МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ИНСТИТУТ ХОЛОДА И БИОТЕХНОЛОГИЙ

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРИМЕРАХ В ПАКЕТЕ MATHCAD 15

Часть I

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2014

УДК 512.11
ББК 22.1
Р 34

Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Ч. I: Учеб. пособие / И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков, С.В. Рыков, Е.Д. Скобов. – СПб.: НИУ ИТМО, ИХиБТ, 2014. – 166 с.

Пособие содержит сведения об аналитическом и основных численных методах одномерной оптимизации. Снабжено большим количеством примеров реализации оптимизационных задач в MathCAD 15.

Предназначено для самостоятельной работы студентов всех направлений очной и заочной форм обучения.

Рецензенты: кафедра общематематических и естественно-научных дисциплин Института бизнеса и права (**зав. кафедрой кандидат физ.-мат. наук, доц. Д.К. Потапов**), **кандидат техн. наук, доц. И.К. Пименов** (Санкт-Петербургский государственный морской технический университет)

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом Института холода и биотехнологий

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики».

ВВЕДЕНИЕ

При решении задач оптимизации могут использоваться как аналитические, так и численные методы.

При решении указанных задач редко удается воспользоваться аналитическими методами, так как аналитические решения возможны лишь в редких случаях при решении инженерных задач, когда оптимизируемые функции представлены в аналитической форме. Кроме того, математические модели часто задаются не в виде формул, а с помощью оператора и нахождения значений функций $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ осуществляют алгоритмически, путем вычисления по некоторому, например итерационному, алгоритму. В этом случае применение аналитических методов невозможно.

Численные методы оптимизации многообразны и их можно классифицировать следующим образом:

- Методы направленного поиска экстремума.
- Методы случайного поиска экстремума.

Остановимся на методах направленного поиска экстремума. Среди них можно выделить следующие виды:

- Методы нулевого порядка, или методы поиска. Эти методы требуют для своей реализации только вычисления значений функции.
- Методы первого порядка, или градиентные методы. Данные методы требуют для своей реализации вычисления значений функции и ее первых производных.
- Методы второго порядка, или методы Ньютона. Указанные методы требуют для реализации дополнительной информации о вторых производных.

Необходимо отметить, что при численном вычислении производных с помощью конечных разностей все эти методы можно трактовать как методы поиска.

Суть численных алгоритмов оптимизации при отыскании минимума функции $f(x)$ состоит в построении минимизирующей последовательности:

$$x_{k+1} = x_k + a_k p_k, \ x_0 = x^0, \ k = 0,1...,$$

где x^0 – начальные значения; p_k – направление поиска минимума на k-м шаге; a_k – величина шага в указанном направлении. Если для всех k выполняется условие $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ и минимум функции существует, то последовательность значений $x_{k+1}, k = \overline{0,1}$ сходится к решению задачи минимизации $\min\limits_{x \to \infty} \to x^*$. На практике добиваются достаточно малой заданной величины разницы между значениями аргументов и (или) значений функций на двух последовательных итерациях.

Суть всех численных методов минимизации состоит в способах выбора вектора направления минимизации $\overline{p_k}$ и величины шага в этом направлении.

Задача нахождения максимума или минимума функции:

$$\max_x f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*);$$

$$\min_x f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*),$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ – переменные исследуемой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$; $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ – значения переменных, при которых функция достигает экстремума (максимума или минимума) при выполнении следующих ограничений:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0; \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0; \\ \dots \\ g_n(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0. \end{cases}$$

Если хотя бы одна из функций $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = \overline{1, n}$ – нелинейная (в том числе не дифференцируемая, например дискретная), называется задачей нелинейного программирования. Более коротко она записывается как

$$f(x) \to \max_{x \subset g(x)}, \ f(x) \to \min_{x \subset g(x)}.$$

В случае, когда функция и все ограничения линейны, то это задача линейного программирования:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max_x, \ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min_x$$

при условии

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} c_{i1} x_i \le b_1; \\ \sum\limits_{i=2}^{n} c_{i2} x_i \le b_2; \\ \ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_{in} x_i \le b_n, \end{cases}$$

где $b_i, c_i = \overline{1, n}$ – константы.

Если ограничения на переменные $x_i, i = \overline{1, n}$ отсутствуют, рассматривается задача безусловной оптимизации функции. Решение данной задачи является основой для решения более общей задачи нелинейного программирования. Задачи линейного программирования составляют особый класс задач, и для них разработаны специальные методы.

Задача оптимизации, в которой целевая функция задана функцией одной переменной, относится к наиболее простому типу оптимизационных задач. Тем не менее, анализ задач такого типа занимает центральное место в оптимизационных исследованиях как теоретической, так и практической направленности. Это связано не только с тем, что именно такие задачи обычно решаются в инженерной практике, но и с тем, что одномерные методы оптимизации часто используются для анализа подзадач, которые возникают при реализации итеративных процедур, ориентированных на решение многомерных задач оптимизации.

В данном пособии рассмотрены основные методы и алгоритмы одномерной оптимизации.

1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ

1.1. Свойства функций одной переменной

В теории оптимизации функция $f(x)$, описывающая некоторый процесс на множестве $S \subset R$, где S – область допустимых значений x множества R, называется целевой функцией.

Ряд физических процессов можно описать с помощью *непрерывных функций*, т. е. функций, которые обладают свойством непрерывности в каждой точке x_i, принадлежащей областям их определения.

Функция $f(x)$ является *монотонной* (как при возрастании, так и при убывании), если для двух произвольных точек x_1 и x_2 таких, что $x_1 \leq x_2$, выполняется одно из следующих неравенств: $f(x_1) \leq f(x_2)$ (монотонно возрастающая функция) или $f(x_1) \geq f(x_2)$ (монотонно убывающая функция).

Функция $f(x)$ является *унимодальной* на отрезке $a \leq x \leq b$ в том и только в том случае, если она монотонна по обе стороны от единственной на рассматриваемом интервале оптимальной точки $x*$. Другими словами, если $x*$ – единственная точка минимума $f(x)$ на отрезке $a \leq x \leq b$, то $f(x)$ оказывается унимодальной на данном интервале тогда и только тогда, когда для точек x_1 и x_2:

из $x^* \leq x_1 \leq x_2$ следует, что $f(x^*) \leq f(x_1) \leq f(x_2)$;

из $x^* \geq x_1 \geq x_2$ следует, что $f(x^*) \geq f(x_1) \geq f(x_2)$.

Унимодальная функция необязательно должна быть непрерывной. *Унимодальность* функций является исключительно важным свойством, которое широко используется в оптимизационных исследованиях.

При анализе оптимизационных задач, как правило, возникают два общих вопроса.

1. Вопрос анализа «в статике». Как определить, представляет ли данная точка $x*$ оптимальное решение задачи?

2. Вопрос анализа «в динамике». Если x не является точкой оптимума, то какая последовательность действий приведет к оптимальной точке $x*$?

1.2. Критерии оптимальности

Функция $f(x)$, определенная на множестве S, достигает своего *глобального минимума* в точке $x^* \in S$ в том и только в том случае, если $f(x^*) \le f(x)$ для всех $x \in S$.

Функция $f(x)$, определенная на множестве S, имеет *локальный минимум* (*относительный минимум*) в точке $x^* \in S$ в том и только в том случае, если $f(x^*) \le f(x)$ для всех x, удаленных от x^* на расстояние, меньшее ε, т. е. если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x^*| < \varepsilon$, выполняется неравенство

$$f(x^*) \le f(x).$$

В случае, если функция обладает свойством унимодальности, то локальный минимум автоматически является глобальным минимумом.

Если функция не является унимодальной, то возможно наличие нескольких локальных оптимумов; при этом глобальный минимум можно определить путем нахождения всех локальных оптимумов и выбора наименьшего из них.

1.3. Идентификация стационарных точек

Стационарной точкой x^* называется точка, в которой

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x^*} = 0.$$

Точка x^* называется критической, если производная $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x^*} = 0$ функции $f(x)$ или производная данной функции не существуют.

Необходимые условия для того, чтобы точка x^* являлась точкой локального экстремума дважды дифференцируемой функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, выражаются соотношениями:

1. $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x^*} = 0$;

2. $\left.\dfrac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x*} \geq 0$ – для минимума, $\left.\dfrac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x*} \leq 0$ – для максимума.

Ниже приведены условия, *достаточные* для того, чтобы точка $x*$ являлась стационарной точкой дважды дифференцируемой функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$.

Пусть в точке $x*$ первые $(n-1)$ производные функции обращаются в ноль, а производная порядка n отлична от ноля.

1. Если n – нечетное, то $x*$ – точка перегиба.

2. Если n – четное, то $x*$ – точка локального оптимума:

2.1. Если производная положительная, то $x*$ – точка локального минимума.

2.2. Если производная отрицательная, то $x*$ – точка локального максимума.

Необходимые и достаточные условия доказываются с помощью разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности ε точки $x*$:

$$f(x+\varepsilon)-f(x)=(\varepsilon)\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x^*}+\frac{(\varepsilon^2)}{2!}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x^*}+\ldots+$$

$$+\frac{(\varepsilon^n)}{n!}\left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x=x^*}+0_{n+1}(\varepsilon).$$

1.4. Выпуклые множества

Множество S называется выпуклым, если все точки прямой, соединяющей любые две точки множества, принадлежат данному множеству.

Более формально S – выпуклое множество, если для любых двух векторов $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ из S вектор $x=\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}$ также принадлежит S при любых значениях λ, заключенных в пределах от ноля до единицы.

Свойства выпуклого множества:

1. Множество всех допустимых решений задачи линейного программирования является выпуклым.

2. Пересечение выпуклых множеств есть выпуклое множество.

3. Объединение выпуклых множеств не всегда является выпуклым множеством.

4. Гиперплоскость является выпуклым множеством. Гиперплоскостью называется множество всех точек x, удовлетворяющих равенству $cx = z$ при заданном векторе $c \neq 0$ и заданной скалярной величине z. Вектор c носит название нормали к гиперплоскости. Например, множество $H = \{(x_1, x_2, x_3) | 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5\}$ представляет собой гиперплоскость.

5. Полупространство является выпуклым множеством. Полупространством называется множество всех точек x, удовлетворяющих неравенству $c \cdot x \leq z$ или неравенству $c \cdot x \geq z$ при заданном векторе $c \neq 0$ и заданной скалярной величине z.

1.5. Вогнутые и выпуклые функции

Определение унимодальной функции не позволяет непосредственно проверить является ли функция унимодальной. В теории оптимизации выделяется класс унимодальных функций, а именно – класс *выпуклых* и *вогнутых* функций, которые допускают проверку такого рода.

Функция n переменных $f(x)$, определенная на выпуклом множестве D, называется выпуклой функцией тогда и только тогда, когда для любых двух точек $x^{(1)}$ и $x^{(2)} \in D$ и $0 \leq \lambda \leq 1$ выполняется неравенство $f\left[\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda) x^{(2)}\right] \leq \lambda f\left(x^{(1)}\right) + (1 - \lambda) f\left(x^{(2)}\right)$.

На рис. 1.1 представлена графическая иллюстрация определения выпуклой функции для случая одной переменной.

Свойства выпуклых функций:

1. Хорда, соединяющая две любые точки графика выпуклой функции, всегда проходит над (или выше) кривой в интервале между двумя этими точками.

2. Тангенс угла наклона касательной, или первая производная $f(x)$, возрастает или, по крайней мере, не убывает при увеличении x.

3. Вторая производная $f(x)$ всегда не отрицательна на рассматриваемом интервале.

4. Линейная аппроксимация $f(x)$ в любой точке интервала всегда позволяет получить нижнюю оценку истинного значения функции (рис. 1.2). Линейная аппроксимация функции $f(x)$ в точке x^0

строится путем исключения членов второго порядка и более высокого порядка из разложения функции в ряд Тейлора: $\tilde{f}(x;x^0) \cong f(x^0) + \nabla f(x^0)(x - x^0)$. Таким образом, для всех x верно следующее неравенство: $f(x) \geq f(x^0) + \nabla f(x^0)(x - x^0)$.

5. Для выпуклой функции локальный минимум всегда является глобальным минимумом.

Функция $f(x)$ является вогнутой функцией на множестве D тогда и только тогда, когда $f(x)$ – выпуклая функция.

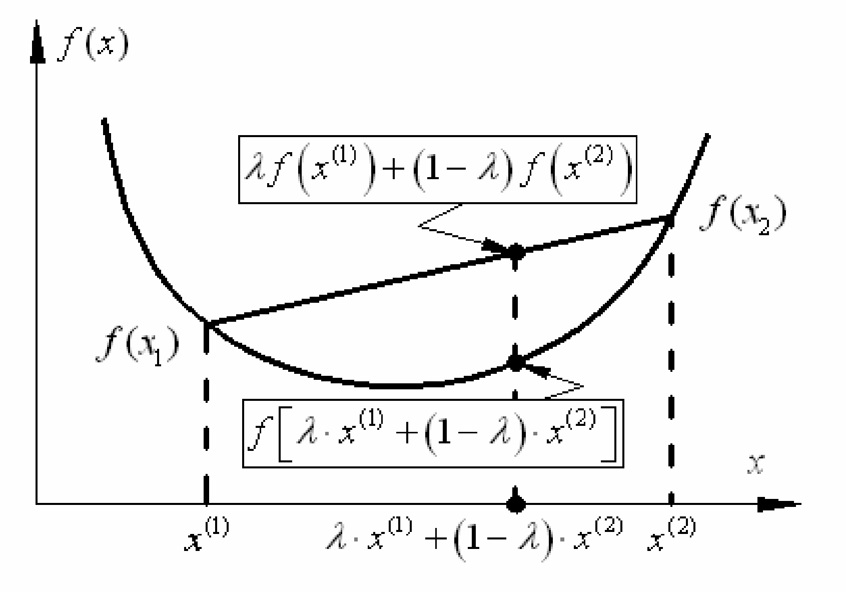


Рис. 1.1. Выпуклая функция

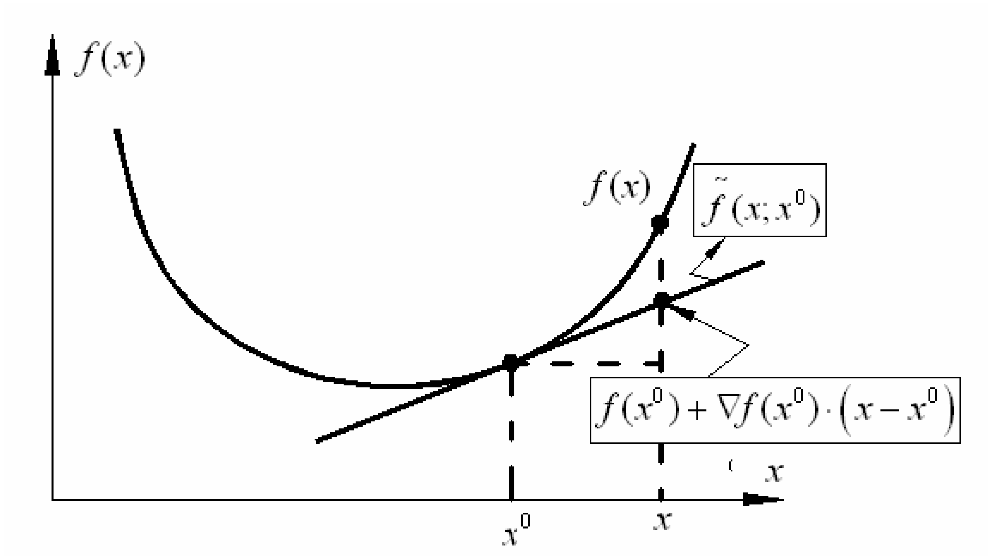


Рис. 1.2. Линейная аппроксимация выпуклой функции

1.6. Максимизация (минимизация) функции при ограничении

Необходимо максимизировать функцию $f(x)$ при ограничении $a \le x \le b$, где a и b – границы изменения значений переменной x. Так как функция исследуется на заданном интервале, проверку наличия локального оптимума необходимо проводить не только в стационарных точках, но и в граничных точках интервала.

Последовательность действий

1. Приравнять $df/dx = 0$ и найти все стационарные точки.

2. Выбрать все стационарные точки, расположенные в интервале $[a, b]$ и точки a и b на границах интервала.

3. Найти наибольшее значение функции в точках, определенных в п. 2. Данное значение соответствует глобальному максимуму.

Для поиска глобального минимума алгоритм остается тем же, но в п. 3 находится минимум функции.

