_i .$$

Sonuncu bərabərlikdən aydindir ki, qurulan $L_n(x)$ çoxhədlisinin dərəcəsi n-i aşmır. Həmçinin (1) düsturuna görə

$$L_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x_j) y_i = p_j(x_j) y_j = y_j \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

$p_i(x)$-lərin (3) düsturundakı qiymətini (4) bərabərliyində nəzərə alsaq:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}\cdot y_i \quad (5)$$

olar.

Alınan (5) düsturuna bir-birindən bərabər olmayan məsafədə yerləşən düyün nöqtələri üçün Laqranjın interpolyasiya düsturu deyilir.

İndi isə isbat edək ki, bu qayda ilə qurulmuş Laqranj çoxhədlisi yeganədir. Əksini fərz edək. Fərz edək ki, dərəcəsi n -i aşmayan və $L_n(x)$ çoxhədlisindən fərqli olan $\exists\widetilde{L}_n(x)$ çoxhədlisi var ki, bu çoxhədli üçün də

$$\widetilde{L}_n(x_i)=y_i \quad (i=0,1,2,\ldots,n),$$

münasibətləri doğrudur. Yəni $L_n(x)$ çoxhədlisi ilə eyni şərtlərə malik olan, lakin $L_n(x)$ çoxhədlisindən fərqli olan ikinci $\widetilde{L}_n(x)$ çoxhədlisi də var. Bu çoxhədlilərin fərqli olması fərziyyəsinə əsasən

$$Q_n(x)=\widetilde{L}_n(x)-L_n(x),$$

yaza bilərik. Aydındır ki, $Q_n(x)$ çoxhədlisinin də dərəcəsi n -i aşmır və bu çoxhədli $n+1$ sayda $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$ nöqtələrinin hər birində sıfra çevrilir. Yəni

$$Q_n(x_i)\equiv 0 \quad (i=0,1,2,\ldots,n).$$

Buradan cəbrin əsas teoreminə görə alırıq ki,

$$\widetilde{L}_n(x)\equiv L_n(x).$$

Xüsusi halda, əgər düyün nöqtələri bir-birindən eyni məsafədə yerləşirsə, onda Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisi, Nyutonun uyğun inerpolyasiya çoxhədlisi ilə üst-üstə düşür.

Qeyd edək ki, (5) Laqranj düsturunu nisbətən sadə şəkildə də yazmaq olar. Bunun üçün aşağıdakı işarələməni aparaq:

$$\Pi_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n). \quad (6)$$

Sonuncu bərabərliyin hər tərəfini x-ə görə diferensiallasaq:

$$\Pi'_{n+1}(x)=\sum_{j=0}^{n}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)$$

alarıq. Burada $x = x_i \quad (i = 0,1,2,\ldots,n)$ qəbul edərək:

$$\Pi'_{n+1}(x_i)=\sum_{j=0}^{n}(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{j-1})(x_i-x_{j+1})\cdots(x_i-x_n) \quad (7)$$

yaza bilərik.

(6) və (7) ifadələrini (5) düsturunda nəzərə alsaq:

$$L_n(x)=\Pi_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{\Pi'_{n+1}(x_i)(x-x_i)} \qquad (5')$$

olar.

İndi isə Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisinin iki xüsusi halına baxaq:

1) (5) düsturunda $n=1$ qəbul etsək, onda iki müxtəlif düyün nöqtəsi alınar. Bu halda Laqranj düsturu həmin nöqtələrdən keçən düz xəttin tənliyinə çevrilir. Yəni bu halda Laqranj düsturu

$$y=\frac{x-b}{a-b}y_0+\frac{x-a}{b-a}y_1=L_1(x)$$

kimi olar. Burada a və b həmin nöqtələrin absisləridir.

Bu çoxhədliyə bəzən Laqranjın xətti interpolyasiya çoxhədlisi deyirlər.

2) (5) düsturunda $n=2$ qəbul etsək, onda Laqranj düsturu üç müxtəlif nöqtədən keçən parabolanın tənliyinə çevrilir. Yəni

$$y=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-b)}y_0+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}y_1+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}y_2=L_2(x),$$

burada a, b və c verilən nöqtələrin absisləridir.

Bu çoxhədliyə isə bəzən Laqranj parabolik (kvadratik) interpolyasiya çoxhədlisi deyirlər.

Misal. Düyün nöqtələrini $x_0=1$, $x_1=4$ və $x_2=9$ kimi qəbul edərək, $y=\sqrt{x}$ funksiyası üçün Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisini qurun.

Həlli: Əvvəlcə, verilən düyün nöqtələrində funksiyanın qiymətlər cədvəlini quraq:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Aydındır ki, axtarılan çoxhədli iki dərəcəli çoxhədli olacaqdır. Yəni bu halda Laqranjın parabolik interpolyasiya çoxhədlisi alınır. Deməli,

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 +$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 = \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)}\cdot 1 + \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(4-9)}\cdot 2 +$$

$$+\frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)}\cdot 3 = \frac{x^2-13x+36}{-3\cdot(-8)} + \frac{2(x^2-10x+9)}{3\cdot(-5)} +$$

$$+\frac{3(x^2-5x+4)}{8\cdot 5} = \frac{-x^2+25x+36}{60} = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{25}{60}x + \frac{3}{5}.$$

Bu isə verilən funksiyaya uyğun Laqranjın parabolik interpolyasiya çoxhədlisidir. Doğrudan da,

$$L_2(1) = -\frac{1}{60}\cdot 1^2 + \frac{25}{60}\cdot 1 + \frac{3}{5} = 1 = y_0\,;$$

$$L_2(4) = -\frac{1}{60}\cdot 4^2 + \frac{25}{60}\cdot 4 + \frac{3}{5} = 2 = y_1\,;$$

$$L_2(9) = -\frac{1}{60}\cdot 9^2 + \frac{25}{60}\cdot 9 + \frac{3}{5} = 3 = y_2\,.$$

Misal. $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ düyün nöqtələrindən və $f(x) = 2^x$ funksiyasının uyğun qiymətlərindən istifadə edərək, Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisinin köməyi ilə $\sqrt[3]{2}$ ədədinin onluq qiymətini tapın.

Həlli: Aydındır ki, $f(x) = 2^x$ funksiyasının, verilən düyün nöqtələrindəki uyğun qiymətləri $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 2$, $f(x_2) = 4$ və $f(x_0) = 8$ kimi olar. Deməli, axtarılan Laqranj çoxhədlisi üç dərəcəli çoxhədlidir. Yəni

$$L_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f(x_1)+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}f(x_2)+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}f(x_2)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}f(x_3)=$$

$$=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}\cdot 1+\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}\cdot 2+$$

$$+\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}\cdot 4+\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}\cdot 8=\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{6}x+1.$$

$\sqrt[3]{2}$ ədədinin təqribi qiymətini tapmaq üçün aldığımız Laqranj çoxhədlisində x-in əvəzinə $1/3$ yazsaq:

$$\sqrt[3]{2}=2^{1/3}\approx L_3\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{3}\right)+1=\frac{104}{81}\approx 1{,}28395$$

alarıq.

Qeyd edək ki, $\sqrt[3]{2}$ ədədinin təqribi qiymətini, düyün nöqtələrini $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=8$ və $x_3=27$ kimi götürərək, $f(x)=\sqrt[3]{x}$ funksiyası üçün Laqranj çoxhədlisini qurmaqla da tapmaq olar. Lakin bu halda qurulan interpolyasiya çoxhədlisində x-in əvəzinə 2 yazmaq lazımdır.

Misal. Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisindən istifadə edərək, aşağıdakı cədvəllə verilmiş funksiyanın $x=0{,}7$ nöqtəsindəki qiymətini tapın.

x_i	0,5	1,2	1,7	2,6	3
$f(x_i)$	0,414	-0,103	-0,15	0,863	2

Həlli: Cədvəldən göründüyü kimi, verilən funksiyanın beş düyün nöqtəsindəki qiymətləri məlumdur. Yəni axtarılan Laqranj çoxhədlisi aşağıdakı kimi dörd dərəcəli çoxhədlidir:

$$L_4(0{,}7)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}f(x_0)+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}f(x_1)+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}f(x_2)+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}f(x_3)+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}f(x_4)=$$
$$=\frac{(0{,}7-1{,}2)(0{,}7-1{,}7)(0{,}7-2{,}6)(0{,}7-3)}{(0{,}5-1{,}2)(0{,}5-1{,}7)(0{,}5-2{,}6)(0{,}5-3)}\cdot 0{,}414+$$
$$+\frac{(0{,}7-0{,}5)(0{,}7-1{,}7)(0{,}7-2{,}6)(0{,}7-3)}{(1{,}2-0{,}5)(1{,}2-1{,}7)(1{,}2-2{,}6)(1{,}2-3)}\cdot(-0{,}103)+$$
$$+\frac{(0{,}7-0{,}5)(0{,}7-1{,}2)(0{,}7-2{,}6)(0{,}7-3)}{(1{,}7-0{,}5)(1{,}7-1{,}2)(1{,}7-2{,}6)(1{,}7-3)}\cdot(-0{,}15)+$$
$$+\frac{(0{,}7-0{,}5)(0{,}7-1{,}2)(0{,}7-1{,}7)(0{,}7-3)}{(2{,}6-0{,}5)(2{,}6-1{,}2)(2{,}6-1{,}7)(2{,}6-3)}\cdot 0{,}863+$$
$$+\frac{(0{,}7-0{,}5)(0{,}7-1{,}2)(0{,}7-1{,}7)(0{,}7-2{,}6)}{(3-0{,}5)(3-1{,}2)(3-1{,}7)(3-2{,}6)}\cdot 2=$$
$$=0{,}2051-0{,}102+0{,}0934+0{,}1875-0{,}1624=0{,}2216.$$

Beləliklə, alırıq ki, $f(0{,}7)=0{,}2216$.

§1.12. Bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən nöqtələr üçün Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisi

Tutaq ki, $y=f(x)$ funksiyasının, arqumentin bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən $x_i=x_{i-1}+h$ $(i=1,2,3,\ldots,n)$ nöqtələrinə uyğun $y_i=f(x_i)$ qiymətləri verilmişdir. Aydındır ki, düyün nöqtələri bir-birindən bərabər məsafədə yerləşdiyi üçün

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$$

yaza bilərik. Bu halda,

$$\frac{x - x_0}{h} = t$$

işarələməsindən istifadə edərək,

$$p_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} =$$

$$= \frac{th(th-h)\cdots[th-(i-1)h][th-(i+1)h]\cdots(th-nh)}{ih(i-1)h\cdots h(-h)\cdots[-(n-i)h]} =$$

$$= \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-i}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} = (-1)^{n-i}C_n^i\frac{1}{t-i}\cdot\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{n!}$$

yaza bilərik.

Beləliklə, alırıq ki,

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = (-1)^n \cdot \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{C_n^i y_i}{t-i},$$

burada $y_i = f(x_i)$.

Misal: Aşağıdakı cədvəldə $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ funksiyasının bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən bir neçə düyün nöqtəsindəki qiymətləri verilmişdir. Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisindən istifadə edərək, bu funksiyanın $x = 0{,}34$ nöqtəsindəki qiymətini tapın.

x_i	0,2	0,4	0,6	0,8
$f(x_i)$	0,487	0,792	1,135	1,534

Həlli: Göründüyü kimi, cədvəldə funksiyanın dörd düyün nöqtəsindəki qiymətləri verilmişdir. Deməli, uyğun Laqranj çoxhədlisi

$$L_3(x) \approx L_3(x_0 + th) = (-1)^3 \cdot \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{3!}\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\frac{C_3^i y_i}{t-i} =$$

$$=-\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{3!}\left[(-1)^0\cdot\frac{C_3^0y_0}{t-0}+(-1)^1\cdot\frac{C_3^1y_1}{t-1}+(-1)^2\cdot\frac{C_3^2y_2}{t-2}+\right.$$

$$\left.+(-1)^3\cdot\frac{C_3^3y_3}{t-3}\right]=-\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{6}\cdot\left[\frac{y_0}{t}-\frac{3y_1}{t-1}+\frac{3y_2}{t-2}-\frac{y_3}{t-3}\right]=$$

$$=-\frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{6}\cdot y_0+\frac{t(t-2)(t-3)}{2}\cdot y_1-$$

$$-\frac{t(t-1)(t-3)}{2}\cdot y_2+\frac{t(t-1)(t-2)}{6}\cdot y_3$$

kimi olar.

$h=x_i-x_{i-1}=0{,}2\ \ (i=1,2,3)$ olduğundan,

$$t=\frac{x-x_0}{h}=\frac{0{,}34-0{,}2}{0{,}2}=0{,}7$$

yaza bilərik.

Beləliklə alırıq ki,

$$L_3(0{,}34)\approx-\frac{(0{,}7-1)(0{,}7-2)(0{,}7-3)}{6}\cdot 0{,}487+$$

$$+\frac{0{,}7\cdot(0{,}7-2)(0{,}7-3)}{2}\cdot 0{,}792-\frac{0{,}7\cdot(0{,}7-1)(0{,}7-3)}{2}\cdot 1{,}135+$$

$$+\frac{0{,}7\cdot(0{,}7-1)(0{,}7-2)}{6}\cdot 1{,}534=0{,}0728065+0{,}276276+$$

$$+0{,}2741025+0{,}069797\approx 0{,}692982\,.$$

Doğrudan da,

$$f(0{,}34)=0{,}34^2+\sqrt{0{,}34}\approx 0{,}1156+0{,}583095=0{,}698695\,.$$

Qeyd edək ki, düyün nöqtələrini bir-birinə kifayət qədər yaxın götürməklə və onların sayını artırmaqla, alınan təqribi qiymət ilə dəqiq qiymət arasındakı fərqi azaltmaq olar.

§1.13. Eytgenin interpolyasiya sxemi

Əgər $x_i\ \ (i=0,1,2,\ldots,n)$ düyün nöqtələri bir-birindən müxtəlif məsafələrdə yerləşirsə və $L_n(x)$ interpolyasiya çoxhədlisinin analitik ifadəsi deyil, məhz onun hər hansı x nöqtəsindəki qiymətinin tapılması tələb olunursa, onda Eytgenin interpolyasiya sxemindən istifadə etmək daha əlverişli olur. Bu sxemə görə interpolyasiya çoxhədlisinin hər hansı x nöqtəsindəki qiyməti müəyyən oxşar proseslərin ardıcıl tətbiq olunması vasitəsi ilə tapılır.

Aşağıdakı şəkildə ifadəyə baxaq:

$$L_{01}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0}.$$

Aydındır ki, $L_{01}(x)$ çoxhədlisi, x-ə nəzərən bir dərəcəli çoxhədlidir. Burada $x = x_0$ qəbul etsək:

$$L_{01}(x_0) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & 0 \\ y_1 & x_1 - x_0 \end{vmatrix}}{x_1 - x_0} = y_0$$

olar.

Analoji olaraq, $x = x_1$ yazmaqla,

$$L_{01}(x_1) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x_1 \\ y_1 & 0 \end{vmatrix}}{x_1 - x_0} = y_1$$

alarıq.

Aşkardır ki, x_0 və x_1 nöqtələrindəki qiymətləri, uyğun olaraq y_0 və y_1 ədədlərinə bərabər olan bu cür bir dərəcəli çoxhədlilər yeganə şəkildə qurulur. Deməli, qoyulan interpolyasiya məsələsi, iki düyün nöqtəsi və bu nöqtələrdəki qiymətlərinə görə $L_{01}(x)$ çoxhədlisi vasitəsi ilə birqiymətli həll olunur. Başqa sözlə, bu halda $L_{01}(x)$ çoxhədlisi, verilmiş x_0 və x_1 nöqtələrindəki qiymətləri, uyğun olaraq y_0 və y_1 olan Laqranjın xətti interpolyasiya çoxhədlisinə çevrilir. Doğrudan da,

$$L_{01}(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0-x \\ y_1 & x_1-x \end{vmatrix}}{x_1-x_0}=\frac{(x_1-x)y_0-(x_0-x)y_1}{x_1-x_0}=$$

$$=\frac{x_1-x}{x_1-x_0}\cdot y_0-\frac{x_0-x}{x_1-x_0}\cdot y_1=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot y_0-\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot y_1=L_1(x).$$

Qeyd edək ki, $L_{12}(x)$, $L_{23}(x)$ və s. çoxhədlilərini də aşağıdakı qaydaya uyğun qurmaq olar:

$$L_{i,i+1}(x)=\frac{1}{x_{i+1}-x_i}\cdot\begin{vmatrix} y_i & x_i-x \\ y_{i+1} & x_{i+1}-x \end{vmatrix}.$$

Indi isə,

$$L_{012}(x)=\frac{\begin{vmatrix} L_{01}(x) & x_0-x \\ L_{12}(x) & x_2-x \end{vmatrix}}{x_2-x_0}$$

ifadəsinə baxaq. Aydındır ki, bu çoxhədli, x-ə nəzərən iki dərəcəli çoxhədlidir. Yuxarıda olduğu kimi, əvvəlcə $x=x_0$ qəbul etsək,

$$L_{012}(x_0)=\frac{1}{x_2-x_0}\begin{vmatrix} y_0 & 0 \\ L_{12}(x_0) & x_2-x_0 \end{vmatrix}=y_0$$

alarıq.

Eyni qayda ilə, $x=x_1$ və $x=x_2$ əvəzləmələri aparsaq, uyğun olaraq

$$L_{012}(x_1)=\frac{1}{x_2-x_0}\begin{vmatrix} y_1 & x_0-x_1 \\ y_1 & x_2-x_1 \end{vmatrix}=y_1$$

və

$$L_{012}(x_2)=\frac{1}{x_2-x_0}\begin{vmatrix} L_{01}(x_2) & x_0-x_2 \\ y_2 & 0 \end{vmatrix}=y_2$$

yaza bilərik.

Beləliklə alırıq ki, $L_{012}(x)$ çoxhədlisi verilmiş x_0, x_1 və x_2

nöqtələrindəki qiymətləri, uyğun olaraq y_0, y_1 və y_2 ədədlərinə bərabər olan Laqranjın kvadratik interpolyasiya çoxhədlisi ilə üst-üstə düşür.

$L_{123}(x)$, $L_{234}(x)$ və s. çoxhədliləri isə

$$L_{i,i+1,i+2}(x) = \frac{1}{x_{i+2} - x_i} \cdot \begin{vmatrix} L_{i,i+1}(x) & x_i - x \\ L_{i+1,i+2}(x) & x_{i+2} - x \end{vmatrix}$$

qaydasına uyğun qurulur.

Bu prosesi analoji qayda ilə davam etdirsək, alırıq ki,

$$L_{012\cdots n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0} \begin{vmatrix} L_{012\ldots(n-1)}(x) & x_0 - x \\ L_{123\ldots n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}.$$

Bu isə, $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ düyün nöqtələrindəki qiymətləri, uyğun olaraq $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ ədədlərinə bərabər olan *n* dərəcəli Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisidir.

Belə sxemlərlə qurulan hər bir $L_{0123\cdots k}(x)$ çoxhədlisi, $L_{012\cdots(k-1)}(x)$ və $L_{123\cdots k}(x)$ çoxhədlilərinin vasitəsi ilə ifadə olunur. Xüsusi halda, $L_{01}(x)$ çoxhədlisi də öz növbəsində y_0 və y_1 qiymətlərinin köməyi ilə qurulur.

İnterpolyasiya çoxhədlilərinin bu cür qurulma sxemi Eytgen sxemi adlanır.

Eytgen sxemi vasitəsi ilə ifadə olunan interpolyasiya çoxhədlilərinin qiymətlərinin hesablanması aşağıdakı cədvələ uyğun aparılır.

x_i	y_i	$x_i - x$	$L_{i-1,\,i}$	$L_{i-2,\,i-1,\,i}$	$L_{i-3,\,i-2,\,i-1,\,i}$	$L_{i-4,\,i-3,\,i-2,\,i-1,\,i}$
x_0	y_0	$x_0 - x$				
x_1	y_1	$x_1 - x$	$L_{01}(x)$			
x_2	y_2	$x_2 - x$	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$		
x_3	y_3	$x_3 - x$	$L_{23}(x)$	$L_{123}(x)$	$L_{0123}(x)$	
x_4	y_4	$x_4 - x$	$L_{34}(x)$	$L_{234}(x)$	$L_{1234}(x)$	$L_{01234}(x)$

Misal. Aşağıdakı cədvəldə $y=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ funksiyasının bir neçə düyün nöqtəsindəki qiymətləri verilmişdir.

x_i	0,4	0,9	1,2	1,4	2
y_i	-0,948	-0,105	0,183	0,388	0,707

Eytgen sxemindən istifadə edərək bu funksiyanı interpolyasiya edin.

Həlli: Məsələnin şərtindən göründüyü kimi $y=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ funksiyasının beş düyün nöqtəsindəki qiymətləri məlumdur. Deməli, bu funksiyanı interpolyasiya etdikdə dörd dərəcəli çoxhədli alınacaq. Verilən funksiya üçün uyğun Eytgen sxemini tətbiq etsək:

$$L_{01}(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0-x \\ y_1 & x_1-x \end{vmatrix}}{x_1-x_0}=\frac{\begin{vmatrix} -0{,}948 & 0{,}4-x \\ -0{,}105 & 0{,}9-x \end{vmatrix}}{0{,}9-0{,}4}=-0{,}8112+0{,}843x\,;$$

$$L_{12}(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1-x \\ y_2 & x_2-x \end{vmatrix}}{x_2-x_1}=\frac{\begin{vmatrix} -0{,}105 & 0{,}9-x \\ 0{,}183 & 1{,}2-x \end{vmatrix}}{1{,}2-0{,}9}=-0{,}969+0{,}96x\,;$$

$$L_{23}(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_2 & x_2-x \\ y_3 & x_3-x \end{vmatrix}}{x_3-x_2}=\frac{\begin{vmatrix} 0{,}183 & 1{,}2-x \\ 0{,}388 & 1{,}4-x \end{vmatrix}}{1{,}4-1{,}2}=-1{,}047+1{,}025x\,;$$

$$L_{34}(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_3 & x_3-x \\ y_4 & x_4-x \end{vmatrix}}{x_4-x_3}=\frac{\begin{vmatrix} 0{,}388 & 1{,}4-x \\ 0{,}707 & 2-x \end{vmatrix}}{2-1{,}4}=-0{,}356+0{,}532x\,;$$

$$L_{012}(x)=\frac{\begin{vmatrix} L_{01}(x) & x_0-x \\ L_{12}(x) & x_2-x \end{vmatrix}}{x_2-x_0}=\frac{\begin{vmatrix} -0{,}8112+0{,}843x & 0{,}4-x \\ -0{,}969+0{,}96x & 1{,}2-x \end{vmatrix}}{1{,}2-0{,}4}\approx$$

$$\approx -0{,}732 + 0{,}587x + 0{,}146x^2;$$

$$L_{123}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{12}(x) & x_1 - x \\ L_{23}(x) & x_3 - x \end{vmatrix}}{x_3 - x_1} = \frac{\begin{vmatrix} -0{,}969 + 0{,}96x & 0{,}9 - x \\ -1{,}047 + 1{,}025x & 1{,}4 - x \end{vmatrix}}{1{,}4 - 0{,}9} \approx$$

$$\approx -0{,}829 + 0{,}687x + 0{,}13x^2;$$

$$L_{234}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{23}(x) & x_2 - x \\ L_{34}(x) & x_4 - x \end{vmatrix}}{x_4 - x_2} = \frac{\begin{vmatrix} -1{,}047 + 1{,}025x & 1{,}2 - x \\ -0{,}356 + 0{,}532x & 2 - x \end{vmatrix}}{2 - 1{,}2} \approx$$

$$\approx -2{,}084 + 2{,}628x - 0{,}616x^2;$$

$$L_{0123}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{012}(x) & x_0 - x \\ L_{123}(x) & x_3 - x \end{vmatrix}}{x_3 - x_0} = \frac{\begin{vmatrix} -0{,}732 + 0{,}587x + 0{,}146x^2 & 0{,}4 - x \\ -0{,}829 + 0{,}687x + 0{,}13x^2 & 1{,}4 - x \end{vmatrix}}{1{,}4 - 0{,}4} \approx$$

$$\approx -0{,}6932 + 0{,}45x + 0{,}2524x^2 - 0{,}016x^3;$$

$$L_{1234}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{123}(x) & x_1 - x \\ L_{234}(x) & x_4 - x \end{vmatrix}}{x_4 - x_1} = \frac{\begin{vmatrix} -0{,}829 + 0{,}687x + 0{,}13x^2 & 0{,}9 - x \\ -2{,}084 + 2{,}628x - 0{,}616x^2 & 2 - x \end{vmatrix}}{2 - 0{,}9} \approx$$

$$\approx 0{,}198 - 2{,}042x + 2{,}505x^2 - 0{,}678x^3.$$

Beləliklə,

$$L_{01234}(x) = \frac{1}{x_4 - x_0} \cdot \begin{vmatrix} L_{0123}(x) & x_0 - x \\ L_{1234}(x) & x_4 - x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2 - 0{,}4} \cdot \begin{vmatrix} -0{,}6932 + 0{,}45x + 0{,}2524x^2 - 0{,}016x^3 & 0{,}4 - x \\ 0{,}198 - 2{,}042x + 2{,}505x^2 - 0{,}678x^3 & 2 - x \end{vmatrix} \approx$$

$$\approx -0{,}916 + 1{,}63x - 1{,}868x^2 + 1{,}557x^3 - 0{,}414x^4.$$

İndi də hesablamaların doğruluğunu yoxlayaq:

$$L_4(1{,}2) = -0{,}916 + 1{,}63 \cdot 1{,}2 - 1{,}868 \cdot 1{,}2^2 + 1{,}557 \cdot 1{,}2^3 - 0{,}414 \cdot 1{,}2^4 =$$
$$= 0{,}182105599 \approx y_2;$$
$$L_4(1{,}4) = -0{,}916 + 1{,}63 \cdot 1{,}4 - 1{,}868 \cdot 1{,}4^2 + 1{,}557 \cdot 1{,}4^3 - 0{,}414 \cdot 1{,}4^4 =$$
$$= 0{,}386705599 \approx y_3;$$
$$L_4(2) = -0{,}916 + 1{,}63 \cdot 2 - 1{,}868 \cdot 2^2 + 1{,}557 \cdot 2^3 - 0{,}414 \cdot 2^4 =$$
$$= 0{,}704000000 \approx y_4.$$

Misal. Aşağıdakı cədvəldə $y = \sqrt[5]{x}$ funksiyasının bəzi qiymətləri verilmişdir.

x_i	0,4	0,9	1,2	1,4	2
y_i	-0,948	-0,105	0,183	0,388	0,707

Eytgen sxemini tətbiq edərək $\varepsilon = 10^{-3}$ dəqiqliklə, $\sqrt[5]{2{,}34}$ ədədinin təqribi qiymətini tapın.

Həlli: Verilmiş funksiya üçün $x = 2{,}34$ qəbul etməklə Eytgen sxemini tətbiq etsək, alarıq ki,

$$L_{01}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1{,}125 & 1{,}8 - 2{,}34 \\ 1{,}181 & 2{,}3 - 2{,}34 \end{vmatrix}}{2{,}3 - 1{,}8} = 1{,}18548;$$

$$L_{12}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1} = \frac{\begin{vmatrix} 1{,}181 & 2{,}3 - 2{,}34 \\ 1{,}201 & 2{,}5 - 2{,}34 \end{vmatrix}}{2{,}5 - 2{,}3} = 1{,}185;$$

$$L_{23}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_2 & x_2 - x \\ y_3 & x_3 - x \end{vmatrix}}{x_3 - x_2} = \frac{\begin{vmatrix} 1{,}201 & 2{,}5 - 2{,}34 \\ 1{,}237 & 2{,}9 - 2{,}34 \end{vmatrix}}{2{,}9 - 2{,}5} = 1{,}1866;$$

$$L_{34}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_3 & x_3 - x \\ y_4 & x_4 - x \end{vmatrix}}{x_4 - x_3} = \frac{\begin{vmatrix} 1{,}237 & 2{,}9 - 2{,}34 \\ 1{,}285 & 3{,}5 - 2{,}34 \end{vmatrix}}{3{,}5 - 2{,}9} = 1{,}1922;$$

$$L_{012}(x)=\frac{\begin{vmatrix} L_{01}(x) & x_0-x \\ L_{12}(x) & x_2-x \end{vmatrix}}{x_2-x_0}=\frac{\begin{vmatrix} 1{,}18548 & 1{,}8-2{,}34 \\ 1{,}185 & 2{,}5-2{,}34 \end{vmatrix}}{2{,}5-1{,}8}\approx 1{,}185109714.$$

Sonuncu hesablamadan sonra

$$|L_{012}(x)-L_{01}(x)|=|L_{012}(2{,}34)-L_{01}(2{,}34)|\approx$$

$$\approx |1{,}185109714-1{,}18548|=0{,}000370286<\varepsilon$$

şərti ödəndiyindən prosesi dayandırırıq və alırıq ki,

$$\sqrt[5]{2{,}34}\approx 1{,}185109714.$$

§1.14. Laqranjın interpolyasiya düsturunun qalıq həddinin qiymətləndirilməsi

Biz artıq $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($x_i \neq x_j$, $i \neq j$) düyün nöqtələrindəki

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ \ldots\ ,\ y_n=f(x_n)$$

qiymətləri məlum olan $y=f(x)$ funksiyası üçün qurulan $L_n(x)$ Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisinin qurulması ilə tanış olduq. Belə bir sual yaranır $y=f(x)$ funksiyası üçün qurulan $L_n(x)$ Laqranj çoxhədlisinin düyün nöqtələrindən fərqli nöqtələrdəki qiymətləri, verilən funksiyanın həmin nöqtələrdəki qiymətlərinə nə qədər yaxındır? Başqa sözlə,

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)$$

funksiyasının qiyməti sıfırdan nə qədər fərqlənir? Bu yaxınlaşma dərəcəsini təyin etmək məqsədi ilə $f(x)$ funksiyasına əlavə məhdudiyyətlər qoyaq. Daha dəqiq desək, tələb edək ki, $y=f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında $n+1$-ci tərtibə qədər kəsilməz törəmələrə malikdir. Sonra isə aşağıdakı kimi köməkçi funksiya daxil edək:

$$u(x)=f(x)-L_n(x)-k\Pi_{n+1}(x). \tag{1}$$

Burada $\Pi_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, k isə sabit əmsaldır.

Aydındır ki, $u(x)$ funksiyası $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ nöqtələrində

$n+1$ dəfə sıfra çevrilir.

Indi isə k əmsalını elə seçək ki, $u(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasının interpolyasiya düyünlərindən fərqli olan ixtiyari qeyd olunmuş $\bar{x}$ nöqtəsində $(n+2)$-ci kökə malik olsun. Bunun üçün

$$f(\bar{x}) = L_n(\bar{x}) - k\Pi_{n+1}(\bar{x}) = 0,$$

yazmaq kifayətdir.

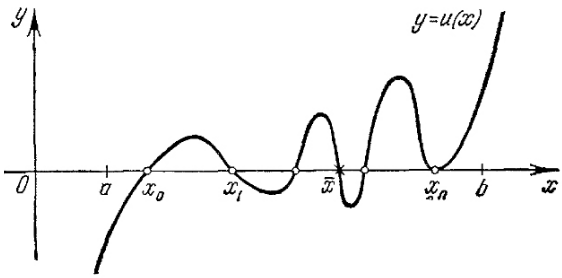
Buradan alırıq ki, $\Pi_{n+1}(\bar{x}) \neq 0$ olarsa

$$k = \frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\Pi_{n+1}(\bar{x})}. \tag{2}$$

k-nın bu cür seçilmiş qiymətlərində $u(x)$-in parçasında $n+2$ sayda kökü var və $u(x)$ funksiyası

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \dots,\ [x_i, \bar{x}],\ [\bar{x}, x_{i+1}],\ \dots,\ [x_{n-1}, x_n]$$

parçalarının hər birinin sonunda sıfra bərabər olur (Şəkil 3).



Şəkil 3.

Bu parçaların hər biri üçün Roll teoremini tətbiq etsək, alarıq ki, $u'(x)$ çoxhədlisi $[a,b]$ parçasında $(n+1)$-dən az olmayan sayda kökə malikdir. Daha sonra, $u'(x)$ törəməsi üçün yenidən Roll teoremini tətbiq etsək görərik ki, $u''(x)$ ikinci tərtib törəmə $[a,b]$ parçasında ən az n dəfə sıfra çevrilir. Bu mühakiməni davam etdirməklə alırıq ki, $u^{(n+1)}(x)$ törəməsinin $[a,b]$ parçasında heç olmasa bir kökü var. Bu kökü ξ ilə işarə edək. Onda $u^{(n+1)}(\xi) = 0$ olar.

(1) düsturuna görə $L_n^{(n+1)}(x)=0$ və $\Pi_{n+1}^{(n+1)}(x)=(n+1)!$ olduğundan

$$u^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-k(n+1)!$$

yaza bilərik.

$x=\xi$ qəbul etsək alarıq ki,

$$0=f^{(n+1)}(\xi)-k(n+1)!.$$

Buradan

$$k=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \qquad (3)$$

(2) və (3) düsturlarının sol tərəfləri eyni olduğundan

$$\frac{f(\overline{x})-L_n(\overline{x})}{\Pi_{n+1}(\overline{x})}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

olar. Yəni

$$f(\overline{x})-L_n(\overline{x})=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(\overline{x}). \qquad (4)$$

$\overline{x}$ nöqtəsi $[a,b]$ parçasında yerləşən ixtiyari nöqtə olduğundan (4) düsturunu aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(x). \qquad (5)$$

Burada $\xi\in(a,b)$.

Qeyd edək ki, (5) düsturu $[a,b]$ parçasına daxil olan bütün nöqtələr üçün doğrudur.

$$M_{n+1}=\max_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

işarələməsi aparsaq, Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisinin xətası üçün aşağıdakı qiymətləndirməni alarıq:

$$\left|R_n(x)\right|=\left|f(x)-L_n(x)\right|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\Pi_{n+1}(x)\right|, \qquad (6)$$

burada

$$\Pi_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n). \qquad (6')$$

Misal. $y=\sqrt{x}$ funksiyası üçün, düyün nöqtələtini $x_0=100$, $x_1=121$ və $x_2=144$ kimi seçməklə, Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisinin köməyi ilə $\sqrt{115}$ ədədinin onluq qiymətini tapın və xətanı qiymətləndirin.

Həlli: Əvvəlcə $y=\sqrt{x}$ funksiyasının üçüncü tərtibə qədər törəmələrini tapaq:

$$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\quad y''=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},\quad y'''=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}.$$

Onda $100\le x\le 144$ nöqtələri üçün

$$M_3=\max_{100\le x\le 144}|y'''|=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{100^5}}=\frac{3}{8}\cdot 10^{-5}$$

yaza bilərik.

(6) düsturundan istifadə edərək alırıq ki,

$$|R_2|=\frac{3}{8}\cdot 10^{-5}\cdot\frac{1}{3!}\cdot|(115-100)(115-121)(115-144)|=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot 10^{-5}\cdot 15\cdot 6\cdot 29\approx 1{,}6\cdot 10^{-3}.$$

§1.15. Nyutonun interpolyasiya çoxhədliləri üçün qalıq həddinin qiymətləndirilməsi

Əgər $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$ ($x_i\ne x_j,\ i\ne j$) düyün nöqtələri bir-brindən bərabər məsafədə yerləşərsə, yəni

$$x_{i+1}-x_i=h\quad (i=0,1,2,\ldots,n-1)$$

olarsa, onda

$$q=\frac{x-x_0}{h}$$

işarələməsi apararaq, məlum

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(x)$$

düsturuna əsasən

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \qquad (1)$$

yaza bilərik. Burada ξ baxılan x nöqtəsi ilə $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ düyün nöqtələrinin hər hansı biri arasında yerləşən nöqtədir. (1) düsturu Nyutonun bərabər addımlar üçün birinci interpolyasiya çoxhədlisinin qalıq həddini ifadə edir.

Analoji qayda ilə

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(x)$$

düsturunda $q = \dfrac{x - x_n}{h}$ əvəzləməsi aparsaq,

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q+1)\cdots(q+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \qquad (2)$$

düsturunu alarıq. Burada da ξ baxılan x nöqtəsi ilə $x_0, x_1,$ $x_2, \ldots, x_n$ düyün nöqtələrinin hər hansı biri arasında yerləşən nöqtədir. Bu düstur Nyutonun bərabər addımlar üçün ikinci interpolyasiya düsturunun qalıq həddinin ifadəsidir.

Misal. $f(x)$=sin(x) funksiyası üçün düyün nöqtələrini $x_0 = 0^\circ$, $x_1 = 5^\circ$, $x_2 = 10^\circ$, $x_3 = 15^\circ$, $x_2 = 20^\circ$ və $x_0 = 25^\circ$ kimi seçməklə Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhəlisini qurarkən yaranan xətanı qiymətləndirin.

*Həlli:*Aydındır ki, $f^{(6)}(x) = -\sin(x)$. Onda $\left|f^{(6)}(x)\right| \le 1$. Deməli, (1) düsturuna əsasən

$$\left|\sin(x) - P_5(x)\right| \le \frac{1}{6!}\left|x\left(x - \frac{\pi}{36}\right)\left(x - \frac{\pi}{18}\right)\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\left(x - \frac{\pi}{9}\right)\left(x - \frac{5\pi}{36}\right)\right|$$

yaza bilərik.

Məsələn, $x = 12^\circ 30' = arc\,0{,}21816$ olduqda

$$\left|\sin(x) - P_5(x)\right| \le 2{,}2\cdot 10^{-9}$$

alarıq.

§1.16. Stirlinq interpolyasiya düsturunun qalıq həddinin qiymətləndirilməsi

Əgər verilən funksiyanın analitik ifadəsi məlumdursa və $x \in [x_0 - nh,\, x_0 + nh]$ olarsa, onda Stirlinqin interpolyasiya düsturunun qalıq həddi aşağıdakı kimi olar:

$$R_n(x) = \frac{h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)(q^2 - 3^2)\cdots(q^2 - n^2),$$

burada

$$q = \frac{x - x_0}{h} \quad \text{və} \quad \xi \in [x_0 - nh,\, x_0 + nh].$$

$y = f(x)$ funksiyasının analitik ifadəsi məlum olmadıqda isə kifayət qədər kiçik h addımı üçün Stirlinq interpolyasiya düsturunun qalıq həddi

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{2n+1} y_{-n-1} + \Delta^{2n+1} y_{-n}}{2 \cdot (2n+1)!} q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)(q^2 - 3^2)\cdots(q^2 - n^2)$$

kimi tapılır.

§1.17. Bessel interpolyasiya düsturunun qalıq həddinin qiymətləndirilməsi

Əgər $y = f(x)$ funksiyası analitik şəkildə verilmişdirsə və $x \in [x_0 - nh,\, x_0 + (n+1)h]$ olarsa, onda Besselin interpolyasiya düsturunun qalıq həddi

$$R_n(x) = \frac{h^{2n+2} f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)\cdots(q^2 - n^2)[q - (n+1)]$$

kimi olar. Burada

$$q = \frac{x - x_0}{h} \quad \text{və} \quad \xi \in [x_0 - nh,\, x_0 + (n+1)h].$$

Funksiya cədvəllə verildikdə isə kifayət qədər kiçik h addımı üçün Bessel interpolyasiya düsturunun qalıq həddi aşağıdakı kimi tapılır:

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{2n+2} y_{-n-1} + \Delta^{2n+2} y_{-n}}{2 \cdot (2n+2)!} q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\cdots(q^2-n^2)[q-(n+1)].$$

Xüsusi halda, $q = 1/2$ olarsa, mərkəzə interpolyasiya üçün aşağıdakı xəta alınır:

$$R_n = \frac{h^{2n+2} f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)]^2}{2^{2n+2}}$$

və ya

$$R_n \approx \frac{\Delta^{2n+2} y_{-n-1} + \Delta^{2n+2} y_{-n}}{2 \cdot (2n+2)!} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)]^2}{2^{2n+2}}.$$

Əgər

$$q = p + 1/2$$

əvəzləməsi aparsaq, onda Bessel interpolyasiya düsturu üçün qalıq hədd aşağıdakı şəklə düşər:

$$R_n(x) = \frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \left(p^2 - \frac{1}{4}\right)\left(p^2 - \frac{9}{4}\right) \cdots \left[p^2 - \frac{(2n+1)^2}{4}\right].$$

§1.18. Bir-birindən müxtəlif məsafələrdə yerləşən düyün nöqtələri üçün Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisi

Bölünən fərqlər anlayışından istifadə edərək, Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisini, Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisinə analoji olan şəklə gətirmək olar. Əvvəlcə aşağıdakı lemmanı isbat edək.

Lemma. Əgər $y = P(x)$, n dərəcəli çöxhədlidirsə, onda bu çoxhədliyə uyğun $(n+1)$-ci tərtib bölünən fərq eyniliklə sıfra bərabərdir. Yəni

$$[x\,; x_0\,; x_1\,; x_2\,; \ldots; x_n] \equiv 0$$

eyniliyi bir-birindən fərqli olan istənilən $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$ ədədlər sistemi üçün doğrudur.

İsbatı. Doğrudanda, əgər $P(x)$, n dərəcəli çoxhədlidirsə, onda

$$[x;x_0]=\frac{P(x)-P(x_0)}{x-x_0}\equiv P(x;x_0),$$

x-ə nəzərən n dərəcəli çoxhədli olar. Buradan alırıq ki,

$$[x;x_0;x_1]=\frac{P(x;x_0)-P(x_0;x_1)}{x-x_1}\equiv P(x;x_0;x_1),$$

çoxhədlisi də öz növbəsində x-ə nəzərən n dərəcəli çoxhədlidir. Həmçinin, $P(x;x_0)-P(x_0;x_1)=P(x;x_0)-P(x_1;x_0)$ çoxhədlisi, $x=x_1$ kimi kökə malikdir. Beləliklə, Bezu teoreminə əsasən alırıq ki, $P(x;x_0)-P(x_0;x_1)$ çoxhədlisi, $x-x_1$ ikihədlisinə qalıqsız bölünür. Analoji mühakimələr aparmaqla alırıq ki,

$$[x;x_0;\ldots;x_{n-1}]\equiv P(x;x_0;\ldots;x_{n-1})$$

sıfır dərəcəli çoxhədlidir. Yəni

$$P(x;x_0;\ldots;x_{n-1})=C\,.$$

Buradan

$$[x;x_0;\ldots;x_n]=\frac{C-C}{x-x_n}\equiv 0\,.$$

Lemma isbat olundu.

İndi isə fərz edək ki, $P(x)$ Laqranj çoxhədlisi elə n dərəcəli çoxhədlidir ki,

$$P(x_i)=f(x_i)=y_i \quad (i=0,1,2,\ldots,n)\,. \tag{1}$$

Burada $y=f(x)$ verilən funksiyadır.

$P(x;x_0)$, $P(x;x_0;x_1)$, ... , $P(x;x_0;\ldots;x_n)$ ilə $P(x)$ çoxhədlisinə uyğun bölünən fərqləri işarə edək. Onda

$$\begin{cases} P(x_0;x_1)=[x_0;x_1]; \\ P(x_0;x_1;x_2)=[x_0;x_1;x_2]; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(x_0;x_1;\ldots;x_n)=[x_0;x_1;\ldots;x_n] \end{cases} \tag{2}$$

olar. Yuxarıda isbat etdiyimiz lemmaya görə isə

$$P(x;x_0;\ldots;x_n)=0 \tag{3}$$

yaza bilərik.

Onda bölünən fərqlərin tərifinə əsasən

$$\frac{P(x)-P(x_0)}{x-x_0}=P(x;x_0) \tag{4}$$

olar. Bu düsturdan

$$P(x)=P(x_0)+P(x;x_0)(x-x_0) \tag{5}$$

yaza bilərik.

Eyni zamanda, bölünən fərqlərin tərifindən alırıq ki,

$$P(x;x_0;\ldots;x_m)=\frac{P(x;x_0;\ldots;x_{m-1})-P(x_0;\ldots;x_m)}{x-x_m}.$$

Onda

$$P(x;x_0;\ldots;x_{m-1})=P(x_0;\ldots;x_m)+(x-x_m)P(x;x_0;\ldots;x_m). \tag{6}$$

Burada $m=1,2,\ldots,n$.

(6) düsturunu (5) düsturunda nəzərə alsaq:

$$\begin{aligned}P(x)&=P(x_0)+P(x;x_0)(x-x_0)=\\&=P(x_0)+P(x_0;x_1)(x-x_0)+P(x;x_0;x_1)(x-x_0)(x-x_1)=\\&=P(x_0)+P(x_0;x_1)(x-x_0)+P(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1)+\\&+\ldots+P(x_0;x_1;\ldots;x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})+\\&+P(x;x_0;\ldots;x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\end{aligned}$$

olar.

Aldığımız sonuncu düsturda (2) və (3) bərabərliklərini nəzərə alsaq:

$$\begin{aligned}P(x)&=y_0+[x_0;x_1](x-x_0)+[x_0;x_1;x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+\\&+[x_0;x_1;\ldots;x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\end{aligned} \tag{7}$$

alınar.