1.7. Практические примеры

Пример 1.1. Исследовать функцию

$$f(x) = 5x^6 - 36x^5 + \frac{165}{2}x^4 - 60x^3 + 36,$$

определенную на всей оси. Найти стационарные точки и классифицировать их.

Ход решения.

Первая производная исследуемой функции

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = 30x^5 - 180x^4 + 330x^3 - 180x^2 = 30x^2(x-1)(x-2)(x-3).$$

Первая производная обращается в ноль в точках: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, следовательно, эти точки можно классифицировать как стационарные.

Вторая производная функции равна

$$\frac{d^2\,f(x)}{dx^2} = 150x^4 - 720x^3 + 990x^2 - 360x.$$

Значения функции и второй производной в стационарных точках приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Значения функции и второй производной в стационарных точках

Стационарные точки x	Функция $f(x)$	Вторая производная $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$
0	36	0
1	27,5	60
2	44	–120
3	5,5	540

Из табл. 1.1 следует вывод, что $x_1 = 1$, $x_3 = 3$ – точки локальных минимумов, а $x_2 = 2$ – точка локального максимума.

Чтобы идентифицировать точку $x_0 = 0$, вычислим третью производную:

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \left(600x^3 - 2160x^2 + 1980x - 360\right)\Big|_{x=0} = -360.$$

Так как данная производная отлична от ноля и имеет нечетный порядок, то точка $x_0 = 0$ является не точкой оптимума, а точкой перегиба.

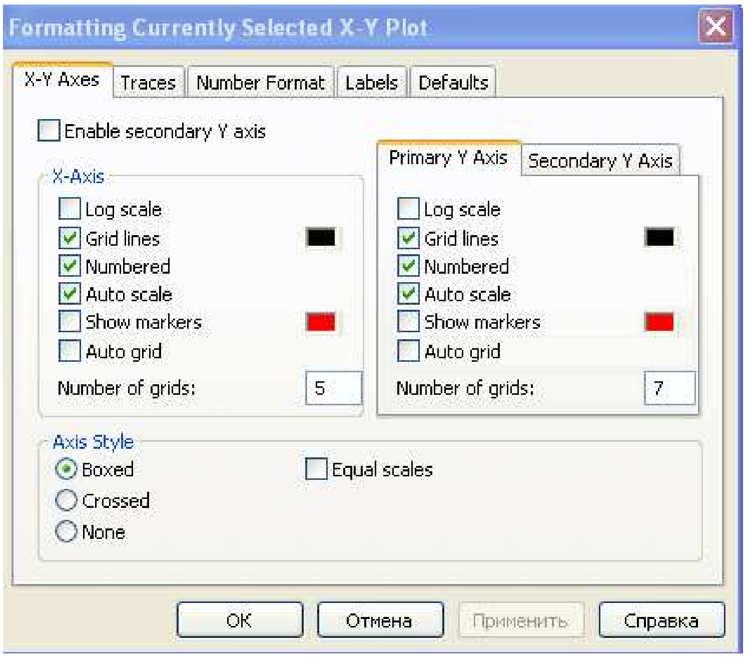
Листинг программы в пакете MathCAD 15 приведен в прил. А – рис. А 1.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD 15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Размещение переменных в сопроводительном тексте.
- Просмотр результатов расчета и редактирование числа выводимых десятичных знаков.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Символьное решение уравнения.
- Операции с матрицами, доступ к элементам матрицы.
- Решение уравнения с помощью функции root(f, x).
- Векторизация.
- Комплексные переменные.
- Символьное и численное дифференцирование выражений.
- Символьное разложение на множители.

- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых.

Для получения графика в виде, приведенном на листинге программы, необходимо настроить вкладки диалогового окна (вызывается двойным щелчком мышки на графике) **Formatting Currently Selected X–Y Plot**, как показано на рис. 1.3–1.7.



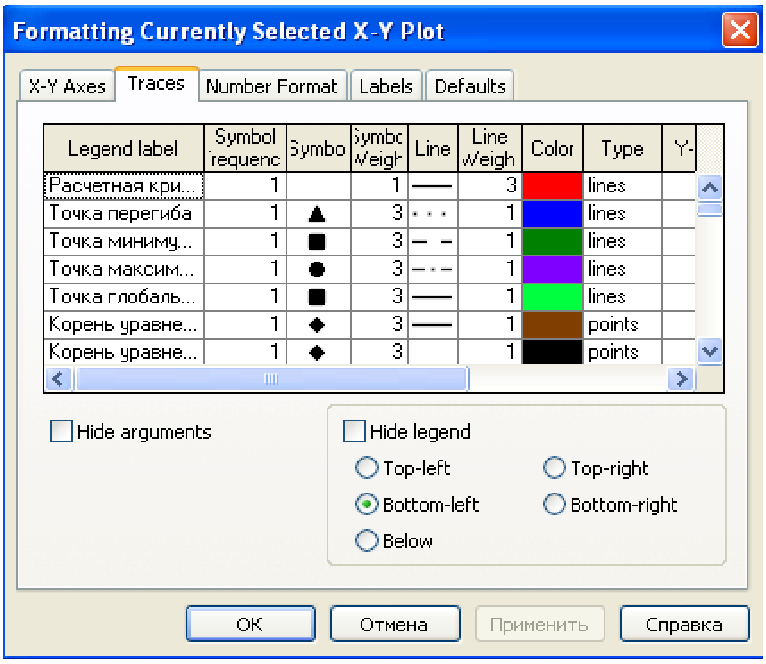
☐ Enable secondary Y axis

X-Axis
☐ Log scale
☑ Grid lines ■
☑ Numbered
☑ Auto scale
☐ Show markers 🟥
☐ Auto grid
Number of grids: 5

Primary Y Axis | Secondary Y Axis
☐ Log scale
☑ Grid lines ■
☑ Numbered
☑ Auto scale
☐ Show markers 🟥
☐ Auto grid
Number of grids: 7

Axis Style
● Boxed
○ Crossed
○ None
☐ Equal scales

Рис. 1.3. Настройка вкладки X–Y Axes (пример 1.1)

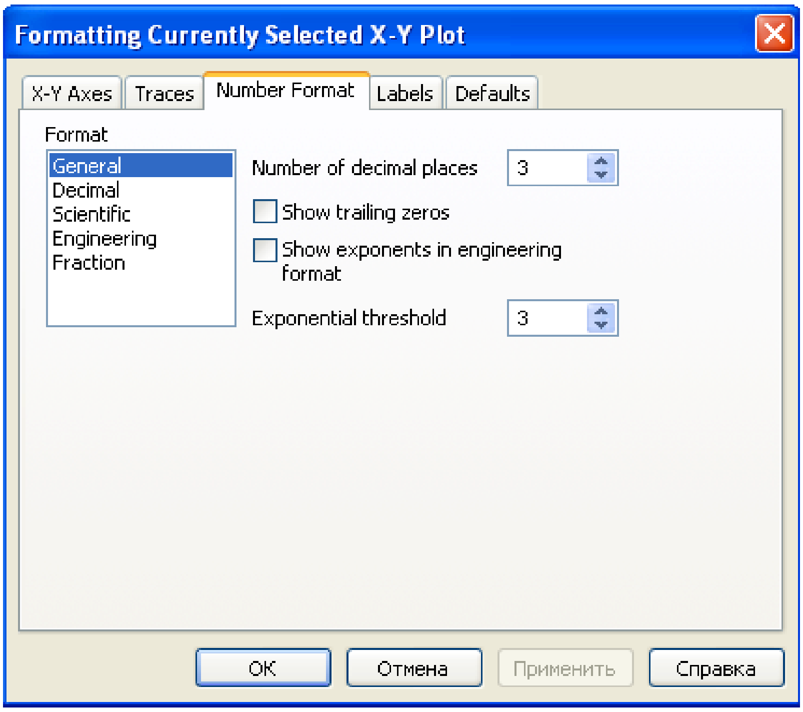


Legend label	Symbol requenc	Symbo	Symbc Weigh	Line	Line Weigh	Color	Type	Y-
Расчетная кри...	1		1	——	3	🟥	lines	
Точка перегиба	1	▲	3	· · ·	1	🟦	lines	
Точка минимму...	1	■	3	– –	1	🟩	lines	
Точка максим...	1	●	3	–·–	1	🟪	lines	
Точка глобаль...	1	■	3	——	1	🟩	lines	
Корень уравне...	1	◆	3	——	1	🟫	points	
Корень уравне...	1	◆	3		1	⬛	points	

☐ Hide arguments

☐ Hide legend
○ Top-left
○ Top-right
● Bottom-left
○ Bottom-right
○ Below

Рис. 1.4. Настройка вкладки Traces (пример 1.1)



Format
General
Decimal
Scientific
Engineering
Fraction

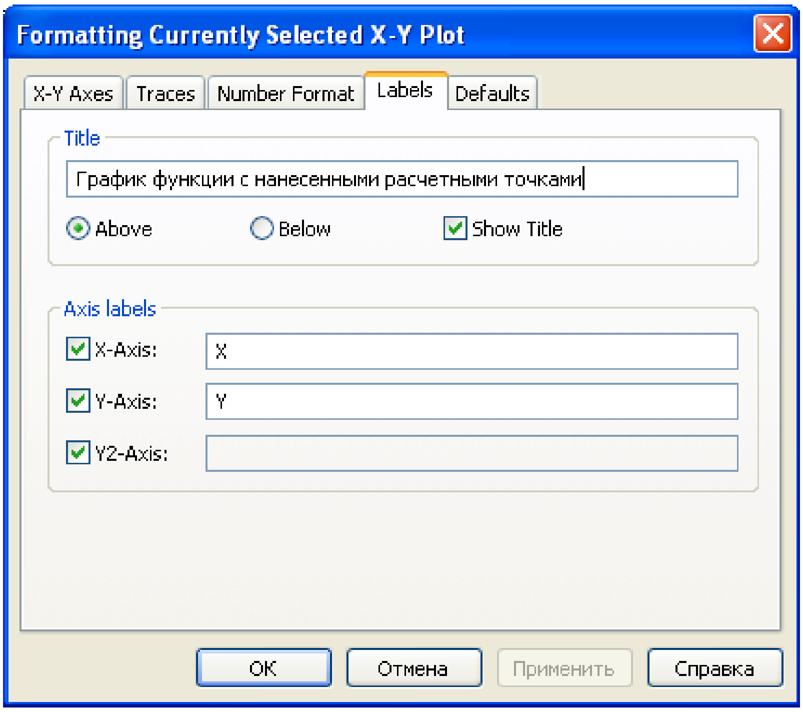
Number of decimal places 3

☐ Show trailing zeros

☐ Show exponents in engineering format

Exponential threshold 3

Рис. 1.5. Настройка вкладки Number Format (пример 1.1)



Title

График функции с нанесенными расчетными точками

● Above ○ Below ☑ Show Title

Axis labels

☑ X-Axis: X

☑ Y-Axis: Y

☑ Y2-Axis:

Рис. 1.6. Настройка вкладки Labels (пример 1.1)

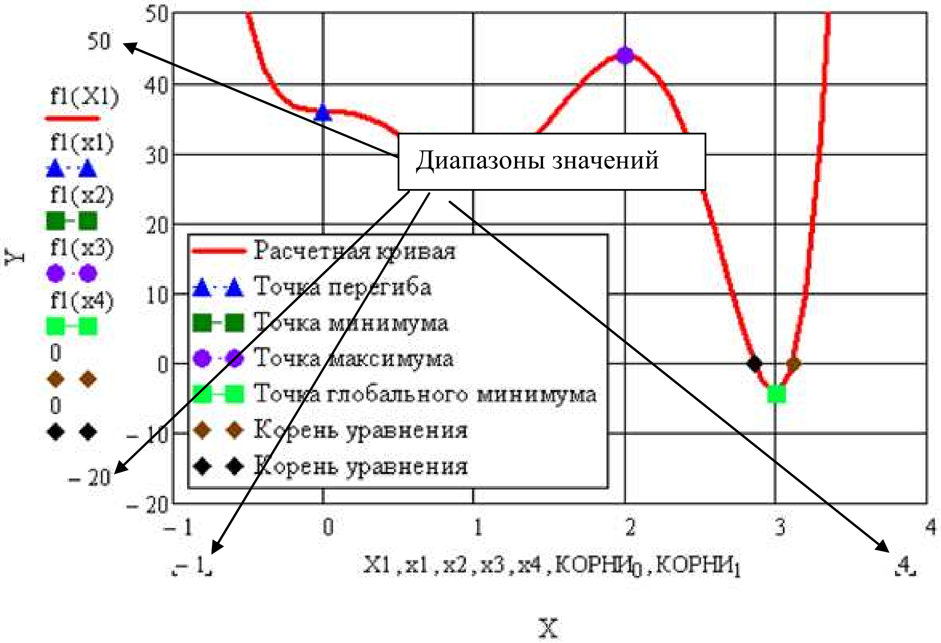


Рис. 1.7. Редактирование диапазонов выводимых значений на графике (пример 1.1)

Пример 1.2. Идентифицировать стационарную точку функции $f(x)=e^{-(x^2)}$. *Исследовать функцию двумя способами: классическим, используя значения производных в стационарной точке, и используя свойства выпуклых и вогнутых функций.*

При исследовании функции:

- определить асимптотики функции;
- определить диапазон значений, в которых функция выпукла или вогнута;
- определить стационарные точки;
- идентифицировать стационарные точки.

Ход решения.

Определить асимптотики функции:

$$\lim_{x\to\infty} f2(x)=0, \quad \lim_{x\to-\infty} f2(x)=0, \quad \lim_{x\to 0} f2(x)=1.$$

Функция e^{-x^2} неотрицательная на всей действительной оси и не имеет корней.

Определить стационарные точки.

Вычислить первую производную и результат разложить на множители:

$$\frac{d\ f2(x)}{d\,x} = -2xe^{-x^2}.$$

Первая производная обращается в ноль в точке $x_0 = 0$. Данную точку можно классифицировать как стационарную.

Идентифицировать стационарную точку.

Вычислить вторую производную:

$$\frac{d^2\ f2(x)}{d\,x^2} = 2e^{-x^2}\left(-1 + 2x^2\right).$$

Вариант 1. Значение второй производной в точке $x_0 = 0$ $\frac{d^2\ f2(x_0)}{d\,x^2} = -2$. Следовательно, функция в точке x_0 имеет максимум.

Вариант 2. Вторая производная меняет знак в точках $x_1 = \sqrt{0{,}5}$, $x_2 = -\sqrt{0{,}5}$. Вторая производная в интервале $x_1 - x_2$ (в котором находится стационарная точка x_0) отрицательная. Следовательно, функция в этом диапазоне значений вогнута и имеет максимум в точке x_0.

Листинг программы в пакете MathCAD 15 приведен в прил. А – рис. А 2.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD 15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Размещение переменных в сопроводительном тексте.
- Просмотр результатов расчета и редактирование числа выводимых десятичных знаков.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Операции с массивами, доступ к элементам массива.
- Вычисление пределов.
- Векторизация.
- Символьное и численное дифференцирование выражений.
- Символьное разложение на множители.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых (см. пример 1.1).

Пример 1.3. Минимизировать функцию

$$f3(x) = -x^3 + 3 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 10$$

на интервале $-2 \le x \le 4$.

Ход решения.

Определить стационарные точки, приравняв выражение для первой производной нолю:

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = -3x^2 + 6x + 9 = 0.$$

Решая это уравнение, получаем стационарные точки $x_0 = 3$ и $x_1 = -1$, которые расположены внутри заданного интервала.

Для того чтобы найти глобальный максимум, вычислим значения $f(x)$ в точках $x_0 = 3$, $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$:

$$f(x_0) = 37,\ f(x_1) = 5,\ f(x_2) = 12,\ f(x_3) = 30.$$

Таким образом, точка $x_0 = 3$ соответствует максимальному значению $f(x)$ на интервале $-2 \le x \le 4$.

Листинг программы в пакете MathCAD 15 приведен в прил. А – рис. А 3.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD 15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Размещение переменных в сопроводительном тексте.
- Просмотр результатов расчета и редактирование числа выводимых десятичных знаков.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Операции с массивами, доступ к элементам массива.
- Векторизация.
- Численное дифференцирование.
- Использование расчетного блока Given–Find.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых (см. пример 1.1).

Пример 1.4. Пожарное ведро изготавливают по следующей технологии (рис. 1.8). Из круглой жестянки $R = 1$ м вырезают сектор, затем полученную выкройку сворачивают в конус, и по линии контакта заготовка сваривается. Найти угол α вырезки, при котором объем ведра будет максимальным. Решить пример численно, аналитически и графически.

На рис. 1.8 схематически изображена технология изготовления пожарного ведра.

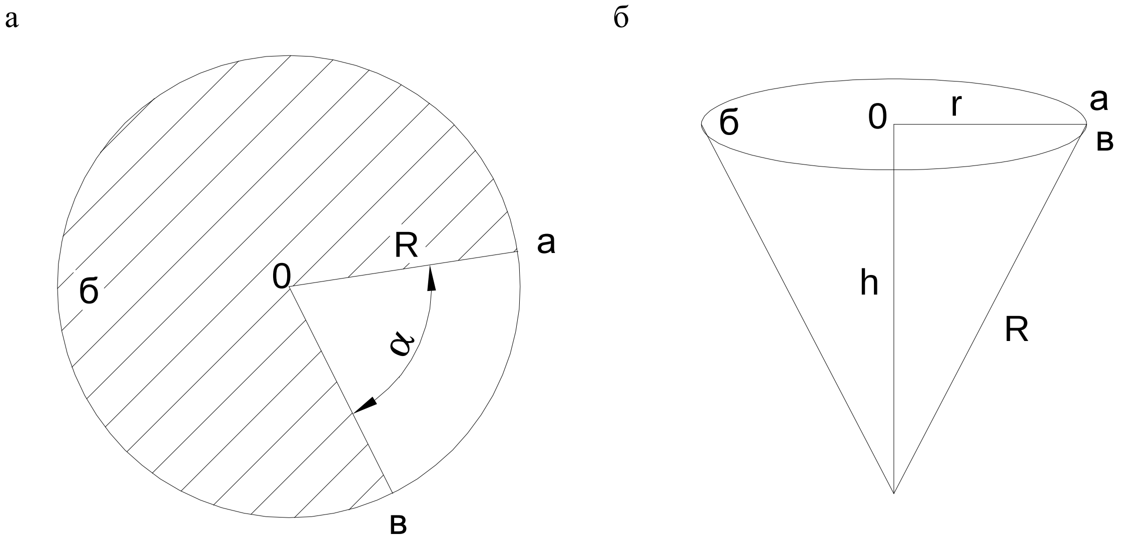


Рис. 1.8. Схема (а, б) изготовления пожарного ведра (пример 1.4)

Вывод целевой функции

Целевой функцией, которую необходимо оптимизировать, является функция для расчета объема V конического ведра

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \qquad (1.1)$$

где r – радиус ведра; h – высота ведра как функция от угла α и радиуса заготовки R.

Необходимо целевую функцию – объем конуса – записать как функцию от угла α и R, а для этого переменные r и h должны быть выражены через параметры угла α и радиуса заготовки R.

Длину L окружности ведра можно определить, исходя из рис. 1.8, а, как

$$L = 2\pi R - 2\pi R \frac{\alpha}{2\pi}. \qquad (1.2)$$

Длину L окружности ведра, исходя из рис. 1.8, б, можно определить как

$$L = 2\pi r. \tag{1.3}$$

Радиус ведра r может быть определен из выражений (1.2) и (1.3) как функция от угла α и радиуса заготовки R:

$$r = R\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right). \tag{1.4}$$

Высота ведра, исходя из рис. 1.8, б и выражения (1.4), может быть определена как функция от угла α и радиуса заготовки R:

$$h = \sqrt{R^2 - r^2}. \tag{1.5}$$

Ограничения на параметр α составляют:

$$0 < \alpha < 2\pi. \tag{1.6}$$

Целевая функция (1.1) с учетом выражений (1.4)–(1.6) однозначно определена как функция двух параметров – угла α и радиуса заготовки R.

Листинг программы в пакете MathCAD 15 приведен в прил. А – рис. А 4.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD 15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Размещение переменных в сопроводительном тексте.
- Просмотр результатов расчета и редактирование числа выводимых десятичных знаков.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Операции с массивами, доступ к элементам массива.
- Векторизация.
- Численное дифференцирование.
- Нахождение корней уравнения с использованием расчетного блока Given–Find.
- Создание собственных единиц измерения.
- Корректировка единиц измерений при просмотре рассчитанных переменных.

- Символьное решение уравнений.
- Нахождение корней уравнения с использованием расчетного блока Given–Maximize.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых (см. пример 1.1).

Пример 1.5. Пожарное ведро изготавливают по следующей технологии. Из круглой жестянки $R=1$ *м вырезают сектор (рис. 1.8), затем полученную выкройку сворачивают в конус, и по линии контакта заготовка сваривается. Второе ведро изготавливают из вырезанного сектора. Найти угол* α *вырезки, при котором суммарный объем двух ведер будет максимальным. Решить пример численно, аналитически и графически.*

На рис. 1.8 схематически изображена технология изготовления двух пожарных ведер.

Вывод расчетных зависимостей приведен в примере 1.4.

Для расчета объема малого ведра можно воспользоваться выражением (1.1), в котором r_1 определяется как

$$r_1 = R\left(1-\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}\right) = R\frac{\alpha}{2\pi}.$$

Тогда выражение для расчета объема малого ведра примет вид

$$V = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h.$$

Для целевой функции будет найдено выражение (суммарный объем двух ведер)

$$V_\Sigma = \frac{1}{3}\pi h\left(r^2 + r_1^2\right),$$

где r – радиус большого ведра; r_1 – радиус малого ведра; h – высота ведра как функция от угла α и радиуса заготовки R.

Ограничения на параметр α:

$$0<\alpha<2\pi. \qquad (1.7)$$

Листинг программы в пакете MathCAD 15 приведен в прил. А – рис. А 5.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD 15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Размещение переменных в сопроводительном тексте.
- Операции с массивами, доступ к элементам массива.
- Просмотр результатов расчета и редактирование числа выводимых десятичных знаков.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Векторизация.
- Численное дифференцирование.
- Нахождение корней уравнения с использованием расчетного блока Given–Find.
- Создание собственных единиц измерения.
- Корректировка единиц измерения при просмотре рассчитанных переменных.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых (см. пример 1.1).

Пример 1.6. На лесопилке из круглого бревна диаметром D изготавливают брус. Рассчитать размер сечения бруса, имеющего максимальную прочность при диаметре бревна $D = 250$ мм. Известно, что прочность бруса пропорциональна моменту сопротивления поперечного сечения бруса.

Вывод целевой функции.

Известно, что прочность бруса пропорциональна моменту сопротивления поперечного сечения бруса n и определяется выражением

$$W = \frac{BH^2}{6}. \qquad (1.8)$$

Зависимость толщины бруса от диметра бревна можно записать в следующем виде (рис. 1.9):

$$H = \sqrt{D^2 - B^2}. \qquad (1.9)$$

Подставляя H из (1.9) в выражение (1.8), получим целевую функцию – зависимость прочности бруса от диаметра бревна:

$$W = \frac{B\left(D^2 - B^2\right)}{6}. \qquad (1.10)$$

Листинг программы в пакете MathCAD 15 приведен в прил. А – рис. А 6.

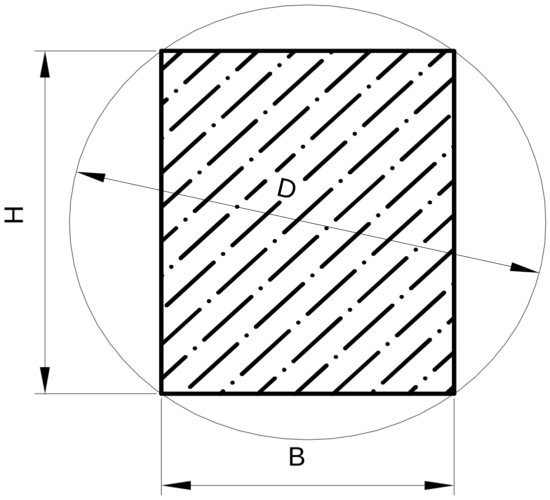


Рис. 1.9. Схема изготовления бруса из кругляка (пример 1.6)

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD 15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Размещение переменных в сопроводительном тексте.
- Просмотр результатов расчета и редактирование числа выводимых десятичных знаков.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Векторизация.
- Доступ к элементам массива.
- Численное дифференцирование.
- Символьное решение уравнений.
- Символьное нахождение коэффициентов полинома.
- Нахождение корней уравнения, используя функцию polyroots.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых (см. пример 1.1).

1.8. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти стационарные точки уравнения (используя символьный и численный методы) $f\left(x\right)=x^3+2x^2-x+3$ для всех $x\in R$, классифицировать их, построить график функции и нанести на него стационарные точки.

2. Найти стационарные точки уравнения (используя символьный и численный методы) $f\left(x\right)=x^3$ для всех $x\in R$, классифицировать их, построить график функции и нанести на него стационарные точки.

3. Найти стационарные точки уравнения (используя символьный и численный методы) $f(x)=-16-60x-52x^2+x^3-12x^4+4x^5$ в интервале $-1\leq x\leq 5$, классифицировать их, найти глобальные минимум и максимум, построить график функции и нанести на него все точки.

4. Найти стационарные точки уравнения (используя символьный и численный методы) $f(x)=-16-60x^3+x^2(4x^3-12x^2+x+52)$ в интервале $-4\leq x\leq 6$, классифицировать их, найти глобальные минимум и максимум, построить график функции и нанести на него стационарные точки.

5. Найти стационарные точки уравнения (используя численный и символьный методы) $f(x)=-16+4x+124x^2-31x^3-224x^4+56x^5$ в интервале $-1\leq x\leq 4$, классифицировать их, найти глобальные минимум и максимум, построить график функции и нанести на него стационарные точки.

6. Задана функция $f(x)=x^5+x^4-\left(x^3/3\right)+2$. Найти: 1) интервалы возрастания и убывания; 2) точки перегиба (если таковые имеются); 3) интервалы, в которых функция вогнута, выпукла; 4) локальные и глобальный максимумы (если таковые есть); 5) локальные и глобальный минимумы (если таковые есть). Построить график функции и нанести на него полученные точки.

7. Задана функция $f(x)=\left(2x+1\right)^2\left(x-4\right)$. Найти: 1) интервалы возрастания и убывания; 2) точки перегиба (если таковые имеются); 3) интервалы, в которых функция вогнута, выпукла; 4) локальные и глобальный максимумы (если таковые есть); 5) локальные и гло-

бальный минимумы (если таковые есть). Построить график функции и нанести на него полученные точки.

8. Установить, какие из следующих функций являются выпуклыми или вогнутыми: $f(x)=e^{x}$, $f(x)=e^{-x}$, $f(x)=x+\log(x)$ при $x>0$. Графически подтвердить полученный результат.

9. Установить, какие из следующих функций являются выпуклыми или вогнутыми: $f(x)=1/x^{2}$, $f(x)=x\cdot\log(x)$ при $x>0$, $f(x)=|x|$ при $x>0$. Графически подтвердить полученный результат.

10. Исследовать функцию $f(x)=3-12x+x^{3}$ на интервале $-4\le x\le 4$. Найти стационарные точки (используя символьный и численный методы). Найти локальные минимумы и максимумы, глобальные минимум и максимум в заданном интервале, построить график функции и нанести на него все точки.

2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

В данном разделе рассмотрены основные численные одномерные *методы поиска* точки оптимума внутри заданного интервала.

Все методы поиска оптимума можно разделить на методы исключения интервала, методы точечного оценивания и смешанные методы.

Методы поиска, которые позволяют определить оптимум функции одной переменной путем последовательного исключения подинтервалов и, следовательно, путем уменьшения интервала поиска, называются *методами исключения интервалов*.

Фактически все одномерные методы поиска, используемые на практике, основаны на предположении, что исследуемая функция в допустимой области, по крайней мере, обладает свойством унимодальности. Полезность этого свойства определяется тем фактом, что для унимодальной функции $f(x)$ сравнение значений $f(x)$ в двух различных точках интервала поиска позволяет определить, в каком из заданных двумя указанными точками подинтервалов точка оптимума отсутствует.

Правило исключения интервалов устраняет необходимость полного перебора всех допустимых точек. Несомненным достоинством поисковых методов такого рода является то, что они основаны лишь на вычислении значений функций. При этом не требуется, чтобы исследуемые функции были дифференцируемы; более того, допустимы случаи, когда функцию нельзя даже записать в аналитическом виде. Единственным требованием является возможность определения значений функции $f(x)$ в заданных точках x с помощью прямых расчетов или имитационных экспериментов.

Применение методов исключения интервалов накладывает единственное требование на исследуемую функцию: она должна быть унимодальной. Следовательно, указанные методы можно использовать для анализа как непрерывных, так и разрывных функций, а также в случаях, когда переменные принимают значения из дискретного множества. Логическая структура поиска с помощью методов исключения интервалов основана на простом сравнении значений функции в двух пробных точках. Кроме того, при таком сравнении в расчет принимается только отношение порядка на множестве значений функции и не учитывается величина разности между значениями функции. В методах точечного оценивания учитываются относительные изменения значений функции и ее производных, и, как следствие, в ряде случаев они оказываются более эффективными, чем методы исключения интервалов. Однако выигрыш в эффективности достигается ценой введения дополнительного требования, согласно которому исследуемые функции должны быть достаточно гладкими.

Основная идея таких методов связана с возможностью аппроксимации гладкой функции полиномом и последующего использования аппроксимирующего полинома для оценивания координаты точки оптимума. Необходимыми условиями эффективной реализации данного подхода являются унимодальность и непрерывность исследуемой функции. Согласно теореме Вейерштрасса об аппроксимации, если функция непрерывна в некотором интервале, то ее с любой степенью точности можно аппроксимировать полиномом достаточно высокого порядка. Следовательно, если функция унимодальна и найден полином, который достаточно точно ее аппроксимирует, то координату точки оптимума функции можно оценить путем вычисления координаты точки оптимума полинома. Согласно теореме Вейерштрасса, качество оценок координаты точки оптимума, получаемых с помощью аппроксимирующего полинома, можно повысить двумя способами: 1) использованием полинома более высокого порядка; 2) уменьшением интервала аппроксимации. Второй способ, вообще говоря, является более предпочтительным, поскольку построение аппроксимирующего полинома порядка выше третьего становится весьма сложной процедурой, тогда как уменьшение интервала в условиях, когда выполняется предположение об унимодальности функции, особой сложности не представляет.

Процесс нахождения минимума функции можно разделить на три этапа.

1. Выбор начального интервала неопределенности. Границы $[a_0, b_0]$ интервала должны быть такими, чтобы функция $f(x)$ была унимодальной.

2. Уменьшение интервала неопределенности.

3. Проверка условий окончания. Поиск заканчивается, когда:

- длина текущего интервала неопределенности $[a_k; b_k]$ оказывается меньше установленной величины;
- относительное изменение значения функции $f(x_k)$ и $f(x_{k+1})$ (или ее производной) становится меньше заданного значения;

- относительное изменение координаты x_k и x_{k+1} становится меньше заданного значения;
- относительное изменение значения функции $f(x_k)$ и $f(x_{k+1})$ (или ее производной) и относительное изменение координаты x_k и x_{k+1} одновременно становится меньше заданного значения.

В некоторых методах заранее задается максимальное количество вычислений функции.

Существует два способа выбора точек, в которых производится вычисление значений функции. Если точки задаются заранее, до начала вычислений, – это пассивный способ выбора точек. Если точки выбираются последовательно в процессе поиска с учетом результатов предыдущих вычислений, – это последовательный способ.

2.1. Установление границ интервала

При реализации почти всех численных алгоритмов одномерной оптимизации на начальном этапе необходимо найти относительно широкий интервал, содержащий точку оптимума. Обычно поиск граничных точек такого интервала проводится с помощью эвристических методов поиска, хотя в ряде случаев можно также использовать методы экстраполяции.

Для эвристического выбора начального интервала неопределенности можно применить алгоритм Свенна:

1. Задать произвольно следующие параметры: x_0 – некоторая точка, $\Delta > 0$ – величина шага. Положить $k = 0$.

2. Вычислить значение функции в трех точках: $x_0 - \Delta$, x_0, $x_0 + \Delta$.

3. Проверить условие окончания:

а) если $f(x_0 - \Delta) \geq f(x_0) \leq f(x_0 + \Delta)$, то начальный интервал неопределенности найден: $[a_0; b_0] = [x_0 - \Delta;\ x_0 + \Delta]$;

б) если $f(x_0 - \Delta) \leq f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta)$, то функция не является унимодальной, а требуемый интервал неопределенности не может быть найден. Вычисления при этом прекращаются. Рекомендуется задать другую начальную точку;

в) если условие окончания не выполнено, то перейти к шагу 4.