(7) düsturuna bir-birindən müxtəlif məsafələrdə yerləşən düyün nöqtələri üçün Nyutonun interpolyasiya düsturu deyilir. Bu düsturun xətası aşağıdakı kimi hesablanır:

$$R(x)=f(x)-P(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n), \tag{8}$$

burada ξ baxılan x nöqtəsi ilə $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ düyün nöqtələrinin hər hansı biri arasında yerləşən nöqtədir.

Misal: Aşağıdakı cədvəldə $f(x) = x^2 + 2x$ funksiyasının bir-birindən müxtəlif məsafələrdə yerləşən bir neçə düyün nöqtəsindəki qiymətləri verilmişdir. Funksiyanın bu qiymətlərinə əsasən Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisini qurun.

x_i	0,2	0,5	0,9	1,1
$f(x_i)$	0,487	0,957	1,759	2,259

Həlli: Verilən funksiya üçün əvvəlcə birinci tərtib bölünən fərqləri quraq:

$$f(x_0;x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0{,}957 - 0{,}487}{0{,}5 - 0{,}2} = 1{,}567\,;$$

$$f(x_1;x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1{,}759 - 0{,}957}{0{,}9 - 0{,}5} = 2{,}005\,;$$

$$f(x_2;x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{2{,}259 - 1{,}759}{1{,}1 - 0{,}9} = 2{,}5\,.$$

Sonra isə ikinci tərtib bölünən fərqləri tapaq:

$$f(x_0;x_1;x_2) = \frac{f(x_1;x_2) - f(x_0;x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{2{,}005 - 1{,}567}{0{,}9 - 0{,}2} = 0{,}625\,;$$

$$f(x_1;x_2;x_3) = \frac{f(x_2;x_3) - f(x_1;x_2)}{x_3 - x_1} = \frac{2{,}5 - 2{,}005}{1{,}1 - 0{,}5} = 0{,}825\,.$$

Üçüncü tərtib bölünən fərqi isə aşağıdakı kimi tapmaq olar:

$$f(x_0;x_1;x_2;x_3) = \frac{f(x_1;x_2;x_3) - f(x_0;x_1;x_2)}{x_3 - x_0} = \frac{0{,}825 - 0{,}625}{1{,}1 - 0{,}2} = 0{,}222.$$

Onda (7) düsturuna görə alırıq ki,

$$P_3(x) \approx y_0 + f(x_0;x_1)(x - x_0) + f(x_0;x_1;x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ f(x_0;x_1;x_2;x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) =$$
$$= 0{,}487 + 1{,}567 \cdot (x - 0{,}2) + 0{,}625 \cdot (x - 0{,}2) \cdot (x - 0{,}5) +$$

$$+0{,}22\cdot(x-0{,}2)\cdot(x-0{,}5)\cdot(x-0{,}9)=$$
$$=0{,}22x^3+0{,}273x^2+1{,}2901x+0{,}2163\,.$$

Bu isə verilən funksiyaya uyğun Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisidir. Doğrudan da,

$$P_3(0{,}2)=0{,}22\cdot 0{,}2^3+0{,}273\cdot 0{,}2^2+1{,}2901\cdot 0{,}2+0{,}2163=0{,}487=f(x_0)\,;$$
$$P_3(0{,}5)=0{,}22\cdot 0{,}5^3+0{,}273\cdot 0{,}5^2+1{,}2901\cdot 0{,}5+0{,}2163\approx 0{,}957=f(x_1)\,;$$
$$P_3(0{,}9)=0{,}22\cdot 0{,}9^3+0{,}273\cdot 0{,}9^2+1{,}2901\cdot 0{,}9+0{,}2163\approx 1{,}759=f(x_2)\,;$$
$$P_3(1{,}1)=0{,}22\cdot 1{,}1^3+0{,}273\cdot 1{,}1^2+1{,}2901\cdot 1{,}1+0{,}2163\approx 2{,}259=f(x_3)\,.$$

Misal: Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisindən istifadə edərək, aşağıdakı cədvəllə verilmiş funksiyanın $x=0{,}62$ nöqtəsindəki qiymətini tapın.

x_i	0,4	0,7	1,3	1,5	1,9
$f(x_i)$	0,792	1,327	2,831	3,475	4,988

Həlli: Əvvəlcə verilən funksiya üçün bölünən fərqlər cədvəlini quraq:

i	x_i	$f(x_i)$	*I tərtib bölünən fərqlər*	*II tərtib bölünən fərqlər*	*III tərtib bölünən fərqlər*	*IV tərtib bölünən fərqlər*
0	0,4	0,792				
			1,783			
1	0,7	1,327		0,804		
			2,507		0,079	
2	1,3	2,831		0,891		-0,027
			3,22		0,039	
3	1,5	3,475		0,938		
			3,783			
4	1,9	4,988				

Deməli, bu misalda bir-birindən müxtəlif məsafələrdə yerləşən düyün nöqtələri üçün Nyuton düsturu (7) aşağıdakı kimi olar:

$$P(x) \approx y_0 + f(x_0;x_1)(x-x_0) + f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1) +$$
$$+ f(x_0;x_1;x_2;x_3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) +$$
$$+ f(x_0;x_1;x_2;x_3;x_4)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\,.$$

Beləliklə, alırıq ki,

$$P(0{,}62) \approx 0{,}792 + 1{,}783\cdot(0{,}62-0{,}4) + 0{,}804\cdot(0{,}62-0{,}4)\times$$
$$\times(0{,}62-0{,}7) + 0{,}079\cdot(0{,}62-0{,}4)(0{,}62-0{,}7)(0{,}62-1{,}3) -$$
$$-0{,}027\cdot(0{,}62-0{,}4)(0{,}62-0{,}7)(0{,}62-1{,}3)(0{,}62-1{,}9) \approx$$
$$\approx 0{,}792 + 0{,}39226 - 0{,}0141504 + 0{,}0009945 -$$
$$-0{,}0004136 \approx 1{,}170641.$$

§1.19. Bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən düyün nöqtələri üçün tərsinə interpolyasiya

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası cədvəllə verilmişdir. İnterpolyasiya çoxhədlilərinin köməyi ilə funksiyanın verilmiş qiymətinə görə arqumentin uyğun qiymətinin tapılması məsələsi tərsinə interpoliasiya məsələsi adlanır.

Bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən düyün nöqtələri üçün tərsinə interpolyasiyaya baxaq. Bu halda adətən ardıcıl yaxınlaşma üsulundan istifadə olunur.

Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası artan funksiyadır və bu funksiyanın verilən y qiyməti, $y_0 = f(x_0)$ və $y_1 = f(x_1)$ nöqtələri arasında yerləşir. Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisindəki $P_n(x)$-i, y-lə əvəz etsək:

$$y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}q(q-1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}q(q-1)\cdots(q-n+1)$$

alırıq. Buradan $q = \varphi(q)$ yaza bilərik. Belə ki,

$$\varphi(q)=\frac{y-y_0}{\Delta y_0}-\frac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y_0}q(q-1)-\cdots-\frac{\Delta^n y_0}{n!\Delta y_0}q(q-1)\cdots(q-n+1).$$

Başlanğıc yaxınlaşma kimi

$$q_0=\frac{y-y_0}{\Delta y_0}$$

qəbul edək. Onda

$$q_m=\varphi(q_{m-1}) \quad (m=1,2,3,\ldots). \tag{1}$$

$x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\in[a,b]$ olduqda kifayət qədər kiçik h addımı üçün $f(x)\in C^{(n+1)}[a,b]$ olarsa, onda (1) şəklində qurulan iterasiyalar q dəqiq həllinə yığılır. Yəni

$$\lim_{m\to\infty} q_m=q.$$

Burada q ilə dəqiq həll işarə olunmuşdur.

Praktiki hesablamalar zamanı bu proses tələb olunan dəqiqlik alınana qədər davam etdirilir. Tələb olunan dəqiqlik alındıqda, axırıncı iterasiya məsələnin təqribi həlli kimi qəbul edilir. Yəni

$$q\approx q_s,$$

burada q_s sonuncu yaxınlaşmadır.

Bu yaxınlaşmaların köməyi ilə q-nü tapdıqdan sonra

$$\frac{x-x_0}{h}=q$$

bərabərliyindən

$$x=x_0+qh$$

tapılır.

Misal. Aşağıdakı cədvəldə $y=\cos x$ funksiyasının müəyyən dərəcələrdəki qiymətləri verilmişdir. Tərsinə interpolyasiya vasitəsi ilə $y=\cos x=0{,}84$ olduqda, x-in uyğun qiymətini tapın.

x_i	30	35	40	45
y_i	0,866	0,819	0,766	0,708

Həlli: Funksiyanın verilən qiymətlərinə əsasən fərqlər cədvəlini quraq:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	30	0,866			
			-0,047		
1	35	0,819		-0,006	
			-0,053		0,001
2	40	0,766		-0,005	
			-0,058		
3	45	0,708			

$y = 0{,}84$ ədədi 0,866 və 0,819 ədədləri arasında yerləşdiyi üçün $y_0 = 0{,}866$ qəbul edərək

$$q_0 = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} = \frac{0{,}84 - 0{,}866}{-0{,}047} \approx 0{,}5532$$

yaza bilərik. Sonra isə

$$\varphi(q) = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y_0} q(q-1) - \frac{\Delta^3 y_0}{3!\Delta y_0} q(q-1)(q-2)$$

düsturundan istifadə etməklə

$$q_1 = \varphi(q_0) = 0{,}5532 - \frac{-0{,}006}{2!\cdot(-0{,}047)} \cdot 0{,}5532 \cdot (0{,}5532 - 1) -$$

$$- \frac{0{,}001}{3!\cdot(-0{,}047)} \cdot 0{,}5532 \cdot (0{,}5532 - 1)(0{,}5532 - 2) =$$

$$= 0{,}5532 + 0{,}0157767936 + 0{,}0012681036 = 0{,}5702448972 \approx$$

$$\approx 0{,}5702,$$

$$q_2 = \varphi(q_1) = 0{,}5532 - \frac{-0{,}006}{2!\cdot(-0{,}047)} \cdot 0{,}5702 \cdot (0{,}5702 - 1) -$$

$$- \frac{0{,}001}{3!\cdot(-0{,}047)} \cdot 0{,}5702 \cdot (0{,}5702 - 1)(0{,}5702 - 2) =$$

$$= 0{,}5532 + 0{,}0156428911 + 0{,}0012426915 =$$
$$= 0{,}5700855826 \approx 0{,}57$$

alarıq.

$|q_2 - q_1|$ fərqi kifayət qədər kiçik ədəd alındığından $q = 0{,}57$ qəbul edə bilərik. Onda

$$x = x_0 + qh = 30 + 0{,}57 \cdot 5 = 32{,}85\,.$$

Beləliklə, alırıq ki, verilmiş funksiyanın $y = 0{,}84$ qiymətinə arqumentin $x = 32{,}85$ qiyməti uyğundur.

Misal. Aşağıdakı cədvəldə $y = \dfrac{5}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^x dx$ inteqralının müəyyən nöqtələrdəki qiymətləri verilmişdir. Tərsinə interpolyasiyanın köməyi ilə $y = 1{,}57$ olduqda, arqumentin uyğun qiymətini hesablayın.

x_i	0,39	0,41	0,43	0,45	0,47	0,49
y_i	1,346	1,429	1,516	1,603	1,693	1,784

Həlli: Əvvəlcə, funksiyanın verilən qiymətlərinə uyğun fərqlər cədvəlini quraq:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,39	1,346				
			0,083			
1	0,41	1,429		0,004		
			0,087		-0,004	
2	0,43	1,516		0		0,007
			0,087		0,003	
3	0,45	1,603		0,003		-0,005
			0,09		-0,002	
4	0,47	1,693		0,001		
			0,091			
5	0,49	1,784				

$y = 1{,}57$ ədədi, funksiyanın cədvəldəki 1,516 və 1,603 ədədləri arasında yerləşdiyi üçün, arqumentin başlanğıc qiyməti kimi $x_0 = 0{,}43$ götürmək olar. Bu misalın həlli üçün Besselin interpolyasiya düsturunun aşağıdakı şəklindən istifadə edəcəyik:

$$P(x) \approx \frac{y_0 + y_1}{2} + p\Delta y_0 + \frac{\left(p^2 - \frac{1}{4}\right)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{p\left(p^2 - \frac{1}{4}\right)}{3!} \Delta^3 y_{-1}.$$

Artıq məlumdur ki, $x_0 = 0{,}43$, $h = 0{,}02$ və $y = 1{,}57$. Bu qiymətləri yuxarıdakı düsturda nəzərə alsaq:

$$1{,}57 \approx \frac{1{,}516 + 1{,}603}{2} + 0{,}087p + \frac{(p^2 - 0{,}25)}{2} \cdot \frac{0 + 0{,}003}{2} +$$
$$+ \frac{p(p^2 - 0{,}25)}{6} \cdot 0{,}003$$

və ya

$$1{,}57 \approx 1{,}5595 + 0{,}087p + 0{,}00075(p^2 - 0{,}25) + 0{,}0005 \cdot p(p^2 - 0{,}25) \quad (1)$$

olar.

(1) münasibətinin hər tərəfini 0,087 ədədinə bölərək p dəyişənini ayırmaqla

$$p \approx 0{,}12069 - 0{,}00862 \cdot (p^2 - 0{,}25) - 0{,}00574 \cdot p(p^2 - 0{,}25) \quad (2)$$

yaza bilərik.

p parametri üçün birinci yaxınlaşma kimi

$$p_1 \approx 0{,}12069$$

ədədini götürək. Sonra isə p_1 birinci yaxınlaşmasını (2) bərabərliyində nəzərə almaqla ikinci yaxınlaşmanı hesablayaq:

$$p_2 \approx 0{,}12069 - 0{,}00862 \cdot (p_1^2 - 0{,}25) - 0{,}00574 \cdot p_1^2 (p_1^2 - 0{,}25) =$$
$$= 0{,}12069 - 0{,}00862 \cdot (0{,}12069^2 - 0{,}25) -$$
$$- 0{,}00574 \cdot 0{,}12069^2 \cdot (0{,}12069^2 - 0{,}25) = 0{,}12274.$$

Analoji qayda ilə p_2 üçün tapdığımız bu ədədi (2) münasibətində yerinə yazaraq

$$p_3 \approx 0{,}12069 - 0{,}00862 \cdot (p_2^2 - 0{,}25) - 0{,}00574 \cdot p_2^2 (p_2^2 - 0{,}25) =$$
$$= 0{,}12069 - 0{,}00862 \cdot (0{,}12274^2 - 0{,}25) -$$
$$- 0{,}00574 \cdot 0{,}12274^2 \cdot (0{,}12274^2 - 0{,}25) = 0{,}12274$$
alarıq.

Göründüyü kimi, p_2 və p_3 parametrlərinin qiymətləri bir neçə onluq işarə dəqiqliyi ilə bir-birinə bərabərdir. Deməli, iterasiya prosesini burada dayandırmaq olar. Yəni $p = 0{,}12274$ qəbul edə bilərik. Onda
$$q = p + \frac{1}{2} = 0{,}62274$$
olar.

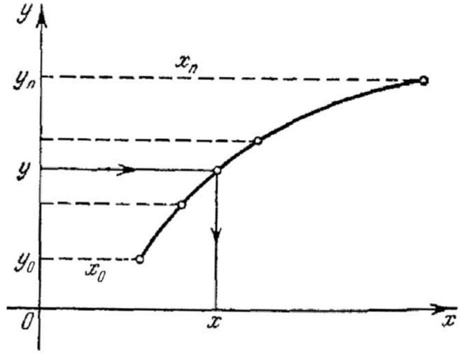
Beləliklə, alırıq ki,
$$x = x_0 + qh = 0{,}43 + 0{,}62274 \cdot 0{,}02 = 0{,}4424548\,.$$

Biz bərabər addımlar üçün tərsinə interpolyasiya məsələsinin həlli üçün iterasiya üsulunu, yalnız Nyutonun birinci interpolyasiya düsturuna tətbiq etdik. Qeyd edək ki, bu üsulu tamamilə analoji qaydada, Nyutonun ikinci interpolyasiya düsturuna, Stirlinqin və Besselin interpolyasiya dusturlarına da tətbiq etmək olar.

§1.20. Bir-birindən müxtəlif məsafələrdə yerləşən düyün nöqtələri üçün tərsinə interpolyasiya

Bir-birindən müxtəlif məsafələrdə yerləşən $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($x_i \neq x_j$, $i \neq j$) düyün nöqtələri üçün tərsinə interpolyasiya məsələsi, bilavasitə Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisinin köməyi ilə həll olunur.

Bunun üçün y monoton funksiya olduqda Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisində y-ə sərbəst dəyişən, x-ə isə funksiya kimi baxmaq kifayətdir (Şəkil 4).



Şəkil 4.

Başqa sözlə, Laqranjın düsturunda y və x dəyişənlərinin rollarını dəyişmək lazımdır. Yəni

$$x = \sum_{i=0}^{n} \frac{(y-y_0)(y-y_1)\cdots(y-y_{i-1})(y-y_{i+1})\cdots(y-y_n)}{(y_i-y_0)(y_i-y_1)\cdots(y_i-y_{i-1})(y_i-y_{i+1})\cdots(y_i-y_n)} \cdot x_i \,. \quad (1)$$

Burada $y_i = f(x_i)$ $(i = 0,1,\ldots,n)$.

Eyni zamanda, bir-birindən müxtəlif məsafələrdə yerləşən düyün nöqtələri üçün Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisində y-i arqument, x-i isə funksiya kimi qəbul edərək

$$x = x_0 + f(y_0;y_1)(y-y_0) + f(y_0;y_1;y_2)(y-y_0)(y-y_1) + \\ + \cdots + f(y_0;y_1;y_2;\ldots;y_n)(y-y_0)(y-y_1)(y-y_{n-1}) \quad (2)$$

yaza bilərik.

Burada $f(y_0;y_1)$, $f(y_0;y_1;y_2)$, ... , $f(y_0;y_1;\ldots;y_n)$ uyğun bölünən fərqlərdir.

Misal. Aşağıdakı cədvəldə $y = 2^x + 2x$ funksiyasının müəyyən qiymətləri verilmişdir. Tərsinə interpolyasiya üçün Laqranj düsturundan istifadə etməklə $y = 4{,}5$ olduqda, x-in uyğun qiymətini tapın.

x_i	0,34	0,85	1,08	1,72
y_i	1,9458	3,5025	4,2741	6,7343

Həlli: Funksiyanın verilən qiymətlərini (1) düstunda nəzərə alsaq:

$$x \approx \frac{(4{,}5-3{,}5025)(4{,}5-4{,}2741)(4{,}5-6{,}7343)}{(1{,}9458-3{,}5025)(1{,}9458-4{,}2741)(1{,}9458-6{,}7343)}\cdot 0{,}34+$$

$$+\frac{(4{,}5-1{,}9458)(4{,}5-4{,}2741)(4{,}5-6{,}7343)}{(3{,}5025-1{,}9458)(3{,}5025-4{,}2741)(3{,}5025-6{,}7343)}\cdot 0{,}85+$$

$$+\frac{(4{,}5-1{,}9458)(4{,}5-3{,}5025)(4{,}5-6{,}7343)}{(4{,}2741-1{,}9458)(4{,}2741-3{,}5025)(4{,}2741-6{,}7343)}\cdot 1{,}08+$$

$$+\frac{(4{,}5-1{,}9458)(4{,}5-3{,}5025)(4{,}5-4{,}2741)}{(6{,}7343-1{,}9458)(6{,}7343-3{,}5025)(6{,}7343-4{,}2741)}\cdot 1{,}72 \approx$$

$$\approx 1{,}1445919545$$

alırıq.

Deməli, $y = 2^x + 2x$ funksiyasının $y = 0{,}45$ qiymətinə arqumentin $x = 1{,}1445919545$ qiyməti uyğundur.

§1.21. Tərsinə interpolyasiya üsulunun tənliklərin həllinə tətbiqi

Tutaq ki,

$$f(x) = 0$$

tənliyi verilmişdir.

Bu tənliyi həll etmək üçün tərsinə interpolyasiya üsulundan istifadə etmək olar. Bunun üçün $y = f(x)$ funksiyasının qiymətlər cədvəlini tərtib etmək və x-in qiymətləri üçün uyğun sonlu fərqlər cədvəlini qurmaq lazımdır. Sonra isə tərsinə interpolyasiya üsulunu tətbiq edərək, $y = 0$ qəbul edib, axtarılan x-in qiyməti tapılır.

Misal. Tərsinə interpolyasiya üçün Laqranj düsturundan istifadə edərək

$$x^3 + 2x^2 - 2 = 0$$

tənliyinin təqribi həllini tapın.

Həlli: Tənliyin sol tərəfindəki funksiyanı $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2$ kimi işarə edək. Verilən tənlik üç dərəcəli tənlik olduğu üçün aydındır ki, onun üç müxtəlif kökü olacaq. Bu köklərdən hər hansı birinin yerləşdiyi parçanı tapmaq üçün $f(x)$ funksiyasının işarəsinin dəyişdiyi aralıqları müəyyən edək:

x	…	-1	0	1	…
sgn $f(x)$	…	-	-	+	…

Göründüyü kimi, $f(x)$ funksiyası $[0,1]$ parçasında öz işarəsini dəyişir. Deməli, verilən tənliyin bu parçada bir həqiqi kökü var. Bu kökün təqribi qiymətini tapmaq üçün $f(x)$ funksiyasının $[0,1]$ parçasının bir neçə nöqtəsindəki qiymətini hesablayaq:

x_i	0,345	0,624	0,812	0,846
$f(x_i)$	-1,7221	-0,9783	-0,1459	0,0369

İndi isə $y = f(x) = 0$ götürərək, tərsinə interpolyasiya üçün Laqranj düsturundan istifadə edək:

$$x \approx \frac{(0-(-0{,}9783))(0-(-0{,}1459))(0-0{,}0369)}{(-1{,}7221+0{,}9783)(-1{,}7221+0{,}1459)(-1{,}7221-0{,}0369)} \cdot 0{,}345 +$$

$$+\frac{(0-(-1{,}7221))(0-(-0{,}1459))(0-0{,}0369)}{(-0{,}9783+1{,}7221)(-0{,}9783+0{,}1459)(0{,}9783-0{,}0369)} \cdot 0{,}624 +$$

$$+\frac{(0-(-1{,}7221))(0-(-0{,}9783))(0-0{,}0369)}{(-0{,}1459+1{,}7221)(-0{,}1459+0{,}9783)(-0{,}1459-0{,}0369)} \cdot 0{,}812 +$$

$$+\frac{(0-(-1{,}7221))(0-(-0{,}9783))(0-(-0{,}1459))}{(0{,}0369+1{,}7221)(0{,}0369+0{,}9783)(0{,}0369+0{,}1459)} \cdot 0{,}846 \approx$$

$$\approx 0{,}00081 + 0{,}00992 + 0{,}21047 + 0{,}63704 = 0{,}85824\,.$$

Alırıq ki,

$$x^3 + 2x^2 - 2 = 0$$

tənliyinin $[0,1]$ parçasında yerləşən kökünün təqribi qiyməti $x \approx 0{,}85824$ kimidir. Analoji qayda ilə tənliyin digər köklərini də tapmaq olar.