4. Определить знак Δ:

а) если $f(x_0-\Delta)\geq f(x_0)\geq f(x_0+\Delta)$, то $\Delta=+\Delta$, $a_0=x_0$, $x_1=x_0+\Delta$, $k=1$;

б) если $f(x_0-\Delta)\leq f(x_0)\leq f(x_0+\Delta)$, то $\Delta=-\Delta$, $b_0=x_0$, $x_1=x_0-\Delta$, $k=1$.

5. Найти следующую точку $x_{k+1}=x_k+2^k\cdot\Delta$, $k=0,1,2$.

6. Проверить условие убывания функции:

а) если $f(x_{k+1})<f(x_k)$ и $\Delta=+\Delta$, то $a_0=x_k$;

если $f(x_{k+1})>f(x_k)$ и $\Delta=-\Delta$, то $b_0=x_k$.

В обоих случаях положить $k=k+1$ и перейти к шагу 5;

б) если $f(x_{k+1})>f(x_k)$, процедура поиска завершается. При $\Delta=+\Delta$ положить $b_0=x_{k+1}$, а при $\Delta=-\Delta$ положить $a_0=x_{k+1}$. В результате $[a_0;b_0]$ – искомый начальный интервал неопределенности.

Пример 2.1. Установить начальные границы интервала неопределенности (используя эвристический метод Свенна) для функции $f(x)=(100-x)^2$ *при заданной начальной точке* $x_0=30$ *и величине шага* $|\Delta|=5$.

Последовательность действий

1. Определение знака шага Δ:

$$f(x_0)=f(30)=4900;$$

$$f(x_0+|\Delta|)=f(35)=4225;$$

$$f(x_0-|\Delta|)=f(45)=5625.$$

Так как $f(x_0-|\Delta|)\geq f(x_0)\geq f(x_0+|\Delta|)$, то величина Δ должна быть положительной, а координата точки минимума x^* – должна быть больше 30.

2. Итерационная процедура.

Шаг 1. $x_1=x_0+\Delta=35$, $f(x_1)=4225<f(x_0)=4900$. Следовательно, $x^*>30$.

Шаг 2. $x_2=x_0+2\Delta=45$, $f(x_2)=3025<f(x_1)=4225$. Следовательно, $x^*>35$.

Шаг 3. $x_3=x_0+2^2\Delta=65$, $f(x_3)=1225<f(x_2)=3025$. Следовательно, $x^*>45$.

Шаг 4. $x_4 = x_0 + 2^3\Delta = 105$, $f\left(x_4\right) = 105 < f\left(x_3\right) = 1225$. Следовательно, $x^* > 65$.

Шаг 5. $x_5 = x_0 + 2^4\Delta = 185$, $f\left(x_5\right) = 7225 > f\left(x_4\right) = 105$. Следовательно, $x^* < 185$.

Границы начального интервала неопределенности функции $f(x)$ $[a;b] = [65;185]$.

Листинг программы в пакете MathCAD15 приведен в прил. Б – рис. Б 1.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD 15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Размещение переменных в сопроводительном тексте.
- Просмотр результатов расчета и редактирование числа выводимых десятичных знаков.
- Определение однострочной и многострочной функций и их вызов.
- Загрузка файла с формулами в текст программы.
- Векторизация.
- Доступ к элементам массива.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых (см. пример 1.1).

2.2. Метод равномерного поиска

Метод равномерного поиска иногда называют методом сканирования. Данный метод относится к методам пассивной (параллельной) стратегии.

Задаются начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0; b_0]$ и количество вычислений функции N. Вычисления производятся в N равномерно удаленных друг от друга точках (при этом интервал L_0 делится на $N+1$ равных подинтервалов). Путем сравнения величин $f\left(x_i\right)$, $i = 1,\ldots,N$ находится точка x_k, в которой значение функции наименьшее. Искомая точка минимума x^* считается заключенной в интервале $\left[x_{k-1};\, x_{k+1}\right]$ (рис. 2.1).

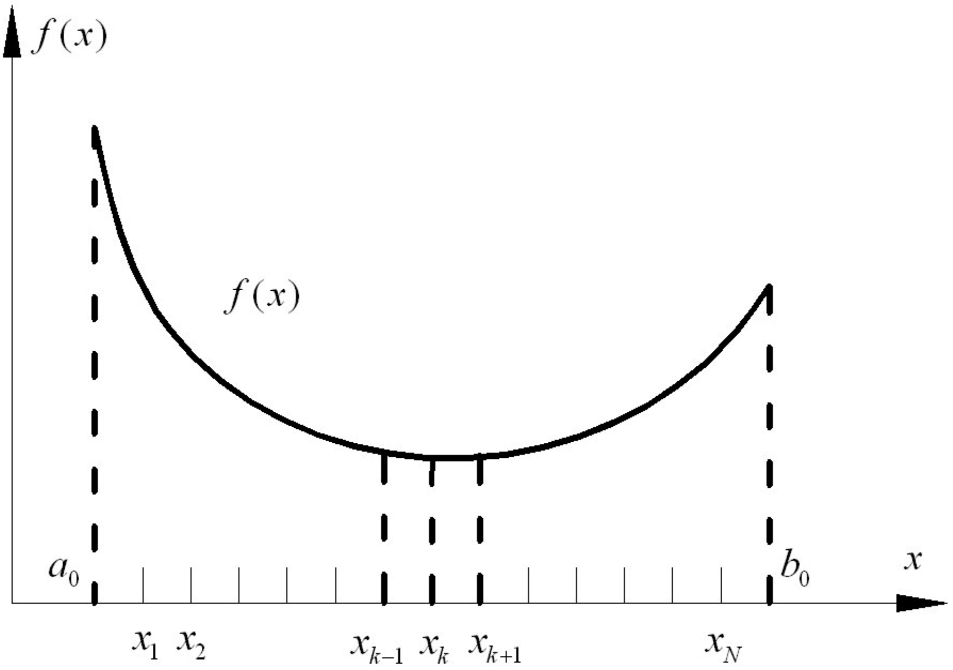


Рис. 2.1. Графическая иллюстрация метода равномерного поиска

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$, N – количество вычислений функции.

Шаг 2. Вычислить точки $x_i = a_0 + i\dfrac{a_0 - b_0}{N+1}$, $i = 1, \dots, N$, равноотстоящие друг от друга.

Шаг 3. Вычислить значения функции в найденных точках: $f\left(x_i\right)$, $i = 1, \dots, N$.

Шаг 4. Среди точек x_i, $i = 1, \dots, N$, найти такую, в которой функция принимает наименьшее значение: $f(x_k) = \min\limits_{1 \le i \le N} f(x_i)$.

Шаг 5. Точка минимума x^* принадлежит интервалу $x^* \in [x_{k-1}, x_{k+1}] = L_N$, на котором в качестве приближенного решения может быть выбрана точка $x^* \cong x_k$.

Сходимость метода

Для метода равномерного поиска характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле $R(N)=\frac{L_N}{L_1}=\frac{2}{N+1}$, где N – количество вычислений функции; L_N – длина интервала в результате вычисления N значений функции; L_1 – длина исходного интервала.

Достоинства метода:

- простота алгоритма;
- нахождение глобального минимума (максимума) при исследовании функции с несколькими экстремумами.

Недостаток метода:

- большое число вычислений значений целевой функции.

Модификация метода: метод равномерного поиска с переменным шагом.

Суть метода. На первом этапе расчет осуществляется с крупным шагом. Затем отрезок, внутри которого получено минимальное значение, разбивается на более мелкие отрезки. Определяется новый отрезок, внутри которого находится уточненное значение минимума. Далее итерации повторяются до достижения требуемой точности расчета.

Пример 2.2. Найти минимум функции $f(x)=2x^2-12x$ *методом равномерного поиска при разбиении начального интервала неопределенности на 10 подинтервалов.*

Последовательность действий

Найти начальный интервал неопределенности методом Свенна.

1. Задать начальную точку $x_0=5$, шаг $\Delta=5$. Положим $k=0$.

2. Вычислить значения функции в следующих точках: $x_0-\Delta=0$; $x_0=5$; $x_0+\Delta=10$.

3. Сравнить значения функции, вычисленной в трех точках. Выполняется неравенство $f(x_0-t)>f(x_0)<f(x_0+t)$, следовательно, начальный интервал неопределенности найден: $L_0=[0;10]$.

Найти минимум функции.

1. Задать количество точек расчета $N=9$ так, чтобы L_0 содержал $N+1=10$ равных подинтервалов.

2. Определить точки вычисления функции: $x_i=0+i\frac{10-0}{10}$, $i=1,\ldots,9$.

3. Вычислить значения функции в девяти точках: $f(1)=-10$, $f(2)=-16$, $f(3)=-18$, $f(4)=-16$, $f(5)=-10$, $f(6)=0$, $f(7)=14$, $f(8)=32$, $f(9)=54$.

4. В точке $x_3=3$ функция принимает наименьшее значение: $f(x_3)=-18$.

5. Точки минимума после девяти вычислений находятся в интервале $x^* \in [2;4]=L_9$, в котором выбирается точка $x^* \approx x_3=3$.

6. Характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности $R(N)=\left|\frac{L_9}{L_0}\right|=\frac{4-2}{10-0}=0{,}2$.

Листинг программы в пакете MathCAD 15 приведен в прил. Б – рис. Б 2.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD 15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Размещение переменных в сопроводительном тексте.
- Просмотр результатов расчета и редактирование числа выводимых десятичных знаков.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Матричные операции, доступ к элементам массива.
- Векторизация.
- Доступ к элементам массива.
- Использование функций min, match.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых (см. пример 1.1).

2.3. Метод деления интервала пополам

Метод деления интервала пополам относится к последовательным стратегиям и методам исключения интервала, что позволяет исключить из дальнейшего рассмотрения на каждой итерации в точности половину текущего интервала неопределенности.

Задается начальный интервал неопределенности. Алгоритм уменьшения интервала (рис. 2.2) основан на анализе величин функции в трех точках, равномерно распределенных на текущем интервале (делящих его на четыре части). Условия окончания процесса поиска: поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности оказывается меньше установленной величины.

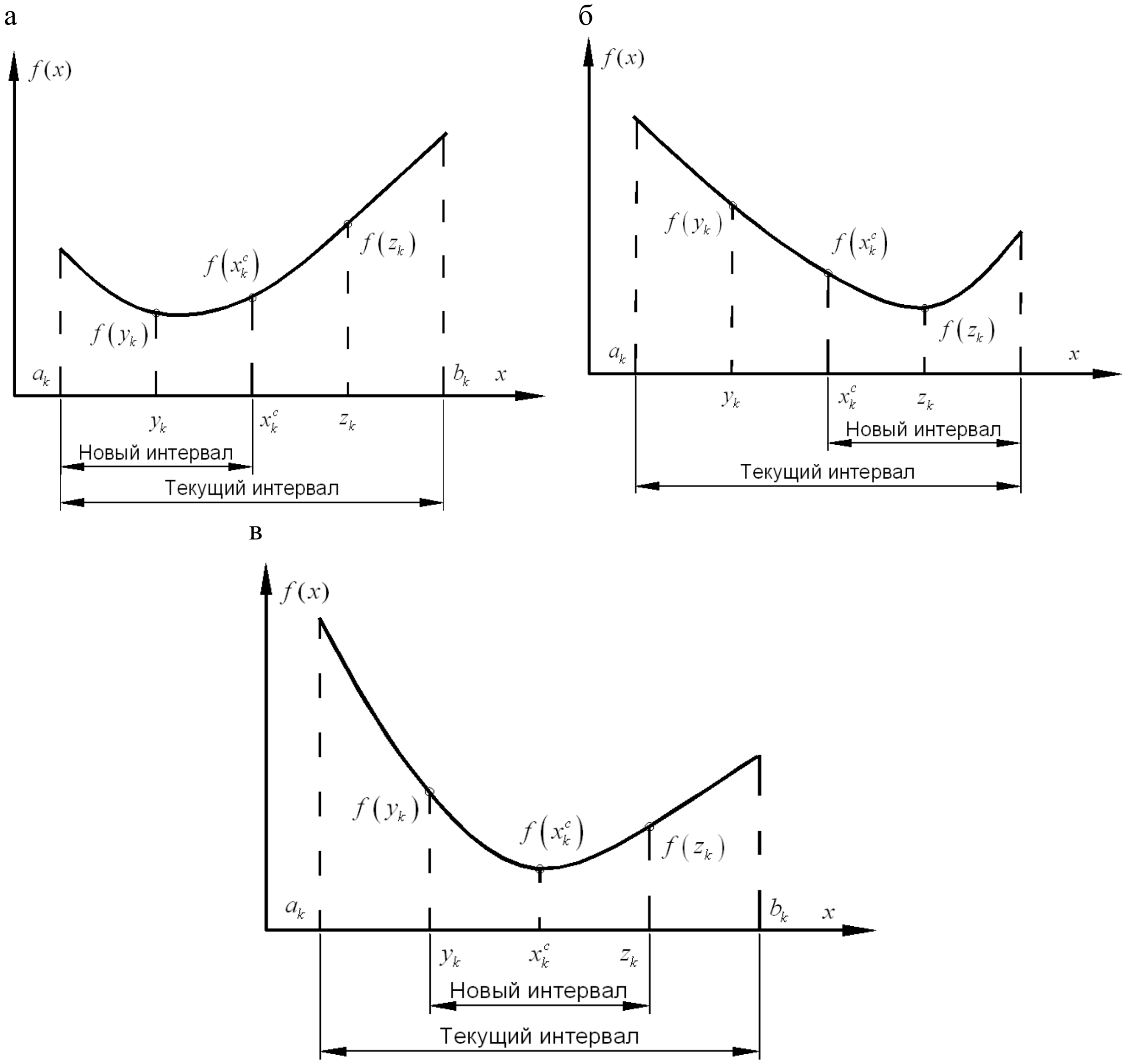


Рис. 2.2. Варианты реализации метода деления интервала пополам в зависимости от начальных условий:

а – $f(y_k) < f(x_k^c)$; б – $f(y_k) \ge f(x_k^c)$ и $f(z_k) < f(x_k^c)$;

в – $f(y_k) \ge f(x_k^c)$ и $f(z_k) \ge f(x_k^c)$

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0; b_0]$ и требуемую точность $\Delta > 0$.

Шаг 2. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить: среднюю точку $x_k^c = (a_k + b_k)/2$, интервал $[a_k; b_k]$ – $|L_k| = |b_k - a_k|$, значение функции в средней точке $f\left(x_k^c\right)$.

Шаг 4. Вычислить точки: $y_k = a_k + |L_k|/4$, $z_k = b_k - |L_k|/4$ и значения функций в этих точках: $f(y_k)$, $f(z_k)$. Точки y_k, x_k^c, z_k делят интервал $[a_k, b_k]$ на четыре равные части.

Шаг 5. Сравнить значения $f(y_k)$ и $f\left(x_k^c\right)$:

а) если $f(y_k) < f\left(x_k^c\right)$, исключить интервал $\left[x_k^c; b_k\right]$, положив $b_{k+1} = x_k^c$, $a_{k-1} = a_k$. Средней точкой нового интервала становится точка y_k: $x_{k+1}^c = y_k$ (рис. 2.2, а). Перейти к шагу 7;

б) если $f(y_k) \geq f\left(x_k^c\right)$, перейти к шагу 6.

Шаг 6. Сравнить значения $f(z_k)$ и $f\left(x_k^c\right)$:

а) если $f(z_k) < f\left(x_k^c\right)$, исключить интервал $\left[a_k, x_k^c\right]$, положив $a_{k+1} = x_k^c$, $b_{k-1} = b_k$. Средней точкой нового интервала становится точка z_k: $x_{k+1}^c = z_k$ (рис. 2.2, б). Перейти к шагу 7;

б) если $f(z_k) \geq f\left(x_k^c\right)$, исключить интервалы $(a_k; y_k)$, $(z_k; b_k)$, положив $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = z_k$. Средней точкой нового интервала останется x_k^c: $x_{k+1}^c = x_k^c$ (рис. 2.2, в).

Шаг 7. Вычислить значение $\left|L_{2(k+1)}\right| = |b_{k+1} - a_{k+1}|$ и проверить условие окончания расчета:

а) если $\left|L_{2(k+1)}\right| \leq \Delta$, процесс поиска корня уравнения завершается и $x^* \in L_{2(k+1)} = [a_{k+1}; b_{k+1}]$. В качестве приближенного решения можно взять любую точку внутри интервала, например середину последнего интервала: $x^* \cong x_k^c$;

б) если $\left|L_{2(k+1)}\right| > l$, то положить $k = k+1$ и перейти к шагу 4.

Сходимость

Для метода деления интервала пополам характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле $R(N) = 1/2^{N/2}$, где N – количество вычислений функции.

Замечания

1. Средняя точка последовательно получаемых интервалов всегда совпадает с одной из трех пробных точек, найденных на предыдущей итерации. Следовательно, на каждой итерации требуется два новых вычисления функции.

2. Если задана величина $R(N)$, то требуемое для достижения желаемой точности количество вычислений функции находится как наименьшее целое, удовлетворяющее условию $N \geq 2\ln R(N)/\ln(0{,}5)$.

Недостатки

1. На каждой итерации требуется вычислять две новые точки.

2. Может использоваться для поиска экстремумов только в унимодальных функциях.

Пример 2.3. Найти минимум функции $f(x) = 2x^2 - 12x$ *на интервале* $[0; 10]$, *с точностью* $\Delta = 1$ *методом деления интервала пополам.*

Последовательность действий

1^0. Задать начальный интервал неопределенности $L_0 = [0; 10]$, точность расчета $\Delta = 1$.

2^0. Положить $k = 0$.

3^0. Вычислить: среднюю точку $x_0^{\text{c}} = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = \dfrac{0+10}{2} = 5$, величину интервала $[a_0; b_0]$ – $|L_0| = |b_0 - a_0| = 10 - 0 = 10$, значение функции в средней точке $f\left(x_0^{\text{c}}\right) = -10$.

4^0. Вычислить точки:

$$y_0 = a_0 + \frac{|L_0|}{4} = 0 + \frac{10}{4} = 2{,}5,\ z_0 = b_0 - \frac{|L_0|}{4} = 10 - \frac{10}{4} = 7{,}5$$

и значения функций в этих точках: $f(y_0) = -17{,}5$, $f(z_0) = 22{,}5$.

5^0. Сравнить значения $f(y_0)$ и $f(x_0^{\text{c}})$.

Так как $f(y_0) = -17{,}5 < f(x_0^{\text{c}}) = -10$, для нового интервала неопределенности $a_1 = a_0 = 0$, $b_1 = x_0^{\text{c}} = 5$, $x_1^{\text{c}} = y_0 = 2{,}5$.

7^0. Проверить условие окончания расчета. $L_1 = [a_1; b_1] = [0; 5]$, $|L_1| = |b_1 - a_1| = 5 - 0 = 5 > \Delta = 1$. Условие окончания расчета не выполнено.

2^1. Положить $k = 1$, перейти к шагу 4.

4^1. Вычислить точки:

$$y_1 = a_1 + \frac{|L_1|}{4} = 0 + \frac{5}{4} = 1{,}25,\ z_1 = b_1 - \frac{|L_1|}{4} = 5 - \frac{5}{4} = 3{,}75$$

и значения функций в этих точках: $f(y_1) = -11{,}875$, $f(z_1) = -16{,}875$.

5^1. Сравнить значения $f(y_1)$ и $f(x_1^{\text{c}})$.

Так как $f(y_0) = -17{,}5 < f(x_0^{\text{c}}) = -10$, перейти к шагу 6.

6^1. Сравнить значения $f(z_1)$ и $f(x_1^{\text{c}})$.

Так как $f(z_1) = -16{,}875 > f(x_1^{\text{c}}) = -17{,}5$, для нового интервала неопределенности $a_2 = y_1 = 1{,}25$, $b_2 = z_1 = 3{,}75$, $x_2^{\text{c}} = x_1^{\text{c}} = 2{,}5$.

7^1. Проверить условие окончания расчета.

$$L_2 = [a_2; b_2] = [1{,}25; 3{,}75],\ |L_2| = |b_2 - a_2| = 3{,}75 - 1{,}25 = 2{,}5 > \Delta = 1.$$

Условие окончания расчета не выполнено.

2^2. Положить $k = 2$, перейти к шагу 4.

4^2. Вычислить точки:

$$y_2 = a_2 + \frac{|L_2|}{4} = 1{,}25 + \frac{2{,}5}{4} = 1{,}875,\ z_2 = b_2 - \frac{|L_2|}{4} = 3{,}75 - \frac{2{,}5}{4} = 3{,}125$$

и значения функций в этих точках: $f(y_2) = -15{,}47$, $f(z_2) = -17{,}97$.

5^2. Сравнить значения $f\left(y_2\right)$ и $f\left(x_2^{\text{c}}\right)$.

Так как $f\left(y_0\right) = -17{,}5 < f\left(x_0^{\text{c}}\right) = -10$, перейти к шагу 6.

6^2. Сравнить значения $f\left(z_2\right)$ и $f\left(x_2^{\text{c}}\right)$.

Так как $f\left(z_2\right) = -17{,}97 < f\left(x_2^{\text{c}}\right) = -17{,}5$, для нового интервала неопределенности $a_3 = x_2^{\text{c}} = 1{,}25$, $b_3 = b_2 = 3{,}75$, $x_3^{\text{c}} = z_2 = 3{,}125$.

7^2. Проверить условие окончания расчета.

$$L_3 = \left[a_3; b_3\right] = \left[2{,}5; 3{,}75\right],\ \left|L_3\right| = \left|b_3 - a_3\right| = 3{,}75 - 2{,}5 = 1{,}25 > \Delta = 1.$$

Условие окончания расчета не выполнено.

2^3. Положить $k = 3$, перейти к шагу 4.

4^3. Вычислить точки:

$$y_3 = a_3 + \frac{\left|L_3\right|}{4} = 2{,}5 + \frac{1{,}25}{4} = 2{,}81,\ z_3 = b_3 - \frac{\left|L_3\right|}{4} = 3{,}75 - \frac{1{,}25}{4} = 3{,}43$$

и значение функций в этих точках: $f\left(y_3\right) = -17{,}93$, $f\left(z_3\right) = -17{,}62$.

5^3. Сравнить значения $f\left(y_3\right)$ и $f\left(x_3^{\text{c}}\right)$.

Так как $f\left(y_0\right) = -17{,}5 < f\left(x_0^{\text{c}}\right) = -10$, перейти к шагу 6.

6^3. Сравнить значения $f\left(z_3\right)$ и $f\left(x_3^{\text{c}}\right)$.

Так как $f\left(z_3\right) = -17{,}63 > f\left(x_3^{\text{c}}\right) = -17{,}97$, для нового интервала неопределенности $a_4 = y_3 = 2{,}81$, $b_4 = z_3 = 3{,}43$, $x_4^{\text{c}} = x_3^{\text{c}} = 3{,}125$.

7^3. Проверить условие окончания расчета.

$$L_4 = \left[a_4; b_4\right] = \left[2{,}81; 3{,}43\right],\ \left|L_4\right| = \left|b_4 - a_4\right| = 3{,}43 - 2{,}81 = 0{,}62 < \Delta = 1.$$

Условие окончания расчета выполнено. В качестве решения можно взять среднюю точку последнего интервала $x^* \cong x_4^{\text{c}} = 3{,}125$. Общее количество вычисленных точек $N = 8$.

Листинг программы в пакете MathCAD 15 и описание пользовательских функций, использованных в программе, приведены в прил. Б – рис. Б 3.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD 15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Размещение переменных в сопроводительном тексте.
- Просмотр результатов расчета и редактирование числа выводимых десятичных знаков.
- Определение однострочной и многострочной функций и их вызов.
- Загрузка файла с формулами в текст программы.
- Векторизация.
- Неравенства.
- Доступ к столбцам и элементам массива.
- Функция augment.
- Символьные операции: дифференцирования, simplify, solve, substitute.
- Матричные операции.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых (см. пример 1.1).

2.4. Метод золотого сечения

Для использования конкретного метода одномерной минимизации, работающего по принципу последовательного сокращения интервала неопределённости, следует задать правило выбора на каждом шаге двух внутренних точек. Желательно, чтобы одна из них всегда использовалась в качестве внутренней и для следующего интервала. Тогда число вычислений функции сократится вдвое и одна итерация потребует расчёта только одного нового значения функции. В методе золотого сечения в качестве двух внутренних точек выбираются точки золотого сечения.

Точка производит золотое сечение отрезка, если отношение длины всего отрезка к большей части равно отношению большей части к меньшей.

На отрезке $\left[a_0; b_0\right]$ имеются точки y_0 и z_0, симметричные относительно его концов:

$$\frac{b_0 - a_0}{b_0 - y_0} = \frac{b_0 - y_0}{y_0 - a_0} = \frac{b_0 - a_0}{z_0 - a_0} = \frac{z_0 - a_0}{b_0 - z_0} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618.$$

Кроме того, точка y_0 производит золотое сечение отрезка $[a_0; z_0]$, а точка z_0 – отрезка $[y_0; b_0]$ (рис. 2.3).

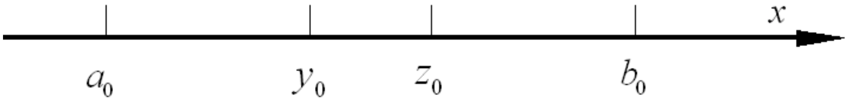


Рис. 2.3. Точки, производящие золотое сечение

Метод относится к последовательным стратегиям и методам исключения интервала.

Описание метода

Задаются начальный интервал неопределённости и требуемая точность. Алгоритм уменьшения интервала опирается на анализ значений функции в двух точках. В качестве точек вычисления функции выбираются точки золотого сечения. Тогда с учётом свойств золотого сечения на каждой итерации, кроме первой, требуется только одно новое вычисление функции. Условие окончания процесса поиска стандартное: поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределённости оказывается меньше установленной величины.

Алгоритм

Шаг 1. Задать значения начального интервала неопределённости $L_0 = [a_0; b_0]$, точность $\Delta > 0$.

Шаг 2. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить $y_0 = a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0)$, $z_0 = a_0 + b_0 - y_0$.

Шаг 4. Вычислить $f(y_k)$, $f(z_k)$.

Шаг 5. Сравнить $f(y_k)$ и $f(z_k)$:

а) если $f(y_k) \le f(z_k)$, то положить $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = z_k$, $y_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - y_k$, $z_{k+1} = y_k$ (рис. 2.4, а). Перейти к шагу 6;

б) если $f(y_k) > f(z_k)$, положить $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = b_k$, $y_{k+1} = z_k$, $z_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - z_k$ (рис. 2.4, б).

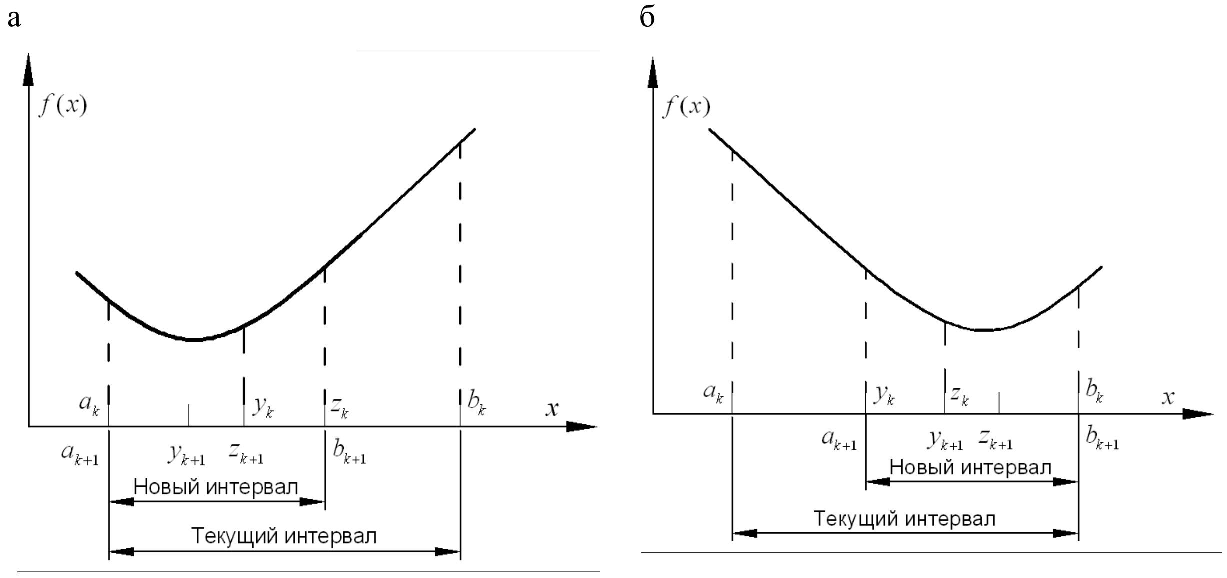


Рис. 2.4. Процесс изменения концов интервала в методе золотого сечения:
а – $f(y_k) \le f(z_k)$; б – $f(y_k) > f(z_k)$

Шаг 6. Вычислить $\Delta L = \left| a_{k+1} - b_{k+1} \right|$ и проверить условие окончания:

а) если $\Delta L < \Delta$, процесс поиска завершается и $x^* \in \left[a_{k+1}; b_{k+1} \right]$. В качестве приближённого решения можно взять середину последнего интервала;

б) если $\Delta L > \Delta$, положить $k = k+1$ и перейти к шагу 4.

Комментарии

Для метода золотого сечения относительное уменьшение начального интервала неопределённости находится по формуле $R(N) = 0{,}618^{N-1}$, где N – количество вычислений функции.

Сокращение длины интервала неопределенности постоянно:

$$\frac{|L_0|}{|L_1|} = \frac{|L_1|}{|L_2|} = \frac{|L_2|}{|L_3|} = \ldots = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}618.$$

Если задана величина $R(N)$, то требуемое для достижения желаемой точности количество вычислений функции находится как наименьшее целое число, которое удовлетворяет условию $N \ge 1 + \dfrac{\ln(R(N))}{\ln(0{,}618)}$.

Пример 2.4. Найти минимум функции $f(x)=2x^2-12x$ *на интервале* $[0;10]$ *с точностью* $\Delta=1$ *методом золотого сечения.*

Последовательность действий

1^0. Задать начальный интервал неопределенности $L_0=[0;10]$, точность расчета $\Delta=1$.

2^0. Положить $k=0$.

3^0. Вычислить внутренние точки y_0 и z_0. Учитывая, что: $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cong 0{,}382$, получим

$$y_0=a_0+0{,}382(b_0-a_0)=0+0{,}382\cdot 10=3{,}82,$$

$$z_0=a_0+b_0-y_0=0+10-3{,}82=6{,}18.$$

4^0. Вычислить значения функции во внутренних точках y_0 и z_0. $f(y_0)=-16{,}65$, $f(z_0)=2{,}22$.

5^0. Сравнить значения функции $f(y_0)$ и $f(z_0)$, рассчитать точки для нового интервала. Так как $f(y_0)<f(z_0)$, то $a_1=a_0=0$, $b_1=z_0=6{,}18$, $y_1=a_1+b_1-y_0=0+6{,}18-3{,}82=2{,}36$, $z_1=y_0=3{,}82$.

6^0. Проверить условие окончания расчета. Рассчитать величину нового интервала $L_1=[a_1;b_1]$: $\Delta L=|a_1-b_1|=|0-6{,}18|=6{,}18$, $\Delta L=6{,}18>\Delta=1$. Условие окончания расчета не выполняется. Продолжить расчет.

2^1. Положить $k=1$. Перейти к шагу 4.

4^1. Вычислить значения функции во внутренних точках y_1 и z_1: $f(y_1)=-17{,}18$, $f(z_1)=-16{,}65$.

5^1. Сравнить значения функций $f(y_1)$ и $f(z_1)$, рассчитать точки для нового интервала. Так как $f(y_1)<f(z_1)$, то $a_2=a_1=0$, $b_2=z_1=3{,}82$, $y_2=a_2+b_2-y_1=0+3{,}82-2{,}36=1{,}46$, $z_2=y_1=2{,}36$.

6^1. Проверить условие окончания расчета. Рассчитать величину нового интервала $L_2=[a_2;b_2]$: $\Delta L=|a_2-b_2|=|0-3{,}82|=3{,}82$, $\Delta L=3{,}82>\Delta=1$. Условие окончания расчета не выполняется. Продолжить расчет.

2^2. Положить $k=2$. Перейти к шагу 4.

4^2. Вычислить значения функции во внутренних точках y_2 и z_2: $f(y_2)=-13{,}25$, $f(z_2)=-17{,}18$.