Qeyd edək ki, bu tənliyin köklərinin təqribi qiymətini taparkən, tərsinə interpolyasiya üçün Nyuton düsturlarından da istifadə etmək olar.

F Ə S İ L II

ƏDƏDİ DİFERENSİALLAMA

§2.1. Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisinə uyğun ədədi diferensiallama düsturu

Əvvəlcə ədədi diferensiallama məsələsinin qoyuluşuna baxaq.

Bir çox praktiki məsələlərin həlli zamanı, cədvəllə verilmiş $y = f(x)$ funksiyasının tələb olunan tərtibdən törəməsinin tapılması zərurəti yaranır. Bundan əlavə bəzən $f(x)$ funksiyasının analitik ifadəsi elə mürəkkəb şəkildə verilir ki, bu funksiyanın birbaşa törəməsinin tapılmasında müəyyən çətinliklər əmələ gəlir. Bu çətinlikləri aradan qaldırmaq üçün ədədi diferensiallama üsulundan istifadə olunur. Ədədi diferensiallama düsturunu daxil etmək üçün hər hansı $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası uyğun $P(x)$ interpolyasiya çoxhədlisi ilə əvəz olunur. Aydındır ki, bu zaman $a \le x \le b$ üçün

$$f'(x) = P'(x)$$

bərabərliyi ödənir.

Qeyd edək ki, yüksək tərtibli törəmələrin tapılması üçün də eyni qaydadan istifadə olunur.

Əgər $P(x)$ interpolyasiyaedici çoxhədlisi üçün

$$R(x) = f(x) - P(x)$$

xətası məlumdursa, onda bu funksiyanın $P'(x)$ törəməsinin xətası üçün

$$r(x) = f'(x) - P'(x) = R'(x)$$

alarıq. Yəni interpolyasiyaedici funksiyanın törəməsinin xətası bu funksiyanın xətasının törəməsinə bərabərdir. Bu mülahizə yüksək tərtibli törəmələr üçün də doğrudur.

İndi isə Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisinə uyğun olan ədədi diferensiallama düsturlarının çıxarılışına baxaq.

Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş və bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən x_i $(i = 0,1,2,\dots,n)$ düyün nöqtələrindəki $y_i = f(x_i)$ qiymətləri məlum olan $y(x)$ funksiyası verilmişdir. $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş y funksiyasının $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$ və s. törəmələrini tapmaq üçün verilmiş funksiyanı bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ $(k \le n)$ düyün nöqtələri sistemi üçün qurulmuş Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisi ilə əvəz edək. Onda

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \\ + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots \tag{1}$$

yaza bilərik. Burada

$$q = \frac{x - x_0}{h} \quad \text{və} \quad h = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0,1,2,\dots,n).$$

(1) düsturundakı mötərizələri açsaq alarıq ki,

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 + \\ + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24}\Delta^4 y_0 + \cdots. \tag{1'}$$

(1) bərabərliyinin hər tərəfini diferensiallayaraq,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dy}{dq}$$

ifadəsini alınan törəmələrdə nəzərə alsaq:

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \right. \\ \left. + \frac{2q^3 - 9q^2 + 11q - 3}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots\right]. \tag{2}$$

Analoji olaraq (2) bərabərliyinin hər tərəfini yenidən diferensiallayaraq və

$$y''(x)=\frac{d(y')}{dx}=\frac{d(y')}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}$$

ifadəsini törəmələrdə nəzərə alsaq:

$$y''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0+(q-1)\Delta^3 y_0+\frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0+\cdots\right] \quad (3)$$

yaza bilərik.

Bu prosesi davam etdirməklə, $y(x)$ funksiyasının istənilən tərtibdən törəməsinin hesablanması üçün düstur qura bilərik. Alınan bu düsturlara Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisinə uyğun olan ədədi diferensiallama düsturları deyilir.

Qeyd edək ki, bəzən verilmiş $y(x)$ funksiyasının, x_i $(i=0,1,$ $2,\ldots,n)$ düyün nöqtələrindəki qiymətinin tapılması tələb olunur. Bu halda ədədi diferensiallama düsturları xeyli sadələşir. Belə olduqda, hər bir düyün nöqtəsini başlanğıc nöqtə kimi götürmək olar. Deməli, (2) və (3) düsturlarında $x=x_0$ və $q=0$ qəbul etsək

$$y'(x_0)=\frac{1}{h}\left(\Delta y_0-\frac{\Delta^2 y_0}{2}+\frac{\Delta^3 y_0}{3}-\frac{\Delta^4 y_0}{4}+\frac{\Delta^5 y_0}{5}-\cdots\right) \quad (4)$$

və

$$y''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\frac{6}{5}\Delta^5 y_0+\cdots\right) \quad (5)$$

düsturları alınar.

Əgər $P_k(x)$ çoxhədlisi, Δy_0, $\Delta^2 y_0$, ... , $\Delta^k y_0$ sonlu fərqlərini özündə saxlayan Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisidirsə və

$$R_k(x)=y(x)-P_k(x)$$

uyğun xəta olarsa, onda törəmə üçün xəta düsturu aşağıdakı kimi olar:

$$R_k'(x)=y'(x)-P_k'(x)\,.$$

Məlumdur ki, Nyutonun birinci interpolyasiya düsturunun xətası aşağıdakı kimi tapılır:

$$R_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi)=$$

$$= h^{k+1} \frac{q(q-1)\cdots(q-k)}{(k+1)!} y^{(k+1)}(\xi).$$

Burada ξ baxılan x nöqtəsi ilə $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ düyün nöqtələrinin hər hansı biri arasında yerləşən nöqtədir.

Deməli, sonuncu bərabərlikdən, $y(x) \in C^{(k+2)}$ qəbul etməklə

$$R_k'(x) = \frac{dR_k}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{h^k}{(k+1)!} \left\{ y^{(k+1)}(\xi) \frac{d}{dq}[q(q-1)\cdots(q-k)] + \right.$$

$$\left. + q(q-1)\cdots(q-k) \frac{d}{dq}[y^{(k+1)}(\xi)] \right\}$$

yaza bilərik.

Buradan $x = x_0$ və $q = 0$ qəbul edərək

$$\frac{d}{dq}[q(q-1)(q-2)\cdots(q-k)]_{q=0} = (-1)^k k!$$

olduğunu nəzərə alsaq:

$$R_k'(x_0) = (-1)^k \frac{h}{k+1} y^{(k+1)}(\xi) \qquad (6)$$

alarıq.

Qeyd edək ki, bir çox hallarda $y^{(k+1)}(\xi)$ kəmiyyətini qiymətləndirmək çətin olur. Ona görə də bu kəmiyyəti qiymətləndirmək üçün h-ın kifayət qədər kiçik qiymətləri üçün aşağıdakı münasibətlərdən istifadə etmək daha əlverişlidir:

$$y^{(k+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{k+1} y_0}{h^{k+1}}.$$

Beləliklə,

$$R_k'(x_0) \approx \frac{(-1)^k}{h} \cdot \frac{\Delta^{k+1} y_0}{k+1}. \qquad (7)$$

Analoji üsulla, ikinci tərtib $y''(x_0)$ törəməsi üçün də $R_k''(x_0)$ xətasını tapmaq olar.

Misal. Nyutonun birinci interpolyasiya çoxhədlisinə uyğun ədədi diferensiallama düsturunun köməyi ilə aşağıdakı cədvəllə verilmiş funksiyanın $x = 1{,}47$ nöqtəsində birinci və ikinci tərtib törəmələrini hesablayın.

x_i	1,2	1,7	2,2	2,7	3,2
y_i	0,1823	0,5306	0,7885	0,9932	1,1632

Həlli: Cədvəldən göründüyü kimi, verilən funksiyanın beş müxtəlif düyün nöqtəsindəki qiymətləri məlumdur. Deməli, bu misal üçün (2) və (3) düsturlarını

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \right.$$
$$\left. + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0\right]$$

və

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0\right]$$

kimi yaza bilərik.

İndi də verilən funksiyanın düyün nöqtələrindəki qiymətlərinə uyğun sonlu fərqlər cədvəlini quraq:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	1,2	0,1823				
			0,3483			
1	1,7	0,5306		-0,0904		
			0,2579		0,0372	
2	2,2	0,7885		-0,0532		-0,0185
			0,2047		0,0185	
3	2,7	0,9932		-0,0347		
			0,17			
4	3,2	1,1632				

Aydındır ki, $h = 0,5$. Onda

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1,47 - 1,2}{0,5} = 0,54 .$$

Beləliklə alırıq ki,

$$y'(1,47) \approx \frac{1}{0,5}\left[0,3483 + \frac{2 \cdot 0,54 - 1}{2} \cdot (-0,0904) + \right.$$

$$+ \frac{3 \cdot 0,54^2 - 6 \cdot 0,54 + 2}{6} \cdot 0,0372 +$$

$$\left. + \frac{2 \cdot 0,54^3 - 9 \cdot 0,54^2 + 11 \cdot 0,54 - 3}{12} \cdot (-0,0185)\right] =$$

$$= 2 \cdot (0,3483 - 0,003616 - 0,00226424 - 0,000972064) =$$

$$= 0,682895392$$

və

$$y''(x) \approx \frac{1}{0,5^2}\left[-0,0904 + (0,54 - 1) \cdot 0,0372 + \right.$$

$$\left. + \frac{6 \cdot 0,54^2 - 18 \cdot 0,54 + 11}{12} \cdot (-0,0185)\right] \approx 0,44873052 .$$

Qeyd edək ki, yuxarıda göstərilən qaydaya analoji olaraq, Nyutonun ikinci interpolyasiya çoxhədlisinə uyğun olan ədədi diferensiallama düsturlarını da almaq olar.

§2.2. Stirlinqin interpolyasiya çoxhədlisinə uyğun ədədi diferensiallama düsturu

Nyutonun interpolyasiya çoxhədlisinə uyğun olan ədədi diferensiallama düsturları, adətən, $x > x_0$ olduqda tətbiq olunur. Başqa sözlə, bu diferensiallama düsturlarında funksiyanın və qurulan sonlu fərqlərin cədvəldəki yuxarı qiymətlərindən istifadə olunur. Bu isə bir sıra praktiki məsələlərin həlli zamanı əlverişsiz olur. Belə hallarda həllin dəqiqliyini artırmaq üçün mərkəzi fərqli interpolyasiya çoxhədlilərindən istifadə etmək daha məqsədəuyğundur. Çünki, mərkəzi fərqli interpolyasiya çoxhədlilərində $x < x_0$ olduqda da, yüksək dəqiqlikli diferensiallama düsturları almaq olur. Bu cür düsturlar mərkəzi fərqli ədədi diferensiallama düsturları adlanır.

Tutaq ki, bir-birindən bərabər $x_{i+1} - x_i = h \quad (i = 0,1,2,\ldots)$ məsafəsində yerləşən

$$\ldots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$$

düyün nöqtələri sistemi və bu nöqtələrdəki $y_i = f(x_i)$ qiymətləri məlum olan $y = f(x)$ funksiyası verilmişdir.

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

olduğunu nəzərə almaqla, verilmiş $f(x)$ funksiyasını Stirlinqin interpolyasiya çoxhədlisi ilə əvəz etsək:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_{-\frac{1}{2}} + \frac{q^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!}\Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{q^2(q^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} +$$

$$+ \frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)}{5!}\Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} + \frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \cdots \quad (1)$$

yaza bilərik. Burada alınan düsturun nisbətən sadə olması üçün aşağıdakı əvəzləmələr aparılmışdır:

$$\Delta y_{-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2};$$

$$\Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} = \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2};$$

$$\Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} = \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} \quad \text{və s.}$$

(1) düsturunda

$$\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}$$

bərabərliyini nəzərə alsaq:

$$y'(x)=\frac{1}{h}\left(\Delta y_{-\frac{1}{2}}+q\Delta^2 y_{-1}+\frac{3q^2-1}{6}\Delta^3 y_{-\frac{3}{2}}+\frac{2q^3-q}{12}\Delta^4 y_{-2}+\right.$$

$$\left.+\frac{5q^4-15q^2+4}{120}\Delta^5 y_{-\frac{5}{2}}+\frac{3q^5-10q^3+4q}{360}\Delta^6 y_{-3}+\cdots\right) \quad (2)$$

və

$$y''(x)=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1}+q\Delta^3 y_{-\frac{3}{2}}+\frac{6q^2-1}{12}\Delta^4 y_{-2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2q^3-3q}{12}\Delta^5 y_{-\frac{5}{2}}+\frac{15q^4-30q^2+4}{360}\Delta^6 y_{-3}+\cdots\right) \quad (2')$$

alarıq.

Aldığımız (2) və $(2')$ düsturlarına Stirlinqin interpolyasiya çoxhədlisinə uyğun ədədi diferensiallama düsturları deyilir.

Xüsusi halda $q=0$ olarsa, onda (2) və $(2')$ düsturları uyğun olaraq, aşağıdakı şəklə düşər:

$$y'(x)=\frac{1}{h}\left(\Delta y_{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{6}\Delta^3 y_{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{30}\Delta^5 y_{-\frac{5}{2}}+\cdots\right) \quad (3)$$

və

$$y''(x)=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1}-\frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2}+\frac{1}{90}\Delta^6 y_{-3}+\cdots\right). \quad (3')$$

Misal. Stirlinqin interpolyasiya çoxhədlisinə uyğun ədədi diferensiallama düsturundan istifadə edərək, aşağıdakı cədvəllə verilmiş funksiyanın $x=1{,}24$ nöqtəsində birinci və ikinci tərtib törəmələrini hesablayın.

x_i	0,3	0,7	1,1	1,5	1,9
y_i	-0,4577	-0,3466	0,1612	1,0253	2,2316

Həlli: Cədvəldə funksiyanın beş müxtəlif düyün nöqtəsindəki qiymətləri verilmişdir. Deməli, bu misal üçün (2) və $(2')$ düsturları

$$y'(x)=\frac{1}{h}\left(\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}+q\Delta^2 y_{-1}+\frac{3q^2-1}{6}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+\frac{2q^3-q}{12}\Delta^4 y_{-2}\right)$$

və

$$y''(x)=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1}+q\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+\frac{6q^2-1}{12}\Delta^4 y_{-2}\right)$$

kimi olar.

İndi isə uyğun sonlu fərqlər cədvəlini quraq:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,3	-0,4577				
			0,1111			
1	0,7	-0,3466		0,3967		
			0,5078		-0,0404	
2	1,1	0,1612		0,3563		0,0263
			0,8641		-0,0141	
3	1,5	1,0253		0,3422		
			1,2063			
4	1,9	2,2316				

Cədvəldən göründüyü kimi, $h=0,4$. Onda

$$q=\frac{x-x_0}{h}=\frac{1,24-1,1}{0,4}=0,35$$

yaza bilərik.

Beləliklə alırıq ki,

$$y'(1,24)\approx\frac{1}{0,4}\left(\frac{0,5978+0,8641}{2}+0,35\cdot 0,3563+\frac{3\cdot 0,35^2-1}{6}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(-0,0404)+(-0,0141)}{2}+\frac{2\cdot 0,35^3-0,35}{12}\cdot 0,0263\right)\approx$$

$$\approx 2,5\cdot(0,73095+0,124705+0,0028726-0,0005791)\approx$$

$$\approx 2,14487113$$

və

$$y''(1{,}24) \approx \frac{1}{0{,}4^2}\left(0{,}3563 + 0{,}35 \cdot \frac{(-0{,}0404) + (-0{,}0141)}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{6 \cdot 0{,}35^2 - 1}{12} \cdot 0{,}0263\right) \approx 6{,}25 \cdot (0{,}3563 - 0{,}014315 -$$

$$- 0{,}000580792) \approx 2{,}1410362\ .$$

F Ə S İ L III

ƏDƏDİ İNTEQRALLAMA

§3.1. Kvadratur düstur anlayışı

Bilirik ki, əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə və onun $F(x)$ ibtidai funksiyası məlumdursa, onda verilən $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasına uyğun müəyyən inteqralını Nyuton-Leybnis düsturu adlanan

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{1}$$

düsturu ilə hesablamaq olar. Burada $F'(x) = f(x)$.

Lakin bir çox hallarda $y = f(x)$ funksiyası elə mürəkkəb şəkildə verilir ki, onun $F(x)$ ibtidai funksiyasını məlum elementar funksiyaların köməyi ilə ifadə etmək mümkün olmur. Bu zaman verilən funksiyanın müəyyən inteqralını hesablayarkən (1) düsturunu tətbiq etdikdə, bir sıra ciddi çətinliklər yaranır, bəzən isə ümumiyyətlə, mümkün olmur. Bundan başqa, praktik məsələlərin həlli zamanı meydana çıxan funksiya çox vaxt cədvəllə verildiyindən, həmin funksiya üçün ibtidai funksiya anlayışı artıq mənasız olur. Qeyd edək ki, analoji çətinliklərə çoxqat inteqralların hesablanması zamanı da rast gəlinir. Ona görə də belə müəyyən inteqralları hesablamaq üçün ədədi üsullardan istifadə olunur. Funksiyaların ədədi inteqrallanması zamanı bir qayda olaraq inteqralaltı funksiyanı verilən parçaya daxil olan və bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən nöqtələrdəki qiymətlərindən istifadə olunur. Qeyd edək ki, birqat inteqralları ədədi üsullarla hesablayarkən tətbiq olunan düsturlara kvadratur düsturlar, ikiqat inteqrallar üçün tətbiq olunan düsturlara isə kubatur düsturlar deyilir.

Kvadratur düsturları tətbiq edərkən, əvvəlcə $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş $y = f(x)$ funksiyası, nisbətən sadə şəkildə olan uyğun interpolyasiyaedici $\varphi(x)$ çoxhədlisi ilə əvəz olunur, sonra isə

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx \tag{2}$$

qəbul edilir.

Əgər $f(x)$ funksiyası analitik şəkildə verilərsə, onda (2) düsturu üçün xətanı qiymətləndirmək zəruridir.

İndi isə ədədi inteqrallama üçün Laqranjın interpolyasiya düsturunun istifadə olunmasına baxaq.

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında yerləşən $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($x_i \neq x_j$, $i \neq j$) nöqtələr sistemindəki uyğun

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

qiymətləri məlumdur və

$$\int_a^b f(x)dx$$

inteqralının təqribi qiymətinin tapılması tələb olunur.

Bilirik ki, funksiyanın verilmiş y_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ qiymətlərinə əsasən Laqranjın bərabər addımlar üçün interpolyasiya çoxhədlisini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)} y_i \,. \tag{4}$$

Burada

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

və

$$L_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Verilən $f(x)$ funksiyasını $L_n(x)$ çoxhədlisi ilə əvəz etsək:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + R_n[f] \tag{5}$$

yaza bilərik. Burada $R_n[f]$, (5) kvadratur düsturunun qalıq həddidir.

(4) ifadəsindən istifadə etməklə aşağıdakı təqribi kvadratur düsturu alarıq:

$$\int_a^b y dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y_i \, , \tag{6}$$

burada

$$A_i = \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)} dx \quad (i = 0,1,2,\dots,n). \tag{7}$$

Qeyd edək ki, a və b inteqrallama sərhədlərinin özləri də düyün nöqtələri sisteminə daxil olduqda, (6) düsturu "qapalı tip" kvadratur düstur, əks halda isə "açıq tip" kvadratur düstur adlanır. Onu da qeyd etmək lazımdır ki, (6) kvadratur düsturundakı A_i əmsalları $y = f(x)$ funksiyasının seçilməsindən asılı deyil və bu düstur ixtiyari n dərəcəli çoxhədli üçün dəqiq odənir, yəni $\int_a^b L_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. Xüsusi halda, $y = x^k \quad (k = 0,1,2,\dots,n)$ olduqda, (6) düsturu üçün $R_n[x^k] = 0 \quad (k = 0,1,2,\dots,n)$ olar.

(6) kvadratur düsturunda $y = x^k \quad (k = 0,1,2,\dots,n)$ qəbul etsək, $A_0, A_1, \dots, A_n$ əmsallarını təyin etmək üçün aşağıdakı kimi $n+1$ sayda xətti tənlikdən ibarət sistem alarıq:

$$\left.\begin{aligned} I_0 &= \sum_{i=0}^{n} A_i \, , \\ I_1 &= \sum_{i=0}^{n} A_i x_i \, , \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ I_n &= \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^n \, , \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

burada

$$I_k = \int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Aydındır ki, (8) sisteminin determinantı

$$D = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0$$

kimi Vandermond determinantıdır.

Misal:

$$\int_0^1 y dx = A_0 y\left(\frac{1}{4}\right) + A_1 y\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 y\left(\frac{3}{4}\right) \tag{9}$$

kvadratur düsturunda A_0, A_1 və A_2 əmsallarını təyin edin.

Həlli: Verilən düsturda $y = x^k$ $(k = 0, 1, 2)$ qəbul etsək alarıq ki,

$$\int_0^1 dx = 1, \quad \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Sonuncu bərabərliklərin hər birini verilən düsturda nəzərə alsaq:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 1, \\ \frac{1}{4} A_0 + \frac{1}{2} A_1 + \frac{3}{4} A_2 = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{16} A_0 + \frac{1}{4} A_1 + \frac{9}{16} A_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

sistemini yaza bilərik.

Beləliklə, alırıq ki,

$$A_0 = \frac{2}{3}, \quad A_1 = -\frac{1}{3} \quad \text{və} \quad A_2 = \frac{2}{3}.$$

Deməli,

$$\int_0^1 y dx = \frac{2}{3} y\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} y\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} y\left(\frac{3}{4}\right). \tag{10}$$

Aldığımız sonuncu düstur, "açıq tip" kvadratur düsturdur və dərəcəsi ikini aşmayan bütün çoxhədlilər üçün dəqiq ödənir. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu düstur $y = x^3$ olduqda da dəqiq nəticə verir. Yəni (10) düsturu üç dərəcəli çoxhədlilər üçün də dəqiq ödənir.

§3.2. Nyuton-Kotes düsturu və onun xüsusi halları

Tutaq ki.

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

inteqralını hesablamaq tələb olunur.

İnterpolyasiya düyünlərini

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 1,2,...,n)$$

kimi götürək. Əgər $x_0 = a$ olarsa, onda $x_n = x_0 + (n+1)h$ götürəcəyik. Bu halda $[a,b]$ parçası $n+1$ sayda bərabər hissəyə bölünür və a, b nöqtələri düyün nöqtələri sisteminə daxil olmurlar. $x_0 = a - h$ olduqda isə $b = x_0 + nh$ götürülür. Bu halda $[a,b]$ parçası $n-1$ sayda hissəyə bölünür və a, b nöqtələri düyün nöqtələri sisteminə daxil olurlar.