5^2. Сравнить значения функций $f(y_2)$ и $f(z_2)$, рассчитать точки для нового интервала. Так как $f(y_2)>f(z_2)$, то $a_3=y_2=1{,}46$, $b_3=b_2=3{,}82$, $y_3=z_2=2{,}36$, $z_3=a_3+b_3-z_2=2{,}92$.

6^2. Проверить условие окончания расчета. Рассчитать величину нового интервала $L_3=[a_3;b_3]$: $\Delta L=|a_3-b_3|=|1{,}46-3{,}82|=2{,}36$, $\Delta L=2{,}36>\Delta=1$. Условие окончания расчета не выполняется. Продолжить расчет.

2^3. Положить $k=3$. Перейти к шагу 4.

4^3. Вычислить значения функции во внутренних точках y_3 и z_3: $f(y_3)=-17{,}18$, $f(z_3)=-17{,}99$.

5^3. Сравнить значения функций $f(y_3)$ и $f(z_3)$, рассчитать точки для нового интервала. Так как $f(y_3)>f(z_3)$, то $a_4=y_3=2{,}36$, $b_4=b_3=3{,}82$, $y_4=z_3=2{,}92$, $z_4=a_4+b_4-z_3=2{,}36+3{,}82-2{,}92=3{,}26$.

6^3. Проверить условие окончания расчета. Рассчитать величину нового интервала $L_4=[a_4;b_4]$: $\Delta L=|a_4-b_4|=|2{,}66-3{,}82|=1{,}46$, $\Delta L=1{,}46>\Delta=1$. Условие окончания расчета не выполняется. Продолжить расчет.

2^4. Положить $k=4$. Перейти к шагу 4.

4^4. Вычислить значения функции во внутренних точках y_4 и z_4: $f(y_4)=-17{,}99$, $f(z_4)=-17{,}86$.

5^4. Сравнить значения функций $f(y_4)$ и $f(z_4)$, рассчитать точки для нового интервала. Так как $f(y_4)<f(z_4)$, то $a_5=a_4=2{,}36$, $b_5=z_4=3{,}26$, $y_5=a_5+b_5-y_4=2{,}36+3{,}26-2{,}92=2{,}7$, $z_5=y_4=2{,}92$.

6^4. Проверить условие окончания расчета. Рассчитать величину нового интервала $L_5=[a_5;b_5]$: $\Delta L=|a_5-b_5|=|2{,}36-3{,}26|=0{,}9$, $\Delta L=0{,}9<\Delta=1$. Условие окончания расчета выполнено. Расчет завершен.

Общее количество вычисленных точек $N = 6$, точка минимума $x^* \in L_5$, $x^* = \dfrac{a_5 + b_5}{2} = 2{,}81$.

Листинг программы в пакете MathCAD 15 и описание пользовательских функций, использованных в программе, приведены в прил. Б – рис. Б 4.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD 15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Размещение переменных в сопроводительном тексте.
- Просмотр результатов расчета и редактирование числа выводимых десятичных знаков.
- Определение однострочной и многострочной функций и их вызов.
- Загрузка файла с формулами в текст программы.
- Векторизация.
- Неравенства.
- Доступ к столбцам и элементам массива.
- Функция augment.
- Символьные операции: дифференцирования, simplify, solve, substitute.
- Матричные операции.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых (см. пример 1.1).

2.5. Метод квадратичной аппроксимации

Теоретические основы

Простейшим вариантом полиномиальной интерполяции является квадратичная аппроксимация, которая основана на том факте, что функция, принимающая минимальное значение во внутренней точке интервала, должна быть, по крайней мере, квадратичной. Если же функция линейная, то ее оптимальное значение может достигаться только в одной из двух граничных точек интервала. Таким образом, при реализации метода оценивания с использованием квадратичной аппроксимации предполагается, что в ограниченном интервале можно аппроксимировать функцию квадратичным полиномом, а затем использовать построенную аппроксимационную схему для оценивания координаты точки истинного минимума функции.

Если задана последовательность точек x_1, x_2, x_3 и известны соответствующие этим точкам значения функции f_1, f_2, f_3, то можно определить постоянные величины a_0, a_1, a_2 таким образом, что значения квадратичной функции

$$q(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$$

совпадут со значениями рассматриваемой функции $f(x)$ в следующих точках x_1, x_2, x_3.

Вычислим $q(x)$ в каждой из трех заданных точек. Прежде всего

$$f_1 = f(x_1) = q(x_1) = a_0,$$

тогда

$$a_0 = f_1.$$

Далее, поскольку

$$f_2 = f(x_2) = q(x_2) = f_1 + a_1(x_2 - x_1),$$

получим

$$a_1 = (f_2 - f_1) / (x_2 - x_1).$$

Наконец, при $x = x_3$:

$$f_3 = f(x_3) = q(x_3) = f_1 + (f_2 - f_1)/(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) +$$
$$+ a_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

Решая последнее уравнение относительно a_2, получаем:

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2}\left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}\right).$$

Таким образом, найти значения параметров a_0, a_1, a_2 можно по трем заданным точкам и соответствующим значениям функции из аппроксимирующего квадратичного полинома с помощью приведенных выше формул.

Если точность аппроксимации исследуемой функции в интервале от x_1 до x_3 с помощью квадратичного полинома оказывается достаточно высокой, то в соответствии с предложенной стратегией поиска построенный полином можно использовать для оценивания координаты точки оптимума. Стационарные точки функции одной переменной определяются путем приравнивания к нолю ее первой производной и последующего нахождения корней полученного таким образом уравнения. В данном случае из уравнения

$$\frac{dq(x)}{dx} = a_1 + a_2\left(x - x_2\right) + a_2\left(x - x_1\right)$$

можно получить

$$\overline{x} = \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{a_1}{2a_2}.$$

Поскольку функция $f(x)$ на рассматриваемом интервале обладает свойством унимодальности, а аппроксимирующий квадратичный полином также является унимодальной функцией, можно ожидать, что величина $\overline{x}$ окажется приемлемой оценкой координаты точки истинного оптимума x^*.

Стратегия поиска

Метод квадратичной аппроксимации (метод Пауэлла) относится к методам точечного оценивания и последовательной стратегии. Задается начальная точка, и с помощью пробного шага находятся три точки так, чтобы они были как можно ближе к искомой точке минимума. В полученных точках вычисляются значения функции. Затем строится интерполяционный полином второй степени, проходящий через имеющиеся три точки. В качестве приближения точки минимума берется точка минимума полинома. Процесс поиска заканчивается, когда полученная точка отличается от наилучшей из трех опорных точек не более чем на заданную величину.

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальную (первую) точку x_1, величину шага по оси x $\Delta x > 0$, ε_1 и ε_2 – малые положительные значения, характеризующие точность.

Шаг 2. Вычислить вторую точку: $x_2 = x_1 + \Delta x$.

Шаг 3. Вычислить значения функции в точках $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

Шаг 4. Сравнить точки $f(x_1)$ и $f(x_2)$:

а) если $f(x_1) > f(x_2)$, положить $x_3 = x_1 + 2\Delta x$ (рис. 2.5, а);

б) если $f(x_1) \le f(x_2)$, положить $x_3 = x_1 - \Delta x$ (рис. 2.5, б).

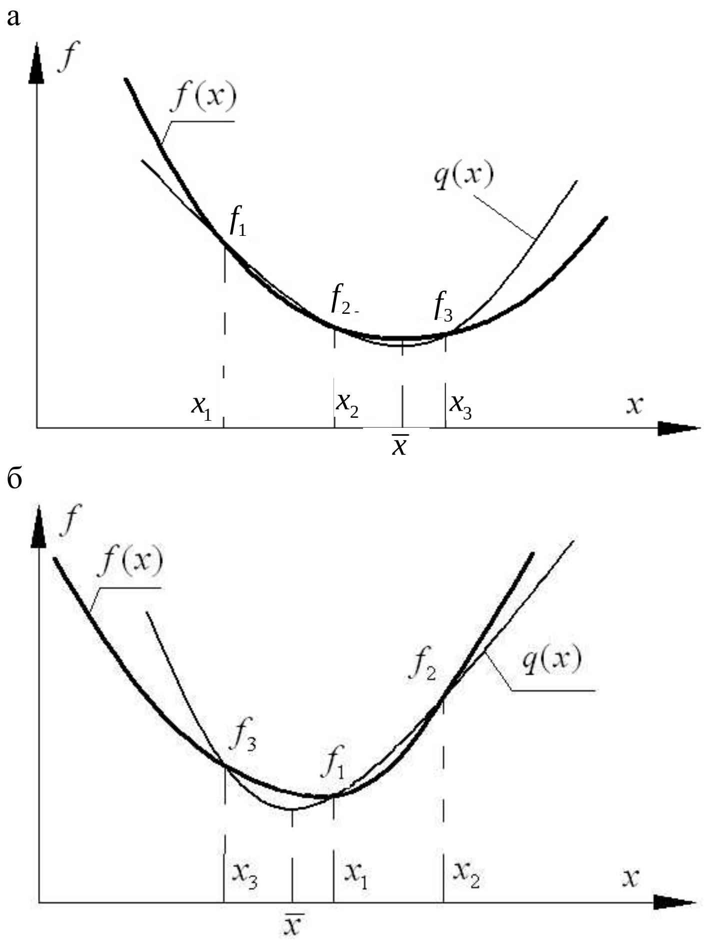


Рис. 2.5. Изменение расположения пробных точек в методе квадратичной аппроксимации:
а – $f(x_1) > f(x_2)$; б – $f(x_1) \le f(x_2)$

Шаг 5. Вычислить $f(x_3) = f_3$.

Шаг 6. Найти $F_{\min} = \min\{f_1, f_2, f_3\}$, $x_{\min} = x_i$.

Шаг 7. По точкам x_1, x_2, x_3 вычислить точку минимума $\overline{x}$ квадратичного интерполяционного полинома:

$$\overline{x} = \frac{1}{2} \frac{\left(x_2^2 - x_3^2\right) f_1 + \left(x_3^2 - x_1^2\right) f_2 + \left(x_1^2 - x_2^2\right) f_3}{\left(x_2 - x_3\right) f_1 + \left(x_3 - x_1\right) f_2 + \left(x_1 - x_2\right) f_3}$$

и величину функции $f(\overline{x})$.

Если знаменатель в формуле для $\overline{x}$ на некоторой итерации обращается в ноль, то результатом итерации является прямая. В этом случае рекомендуется обозначить $x_1 = x_{\min}$ и перейти к шагу 2.

Шаг 8. Проверить выполнение условий окончания расчета:

$$\left|\frac{F_{\min} - f(\overline{x})}{f(\overline{x})}\right| < \varepsilon_1, \ \left|\frac{x_{\min} - \overline{x}}{\overline{x}}\right| < \varepsilon_2.$$

а) если оба условия выполняются, закончить поиск $x^* = \overline{x}$;

б) если хотя бы одно из условий не выполняется и $\overline{x} \in [x_1; x_3]$, выбрать наименьшую точку ($x_{\min}$ или $\overline{x}$) и две точки по обе стороны от нее. Обозначить эти точки в обычном порядке и перейти к шагу 6;

в) если хотя бы одно из условий не выполняется и $\overline{x} \notin [x_1; x_3]$, то положить точку $x_1 = \overline{x}$ и перейти к шагу 2.

Комментарии

Метод квадратичной (параболической) аппроксимации относится к методам точечного оценивания и разработан Пауэллом.

Шаги 1–4 алгоритма позволяют выяснить направление убывания функции, а в некоторых случаях определить интервал, на котором функция является унимодальной.

Пример 2.5. Минимизировать функцию $f(x) = 2x^2 + \frac{16}{x}$, *используя метод квадратичной аппроксимации (метод Пауэлла). Начальная точка* $x_1 = 1$, *длина шага* $\Delta x = 1$, *относительная точность изменения функции* $\varepsilon_1 = 0{,}003$, *относительная точность изменения координаты* $\varepsilon_2 = 0{,}03$.

1^0. Задать начальную точку $x_1 = 1$, величину шага $\Delta x = 1$, условие окончания расчета для изменения значения функции $\varepsilon_1 = 0{,}003$ и координаты $\varepsilon_2 = 0{,}03$.

2^0. Вычислить значение второй точки: $x_2 = x_1 + \Delta x = 2$.

3^0. Вычислить значение функции в точках x_1 и x_2: $f(x_1) = 18$, $f(x_2) = 16$.

4^0. Сравнить значения функции в точках x_1 и x_2: $f(x_1) > f(x_2)$, и рассчитать третью точку: $x_3 = x_1 + 2\Delta x = 1 + 2 = 3$.

5^0. Вычислить значение функции в точке x_3: $f(x_3) = 23,33$.

6^0. Найти $F_{\min} = \min\{f_1, f_2, f_3\}$ и $x_{\min} = x_i : F_{\min}$:

$$F_{\min} = \min\{18; 16; 23{,}33\} = 16, \; x_{\min} = x_2 = 2.$$

7^0. По точкам x_1, x_2, x_3 вычислить точку минимума $\overline{x}$ квадратичного интерполяционного полинома и значение функции $f(\overline{x})$ в этой точке:

$$\overline{x} = \frac{1}{2}\frac{\left(x_2^2 - x_3^2\right) f_1 + \left(x_3^2 - x_1^2\right) f_2 + \left(x_1^2 - x_2^2\right) f_3}{\left(x_2 - x_3\right) f_1 + \left(x_3 - x_1\right) f_2 + \left(x_1 - x_2\right) f_3} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(4-9)18 + (9-1)16 + (1-4)23{,}33}{(2-3)18 + (3-1)16 + (1-2)23{,}33} = 1{,}714,$$

где $f(\overline{x}) = 15{,}21$.

8^0. Проверить условие окончания расчета по критерию ε_1:

$$\left|\frac{F_{\min} - f(\overline{x})}{f(\overline{x})}\right| = \left|\frac{16 - 15{,}210}{15{,}210}\right| = 0{,}0519 > \varepsilon_1 \; (\varepsilon_i = 0{,}003).$$

Условие окончания расчета не выполнено.

Определить и расположить новые расчетные точки в порядке возрастания: $\overline{x}$ – наилучшая минимальная точка, слева от нее располагается точка $x_1 = 1$, справа – $x_2 = 2$. Обозначим их в обычном порядке: $x_1 = 1$, $x_2 = \overline{x} = 1{,}714$, $x_3 = 2$. Значения функций в этих точках равны: $f(x_1) = 18$, $f(x_2) = 15{,}21$, $f(x_3) = 16$.

Продолжить расчет. Перейти к шагу 6.

6^1. Найти $F_{\min} = \min\{f_1, f_2, f_3\}$ и $x_{\min} = x_i$:

$$F_{\min} = \min\{18; 15{,}21; 16\} = 15{,}21, \; x_{\min} = x_2 = 1{,}714.$$

7^1. По точкам x_1, x_2, x_3 вычислить точку минимума $\overline{x}$ квадратичного интерполяционного полинома и значение функции $f(\overline{x})$ в этой точке:

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\frac{\left(x_2^2 - x_3^2\right) f_1 + \left(x_3^2 - x_1^2\right) f_2 + \left(x_1^2 - x_2^2\right) f_3}{\left(x_2 - x_3\right) f_1 + \left(x_3 - x_1\right) f_2 + \left(x_1 - x_2\right) f_3} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left(1{,}714^2 - 2^2\right)18 + \left(2^2 - 1^2\right)15{,}21 + \left(1^2 - 1{,}714^2\right)16}{(1{,}714 - 2)18 + (2 - 1)15{,}21 + (1 - 1{,}714)16} = 1{,}65,$$

$$f\left(\bar{x}\right) = 15{,}142.$$

8^1. Проверить условие окончания расчета по критерию ε_1:

$$\left|\frac{F_{\min} - f\left(\bar{x}\right)}{f\left(\bar{x}\right)}\right| = \left|\frac{15{,}210 - 15{,}142}{15{,}142}\right| = 0{,}0045 > \varepsilon_1 \ (\varepsilon_i = 0{,}003).$$

Условие окончания расчета не выполнено.

Определить и расположить новые расчетные точки в обычном порядке: $\bar{x}$ – наилучшая минимальная точка, слева от нее располагается точка $x_1 = 1$, справа – $x_2 = 1{,}714$. Обозначим их в обычном порядке: $x_1 = 1$, $x_2 = \bar{x} = 1{,}65$, $x_3 = 1{,}714$. Значения функций в этих точках: $f\left(x_1\right) = 18$, $f\left(x_2\right) = 15{,}142$, $f\left(x_3\right) = 15{,}21$.

6^2. Найти $F_{\min} = \min\left\{f_1, f_2, f_3\right\}$ и $x_{\min} = x_i$:

$$F_{\min} = \min\left\{18;\ 15{,}142;\ 15{,}21\right\} = 15{,}142,\ x_{\min} = x_2 = 1{,}65.$$

7^2. По точкам x_1, x_2, x_3 вычислить точку минимума $\bar{x}$ квадратичного интерполяционного полинома и значение функции $f\left(\bar{x}\right)$ в этой точке:

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\frac{\left(x_2^2 - x_3^2\right) f_1 + \left(x_3^2 - x_1^2\right) f_2 + \left(x_1^2 - x_2^2\right) f_3}{\left(x_2 - x_3\right) f_1 + \left(x_3 - x_1\right) f_2 + \left(x_1 - x_2\right) f_3} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left(1{,}65^2 - 1{,}714^2\right)18 + \left(1{,}714^2 - 1^2\right)15{,}142 + \left(1^2 - 1{,}65^2\right)15{,}21}{(1{,}65 - 1{,}714)18 + (1{,}714 - 1)15{,}142 + (1 - 1{,}65)15{,}21} = 1{,}6125,$$

$$f\left(\bar{x}\right) = 15{,}123.$$

8^2. Проверить условие окончания расчета по критерям ε_1 и ε_2:

$$\left|\frac{F_{\min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})}\right| = \left|\frac{15{,}142 - 15{,}123}{15{,}123}\right| = 0{,}0013 < \varepsilon_1 \ (\varepsilon_i = 0{,}003);$$

$$\left|\frac{x_{\min} - \bar{x}}{\bar{x}}\right| = \left|\frac{1{,}65 - 1{,}6125}{1{,}6125}\right| = 0{,}023 < \varepsilon_2 \ (\varepsilon_i = 0{,}03).$$

Условие окончания расчета выполняется. Расчет завершен. Точка минимума – $x^* \cong \bar{x} = 1{,}6125$.

Листинг программы в пакете MathCAD 15 и описание пользовательских функций, использованных в программе, приведены в прил. Б – рис. Б 5.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD 15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Размещение переменных в сопроводительном тексте.
- Просмотр результатов расчета, редактирование числа выводимых десятичных знаков и формата вывода целых чисел.
- Определение однострочной и многострочной функций и их вызов.
- Загрузка файла с формулами в текст программы.
- Векторизация.
- Неравенства.
- Доступ к столбцам и элементам массива.
- Функция augment.
- Символьные операции: дифференцирования, simplify, solve, substitute.
- Матричные операции.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых (см. пример 1.1).

2.6. Метод Ньютона–Рафсона

Относится к методам точечного оценивания.

В рамках схемы Ньютона–Рафсона предполагается, что функция $f(x)$ дважды дифференцируема. Работа алгоритма начинается в точке x_1, которая представляет начальное приближение (или начальную оценку) координаты стационарной точки, или корня уравнения $f'(x)=0$. Затем производится линейная аппроксимация функции $f'(x)$ в точке x_1, и точка, в которой аппроксимирующая линейная функция обращается в ноль, принимается в качестве следующего приближения.

Если точка x_k принята в качестве текущего приближения к стационарной точке, то линейная функция, аппроксимирующая функцию $f'(x)$ в точке x_k, записывается в виде

$$\tilde{f}'(x,x_k)=f'(x_k)+f''(x_k)(x-x_k).$$

Приравняв правую часть уравнения к нолю, получим следующее приближение:

$$x_{k+1}=x_k-\left[f'(x_k)/f''(x_k)\right].$$

На рис 2.6 показаны основные шаги реализации метода Ньютона–Рафсона. К сожалению, в зависимости от выбора начальной точки и вида функции алгоритм может как сходиться к истинной стационарной точке, так и расходиться, что отражено на рис. 2.7. Если начальная точка расположена правее x_0, то получаемые в результате последовательных приближений точки удаляются от стационарной точки z.

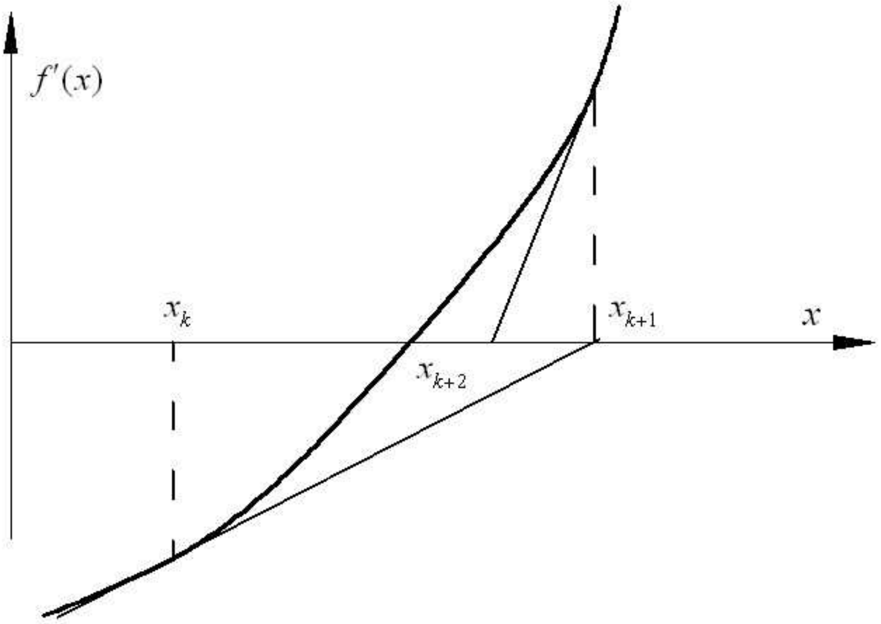


Рис. 2.6. Иллюстрация работы алгоритма по методу Ньютона–Рафсона (поиск приводит к стационарной точке)

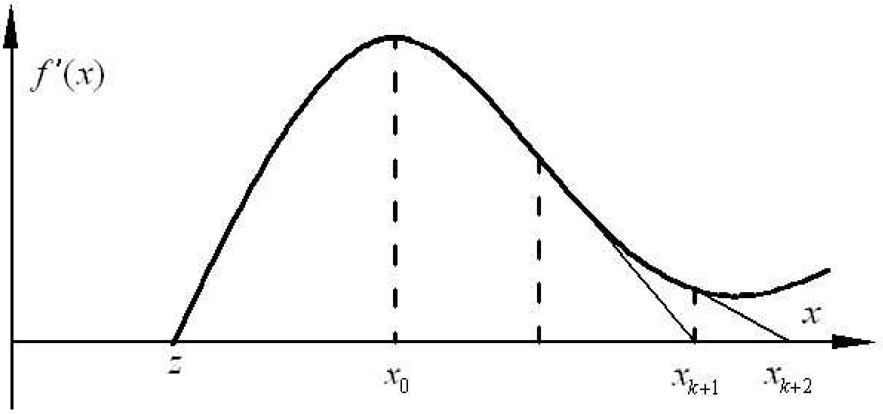


Рис. 2.7. Иллюстрация работы алгоритма по методу Ньютона–Рафсона (поиск не приводит к стационарной точке z)

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальную (первую) точку x_1; ε – малое положительное число, характеризующее точность расчета; M – максимальное число расчетов.

Шаг 2. Вычислить первую и вторую производные в точке x_k: $f'(x_k)$, $f''(x_k)$.

Шаг 3. Вычислить точку x_{k+1}: $x_{k+1} = x_k - \left[f'(x_k) / f''(x_k) \right]$.

Шаг 4. Проверить выполнение условия окончания расчета

$$\left| f'(x_{k+1}) \right| < \varepsilon:$$

а) если условие выполняется, закончить поиск и $x^* = x_{k+1}$;

б) если условие не выполняется и $k+1 < M$, перейти к шагу 3;

в) если $k+1 \geq M$, завершить расчет.

Пример 2.6. Минимизировать функцию $f(x) = 2x^2 + 16/x$, *используя метод Ньютона–Рафсона. Начальная точка* $x_1 = 1$; *точность расчета* $\varepsilon = 0{,}003$; *максимальное число расчетов* $M = 10$.

Перед началом расчета аналитически вычислить первую и вторую производные функции:

$$f'(x) = 4x - \frac{16}{x^2}, \; f''(x) = 4 + \frac{32}{x^3}.$$

1^0. Задать начальную точку $x_1 = 1$, точность расчета $\varepsilon_1 = 0{,}003$, максимальное число расчетов $M = 10$.

2^0. Положить $k = 0$.

3^0. Проверить выполнение условия окончания расчета. Величина первой производной $|f'(x_1)| = 12 \geq \varepsilon = 0{,}1$ больше заданной величины (условие выполнено).

4^0. Вычислить значения производных в точке x_1:

$$f'(x_1) = -12,\ f''(x_1) = 36.$$

5^0. Вычислить следующую точку: $x_2 = 1 - (-12/36) = 1{,}33$.

6^0. Проверить выполнение условия окончания расчета: количество итераций $j = 2 < M = 10$ меньше заданного (условие выполнено), величина модуля первой производной $|f'(x_2)| = 3{,}667 \geq \varepsilon$ больше заданной величины (условие не выполнено). Перейти к шагу 2.

2^1. Положить $k = 1$.

4^1. Вычислить значения производных в точке x_2:

$$f'(x_2) = -3{,}667,\ f''(x_2) = 17{,}5.$$

5^1. Вычислить следующую точку: $x_3 = 1{,}543$.

6^1. Проверить выполнение условия окончания расчета: количество итераций $j = 3 < M = 10$ меньше заданного (условие выполнено), величина модуля первой производной $|f'(x_3)| = 0{,}55 \geq \varepsilon$ больше заданной величины (условие не выполнено). Перейти к шагу 2.

2^2. Положить $k = 2$.

4^2. Вычислить значения первой и второй производных в точке x_3: $f'(x_3) = -0{,}55$, $f''(x_3) = 12{,}713$.

5^2. Вычислить следующую точку: $x_4 = 1{,}586$.

6^2. Проверить выполнение условия окончания расчета: количество итераций $j = 4 < M = 10$ меньше заданного (условие выполнено), величина модуля первой производной $|f'(x_4)| = 0{,}015 \geq \varepsilon$ больше заданной величины (условие не выполнено). Перейти к шагу 2.

2^3. Положить $k = 3$.

4^3. Вычислить значения первой и второй производных в точке x_4: $f'(x_4) = -0{,}015$, $f''(x_4) = 12{,}019$.

5^3. Вычислить следующую точку: $x_5 = 1{,}587$.

6^3. Проверить выполнение условия окончания расчета: количество итераций $j = 5 < M = 10$ меньше заданной (условие выполнено), величина модуля первой производной $\left| f'(x_5) \right| = 1{,}226 \cdot 10^{-5} \le \varepsilon$ меньше заданной величины (условие выполнено). Завершить расчет. Точка минимума – $x^* = 1{,}587$, значение производной в x^* – $f'(x^*) = 1{,}225 \cdot 10^{-5}$, значение функции в x^* – $f(x^*) = 15{,}119$.

Листинг программы в пакете MathCAD 15 и описание пользовательских функций, использованных в программе, приведены в прил. Б – рис. Б 6.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD 15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Размещение переменных в сопроводительном тексте.
- Просмотр результатов расчета, редактирование числа выводимых десятичных знаков и формата вывода целых чисел.
- Определение однострочной и многострочной функций и их вызов.
- Загрузка файла с формулами в текст программы.
- Векторизация.
- Неравенства.
- Доступ к столбцам и элементам массива.
- Функция augment.
- Символьные операции: дифференцирования, simplify, solve, substitute.
- Матричные операции и функции.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых (см. пример 1.1).

2.7. Метод средней точки

Относится к методам точечного оценивания.

Если функция $f(x)$ унимодальна в заданном интервале поиска, то точкой оптимума является точка, в которой $f'(x) = 0$. Если при этом имеется возможность вычисления как значения функции, так и ее производной, то для нахождения корня уравнения $f'(x)=0$ можно воспользоваться эффективным алгоритмом исключения интервалов, на каждой итерации которого рассматривается лишь одна пробная точка. Например, если в точке z выполняется неравенство $\left|f'(z)<0\right|$, то с учетом предположения об унимодальности естественно утверждать, что точка минимума не может находиться левее точки z. Другими словами, интервал $x \le z$ подлежит исключению. С другой стороны, если $f'(z)>0$, то точка минимума не может находиться правее z и интервал $x \ge z$ можно исключить. Приведенные рассуждения лежат в основе логической структуры *метода средней точки* (рис 2.8), который иногда называют *поиском Больцано*.

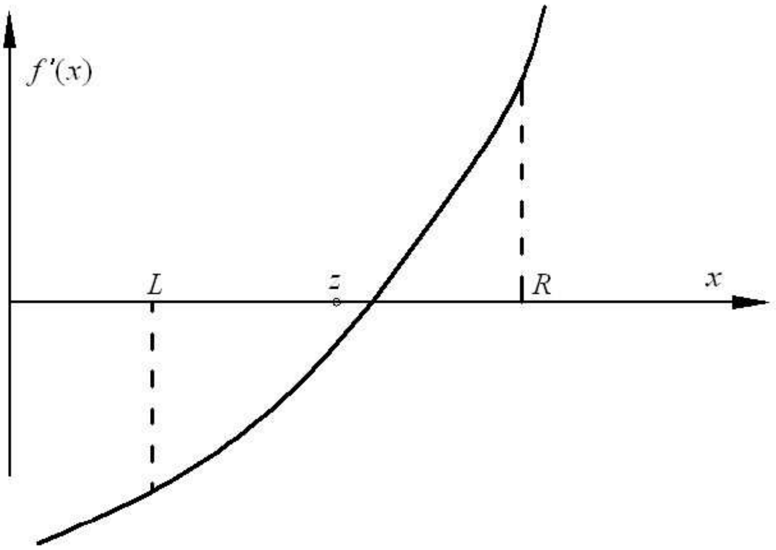


Рис. 2.8. Иллюстрация работы алгоритма метода средней точки

Определим точки L и R таким образом: $f'(L)<0$ и $f'(R)>0$. Стационарная точка расположена между точками L и R. Вычислим значение производной функции в средней точке рассматриваемого интервала $z=(L+R)/2$. Если $f'(z)>0$, то интервал (z,R) можно исключить из интервала поиска. С другой стороны, если $f'(z)<0$, то можно исключить интервал $(L;z)$. Ниже дается формализованное описание шагов алгоритма.

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $[a;b]$ и параметр сходимости ε – малое положительное число, характеризующие точность расчета.

Шаг 2. Положить $L = a$, $R = b$; при этом $f'(a) < 0$ и $f'(b) > 0$.

Шаг 3. Вычислить среднюю точку интервала: $z = (L + R)/2$.

Шаг 4. Вычислить значение производной в точке z: $f'(z)$.

Шаг 5. Проверить условие выполнения окончания расчета:

а) если $|f'(z)| \le \varepsilon$, закончить поиск;

б) если $|f'(z)| > \varepsilon$, продолжить поиск и сформировать новый интервал неопределенности:

- если $f'(z) < 0$, положить $L = z$ и перейти к шагу 3;
- если $f'(z) > 0$, положить $R = z$ и перейти к шагу 3.

Следует отметить, что логическая структура поиска в соответствии с изложенным методом исключения интервалов основана лишь на исследовании знака производной независимо от значений, которые эта производная принимает.

Пример 2.7. Минимизировать функцию $f(x) = 2x^2 + (16/x)$, *используя метод средней точки. Начальный интервал неопределенности –* $[a; b] = [1; 2{,}5]$, *точности расчета –* $\varepsilon = 0{,}3$.

Перед началом расчета аналитически вычислить первую и вторую производные функции: $f'(x) = 4x - 16/x^2$.

1^0. Задать начальный интервал неопределенности $[a; b] = [1; 2{,}5]$ и параметр сходимости $\varepsilon = 0{,}3$.

2^0. Положить $L_1 = a \pm$, $R_1 = b$.

3^0. Положить $k = 0$.

4^0. Вычислить среднюю точку интервала $[L_1; R_1] = [1; 2{,}5]$: $z_1 = (L_1 + R_1)/2 = 1{,}75$.

5^0. Вычислить значение первой производной в точке z_1: $f'(z_1) = 1{,}776$.

6^0. Проверить условие выполнения окончания расчета: $|f'(z_1)| = 1{,}776 > \varepsilon$ $(\varepsilon = 0{,}3)$. Условие выполняется. Продолжить расчет.

7^0. Вычислить следующий интервал: знак производной $f'(z_1) = 1{,}776 > 0$, следовательно, $[L_2; R_2 = z_1] = [1; 1{,}75]$. Перейти к шагу 3.