(1) inteqralında $a = x_0 + (1-k)h,\ b = x_0 + (n+k)h$ götürək. Bilirik ki, $k = 1$ olduqda alınan düstur açıq tipli, $k = 0$ olduqda isə qapalı tipli olur.

$F(y) = f(x_0 + hy)$ ilə işarə etsək, (1) inteqralı aşağıdakı şəklə düşər:

$$\int_a^b f(x)dx = h\int_{1-k}^{n+k} F(y)dy.$$

Bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən düyün nöqtələri ücün Laqranjın interpolyasiya düsturunu yazaq:

$$F(y) = L_n(y) + (y-1)(y-2)...(y-n)F(y,1,2,...,n),$$

$$L_n(y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(y-1)(y-2)...(y-i+1)(y-i-1)...(y-n)}{(i-1)(i-2)...1\cdot(-1)...(i-n)}F(i).$$

Onda

$$\int_a^b f(x)dx=h\int_{1-k}^{n+k}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y-1)(y-2)...(y-i+1)(y-i-1)...(y-n)}{(i-1)(i-2)...1\cdot(-1)...(i-n)}F(i)dy+$$

$$+h\int_{1-k}^{n+k}(y-1)(y-2)...(y-n)F(y,1,2,...,n)dy=$$

$$=h\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{1-k}^{n+k}\frac{(y-1)(y-2)...(y-i+1)(y-i-1)...(y-n)}{(i-1)(i-2)...1\cdot(-1)...(i-n)}dy\right)F(i)+$$

$$+h\int_{1-k}^{n+k}(y-1)(y-2)...(y-n)F(y,1,2,...,n)dy=$$

$$=h\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{1-k}^{n+k}(-1)^{n-i}\frac{(y-1)(y-2)...(y-n)}{(i-1)!(n-i)!(y-i)}dy\right)F(i)+$$

....

$$=(b-a)\sum_{i=1}^{n}J_{i,k}^{(n)}f(a+ih)+R_{n,k}$$

alarıq. Burada

$$J_{i,k}^{(n)}=\frac{(-1)^{n-i}}{(n-1+2k)(i-1)!(n-i)!}\int_{1-k}^{n+k}\frac{(y-1)(y-2)...(y-n)}{y-i}dy,$$

$$R_{n.k}=h\int_{1-k}^{n+k}(y-1)(y-2)...(y-n)F(y,1,2,...,n)dy.$$

Beləliklə,

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\sum_{i=1}^{n}J_{i,k}^{(n)}f(a+ih)+R_{n,k}$$

yaza bilərik. Bu düstura Nyuton-Kotes düsturu deyirlər.

Qeyd edək ki, $J_{i,k}^{(n)}$ əmsalları a ,b və $f(x)$ -dən asılı olmayan əmsallardır və onları bir dəfə hesablamaqla sonrakı bərabərliklərdə istifadə etmək olar. Bu əmsallar üçün aşağıdakı xassə doğrudur:

$$J_{i,k}^{(n)} = J_{n-i+1,k}^{n}\,.$$

Doğrudan da,

$$J_{n-i+1,k}^{(n)} = \frac{(-1)^{i-1}}{(n-1+2k)(n-i)!(i-1)!}\int_{1-k}^{n+1}\frac{(y-1)(y-2)...(y-n)}{y-n+i-1}dy$$

inteqralında $y = n+1-z$ əvəzləməsini aparsaq:

$$J_{n-i+1,k}^{(n)} = \frac{(-1)^{i-1}}{(n-1+2k)(n-i)!(i-1!)}\int_{n+k}^{1-k}\frac{(n-z)(n-z-1)...(-z+1)}{i-z}dz =$$

$$= \frac{(-1)^{n-i}}{(n-1+2k)(n-i)!(i-1)!}\int_{1-k}^{n+k}\frac{(z-1)(z-2)...(z-n)}{z-i}dz = J_{i,k}^{(n)}$$

olduğunu alarıq.

İndi isə Nyuton-Kotes düsturunun bəzi xüsusi hallarına baxaq və bu xüsusi hallar ücün $f(x)$ funksiyası üzərinə əlavə şərtlər qoyaraq qalıq həddin ifadələrini qiymətləndirək.

Əvvəlcə fərz edək ki, $n=1$ $(k=0)$. Bu o deməkdir ki, $[a\,,b]$ parçasında yalnız bir düyün nöqtəsi var və bu nöqtə parçanı yarıya bölür. Yəni

$$x_1 = \frac{a+b}{2}\,.$$

Bu halda:

$$L_0(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

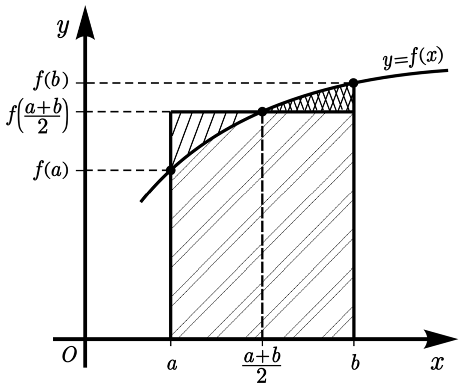
olar. Onda

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R_1. \qquad (2)$$

Məlumdur ki, $\int_a^b f(x)dx$ inteqralının qiyməti uyğun əyrixətli trapesin sahəsinə bərabərdir. (2) düsturundan alırıq ki,

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Bu onu göstərir ki, əyrixətli trapesin sahəsi əvəzinə oturacağı $b-a$, hündürlüyü isə $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ olan düzbucaqlının sahəsi götürülür (Şəkil 5).



Şəkil 5.

Buna görə də (2) düsturuna sadə düzbucaqlılar düsturu deyirlər.

Misal. $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$ inteqralını sadə düzbucaqlılar düsturu ilə hesablayaraq, alınan nəticəni dəqiq qiymətlə müqayisə edin.

Həlli: Əvvəlcə, sadə düzbucaqlılar düsturunu tətbiq edərək verilən inteqralın təqribi qiymətini tapaq:

$$\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2} \approx (2-0)f\left(\frac{2+0}{2}\right) = 2\cdot f(1) = 2\cdot\frac{1}{4+1^2} = 2\cdot\frac{1}{5} = 0{,}4\,.$$

İndi isə verilən inteqralın dəqiq qiymətini hesablayaq:

$$\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2} arctg\,\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2} = 0{,}5\,.$$

Göründüyü kimi, verilən inteqralın təqribi qiyməti onun dəqiq qiymətindən 0,1 qədər fərqlənir. Bu isə, sadə düzbucaqlılar düsturu üçün böyük xəta hesab olunmur.

İndi, sadə düzbucaqlılar düsturunun qalıq həddini hesablayaq.

Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında iki dəfə diferensiallanandır. Onda Teylor düsturuna əsasən

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+f''(\xi)\frac{\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)^2}{2},$$

burada $\xi\in[a,b]$ və x ilə $\dfrac{a+b}{2}$ nöqtələri arasında yerləşir.

Deməli,

$$\int_a^b f(x)dx=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+R_1,\quad R_1=\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx.$$

Orta qiymət haqqındakı teoremdən istifadə edərək alırıq ki,

$$R_1=\frac{\mu}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx=\frac{(b-a)^3}{24}\mu,\quad \mu\in\left[\inf_x f''(x),\sup_x f''(x)\right].$$

Onda

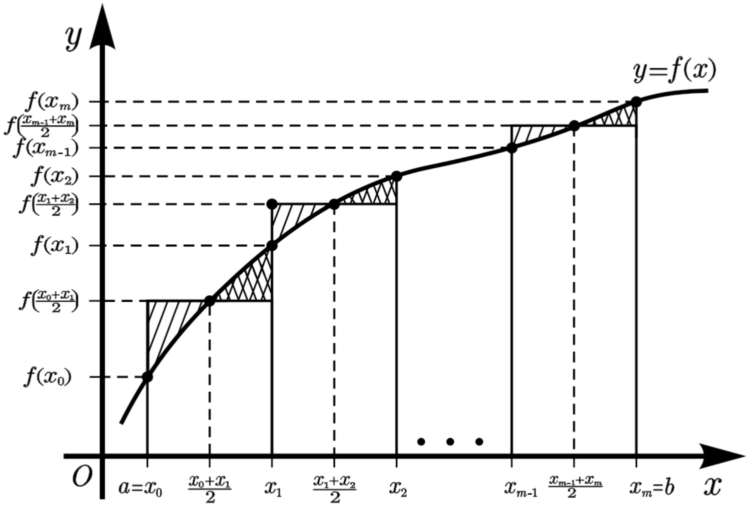
$$R_1=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta),\quad \eta\in(a,b).$$

$b-a$ kiçik ədəd olmadıqda (2) düsturundan istifadə etmək əlverişli olmur. Buna görə də, adətən, $[a,b]$ parçasını m bərabər hissəyə bölüb, hər kiçik parça üçün bu düsturu tətbiq edirlər. Bu halda

$$\int_a^b f(x)dx=h\left[f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f\left(a+\frac{3h}{2}\right)+\ldots+f\left(a+\frac{(2m-1)h}{2}\right)\right]+\frac{(b-a)^3}{24m^2}M_2$$

olduğunu alırıq (Şəkil 6). Burada $h=\dfrac{b-a}{m}$ və $M_2=\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$.

Aldığımız bu düstura, ümumiləşmiş düzbucaqlılar düsturu deyilir.



Şəkil 6.

Misal. $m = 5$ götürməklə, $\int_0^1 \frac{1+2x}{3x+5}dx$ inteqralını ümumiləşmiş düzbucaqlılar düsturu ilə hesablayın.

Həlli: Şərtə görə $m = 5$ olduğundan verilən inteqral üçün ümumiləşmiş düzbucaqlılar düsturunu

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f\left(a+\frac{3h}{2}\right)+...+f\left(a+\frac{2\cdot 5-1}{2}h\right)\right]=$$

$$=h\left[f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f\left(a+\frac{3h}{2}\right)+f\left(a+\frac{5h}{2}\right)+f\left(a+\frac{7h}{2}\right)+f\left(a+\frac{9h}{2}\right)\right]$$

kimi yaza bilərik. Digər tərəfdən, $m = 5$ olduğu üçün alarıq ki,

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{1-0}{5} = 0{,}2\ .$$

İndi isə $f(x) = \frac{1+2x}{3x+5}$ funksiyasının

$$a+\frac{h}{2} = 0+\frac{0{,}2}{2} = 0{,}1;$$

$$a+\frac{3h}{2}=0+\frac{3\cdot 0,2}{2}=0,3;$$

$$a+\frac{5h}{2}=0+\frac{5\cdot 0,2}{2}=0,5;$$

$$a+\frac{7h}{2}=0+\frac{7\cdot 0,2}{2}=0,7;$$

$$a+\frac{9h}{2}=0+\frac{9\cdot 0,2}{2}=0,9,$$

nöqtələrindəki qiymətlərini hesablayaq:

$$f(0,1)=\frac{1+2\cdot 0,1}{3\cdot 0,1+5}=\frac{12}{53}\approx 0,22;$$

$$f(0,3)=\frac{1+2\cdot 0,3}{3\cdot 0,3+5}=\frac{16}{59}\approx 0,27;$$

$$f(0,5)=\frac{1+2\cdot 0,5}{3\cdot 0,5+5}=\frac{4}{13}\approx 0,307;$$

$$f(0,7)=\frac{1+2\cdot 0,7}{3\cdot 0,7+5}=\frac{24}{71}\approx 0,33;$$

$$f(0,9)=\frac{1+2\cdot 0,9}{3\cdot 0,9+5}=\frac{4}{11}\approx 0,36.$$

Tapılan bu qiymətləri ümumiləşmiş düzbucaqlılar düsturunda nəzərə alsaq:

$$\int_0^1 \frac{1+2x}{3x+5}dx \approx 0,2[f(0,1)+f(0,3)+f(0,5)+f(0,7)+f(0,9)]=$$

$$=0,2[0,22+0,27+0,307+0,33+0,36]=0,2974$$

alarıq.

Bilirik ki, düzbucaqlılar düsturunda xəta

$$R_1=\frac{(b-a)^3}{24m^2}M_2$$

kimi qiymətləndirilir. Burada $M_2=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|$. Deməli, xətanı hesablamaq üçün, əvvəlcə verilən funksiyanın ikinci tərtib törəməsini və bu törəmənin [0,1] parçasındakı maksimumunu tapmaq lazımdır. Beləliklə,

$$f'(x) = \left(\frac{1+2x}{3x+5}\right)' = \frac{7}{(3x+5)^2},$$

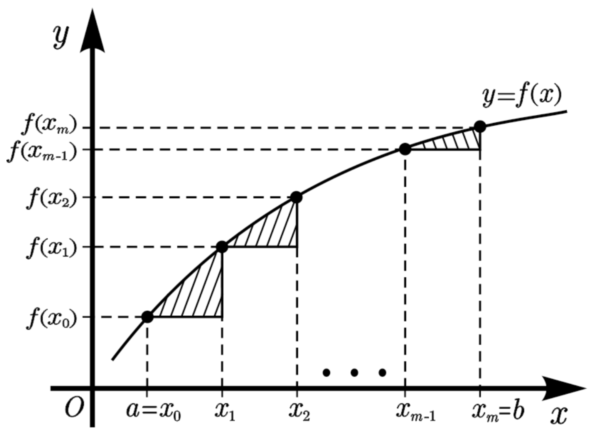
$$f''(x) = \left(\frac{7}{(3x+5)^2}\right)' = \frac{126x+120}{(3x+5)^4} = \frac{42(3x+5)}{(3x+5)^4} = \frac{42}{(3x+5)^3},$$

$$M_2 = \max_{0\le x\le 1} |f''(x)| = \max_{0\le x\le 1} \left|\frac{42}{(3x+5)^3}\right| = \frac{42}{125}.$$

Deməli, $R_1 = \frac{(1-0)^3}{24\cdot 5^2}\cdot\frac{42}{125} = \frac{1}{600}\cdot\frac{42}{125} \approx 0{,}0056.$

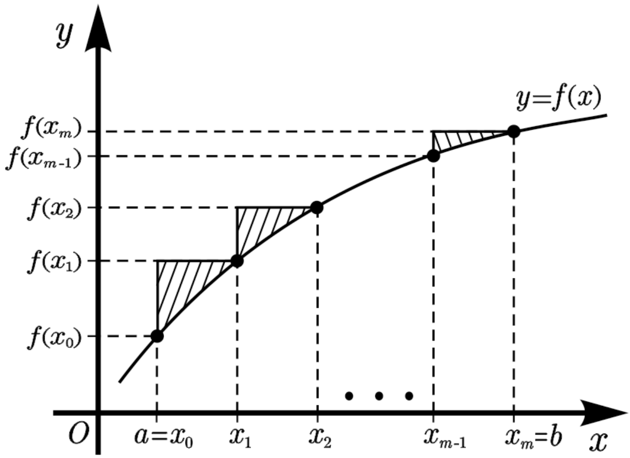
Qeyd edək ki, sadə düzbucaqlılar və ümumiləşmiş düzbucaqlılar düsturu ilə yanaşı, bəzən sol (Şəkil 7) və sağ (Şəkil 8) düzbucaqlılar düsturundan da istifadə olunur. Bu düsturlar uyğun olaraq aşağıdakı kimidir:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\cdot[f(a)+f(a+h)+f(a+h)+\ldots+f(a+(m-1)h)];$$



Şəkil 7.

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\cdot[f(a+h)+f(a+2h)+f(a+3h)+...+f(a+mh)].$$



Şəkil 8.

İndi isə müəyyən inteqralların təqribi qiymətinin tapılması üçün istifadə olunan düzbucaqlılar üsulunun həndəsi interpretasiyasını verək.

Sol düzbucaqlılar üsulu həndəsi olaraq bir tərəfi $h=x_{i+1}-x_i$ $(i=0,1,2,\dots,m-1)$, digər tərəfi isə $f(x_i)$ ədədlərinə bərabər olan düzbucaqlıların sahələri cəmi kimi ifadə olunur (Şəkil 7). Doğrudan da, şəkil 7-yə əsasən alırıq ki,

$$\int_a^b f(x)dx \approx (x_1-x_0)\cdot f(x_0)+(x_2-x_1)\cdot f(x_1)+\dots+$$
$$+(x_{m-1}-x_{m-2})\cdot f(x_{m-2})+(x_m-x_{m-1})\cdot f(x_{m-1}).$$

Sonuncu bərabərlikdə

$$h=x_{i+1}-x_i \quad (i=0,1,2,\dots,m-1)$$

və

$$x_0=a,\ \ x_1=a+h,\ \ ...,\ \ x_{m-1}=a+(m-1)h$$

olduğunu nəzərə alsaq:

$$\int_a^b f(x)dx \approx hf(x_0)+hf(x_1)+\cdots+hf(x_{m-2})+hf(x_{m-1}) =$$
$$= h\cdot[f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{m-2})+f(x_{m-1})] =$$
$$= h\cdot[f(a)+f(a+h)+\cdots+f(a+(m-2)h)+f(a+(m-1)h)]$$

alarıq. Bu isə sol düzbucaqlılar düsturudur.

Sol düzbucaqlılar düsturunun tətbiqi zamanı verilən inteqralın təqribi qiyməti, onun dəqiq qiymətindən ştrixlənmiş (Şəkil 7) sahələrin cəmi qədər fərqli olur. Yəni xəta ştrixlənmiş sahələrin cəminə bərabər olur. Bu xətanı düyün nöqtələrinin sayını artırmaqla kafi qədər kiçiltmək olar.

Sağ düzbucaqlılar üsulu həndəsi olaraq tərəflərindən biri $h = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1,2,\ldots,m)$, digəri isə $f(x_i)$ ədədlərinə bərabər olan düzbucaqlıların sahələri cəmini özündə əks etdirir (Şəkil 8). Həqiqətən də, şəkil 8-ə əsasən:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (x_1-x_0)\cdot f(x_1)+(x_2-x_1)\cdot f(x_2)+\cdots+$$
$$+(x_{m-1}-x_{m-2})\cdot f(x_{m-1})+(x_m-x_{m-1})\cdot f(x_m)$$

yaza bilərik.

Aldığımız bərabərlikdə

$$h = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

və

$$x_1 = a+h\,,\ x_2 = a+2h\,,\ \ldots\,,\ x_m = a+mh$$

münasibətlərini nəzərə alsaq:

$$\int_a^b f(x)dx \approx hf(x_1)+hf(x_2)+\cdots+hf(x_{m-1})+hf(x_m) =$$
$$= h\cdot[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{m-1})+f(x_m)] =$$
$$= h\cdot[f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+(m-1)h)+f(a+mh)]$$

alarıq. Beləliklə, biz sağ düzbucaqlılar düsturunu almış oluruq.

Ədədi inteqrallama üçün sağ düzbucaqlılar düsturunu tətbiq etdikdə verilən inteqralın təqribi qiyməti onun dəqiq qiymətindən ştrixlənmiş (Şəkil 8) sahələrin cəmi qədər fərqli olur. Başqa sözlə, bu halda xəta ştrixlənmiş sahələrin cəminə bərabər olur. Bu isə kifayət qədər ciddi xəta hesab oluna bilər. Lakin düyün nöqtələrinin sayını artırmaqla bu xətanı nəzərə çarpacaq qədər azaltmaq olar.

Ümumiləşmiş düzbucaqlılar üsulu həndəsi olaraq, tərəflərindən biri $x_{i+1}-x_i \quad (i=0,1,2,\dots,m-1)$, digər tərfi isə $f\left(\dfrac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$ ədədlərinə bərabər olan düzbucaqlıların sahələri cəmi kimi ifadə edilir (Şəkil 6). Doğrudan da, şəkil 6-ya əsasən:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (x_1-x_0)\cdot f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+(x_2-x_1)\cdot f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\dots+$$

$$+(x_{m-1}-x_{m-2})\cdot f\left(\frac{x_{m-2}+x_{m-1}}{2}\right)+(x_m-x_{m-1})\cdot f\left(\frac{x_{m-1}+x_m}{2}\right)=$$

$$=(x_1-x_0)\cdot f\left(x_0+\frac{x_1-x_0}{2}\right)+(x_2-x_1)\cdot f\left(x_1+\frac{x_2-x_1}{2}\right)+\dots+$$

$$+(x_{m-1}-x_{m-2})\cdot f\left(x_{m-2}+\frac{x_{m-1}-x_{m-2}}{2}\right)+$$

$$+(x_m-x_{m-1})\cdot f\left(x_{m-1}+\frac{x_m-x_{m-1}}{2}\right)$$

yaza bilərik.

Aldığımız bərabərlikdə

$$h=x_{i+1}-x_i \quad (i=0,2,\dots,m-1)$$

və

$$x_0=a\,,\ x_1=a+h\,,\ \ \dots,\ x_m=a+mh$$

münasibətlərini nəzərə alsaq:

$$\int_a^b f(x)dx \approx hf\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+hf\left(x_1+\frac{h}{2}\right)+\dots+hf\left(x_{m-1}+\frac{h}{2}\right)=$$

$$= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + hf\left(x_0 + \frac{3h}{2}\right) + \cdots + hf\left(x_0 + \frac{(2m-1)h}{2}\right) =$$

$$= h \cdot \left[f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + \cdots + f\left(a + \frac{(2m-1)h}{2}\right)\right]$$

alarıq. Aldığımız bu düstur isə ümumiləşmiş düzbucaqlılar düsturudur.

Müəyyən inteqralların təqribi qiymətini hesablamaq üçün ümumiləşmiş düzbucaqlılar düsturunu tətbiq etdikdə, verilən inteqralın təqribi qiyməti ilə onun dəqiq qiyməti arasındakı xəta, ştrixlənmiş və sıx ştrixlənmiş (Şəkil 6) hissələrin sahələrinin fərqi qədər olur. Başqa sözlə, ümumiləşmiş düzbucaqlılar düsturu ilə inteqralı hesablayarkən itirilən (sıx ştrixlənmiş hissə) və qazanılan (ştrixlənmiş hissə) hissələrin sahələri demək olar ki, bir-birini konpensasiya edir. Bu isə üsulun xətasının kifayət qədər az olmasına səbəb olur.

Bu mühakimələrdən belə çıxır ki, ümumiləşmiş düzbucaqlılar düsturunun xətası sol və sağ düzbucaqlılar düsturlarının xətalarından az olduğu üçün müəyyən inteqralların təqribi qiymətinin hesablanması zamanı ümumiləşmiş düzbucaqlılar düsturundan istifadə etmək daha əlverişlidir.

İndi isə fərz edək ki, $n = 2$ $(k = 0)$. Burada $k = 0$ yazılışı, a və b nöqtələrinin özlərinin də düyün nöqtələri olmasını, $n = 2$ yazılışı isə, $[a, b]$ parçasında iki düyün nöqtəsinin olduğunu göstərir. Yəni $x_1 = a$, $x_2 = b$. Bu halda

$$L_1(x) = \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{x-b}{a-b} f(a).$$

Onda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_1(x)dx + R_2,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + R_2,$$

$$R_2 = \int_a^b (x-a)(x-b)f(x;a;b)dx = \frac{f''(\eta)}{2!}\int_a^b (x-a)(x-b)dx =$$

$$= -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \ \eta \in [a,b].$$

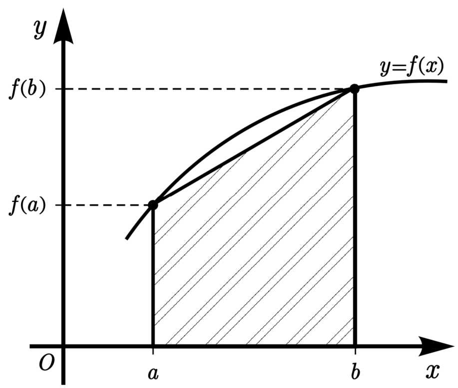
Beləliklə,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta). \qquad (3)$$

Buradan da

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].$$

Bu onu göstərir ki, $\int_a^b f(x)dx$ inteqralın təqribi qiyməti kimi trapesin sahəsi götürülür. Buna görə də (3) düsturuna sadə trapeslər düsturu deyirlər (Şəkil 9).



Şəkil 9.

Misal. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 6x + 9}$ inteqralını sadə trapeslər düsturu ilə hesablayın və alınan təqribi qiyməti dəqiq qiymətlə müqayisə edin.

Həlli: Əvvəlcə, sadə trapeslər düsturunun köməyi ilə verilən inteqralın təqribi qiymətini hesablayaq:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-6x+9} \approx \frac{1-0}{2}[f(0)+f(1)] = \frac{1}{2}\cdot[f(0)+f(1)] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{0^2-6\cdot 0+9} + \frac{1}{1^2-6\cdot 1+9}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\right] = \frac{13}{72} \approx 0{,}18\,.$$

İndi isə verilən inteqralın dəqiq qiymətini tapaq:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-6x+9} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-3)^2} = -\frac{1}{x-3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}\,.$$

Göründüyü kimi, verilən inteqralın təqribi qiyməti onun dəqiq qiymətindən $\frac{13}{72}-\frac{1}{6}=\frac{1}{72}\approx 0{,}014$ qədər fərqlənir. Bu xəta, sadə trapeslər düsturu üçün normal xəta hesab olunur.

Düzbucaqlılar düsturunda olduğu kimi, trapeslər düsturunda da, $b-a$ kafi qədər kiçik ədəd olmadıqda $[a\,,b]$ parçasını m bərabər hissəyə bölərək, alınan hər parça üçün bu düsturu tətbiq edirlər. Onda

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+\ldots+$$

$$+2f(a+(m-1)h)+f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12m^2}f''(\xi) \qquad [\xi\in(a,b)]$$

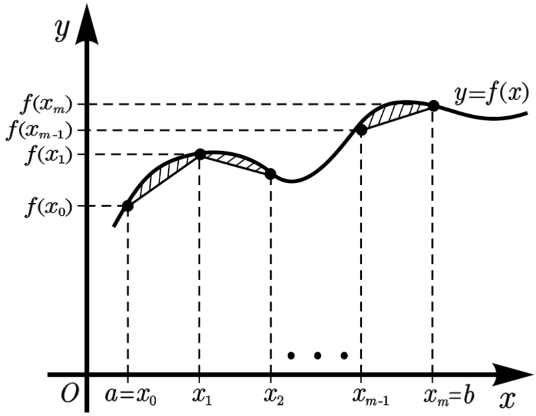
və ya

$$\int_a^b f(x)dx = h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+\right.$$

$$\left.+f(a+(m-1)h)\right] - \frac{(b-a)^3}{12m^2}M_3.$$

Burada $h=\dfrac{b-a}{m}$ və $M_3=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|$

Aldığımız sonuncu düstur, ümumiləşmiş trapeslər düsturu adlanır (Şəkil 10).



Şəkil 10.

Misal. $m = 5$ götürməklə, $\int_0^1 \frac{3x+5}{2x+4}dx$ inteqralını, ümumiləşmiş trapeslər düsturu ilə hesablayın.

Həlli: $m = 5$ olduğundan verilən inteqral üçün ümumiləşmiş trapeslər düsturu

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + ... + f(a+(5-1)h)\right] =$$

$$= h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + f(a+3h) + f(a+4h)\right]$$

kimi olar. Həmçinin, $m = 5$ olduğu üçün:

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{1-0}{5} = 0,2 .$$

İndi isə $f(x) = \frac{3x+5}{2x+4}$ funksiyasının

$$a = 0;$$
$$a + h = 0 + 0,2 = 0,2;$$
$$a + 2h = 0 + 2 \cdot 0,2 = 0,4;$$
$$a + 3h = 0 + 3 \cdot 0,2 = 0,6;$$
$$a + 4h = 0 + 4 \cdot 0,2 = 0,8$$

və

$$b = 1$$

nöqtələrindəki qiymətlərini hesablayaq:

$$f(0) = \frac{3 \cdot 0 + 5}{2 \cdot 0 + 4} = \frac{5}{4} \approx 1{,}25;$$

$$f(0{,}2) = \frac{3 \cdot 0{,}2 + 5}{2 \cdot 0{,}2 + 4} = \frac{14}{11} \approx 1{,}27;$$

$$f(0{,}4) = \frac{3 \cdot 0{,}4 + 5}{2 \cdot 0{,}4 + 4} = \frac{31}{24} \approx 1{,}29;$$

$$f(0{,}6) = \frac{3 \cdot 0{,}6 + 5}{2 \cdot 0{,}6 + 4} = \frac{17}{13} \approx 1{,}30;$$

$$f(0{,}8) = \frac{3 \cdot 0{,}8 + 5}{2 \cdot 0{,}8 + 4} = \frac{37}{28} \approx 1{,}32;$$

$$f(1) = \frac{3 \cdot 1 + 5}{2 \cdot 1 + 4} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33.$$

Bu qiymətləri ümumiləşmiş trapeslər düsturunda nəzərə alsaq:

$$\int_0^1 \frac{3x+5}{2x+4} dx \approx 0{,}2 \left[\frac{f(0) + f(1)}{2} + f(0{,}2) + f(0{,}4) + f(0{,}6) + f(0{,}8) \right] =$$

$$= 0{,}2 \cdot \left[\frac{1{,}25 + 1{,}33}{2} + 1{,}27 + 1{,}29 + 1{,}3 + 1{,}32 \right] = 0{,}2 \cdot 6{,}47 = 1{,}294 .$$

Artıq məlumdur ki, trapeslər düsturunda xəta

$$R_2 = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} M_3$$

kimi hesablanır. Burada $M_2 = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f''(x) \right|$. Deməli, xətanı qiymətləndirmək üçün, əvvəlcə verilən funksiyanın ikinci tərtib törəməsini və bu törəmənin $[0,1]$ parçasındakı maksimumunu tapmaq lazımdır. Onda

$$f'(x)=\left(\frac{3x+5}{2x+4}\right)'=\frac{2}{(2x+4)^2},$$

$$f''(x)=\left(\frac{2}{(2x+4)^2}\right)'=-\frac{16x+32}{(2x+4)^4}=-\frac{8(2x+4)}{(2x+4)^4}=-\frac{8}{(2x+4)^3},$$

$$M_3=\max_{0\le x\le 1}\left|f''(x)\right|=\max_{0\le x\le 1}\left|-\frac{8}{(2x+4)^3}\right|=\frac{1}{8}$$

olar.

Beləliklə,

$$R_2=-\frac{(1-0)^3}{12\cdot 5^2}\cdot\frac{1}{8}=-\frac{1}{300}\cdot\frac{1}{8}\approx -0{,}00042.$$

İndi də, ədədi inteqrallama trapeslər üsulunun həndəsi interpretasiyasını verək.

Trapeslər üsulu həndəsi olaraq, hündürlüyü $h=x_{i+1}-x_i$ $(i=0,1,2,\ldots,m-1)$, oturacaqları isə $f(x_i)$ $(i=0,1,2,\ldots,m)$ ədədlərinə bərabər olan düzbucaqlı trapeslərin sahələri cəmi kimi ifadə olunur (Şəkil 10). Doğrudan da, şəkil 10-a görə

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\cdot(x_1-x_0)+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\cdot(x_2-x_1)+\cdots+$$

$$+\frac{f(x_{m-2})+f(x_{m-1})}{2}\cdot(x_{m-1}-x_{m-2})+\frac{f(x_{m-1})+f(x_m)}{2}\cdot(x_m-x_{m-1})$$

yaza bilərik.

Sonuncu bərabərlikdə

$$h=x_{i+1}-x_i \quad (i=0,1,2,\ldots,m-1)$$

və

$$x_0=a,\ x_1=a+h,\ x_2=a+2h,\ \ldots,\ x_m=a+mh=b$$

münasibətlərini nəzərə alsaq:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_2)+\cdots+$$

$$+f(x_{m-1})+f(x_{m-1})+f(x_m)]=$$

$$=\frac{h}{2}\cdot[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{m-1})+f(x_m)]=$$

$$=h\cdot\left[\frac{f(x_0)+f(x_m)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{m-1})\right]=$$

$$=h\cdot\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(a+h)+\cdots+f(a+(m-1)h)\right]$$

alarıq. Bu isə ümumiləşmiş trapeslər düsturudur.

Müəyyən inteqralların təqribi qiymətinin tapılması üçün ümumiləşmiş trapeslər düsturunu tətbiq etdikdə, verilən inteqralın təqribi qiyməti, onun dəqiq qiymətindən ştrixlənmiş (Şəkil 10) sahələrin cəmi qədər az olur. Yəni bu halda xəta ştrixlənmiş sahələrin cəminə bərabər olur. Qeyd edək ki, ümumiləşmiş trapeslər düsturunda kifayət qədər çox sayda düyün nöqtələri götürməklə, meydana çıxan xətanı əhəmiyyətli dərəcədə azaltmaq olar.

Nəhayət, $n=3$ $(k=0)$ qəbul edək. Burada $k=0$ yazılışı, a və b nöqtələrinin özlərinin də düyün nöqtələri olmasını, $n=3$ yazılışı isə $[a,b]$ parçasında

$$x_1=a\,,\ \ x_2=\frac{a+b}{2}\,,\ x_3=b$$

kimi üç düyün nöqtəsinin olduğunu göstərir.

Bu halda a, $\frac{a+b}{2}$ və b düyün nöqtələri üçün parabolik Laqranj çoxhədlisi aşağıdakı kimi olar:

$$L_2(x)=\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}f(a)+$$

$$+\frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}f(b).$$

Onda

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b L_2(x)dx+R_3,$$

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]+R_3, \qquad (4)$$

$$R_3=\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)f\left(x;a;\frac{a+b}{2};b\right)dx. \qquad (5)$$

(4) düsturuna sadə Simpson düsturu deyirlər.

Misal. $\int_0^1 \frac{x^6+1}{x^2+1}dx$ inteqralını sadə Simpson düsturu ilə hesablayaraq alınan təqribi qiyməti dəqiq qiymətlə müqayisə edin.

Həlli: Əvvəlcə, verilən inteqralın dəqiq qiymətini tapaq:

$$\int_0^1 \frac{x^6+1}{x^2+1}dx=\int_0^1 \frac{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}{x^2+1}dx=\int_0^1 (x^4-x^2+1)\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+1=\frac{13}{15}.$$

İndi isə sadə Simpson düsturu vasitəsi ilə verilən inteqralın təqribi qiymətini hesablayaq:

$$\int_0^1 \frac{x^6+1}{x^2+1}dx\approx\frac{1-0}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{0+1}{2}\right)+f(1)\right]=\frac{1}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right]=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{0^6+1}{0^2+1}+4\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}+\frac{1^6+1}{1^2+1}\right]=\frac{1}{6}\cdot\left(1+4\cdot\frac{13}{16}+1\right)=\frac{7}{8}.$$

Deməli, verilən inteqralın təqribi qiyməti onun dəqiq qiymətindən $\frac{7}{8}-\frac{13}{15}=\frac{1}{120}\approx 0{,}0083$ qədər fərqlənir. Bu isə, sadə Simpson düsturu üçün böyük xəta hesab olunmur.

İndi isə Simpson düsturunun qalıq həddini hesablayaq. (5) düsturu vasitəsilə qalıq həddi sadələşdirmək mümkün deyil. Bu düstur üçün orta qiymət teoremini tətbiq etmək olmaz, çünki $(x-a)\left(x-\frac{a+a}{2}\right)(x-b)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında öz işarəsini saxlamır. Ona görədə Simpson düsturunun qalıq həddini hesablamaq üçün başqa üsuldan istifadə edək.

Elə üçdərəcəli $H_3(x)$ çoxhədlisi quraq ki, bu çoxhədlinin $a,\frac{a+b}{2},b$ nöqtələrindəki qiymətləri $f(x)$ funksiyasının uyğun qiymətləri ilə üst-üstə düşsün və

$$H_3'\left(\frac{a+b}{2}\right)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

bərabərliyi ödənsin. Tələb olunan $H_3(x)$ çoxhədlisini aşağıdakı şəkildə axtaraq:

$$H_3(x)=L_2(x)+K(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b),$$

burada $L_2(x)$ funksiyası $a,\frac{a+b}{2},b$ nöqtələri və $f(x)$ funksiyası üçün qurulmuş Laqranj çoxhədlisidir.

Aydındır ki,

$$H_3(a)=f(a),\;\; H_3\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right),\;\; H_3(b)=f(b).$$

Qeyd edək ki, K ədədi elə seçilir ki,

$$H_3'\left(\frac{a+b}{2}\right)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

şərti də ödənilsin.

Onda

$$\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)dx = 0$$

olduğundan

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b H_3(x)dx + R_3$$

yaza bilərik.

Beləliklə,

$$R_3 = \int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) f\left(x;\, a;\frac{a+b}{2};\frac{a+b}{2};b\right)dx\,.$$

İnteqrala orta qiymət haqda teoremi tətbiq edərək:

$$R_3 = \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_c^d (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{f^{(4)}(\eta)}{90}$$

olduğunu alarıq.

Aşkardır ki, burada $(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)$ vuruğu $[a,b]$ parçasında həmişə öz işarəsini saxlayır.

Düzbucaqlılar və trapeslər üsullarında olduğu kimi, burada da $b-a$ fərqi kifayət qədər kiçik olmadıqda, $[a,b]$ parçasını $2m$ bərabər hissəyə bölüb, hər kiçik parça üçün Simpson düsturunu tətbiq edərək:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m}[f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)+$$
$$+2f(a+4h)+...+4f(a+(2m-1)h)+f(a+2mh)]-$$
$$-\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{f^{(4)}(\eta)}{90m^4}$$

olduğunu alarıq.

Aldığımız sonuncu düstura ümumiləşmiş Simpson düsturu deyilir.

Qeyd edək ki, ümumiləşmiş Simpson düsturunun qalıq həddini

$$R_3 = -\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{f^{(4)}(\eta)}{90m^4} = -\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{M_4}{90m^4}$$

kimi də yazmaq olar. Burada $M_4 = \max\limits_{a \le x \le b} |f^{(4)}(x)|$.

Misal. $m = 5$ qəbul edərək, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ inteqralını ümumiləşmiş Simpson düsturu ilə hesablayın.

Həlli: Məsələnin şərtinə görə $m = 5$. Onda verilən inteqral üçün ümumiləşmiş Simpson düsturunu

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) +$$

$$+2f(a+4h) + ... + 4f(a+(2\cdot 5-1)h) + f(a+2\cdot 5\cdot h)] =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{b-a}{2m}[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) +$$

$$+2f(a+4h) + 4f(a+5h) + 2f(a+6h) + 4f(a+7h) +$$

$$+2f(a+8h) + 4f(a+9h) + f(a+10h)]$$

kimi yaza bilərik. Eyni zamanda $m = 5$ olması şərtindən $2m = 10$ və

$$h = \frac{b-a}{2m} = \frac{1-0}{10} = 0{,}1$$

alarıq.

İndi isə $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ funksiyasının

$$a = 0;$$

$$a + h = 0 + 0{,}1 = 0{,}1;$$

$$a + 2h = 0 + 2\cdot 0{,}1 = 0{,}2;$$

$$a + 3h = 0 + 3\cdot 0{,}1 = 0{,}3;$$

$$a + 4h = 0 + 4\cdot 0{,}1 = 0{,}4;$$

$$a + 5h = 0 + 5\cdot 0{,}1 = 0{,}5;$$

$$a+6h=0+6\cdot 0{,}1=0{,}6;$$
$$a+7h=0+7\cdot 0{,}1=0{,}7;$$
$$a+8h=0+8\cdot 0{,}1=0{,}8;$$
$$a+9h=0+9\cdot 0{,}1=0{,}9$$

və

$$b=a+10h=0+10\cdot 0{,}1=1$$

nöqtələrindəki qiymətlərini hesablayaq:

$$f(0)=\frac{1}{1+0^2}=1; \qquad f(0{,}1)=\frac{1}{1+0{,}1^2}\approx 0{,}99;$$
$$f(0{,}2)=\frac{1}{1+0{,}2^2}\approx 0{,}96; \qquad f(0{,}3)=\frac{1}{1+0{,}3^2}\approx 0{,}92;$$
$$f(0{,}4)=\frac{1}{1+0{,}4^2}\approx 0{,}86; \qquad f(0{,}5)=\frac{1}{1+0{,}5^2}\approx 0{,}80;$$
$$f(0{,}6)=\frac{1}{1+0{,}6^2}\approx 0{,}74; \qquad f(0{,}7)=\frac{1}{1+0{,}7^2}\approx 0{,}67;$$
$$f(0{,}8)=\frac{1}{1+0{,}8^2}\approx 0{,}61; \quad f(0{,}9)=\frac{1}{1+0{,}9^2}\approx 0{,}55;$$
$$f(1)=\frac{1}{1+1^2}\approx 0{,}5.$$

Aldığımız qiymətləri ümumiləşmiş Simpson düsturunda nəzərə alsaq:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\approx \frac{1}{3}\cdot 0{,}1\cdot[f(0)+4f(0{,}1)+2f(0{,}2)+4f(0{,}3)+2f(0{,}4)+$$
$$+4f(0{,}5)+2f(0{,}6)+4f(0{,}7)+2f(0{,}8)+4f(0{,}9)+f(1)]=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 0{,}1\cdot\{f(0)+4[f(0{,}1)+f(0{,}3)+f(0{,}5)+f(0{,}7)+f(0{,}9)]+$$
$$+2[f(0{,}2)+f(0{,}4)+f(0{,}6)+f(0{,}8)]+f(1)\}=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 0{,}1\cdot\{1+4[0{,}99+0{,}92+0{,}8+0{,}67+0{,}55]+$$
$$+2[0{,}96+0{,}86+0{,}74+0{,}61]+0{,}5\}=0{,}7853\,.$$

Artıq bilirik ki, Simpson düsturunda xəta

$$R_3 = -\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{M_4}{90m^4}$$

kimi hesablanır. Burada $M_4 = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right|$. Deməli, xətanı qiymətləndirmək üçün, verilən funksiyanın dördüncü tərtib törəməsini və bu törəmənin $[0,1]$ parçasındakı maksimumunu tapmaq lazımdır. Onda alarıq ki,

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2};$$

$$f''(x) = \left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)' = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3};$$

$$f'''(x) = \left(\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}\right)' = -\frac{24x(x^2-1)}{(1+x^2)^4};$$

$$f^{(4)}(x) = \left(-\frac{24x(x^2-1)}{(1+x^2)^4}\right)' = \frac{24(5x^4-10x^2+1)}{(1+x^2)^5};$$

$$M_4 = \max_{0 \le x \le 1} \left| f^{(4)}(x) \right| = \max_{0 \le x \le 1} \left| \frac{24(5x^4-10x^2+1)}{(1+x^2)^5} \right| = 24.$$

Deməli,

$$R_3 = -\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{M_4}{90m^4} = -\left(\frac{1-0}{2}\right)^5 \cdot \frac{24}{90 \cdot 5^4} \approx -0{,}0000133333.$$

Beləliklə,

$$|R_3| \approx 0{,}0000133333.$$

§3.3. Orta kvadratik yaxınlaşmalar

Bilirik ki, interpolyasiya məsələsinin həlli zamanı funksiya elə çoxhədli ilə əvəz olunur ki, bu çoxhədlinin düyün nöqtələrindəki qiymətləri ilə, verilmiş funksiyanın bu nöqtələrdəki qiymətləri üst-üstə düşsün. Lakin bir çox praktiki məsələlərdə belə interpolyasiya əlverişli olmur. Buna görə də verilmiş funksiya üçün elə çoxhədli qurulmalıdır ki, bu çoxhədli ilə verilən funksiyanın fərqi bütün parçada sıfra yaxın olsun, yəni minimum qiymət alsın.

Əvvəlcə ümumiləşmiş çoxhədli anlayışını daxil edək.

Tutaq ki, hər hansı $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş və xətti asılı olmayan $\{\varphi_i(x)\}$ $(i=0,1,2,\ldots,n)$ funksiyalar sistemi verilmişdir.

Qeyd edək ki, adətən, $\varphi_i(x)$ funksiyaları əvəzinə praktikada

$$\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=x,\ \varphi_2(x)=x^2,\ldots,\varphi_n(x)=x^n,\ldots$$

və ya

$$\varphi_0(x)=1,\ \ \varphi_1(x)=\sin x,\ \ \varphi_2(x)=\cos x,\ \ \varphi_3(x)=\sin 2x,$$
$$\varphi_4(x)=\cos 2x,\ldots,\ \varphi_{2n-1}(x)=\sin nx,\ \ \varphi_{2n}(x)=\cos nx\ldots$$

və ya

$$\varphi_0(x)=1,\ \ \varphi_1(x)=e^x,\ \ \varphi_2(x)=e^{2x},\ldots,\ \varphi_n(x)=e^{nx},\ldots$$

kimi funksiyalar sistemi götürürlər.

$\{\varphi_i(x)\}$ funksiyalar çoxluğundan $n+1$ sayda funksiya götürüb onların aşağıdakı xətti kombinasiyasına baxaq:

$$\Phi_n(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x).$$

Burada $c_0,c_1,\ldots,c_n$ həqiqi ədədlərdir. $\Phi_n(x)$ funksiyasına $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ sisteminə görə ümumiləşmiş çoxhədli deyilir.

Orta kvadratik yaxınlaşma məsələsi aşağıdakı kimi qoyulur.

$[a,b]$ parçasında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası üçün elə $\Phi_m(x)$ ümumiləşmiş çoxhədlisi qurmaq tələb olunur ki,

$$S=\int_a^b [f(x)-\Phi_m(x)]^2\,dx \qquad (1)$$

inteqralı və ya

$$I = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - \Phi_m(x_i)]^2 \qquad (2)$$

cəmi minimum qiymət alsın.

Fərz edək ki, $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası analitik şəkildə verilmişdir. $c_1, c_2, ..., c_m$ ədələrini elə seçək ki, (1) ifadəsi kifayət qədər kiçik olsun. Burada $c_1, c_2, ..., c_m$ ədələri

$$\Phi_m(x) = c_1\varphi_0(x) + ... + c_m\varphi_m(x) \qquad (3)$$

ümumiləşmiş çoxhədlisinin əmsalları, $\{\varphi_i(x)\}$ $(a \le x \le b)$ isə xətti asılı olmayan kəsilməz funksiyalar sistemidir.

$$J(c_1, c_2, ..., c_m) = \int_a^b [f(x) - \Phi_m(x)]^2 dx \qquad (4)$$

işarələnməsini aparaq. Aydındır ki,

$$\frac{\partial J(c_1, c_2, ..., c_m)}{\partial c_k} = -2\int_a^b [f(x) - \Phi_m(x)]\varphi_k(x)dx \quad (k = 0,1,...,m).$$

Onda c_i əmsallarını tapmaq üçün aşağıdakı xətti cəbri tənliklər sistemini alarıq:

$$\int_a^b [f(x) - \Phi_m(x)]\varphi_k(x)dx = 0 \quad (k = 0,1,...,m)$$

və ya

$$\sum_{i=0}^{n} c_i(\varphi_i, \varphi_k) = (f, \varphi_k) \quad (k = 0,1,2,...,m). \qquad (5)$$

Burada (φ_i, φ_k) və (f, φ_k) uyğun olaraq,

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)dx,$$

$$(f, \varphi_k) = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx$$

kimi skalyar hasillərdir.

Aydındır ki, $\{\varphi_i(x)\}$ funksiyalar sistemi xətti asılı olmayan sistem olduğundan, (5) sisteminin determinantı sıfırdan fərqli olar. Buna görə də (5) sisteminin yeganə həlli var.

Qeyd edək ki, $\{\varphi_i\}$ sistemi ortonormal sistem təşkil etdikdə, yəni

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$$

olduqda, (5) sisteminin həlli

$$c_k = (f, \varphi_k) \quad (k = 0,1,\dots,n)$$

düsturları ilə tapılır.

Aydındır ki, c_i əmsalları üçün tapdığımız bu qiymətləri (3) çoxhədlisində nəzərə alsaq, tapdığımız çoxhədli (4) funksiyasına minimum verəcək.

İndi isə bəzi xüsusi hallara baxaq. Fərz edək ki,

$$\varphi_i(x) = x^i \quad (i = 0,1,\dots,m).$$

Bu halda axtarılan

$$\Phi_m(x) = c_0 + c_1(x) + \dots + c_m x^m$$

çoxhədlisi m dərəcəli olar və bu çoxhədlinin əmsallarını

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i=0}^{m}\left(\int\limits_a^b x^i dx\right)c_i = \int\limits_a^b f(x)dx, \\ \sum\limits_{i=0}^{m}\left(\int\limits_a^b x^{i+1} dx\right)c_i = \int\limits_a^b xf(x)dx, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=0}^{m}\left(\int\limits_a^b x^{i+m} dx\right)c_i = \int\limits_a^b x^m f(x)dx \end{array}\right\}$$

sistemdən təyin emək olar.

İndi isə tutaq ki, $f(x)$ funksiyasının ən kiçik müsbət dövrü 2π -yə bərabərdir. Onda

$$a=0, \quad b=2\pi$$

və

$$\varphi_0(x)=1, \ \ \varphi_1(x)=\sin x, \ \ \varphi_2(x)=\cos x, \ \ \varphi_3(x)=\sin 2x,$$

$$\varphi_4(x)=\cos 2x,..., \ \ \varphi_{2k-1}(x)=\sin kx, \ \ \varphi_{2k}(x)=\cos kx$$

yaza bilərik.

Bu halda axtarılan çoxhədli

$$\Phi_m(x)=\sum_{i=0}^{n}(c_i\cos ix+d_i\sin ix)$$

şəklində triqonometrik çoxhədli olar və onun əmsallarını

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx, \quad c_i=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos ix\,dx, \ \ d_i=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin ix\,dx$$

düsturları vasitəsi ilə tapmaq olar.

Misal. Analitik şəkildə verilmiş $f(x)=|x|-x$, $x\in[-1,1]$ funksiyasından, ən az meyl edən birdərəcəli $\Phi_1(x)=c_0+c_1x$ çoxhədlisini qurun.

Həlli: Əvvəlcə, $\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x$ seçək. Onda (5) bərabərliyinə əsasən:

$$\begin{cases} c_0(\varphi_0,\varphi_0)+c_1(\varphi_0,\varphi_1)=(f,\varphi_0), \\ c_0(\varphi_1,\varphi_0)+c_1(\varphi_1,\varphi_1)=(f,\varphi_1) \end{cases} \qquad (5')$$

yaza bilərik. Sonra isə

$$(\varphi_i,\varphi_k)=\int_a^b\varphi_i(x)\varphi_k(x)dx$$

və

$$(f,\varphi_k)=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx$$

düsturlarından istifadə edərək, $i=0{,}1$ və $k=0{,}1$ qiymətləri üçün (φ_i,φ_k) və (f,φ_k) skalyar hasillərini hesablayaq:

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_{-1}^{1}dx=x\Big|_{-1}^{1}=1-(-1)=2\,;$$

$$(\varphi_0,\varphi_1)=\int_{-1}^{1}xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}=0\,;$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}=\frac{2}{3}\,;$$

$$(f,\varphi_0)=\int_{-1}^{1}(|\,x\,|-x)dx=-\int_{-1}^{0}xdx=-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}=-\left(\frac{0^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\,;$$

$$(f,\varphi_1)=\int_{-1}^{1}(|\,x\,|-x)\,xdx=-\int_{-1}^{0}x^2dx=-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0}=-\left(\frac{0^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right)=-\frac{1}{3}\,.$$

Alınan bu qiymətləri və $(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)$ olduğunu $(5')$ sistemində nəzərə alsaq:

$$\begin{cases}2\cdot c_0+0\cdot c_1=\dfrac{1}{2},\\[2mm] 0\cdot c_0+\dfrac{2}{3}\cdot c_1=-\dfrac{1}{3},\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}2\cdot c_0=\dfrac{1}{2},\\[2mm] \dfrac{2}{3}\cdot c_1=-\dfrac{1}{3},\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}c_0=\dfrac{1}{4},\\[2mm] c_1=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

olar.

Beləliklə, alırıq ki, $\Phi_1(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x$.

İndi isə fərz edək ki, $y=f(x)$ funksiyası, $x_0,x_1,...,x_n$ düyün nöqtələrindəki $y_i=f(x_i)$ $(i=0,1,2,\ldots,n)$ qiymətləri ilə verilmişdir. $c_1,c_2,...,c_m$ ədədlərini elə seçək ki, (2) ifadəsi kifayət qədər kiçik qiymət alsın. Bunun üçün

$$J(c_1,c_2,...,c_m)=\sum_{i=0}^{n}[f(x_i)-\Phi_m(x_i)]^2$$

funksiyasına minimum verən c_i əmsallarını aşağıdakı tənliklər sistemindən tapmaq lazımdır:

$$\frac{\partial J}{\partial c_k} = -2\sum_{i=0}^{n}[f(x_i) - \Phi_m(x_i)]\varphi_k(x_i) = 0,$$

$$\sum_{j=0}^{m} A_{jk} a_j = F_k \quad (k = 0,1,...,m), \tag{6}$$

burada

$$A_{jk} = \sum_{i=0}^{n} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i), \qquad F_k = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_k(x_i).$$

Aydındır ki, $\{\varphi_i(x)\}$ funksiyalar sistemi xətti asılı olmayan sistem olduğundan (5) sisteminin determinantı sıfırdan fərqli olar.

$\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \ \varphi_n(x)$ funksiyalar sistemi xətti asılı olmayan sistem olduğundan alırıq ki, (6) sisteminin determinantı sıfırdan fərqlidir. Buna görə də (6) sisteminin yeganə həlli var. Tapılan c_i-lərin bu qiymətlərini (3)-də yerinə yazsaq, axtarılan çoxhədlini tapmış olarıq.

İndi isə bəzi xüsusi hallara baxaq. Fərz edək ki,

$$\varphi_i(x) = x^i \quad (i = 0,1,...,m).$$

Bu halda axtarılan

$$\Phi_m(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_m x^m$$

çoxhədlisi m dərəcəli çoxhədli olar və onun əmsalları aşağıdakı sistemdən təyin edilər:

$$\left.\begin{aligned} a_0 c_0 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + ... + a_m c_m &= q_0, \\ a_1 c_0 + a_2 c_1 + a_3 c_2 + ... + a_{m+1} c_m &= q_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_m c_0 + a_{m+1} c_1 + a_{m+2} c_2 + ... + a_{2m} c_m &= q_m. \end{aligned}\right\}$$

Burada

$$a_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k \ \ (k = 0,1,...,2m), \quad q_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k f(x_i) \ \ (k = 0,1,...,m).$$

İndi isə fərz edək ki, $f(x)$ ən kiçik müsbət dövrü 2π -yə bərabər olan funksiyadır, $a=0$, $b=2\pi$, $m=2k+1$, $x_i=\dfrac{2\pi i}{n}$ $(i=0,1,...,n)$ və $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=\sin(x)$, $\varphi_2(x)=\cos x,...,$ $\varphi_{2k-1}(x)=\sin kx$, $\varphi_{2k}(x)=\cos kx$. Bu halda axtarılan çoxhədli

$$\Phi_m(x)=\sum_{i=0}^{k}(c_i\cos ix+d_i\sin ix)$$

kimi triqonometrik çoxhədli olar. Sonuncu çoxhədlinin əmsalları

$$c_0=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j),\quad c_i=\frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j)\cos ix_j,$$

$$d_i=\frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j)\sin ix_j\quad (i=1,2,...,m)$$

düsturları vasitəsi ilə təyin olunur.

Misal. Qiymətləri aşağıdakı cədvəllə verilmiş $y=f(x)$ funksiyasından ən az meyl edən birdərəcəli $\Phi_1(x)=c_0+c_1x$ çoxhədlisini qurun.

x_i	0	0,2	0,5
$f(x_i)$	1	0,7	0,3

Həlli: $\varphi_0(x)$ və $\varphi_1(x)$ funksiyalarını uyğun olaraq $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=x$ kimi seçək. (6) düsturlarından və funksiyanın cədvəldəki qiymətlərindən istifadə edərək, $i=0,1,2$ və $k=0,1$ qiymətləri üçün (φ_i,φ_k) və (f,φ_k) skalyar hasillərini hesablayaq:

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{2}\varphi_0(x)\varphi_0(x)=\sum_{i=0}^{2}(1\cdot 1)=3\,;$$

$$(\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{2}\varphi_0(x)\varphi_1(x)=\sum_{i=0}^{2}(1\cdot x_i)=0+0,2+0,5=0,7\,;$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{2}\varphi_1(x)\varphi_1(x)=\sum_{i=0}^{2}(x_i\cdot x_i)=0^2+0{,}2^2+0{,}5^2=0{,}29\,;$$

$$(f,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{2}\varphi_0(x)f(x_i)=\sum_{i=0}^{2}[1\cdot f(x_i)]=1+0{,}7+0{,}3=2\,;$$

$$(f,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{2}\varphi_1(x)f(x_i)=\sum_{i=0}^{2}[x\cdot f(x_i)]=0\cdot 1+0{,}2\cdot 0{,}7+0{,}5\cdot 0{,}3=0{,}29\,.$$

Alınan bu qiymətləri və $(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)$ münasibətini $(5')$ sistemində nəzərə alsaq:

$$\begin{cases}3\cdot c_0+0{,}7\cdot c_1=2,\\ 0{,}7\cdot c_0+0{,}29\cdot c_1=0{,}29,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}c_0=\dfrac{377}{380},\\ c_1=-\dfrac{53}{38}\end{cases}$$

olar.

Deməli, alırıq ki, $\Phi_1(x)=\dfrac{377}{380}-\dfrac{53}{38}x$.

§3.4. Qauss kvadratur düsturu

Bilirik ki, Nyuton-Kotes düsturları və onun xüsusi halları bir-birindən bərabər məsafədə yerləşən düyün nöqtələri üçün tətbiq olunur. Düyün nöqtələri üzərinə qoyulan bu məhdudiyyət isə həmin düsturların dəqiqliyinin azalmasına səbəb olur. Lakin elə kvadratur düsturlar var ki, bu düsturlar üçün düyün nöqtələri arasındakı məsafə müxtəlif ola bilər. Belə düsturlardan biri də Qauss kvadratur düsturudur.

Əvvəlcə, istifadə edəcəyimiz Lejandr çoxhədlisi haqqında bəzi məlumatları verək.

Aşağıdakı kimi qurulan çoxhədlyə Lejandr çoxhədlisi deyilir:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]\qquad(n=0,1,2,\ldots).$$

İndi isə Lejandr çoxhədlisinin əsas xassələrini qeyd edək:

1) $P_n(1)=1$, $P_n(-1)=(-1)^n$ $(n=0,1,2,\ldots)$;

2) $\int_{-1}^{1} P_n(x)\cdot Q_n(x)dx=0$, burada $Q_n(x)$, dərəcəsi n-dən kiçik olan k dərəcəli ixtiyari çoxhədlidir;

3) $P_n(x)$ Lejandr çoxhədlisi $(-1,1)$ intervalında n sayda müxtəlif həqiqi kökə malikdir.

Aşağıda ilk beş Lejandr çoxhədlisinin ifadəsi verilmişdir:

$$P_0(x)=1;$$

$$P_1(x)=x;$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1);$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x);$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

İndi də Qaussun kvadratur düsturunun çıxarılışına baxaq. Tutaq ki, $[-1,1]$ parçasında təyin olunmuş $y=f(t)$ funksiyası verilmişdir. Belə bir sual qoyulur: $t_1,t_2,\ldots,t_n$ nöqtələrini və $A_1,A_2,\ldots,A_n$ əmsallarını necə seçək ki,

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt=\sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i) \tag{1}$$

kvadratur düsturu dərəcəsi mümkün qədər yüksək olan bütün N dərəcəli $f(t)$ çoxhədliləri üçün dəqiq ödənsin? Göründüyü kimi, burada n sayda t_i dəyişənləri və n sayda A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ sabitləri iştirak edir. Düstura daxil olan $2n-1$ dərəcəli çoxhədli isə $2n$ sayda əmsallarla təyin olunur. Deməli, bu halda çoxhədlinin maksimal dərəcəsi $N=2n-1$ kimidir.

(1) düsturunun doğruluğu üçün zəruri və kafi şərt həmin düsturun

$$f(t)=1,\ t,\ t^2,\ldots,\ t^{2n-1}$$

funksiyaları üçün də doğru olmasıdır.

Doğrudan da,

$$\int_{-1}^{1} t^k\,dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k \quad (k = 0,1,2,\ldots,2n-1) \tag{2}$$

və

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t^k$$

qəbul etsək, alarıq ki,

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \int_{-1}^{1} t^k dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k = \sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t_i^k = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i).$$

Beləliklə,

$$\int_{-1}^{1} t^k dt = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} \dfrac{2}{k+1}, & k \text{ cüt ədəd olduqda,} \\ 0, & k \text{ tək ədəd olduqda} \end{cases}$$

münasibətini (1) bərabərliyində nəzərə alaraq, qoyulan məsələni həll etmək üçün tapılması tələb olunan t_i və A_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ kəmiyyətlərini aşağıdakı $2n$ sayda tənliklər sistemindən təyin edə bilərik:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} A_i = 2, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} A_i t_i = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-2} = \dfrac{2}{2n-1}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-1} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Göründüyü kimi, alınan (3) sistemi qeyri-xətti sistemdir və onun sadə üsullarla həlli böyük riyazi çətinliklər yarada bilər.

Ona görədə bu sistemi həll etmək üçün aşağıdakı kimi ənənəvi olmayan üsuldan istifadə etmək olar. İndi bu üsulla tanış olaq.

$$f(t) = t^k P_n(t) \quad (k = 0,1,2,\ldots,n-1)$$

şəklində verilən çoxhədlilərə baxaq. Burada $P_n(t)$ Lejandr çoxhədlisidir.

Aydındır ki, bu cür qurulan çoxhədlilərin dərəcəsi $(2n-1)$-i aşmır. Ona görə (3) sisteminə əsasən, bu çoxhədlilər üçün (1) düsturu ödənir və

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t)dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i) \quad (k = 0,1,2,\ldots,n-1). \qquad (4)$$

Digər tərəfdən də, Lejandr çoxhədlilərinin ortoqonallıq xassəsinə (xassə 2) görə

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t)dt = 0 \quad (k < n)$$

yaza bilərik.

Deməli,

$$\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i) = 0 \quad (k = 0,1,2,\ldots,n-1). \qquad (5)$$

Əgər (5) bərabərliyində

$$P_n(t_i) = 0 \quad (i = 0,1,2,\ldots,n) \qquad (6)$$

götürsək, onda bu bərabərlik A_i-lərin bütün qiymətləri üçün doğru olar. Yəni t_i nöqtələri üçün (1) kvadratur düsturunda kifayət qədər dəqiqlik əldə etmək üçün düsturdakı uyğun Lejandr çoxhədlisini sıfra çevirmək zəruridir.

Qeyd edək ki, t_i arqumentlərinin qiymətlərini bilməklə, (3) sisteminin ilk n sayda xətti tənliyindən A_i $(i = 0,1,2,\ldots,n)$ əmsallarını asanlıqla tapmaq olar. Bu sistemin determinantı

$$D = \prod_{i>j} (t_i - t_j) \neq 0$$

kimi Vandermond determinantıdır. Deməli, buradan A_i-ləri birqiymətli təyin edə bilərik.

(1) düsturuna Qaussun kvadratur düsturu deyilir. Burada t_i-lər, $P_n(t)$ Lejandr çoxhədlisinin sıfırları, A_i-lər isə (3) sistemi vasitəsi ilə təyin olunan əmsallardır.

İndi isə Qauss kvadratur düsturunun

$$\int_a^b f(x)dx$$

şəklindəki inteqralların hesablanmasına tətbiqinə baxaq. Burada

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

kimi əvəzləmə aparsaq:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt$$

alarıq.

(1) Qaussun kvadratur düsturunu sonuncu inteqrala tətbiq etsək:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \qquad (7)$$

yaza bilərik. Burada

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i \quad (i=1,2,\dots,n), \qquad (8)$$

t_i-lər isə $P_n(t)$ Lejandr çoxhədlisinin kökləridir. Yəni

$$P_n(t_i) = 0 \quad (i = 1,2,\dots,n).$$

Alınan (7) Qauss kvadratur düsturunun qalıq həddi aşağıdakı kimi tapılır:

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4 f^{(2n)}(\xi)}{[(2n)!]^3(2n+1)}, \quad \xi \in [a,b].$$

Buradan alırıq ki,

$$R_2=\frac{1}{135}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)\,;$$

$$R_3=\frac{1}{15750}\left(\frac{b-a}{2}\right)^7 f^{(6)}(\xi)\,;$$

$$R_4=\frac{1}{3472875}\left(\frac{b-a}{2}\right)^9 f^{(8)}(\xi)\,;$$

$$R_5=\frac{1}{1237732650}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{11} f^{(10)}(\xi)\,;$$

$$R_6=\frac{1}{648984486150}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{13} f^{(12)}(\xi) \text{ və s.}$$

Misal. $n=3$ qəbul edərək, $\int\limits_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{2+3x^2}dx$ inteqralını Qauss kvadratur düsturu ilə hesablayın.

Həlli: Əvvəlcə üç dərəcəli Lejandr çoxhədlisini yazaq:

$$P_3(t)=\frac{1}{2}(5t^3-3t)\,.$$

Buradan $\frac{1}{2}(5t^3-3t)=0$ yazaraq tapırıq ki,

$$t_1=-\sqrt{\frac{3}{5}}\,,\quad t_2=0\,,\quad t_3=\sqrt{\frac{3}{5}}\,.$$

Sonra isə (3) sistemindən istifadə edərək, A_1, A_2 və A_3 əmsallarını təyin edək:

$$\begin{cases} A_1+A_2+A_3=2 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}}A_1+\sqrt{\frac{3}{5}}A_3=0 \\ \frac{3}{5}A_1+\frac{3}{5}A_3=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Buradan

$$A_1 = A_3 = \frac{5}{9}, \ A_2 = \frac{8}{9}.$$

Artıq uyğun Qauss düsturunu yazaraq verilən inteqralı hesablaya bilərik:

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{1}{9}\left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{9}\left[5\cdot\frac{1+\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2}{2+3\cdot\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2} + 8\cdot\frac{1+0^2}{2+3\cdot 0^2} + 5\cdot\frac{1+\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2}{2+3\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{9}\left[5\cdot\frac{1+\frac{3}{5}}{2+\frac{9}{5}} + 8\cdot\frac{1}{2} + 5\cdot\frac{1+\frac{3}{5}}{2+\frac{9}{5}}\right] = \frac{9}{5}\cdot\frac{\frac{8}{5}}{\frac{19}{5}} + \frac{4}{9} + \frac{9}{5}\cdot\frac{\frac{8}{5}}{\frac{19}{5}} =$$

$$= \frac{180}{171} + \frac{4}{9} = \frac{52}{57} \approx 0{,}9123.$$

§3.5. Çebışev kvadratur düsturu

Aşağıdakı kimi kvadratur düstura baxaq:

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} B_i f(t_i), \qquad (1)$$

burada B_i -lər sabit əmsallardır.

Çebışev təklif etmişdir ki, (1) düsturunda t_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ arqumentlərini elə seçmək lazımdır ki, bu arqumentlər üçün aşağıdakı şərtlər ödənsin:

1) B_i kvadratur əmsalları bir-birinə bərabər olsun;
2) (1) kvadratur düsturu dərəcəsi n -i aşmayan istənilən çoxhədli üçün dəqiq ödənsin.

İndi isə bu şərtlər daxilində B_i əmsallarının və t_i arqumentlərinin necə seçilməsi məsələsini araşdıraq. Fərz edək ki,

$$B_1 = B_2 = B_3 = \cdots = B_n = B,$$

və $f(t) \equiv 1$. Onda

$$2 = \sum_{i=1}^{n} B_i$$

yaza bilərik. Alırıq ki, $B = \frac{2}{n}$.

B -nin tapdığımız qiymətini (1) düsturunda nəzərə alsaq:

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \qquad (2)$$

olar. (2) düsturuna Çebışev kvadratur düsturu deyilir.

Qeyd edək ki, t_i arqumentlərini təyin etmək üçün (2) düsturu

$$f(t) = t,\ t^2, t^3 \ldots,\ t^n$$

şəklindəki funksiyalar üçün 2) şərtini dəqiq ödəməlidir. Bu funksiyaları (2) düsturunda yerinə yazsaq t_i məchullarını təyin etmək üçün aşağıdakı tənliklər sistemini alarıq:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n = 0, \\ t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \cdots + t_n^2 = \dfrac{n}{3}, \\ t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 + \cdots + t_n^3 = 0, \\ t_1^4 + t_2^4 + t_3^4 + \cdots + t_n^4 = \dfrac{n}{5}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_1^n + t_2^n + t_3^n + \cdots + t_n^n = \dfrac{n[1-(-1)]^{n+1}}{2(n+1)}. \end{cases} \qquad (3)$$

Çebışev göstərmişdir ki, (3) sisteminin həlli n dərəcəli cəbri tənliyin həllərinin tapılmasına gətirilir.

Aşağıdakı cədvəldə $n = 2,3,\ldots,7$ qiymətləri üçün (3) sisteminin köklərinin qiymətləri verilmişdir:

n	i	t_i	n	i	t_i
2	1; 2	$\mp$0,577350	6	1; 6	$\mp$0,866247
3	1; 3	$\mp$0,707107		2; 5	$\mp$0,422519
	2	0		3; 4	$\mp$0,266635
4	1; 4	$\mp$0,794654	7	1; 7	$\mp$0,883862
	2; 3	$\mp$0,187592		2; 6	$\mp$0,529657
5	1; 5	$\mp$0,832498		3; 5	$\mp$0,323912
	2; 4	$\mp$0,374541		4	0
	3	0			

Qeyd edək ki, S.N. Bernşteyn göstərmişdir ki, $n = 8$ və $n \geq 10$ olduqda (3) sisteminin həqiqi həlli yoxdur. Bu isə Çebışev kvadratur düsturunun çatışmayan cəhətidir.

Misal. $n = 3$ qəbul edərək, Çebışev kvadratur düsturunu qurun.

Həlli: t_i $(i = 0,1,2,\ldots,n)$ məchullarını təyin etmək məqsədi ilə (3) münasibətlərindən istifadə etməklə aşağıdakı tənliklər sistemini yazaq:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 0, \\ t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1, \\ t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Köklər üçün aşağıdakı kimi simmetrik funksiyalar quraq:

$$C_1 = t_1 + t_2 + t_3,$$
$$C_2 = t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3,$$
$$C_3 = t_1 t_2 t_3.$$

Onda (4) sisteminə əsasən

$C_1 = 0;$

$$C_2 = \frac{1}{2}[(t_1 + t_2 + t_3)^2 - (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)] = \frac{1}{2}(0-1) = -\frac{1}{2};$$

$$C_3 = \frac{1}{6}[(t_1+t_2+t_3)^3 - 3(t_1+t_2+t_3)(t_1^2+t_2^2+t_3^2)+2(t_1^3+t_2^3+t_3^3)]=0$$

yaza bilərik. Buradan çıxır ki, t_i -lər

$$t^3 - C_1 t^2 + C_2 t - C_3 = 0$$

və ya

$$t^3 - \frac{1}{2}t = 0$$

köməkçi tənliklərinin kökləridir. Sonuncu tənliyi həll edərək tapırıq ki,

$$t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Beləliklə, alırıq ki,

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{2}{3}\left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

Bu isə axtarılan Çebışev kvadratur düsturudur.

Qeyd edək ki, Çebışev kvadratur düsturunu

$$\int_a^b f(x)dx$$

şəklində verilmiş inteqrala tətbiq etmək üçün bu inteqralı, $a \le x \le b$ parçasını, $-1 \le t \le 1$ parçasına köçürən

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

əvəzləməsi vasitəsi ilə çevirmək lazımdır. Daha sonra çevrilmiş inteqrala (2) Çebışev düsturunu tətbiq edərək

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad (5)$$

yazmaq olar. Burada

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i \quad (i = 1,2,\ldots,n) , \qquad (6)$$

t_i -lər isə (3) sisteminin həlləridir.

Misal. $n=5$ qəbul edərək Çebışev kvadratur düsturunun köməyi ilə

$$I=\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$$

inteqralını hesablayın.

Həlli: Əvvəlcə aşağıdakı işarələməni aparaq:

$$f(x)=\frac{x}{1+x}.$$

Onda

$$I=\frac{1}{5}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)]$$

yaza bilərik.

(6) düsturundan və yuxarıdakı cədvəldən istifadə etməklə alırıq ki,

$$x_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot(-0{,}8325)=0{,}08375;$$

$$x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot(-0{,}37454)=0{,}31273;$$

$$x_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 0=0{,}5;$$

$$x_4=1-x_2=0{,}68727;$$

$$x_5=1-x_1=0{,}91625.$$

Beləliklə, dəyişənlərin tapdığımız bu qiymətləri üçün funksiyanın uyğun qiymətləri aşağıdakı kimi olar:

$$f(x_1)=\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{0{,}08375}{1+0{,}08375}=0{,}0773;$$

$$f(x_2)=\frac{x_2}{1+x_2}=\frac{0{,}31273}{1+0{,}31273}=0{,}2382;$$

$$f(x_3)=\frac{x_3}{1+x_3}=\frac{0{,}5}{1+0{,}5}=0{,}3333;$$

$$f(x_4)=\frac{x_4}{1+x_4}=\frac{0{,}68727}{1+0{,}68727}=0{,}4073\,;$$

$$f(x_5)=\frac{x_5}{1+x_5}=\frac{0{,}91625}{1+0{,}91625}=0{,}4781\,.$$

Nəhayət, alırıq ki,

$$I=\frac{1}{5}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)]=$$

$$=\frac{1}{5}[0{,}0773+0{,}2382+0{,}3333+0{,}4073+0{,}4781]=$$

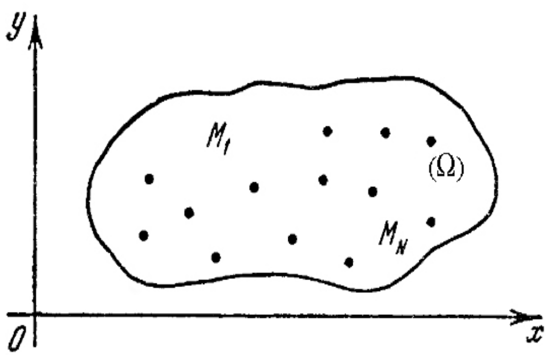
$$=0{,}3068\,.$$

§3.6. Kubatur düstur anlayışı

İkiqat inteqralların təqribi qiymətinin tapılması üçün kubatur düsturlardan istifadə olunur.

Tutaq ki, hər hansı Ω oblastında təyin olunmuş, kəsilməz $z=f(x,y)$ funksiyası verilmişdir.

Bu oblasta daxil olan $M_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\ldots,N)$ kimi nöqtələr sistemi götürək (Şəkil 11).



Şəkil 11.

$$\iint\limits_{(\Omega)} f(x,y)dxdy$$

ikiqat inteqralının ədədi qiymətini tapmaq üçün bu inteqral aşağıdakı cəmlə əvəz olunur:

$$\iint\limits_{(\Omega)} f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{N} A_i f(x_i, y_i)\,. \tag{1}$$

$A_i \;\; (i = 1,2,\ldots,N)$ əmsallarını tapmaq üçün (1) kubatur düsturu, dərəcəsi verilmiş n ədədini aşmayan bütün

$$P_n(x,y) = \sum_{k+l\le n} c_{kl} x^k y^l \tag{2}$$

çoxhədliləri üçün doğru olmalıdır. Yəni (1) düsturunun

$$x^k y^l \quad (k,l = 0,1,2,\ldots,n;\; k+l \le n)$$

qüvvətlərinin hasili üçün dəqiq olması həm zəruri, həm də kafidir. (1) kubatur düsturunda $f(x,y) = x^k y^l$ bərabərliyini nəzərə alsaq:

$$I_{kl} = \iint\limits_{(\Omega)} x^k y^l dxdy = \sum_{i=1}^{N} A_i x_i^k y_i^l \quad (k,l = 0,1,2,\ldots,n;\; k+l \le n) \tag{3}$$

alarıq.

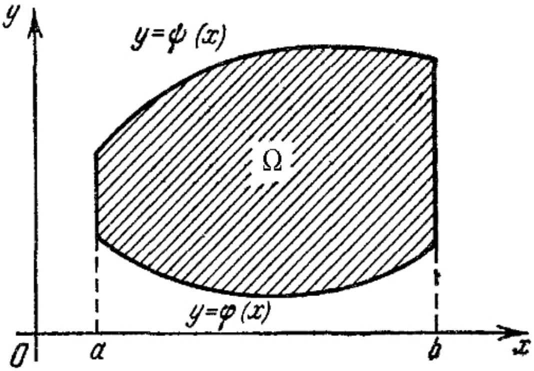
Beləliklə, (1) düsturundakı A_i əmsallarını, (3) xətti tənliklər sistemindən təyin edə bilərik.

Qeyd edək ki, (3) sistemi müəyyən sistem olmalı və bu sistemdəki dəyişənlərin sayı N, tənliklərin sayına bərabər olmalıdır.

İndi isə fərz edək ki, inteqrallama oblastı yuxarıdan və aşağıdan iki müxtəlif

$$y = \varphi(x)\,, \quad y = \psi(x) \qquad (\varphi(x) \le \psi(x))$$

əyriləri ilə, soldan və sağdan isə $x = a$ və $x = b$ xətləri ilə məhdudlaşmışdır (Şəkil 12).



Şəkil 12.

Riyazi analiz kursundan məlum olan qaydanı

$$I = \iint_{(\Omega)} f(x, y) dx dy \tag{4}$$

inteqralına tətbiq etsək, inteqrallama sərhədləri üçün

$$\iint_{(\Omega)} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

alarıq.

Tutaq ki,

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy . \tag{5}$$

Onda

$$\iint_{(\Omega)} f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx . \tag{6}$$

(6) bərabərliyinin sağ tərəfindəki birqat inteqrala kvadratur düsturlardan hər hansı birini tətbiq etsək:

$$\iint\limits_{(\Omega)} f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} A_i F(x_i) \qquad (7)$$

yaza bilərik. Burada x_i $(i=1,2,\ldots,n)$, $[a,b]$ parçasına daxil olan nöqtələr, A_i-lər isə hər hansı sabit əmsallardır. Öz növbəsində

$$F(x_i) = \int\limits_{\varphi(x_i)}^{\psi(x_i)} f(x_i, y)dy$$

qiymətlərini də kvadratur düsturların köməyi ilə aşağıdakı kimi tapa bilərik:

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{m_i} B_{ij} f(x_i, y_j).$$

Burada B_{ij}-lər uyğun sabit əmsallardır.

Nəhayət, sonuncu cəmi (7) düsturunda nəzərə alaraq

$$\iint\limits_{(\Omega)} f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} A_i B_{ij} f(x_i, y_j) \qquad (8)$$

yaza bilərik. Burada A_i və B_{ij}-lər məlum sabitlərdir.

§3.7. Simpson tipli kubatur düstur

Tutaq ki, inteqrallama oblastı tərəfləri koordinat oxlarına paralel olan düzbucaqlıdır. Bu düzbucaqlını

$$R\{a \le x \le A; b \le y \le B\}$$

kimi işarə edək.

$[a,A]$ və $[b,B]$ parçaları üzərində uyğun olaraq

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h = A$$

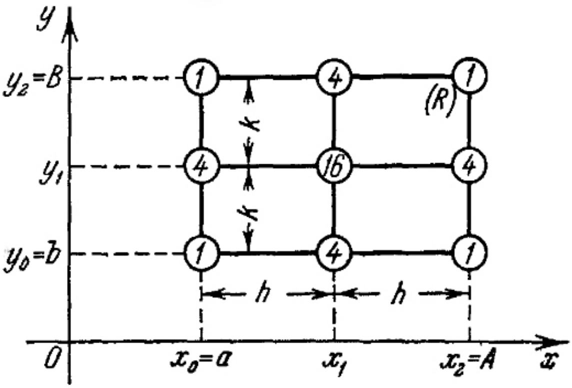
və

$$y_0 = b, \quad y_1 = b + k, \quad y_2 = b + 2k = B$$

nöqtələri götürək. Burada

$$h = \frac{A-a}{2}, \qquad k = \frac{B-b}{2}.$$

Aydındır ki, $x_0 = a$ nöqtəsi $[a, A]$ parçasının başlanğıc nöqtəsi, $x_1 = a + h$ orta nöqtəsi, $x_2 = a + 2h = A$ isə bu parçanın son nöqtəsi olar. Analoji olaraq, $y_0 = b$ nöqtəsi $[b, B]$ parçasının başlanğıcı, $y_1 = b + k$ orta nöqtəsi, $y_2 = b + 2k = B$ isə son nöqtəsi olar. Onda R düzbucaqlı oblastında doqquz ədəd (x_i, y_j) $(i, j = 0,1,2)$ nöqtələri alınar (Şəkil 13).



Şəkil 13.

Deməli,

$$\iint\limits_{(R)} f(x, y)dxdy = \int\limits_a^A dx \int\limits_b^B f(x, y)dy \qquad (1)$$

yaza bilərik.

Sonra isə Simpson kvadratur düsturunun köməyi ilə (1) bərabərliyindəki

$$\int\limits_b^B f(x, y)dy$$

inteqralını hesablayaraq

$$\iint\limits_{(R)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^A dx \cdot \frac{k}{3}[f(x,y_0)+4f(x,y_1)+f(x,y_2)] =$$

$$= \frac{k}{3}\left[\int\limits_a^A f(x,y_0)dx + 4\int\limits_a^A f(x,y_1)dx + \int\limits_a^A f(x,y_2)dx\right]$$

alarıq. Sonuncu bərabərlikdəki hər bir inteqrala yenidən Simpson kvadratur düsturunu tətbiq edərək

$$\iint\limits_{(R)} f(x,y)dxdy = \frac{hk}{9}\{[f(x_0,y_0)+4f(x_1,y_0)+f(x_2,y_0)]+$$

$$+4[f(x_0,y_1)+4f(x_1,y_1)+f(x_2,y_1)]+$$

$$+[f(x_0,y_2)+4f(x_1,y_2)+f(x_2,y_2)\}$$

və ya

$$\iint\limits_{(R)} f(x,y)dxdy = \frac{hk}{9}\{[f(x_0,y_0)+f(x_2,y_0)+f(x_0,y_2)+$$

$$+f(x_2,y_2)]+4[f(x_1,y_0)+f(x_0,y_1)+$$

$$+f(x_2,y_1)+f(x_1,y_2)]+16f(x_1,y_1)\} \tag{2}$$

yaza bilərik. Aldığımız (2) düsturu Simpson tipli kubatur düstur adlanır.

Simpson kubatur düsturunu nisbətən sadə formada aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\iint\limits_{(R)} f(x,y)dxdy = \frac{hk}{9}(\sigma_0 + 4\sigma_1 + 16\sigma_2)\,. \qquad (2')$$

Burada σ_0 ilə $f(x,y)$ inteqralaltı funksiyanın R düzbucaqlı oblastının təpə nöqtələrinə uyğun qiymətləri cəmi, σ_1 ilə bu funksiyanın R düzbucaqlı oblastının tərəflərinin orta nöqtələrindəki qiymətlərinin cəmi, σ_2 ilə isə $f(x,y)$ funksiyasının verilən düzbucaqlı oblastın mərkəzindəki nöqtəyə uyğun qiyməti, yəni $\sigma_2 = f(x_1, y_1)$ işarə olunmuşdur.

Misal. Simpson tipli kubatur düsturdan istifadə edərək

$$I = \int_1^{1,2} \int_3^{3,4} \frac{dxdy}{x\sqrt{y}}$$

ikiqat inteqralını hesablayın.

Həlli: Əvvəlcə, uyğun addımları təyin edək:

$$h = \frac{A-a}{2} = \frac{1,2-1}{2} = 0,1$$

və

$$k = \frac{B-b}{2} = \frac{3,4-3}{2} = 0,2 .$$

Onda alırıq ki,

$$x_0 = 1,\ \ x_1 = 1,1,\ \ x_2 = 1,2$$

və

$$y_0 = 3,\ \ y_1 = 3,2,\ \ y_2 = 3,4 .$$

İndi isə $f(x,y) = \dfrac{1}{x\sqrt{y}}$ inteqralaltı funksiyasının alınan bu nöqtələrdəki qiymətlərini hesablayaq:

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{x_0\sqrt{y_0}} = \frac{1}{1\cdot\sqrt{3}} = 0,57735;$$

$$f(x_0, y_1) = \frac{1}{x_0\sqrt{y_1}} = \frac{1}{1\cdot\sqrt{3,2}} = 0,559017;$$

$$f(x_0, y_2) = \frac{1}{x_0\sqrt{y_2}} = \frac{1}{1\cdot\sqrt{3,4}} = 0,542326;$$

$$f(x_1,y_0)=\frac{1}{x_1\sqrt{y_0}}=\frac{1}{1{,}1\cdot\sqrt{3}}=0{,}524863\,;$$

$$f(x_1,y_1)=\frac{1}{x_1\sqrt{y_1}}=\frac{1}{1{,}1\cdot\sqrt{3{,}2}}=0{,}508197\,;$$

$$f(x_1,y_2)=\frac{1}{x_1\sqrt{y_2}}=\frac{1}{1{,}1\cdot\sqrt{3{,}4}}=0{,}493024\,;$$

$$f(x_2,y_0)=\frac{1}{x_2\sqrt{y_0}}=\frac{1}{1{,}2\cdot\sqrt{3}}=0{,}481125\,;$$

$$f(x_2,y_1)=\frac{1}{x_2\sqrt{y_1}}=\frac{1}{1{,}2\cdot\sqrt{3{,}2}}=0{,}465847\,;$$

$$f(x_2,y_2)=\frac{1}{x_2\sqrt{y_2}}=\frac{1}{1{,}2\cdot\sqrt{3{,}4}}=0{,}451938\,.$$

Aldığımız qiymətləri (2) düsturunda nəzərə alsaq:

$$I=\int_1^{1,2}\int_3^{3,4}\frac{dxdy}{x\sqrt{y}}=\frac{0{,}1\cdot 0{,}2}{9}[(0{,}57735+0{,}481125+$$

$$+0{,}542326+0{,}451938)+4\cdot(0{,}524863+$$

$$+0{,}559017+0{,}465847+0{,}493024)+16\cdot 0{,}508197]=$$

$$=0{,}040788655$$

alırıq.

Deməli,

$$\int_1^{1,2}\int_3^{3,4}\frac{dxdy}{x\sqrt{y}}\approx 0{,}040788655\,.$$

Analitik üsulla verilən ikiqat inteqralın qiymətini hesablaya-raq tapırıq ki,

$$\int_{1}^{1,2}\int_{3}^{3,4}\frac{dxdy}{x\sqrt{y}}=[\ln(1,2)-\ln(1)]\cdot(2\sqrt{3,4}-2\sqrt{3})\approx$$

$$\approx 0,040788279.$$

Göründüyü kimi xəta

$$\Delta=\left|\,0,040788279-0,040788655\,\right|=0,000000376$$

kimidir.

ƏDƏBİYYAT

1. K. Atkinson, An Introduction to Numerical Analysis, 2nd ed., John Wiley, New York, 1993.
2. K. Atkinson, W. Han, Elementary Numerical Analysis, 3rd ed., John Wiley, New York, 2003.
3. M.Allen and E.Isaacson. Numerical Analysis for Applied Science, John Wiley, 1998, New York.
4. P. Davis and P. Rabinowitz. Methods of Numerical Integration, 2nd ed., Academic Press, New York.
5. A. Krommer and C. Ueberhuber. Computational Integration, SIAM, 1995, Philadelphia.
6. A.Quarteroni, R. Sacco, and F.Saleri. Numerical Mathematics, Springer-Verlag, 2000, New York.
7. A.Stroud and D.Secrest. Gaussian Quadrature Formulas, Prentice-Hall, 1966, Englewood Cliffs, New Jersey.
8. B.P. Demidovich, I.A. Maron, Computational mathematics, 3rd ed., "Mir publishers", Moscow, 1981.
9. A.Y. Əliyev, V.Ə. Piriverdiyev, Riyazi analizin təqribi hesablama üsulları, Bakı, Azərb. EA nəşriyyatı, 1993.
10. R. Kress, Numerical Analysis, Springer, New York, 1998.
11. Y.C. Məmmədov, Təqribi hesablama üsulları, Bakı, "Bakı Universiteti" nəşriyyatı, 2008.
12. Н.С. Бахвалов, Численные методы, т. I, "Наука", М., 1975.
13. И.С. Березин, Н.П. Жидков, Методы вычислений, т. I, изд. 3-е, "Наука", М., 1966.
14. В.В. Воеводин, Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы, "Наука", М., 1966.
15. Г.Н. Воробьева, А.Н. Данилова, Практикум по численным методам, "Высшая школа", 1990.
16. Б.П. Демидович, И.А.Марон, Э.З. Шувалова, Численные методы анализа, "Наука", 1968.

17. Л.В. Канторович, В.И. Крылов, Приближенного методы высшего анализа, М.; Л., 1962.
18. Н.В. Копченова, И.А. Марон, Вычислительная математика в примерах и задачах, Учебное пособие, 2-е изд., стер. – СПб.: Издательство “Лань”, 2008.
19. А.А. Самарский, Введение в численные методы, М., 1982.
20. А.А. Самарский, Теория разностных схем, “Наука”, М., 1977.

Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
QALİNA MEHDİYEVA

Fizika-riyaziyyat elmləri namizədi
ELVİN ƏZİZBƏYOV

ANALİZİN ƏDƏDİ ÜSULLARI

Nəşriyyat redaktoru: Suğra OSMANOVA
Texniki redaktor: Rauf KƏRİMOV
Bədii redaktor: Elnur ƏHMƏDOV
Səhifələyici: Fəxri VƏLİYEV

Yığılmağa verilmişdir: 22.12.2014.
Çapa imzalanmışdır: 29.12.2014.
Nəşrin ölçüsü: 60x90 1/16.
Fiziki çap vərəqi: 9,5.
Sifariş: 164/14. Sayı: 500 ədəd.
Müqavilə qiyməti ilə.

NURLAR
NƏŞRİYYAT-POLİQRAFİYA MƏRKƏZİ

Bakı, Az1122, Zərdabi pr. 78 / Tel: 4977021
Faks: 4971295 / E-poçtu: office@nurprint.com