2^1. Положить $k=1$.

4^1. Вычислить среднюю точку интервала $[L_2; R_2]=[1; 1{,}75]$: $z_2=(L_2+R_2)/2=1{,}375$.

5^1. Вычислить значение первой производной в точке z_2: $f'(z_2)=-2{,}963$.

6^1. Проверить условие выполнения окончания расчета: $|f'(z_2)|=2{,}963>\varepsilon$ $(\varepsilon=0{,}3)$. Условие выполняется. Продолжить расчет.

7^1. Вычислить следующий интервал: знак производной $f'(z_2)=-2{,}963<0$, следовательно, $[L_3=z_2; R_3]=[1{,}375; 1{,}75]$. Перейти к шагу 3.

2^2. Положить $k=2$.

4^2. Вычислить среднюю точку интервала $[L_3; R_3]=[1{,}375; 1{,}75]$: $z_3=(L_3+R_3)/2=1{,}563$.

5^2. Вычислить значение первой производной в точке z_3: $f'(z_3)=-0{,}304$.

6^2. Проверить условие выполнения окончания расчета: $|f'(z_2)|=0{,}304>\varepsilon$ $(\varepsilon=0{,}3)$. Условие выполняется. Продолжить расчет.

7^2. Вычислить следующий интервал: знак производной $f'(z_3)=-0{,}304<0$, следовательно, $[L_4=z_3; R_4]=[1{,}563; 1{,}75]$. Перейти к шагу 3.

2^3. Положить $k=3$.

4^3. Вычислить среднюю точку интервала $[L_3; R_3]=[1{,}563; 1{,}75]$: $z_3=(L_3+R_3)/2=1{,}656$.

5^3. Вычислить значение первой производной в точке z_3: $f'(z_3)=0{,}792$.

6^3. Проверить условие выполнения окончания расчета: $|f'(z_2)|=0{,}792>\varepsilon$ $(\varepsilon=0{,}3)$. Условие выполняется. Продолжить расчет.

7^3. Вычислить следующий интервал: знак производной $f'(z_3) = 0{,}792 > 0$, следовательно, $[L_4; R_4 = z_3] = [1{,}563; 1{,}656]$. Перейти к шагу 3.

2^4. Положить $k = 4$.

4^4. Вычислить среднюю точку интервала $[L_4; R_4] = [1{,}563; 1{,}656]$: $z_4 = (L_4 + R_4)/2 = 1{,}609$.

5^4. Вычислить значение первой производной в точке z_4: $f'(z_4) = 0{,}26$.

6^4. Проверить условие выполнения окончания расчета: $|f'(z_4)| = 0{,}26 < \varepsilon\ (\varepsilon = 0{,}3)$. Условие выполняется. Расчет завершен. Точка минимума – $x^* = z_4 = 1{,}609$, значение производной в x^* – $f'(x^*) = 0{,}26$, значение функции в x^* – $f(x^*) = 15{,}122$.

Листинг программы в пакете MathCAD 15 и описание пользовательских функций, использованных в программе, приведены в прил. Б – рис. Б 7.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD 15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Размещение переменных в сопроводительном тексте.
- Просмотр результатов расчета, редактирование числа выводимых десятичных знаков и формата вывода целых чисел.
- Определение однострочной и многострочной функций и их вызов.
- Загрузка файла с формулами в текст программы.
- Векторизация.
- Неравенства.
- Доступ к столбцам и элементам массива.
- Функция augment.
- Символьные операции: дифференцирования, simplify, solve, substitute.
- Матричные операции и функции.
- Дискретный аргумент.

- Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых (см. пример 1.1).

2.8. Метод секущих

Относится к методам точечного оценивания.

Метод секущих, являющийся комбинацией метода Ньютона и общей схемы исключения интервалов, ориентирован на нахождение корня уравнения $f'(x)=0$ в интервале $[a;b]$, если корень существует.

Предположим, что в процессе поиска стационарной точки функции $f(x)$ в интервале $[a;b]$ обнаружены точки L и R, в которых знаки производной различны. В этом случае алгоритм метода секущих позволяет аппроксимировать функцию $f'(x)$ «секущей прямой» (прямой линией, соединяющей две точки) и найти точку, в которой секущая графика $f'(x)$ пересекает ось абсцисс (рис. 2.9), которая и будет следующим приближением. Таким образом, следующее приближение к стационарной точке $x*$ определится по формуле

$$z=R-\frac{f'(R)}{[f'(R)-f'(L)]/(R-L)}.$$

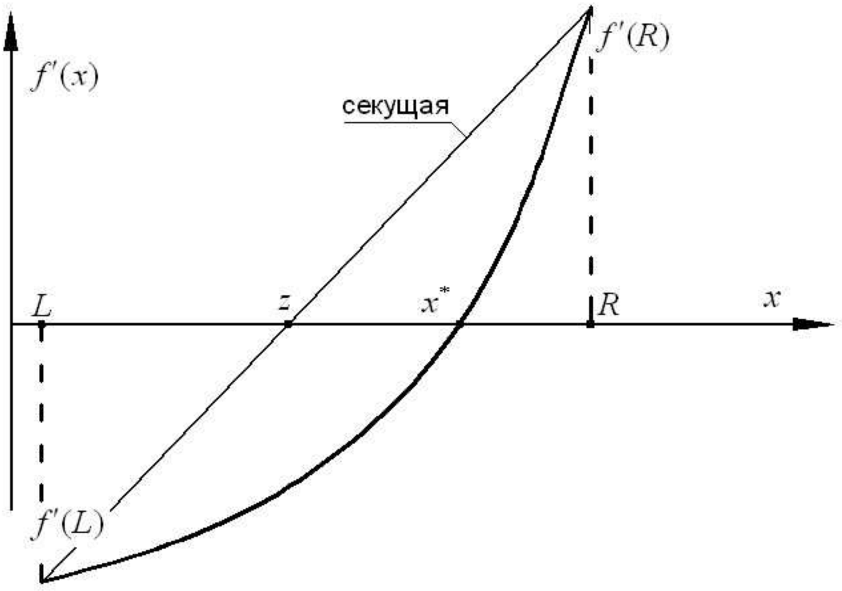


Рис. 2.9. Иллюстрация работы алгоритма метода секущих

Если $\left|f'(z)\right| \le \varepsilon$, поиск следует закончить. В противном случае необходимо выбрать одну из точек (L или R) таким образом, чтобы знаки производной в этой точке и точке z были различны, а затем повторить основной шаг алгоритма. Например, в ситуации, показанной на рис. 2.9, в качестве двух следующих точек должны быть выбраны точки z и R. Видно, что в отличие от метода средней точки метод секущих основан на исследовании не только знака, но и значений производной в пробных точках и поэтому в ряде случаев позволяет исключить более половины интервала поиска (см. рис. 2.9).

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $[a; b]$ и параметр сходимости ε – малое положительное число, характеризующее точность расчета.

Шаг 2. Положить $L = a$, $R = b$; при этом $f'(a) < 0$ и $f'(b) > 0$.

Шаг 3. Вычислить производные в точках L и R: $f'(L)$, $f'(R)$.

Шаг 4. Вычислить следующую точку:

$$z = R - \frac{f'(R)}{[f'(R) - f'(L)]/(R - L)}.$$

Шаг 5. Вычислить производную в точке z: $f'(z)$.

Шаг 6. Проверить условие выполнения окончания расчета:

а) если $\left|f'(z)\right| \le \varepsilon$, закончить поиск;

б) если $\left|f'(z)\right| > \varepsilon$, продолжить поиск и сформировать новый интервал неопределенности:

- если $f'(z) < 0$, положить $L = z$ и перейти к шагу 3;
- если $f'(z) > 0$, положить $R = z$ и перейти к шагу 3.

Пример 2.8. Минимизировать функцию $f(x) = 2x^2 + (16/x)$, *используя метод секущих. Начальный интервал неопределенности –* $[a; b] = [1; 5]$, *точности расчета –* $\varepsilon = 0{,}3$.

Перед началом расчета аналитически вычислить первую производную функции: $f'(x) = 4x - 16/x^2$ и написать однострочную функцию для расчета внутренней точки.

1^0. Задать начальный интервал неопределенности $[a; b] = [1; 5]$ и параметр сходимости $\varepsilon = 0{,}3$.

2^0. Положить $L_1 = a$, $R_1 = b$.

3^0. Положить $k = 0$.

4^0. Вычислить значение первой производной в точках L_1 и R_1: $f'(L_1) = -12$, $f'(R_1) = 19{,}36$.

5^0. Вычислить внутреннюю точку интервала $[L_1; R_1] = [1; 5]$:

$$z_1 = R_1 - \frac{f'(R_1)}{[f'(R_1) - f'(L_1)]/(R_1 - L_1)} = 2{,}53.$$

6^0. Вычислить значение производной в точке z_1: $f'(z_1) = 7{,}624$.

7^0. Проверить условие выполнения окончания расчета:

$$|f'(z_1)| = 7{,}624 > \varepsilon \; (\varepsilon = 0{,}3).$$

Условие выполняется. Продолжить расчет.

8^0. Вычислить следующий интервал: $f'(z_1) = 7{,}624 > 0$, следовательно, $[L_2; R_2 = z_1] = [1; 2{,}531]$. Перейти к шагу 3.

3^1. Положить $k = 1$.

4^1. Вычислить значение первой производной в точках L_2 и R_2: $f'(L_2) = -12$, $f'(R_2) = 7{,}624$.

5^1. Вычислить внутреннюю точку интервала $[L_2; R_2] = [1; 2{,}531]$:

$$z_2 = R_2 - \frac{f'(R_2)}{[f'(R_2) - f'(L_2)]/(R_2 - L_2)} = 1{,}936.$$

6^1. Вычислить значение производной в точке z_2: $f'(z_2) = 3{,}475$.

7^1. Проверить условие выполнения окончания расчета:

$$|f'(z_2)| = 1{,}531 > \varepsilon \; (\varepsilon = 0{,}3).$$

Условие выполняется. Продолжить расчет.

8^1. Вычислить следующий интервал: $f'(z_2) = 3{,}475 > 0$, следовательно, $[L_3; R_3 = z_2] = [1; 1{,}931]$. Перейти к шагу 3.

3^2. Положить $k = 2$.

4^2. Вычислить значение первой производной в точках L_3 и R_3:

$$f'(L_3) = -12,\ f'(R_3) = 3{,}475.$$

5^2. Вычислить внутреннюю точку интервала $[L_3; R_3] = [1; 1{,}931]$:

$$z_3 = R_3 - \frac{f'(R_3)}{[f'(R_3) - f'(L_3)]/(R_3 - L_3)} = 1{,}726.$$

6^2. Вычислить значение производной в точке z_3: $f'(z_3) = 1{,}531$.

7^2. Проверить условие выполнения окончания расчета:

$$|f'(z_3)| = 1{,}531 > \varepsilon\ (\varepsilon_i = 0{,}3).$$

Условие выполняется. Продолжить расчет.

8^2. Вычислить следующий интервал: $f'(z_3) = 1{,}531 > 0$, следовательно, $[L_4; R_4 = z_3] = [1; 1{,}726]$. Перейти к шагу 3.

3^3. Положить $k = 3$.

4^3. Вычислить значение первой производной в точках L_4 и R_4: $f'(L_4) = -12$, $f'(R_4) = 1{,}644$.

5^3. Вычислить внутреннюю точку интервала $[L_4; R_4] = [1; 1{,}726]$:

$$z_4 = R_4 - \frac{f'(R_4)}{[f'(R_4) - f'(L_4)]/(R_4 - L_4)} = 1{,}644.$$

6^3. Вычислить значение производной в точке z_4: $f'(z_4) = 0{,}652$.

7^3. Проверить условие выполнения окончания расчета:

$$|f'(z_4)| = 0{,}652 > \varepsilon\ (\varepsilon = 0{,}3).$$

Условие выполняется. Продолжить расчет.

8^3. Вычислить следующий интервал: $f'(z_4) = 0{,}652 > 0$, следовательно, $[L_5; R_5 = z_4] = [1; 1{,}644]$. Перейти к шагу 3.

3^4. Положить $k = 4$.

4^4. Вычислить значение первой производной в точках L_5 и R_5:

$$f'(L_5) = -12,\ f'(R_5) = 0{,}652.$$

5^4. Вычислить внутреннюю точку интервала $[L_5; R_5] = [1; 1{,}644]$:

$$z_5 = R_5 - \frac{f'(R_5)}{[f'(R_5) - f'(L_5)]/(R_5 - L_5)} = 1{,}61.$$

6^4. Вычислить значение производной в точке z_5: $f'(z_5) = 0{,}273$.

7^4. Проверить условие выполнения окончания расчета: $\left|f'(z_5)\right| = 0{,}273 < \varepsilon, (\varepsilon = 0{,}3)$. Условие выполняется. Расчет завершен. Точка минимума – $x{*} = z_4 = 1{,}61$, значение производной в $x{*}$ – $f'(x{*}) = 0{,}273$, значение функции в x^* – $f(x{*}) = 15{,}122$.

Листинг программы в пакете MathCAD 15 и описание пользовательских функций, использованных в программе, приведены в прил. Б – рис. Б 8.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD 15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Размещение переменных в сопроводительном тексте.
- Просмотр результатов расчета, редактирование числа выводимых десятичных знаков и формата вывода целых чисел.
- Определение однострочной и многострочной функций и их вызов.
- Загрузка файла с формулами в текст программы.
- Векторизация.
- Неравенства.
- Доступ к столбцам и элементам массива.
- Функция augment.
- Символьные операции: дифференцирования, simplify, solve, substitute.
- Матричные операции и функции.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых (см. пример 1.1).

2.9. Метод кубической аппроксимации

Относится к методам точечного оценивания.

Подлежащая минимизации функция $f(x)$ аппроксимируется полиномом третьего порядка. Логическая схема данного метода аналогична схеме методов с использованием квадратичной аппроксимации. Однако в данном случае построение аппроксимирующего полинома проводится на основе меньшего числа точек, поскольку в каждой точке можно вычислять значения как функции, так и ее производной (рис. 2.10).

Работа алгоритма начинается в произвольно выбранной точке x_1: находится другая точка x_2, такая, что производные $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$ имеют различные знаки. Другими словами, необходимо заключить стационарную точку $\overline{x}$, в которой $f'(x) = 0$, в интервал между точками x_1 и x_2. Аппроксимирующая кубичная функция записывается в следующем виде:

$$\overline{f}(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + a_3(x - x_1)^2(x - x_2).$$

Параметры a_0, a_1, a_2, a_3 уравнения подбираются таким образом, чтобы значения $\overline{f}(x)$ и ее производной в точках x_1 и x_2 совпадали со значениями $f(x_1)$, $f(x_2)$ и $f'(x_1)$, $f'(x_2)$ в этих точках.

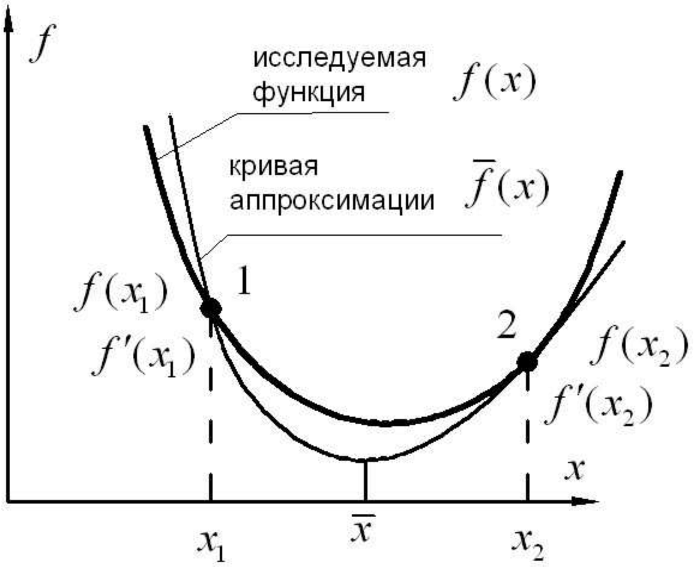


Рис. 2.10. Иллюстрация работы алгоритма метода кубической аппроксимации

Первая производная функции $\overline{f}(x)$ равна:

$$\frac{d\,\overline{f}(x)}{dx} = a_1 + a_2(x - x_1) + a_2(x - x_2) + a_3(x - x_1)^2 + 2a_3(x - x_1)(x - x_2).$$

Коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 из уравнения для $\overline{f}(x)$ определяются по известным значениям $f(x_1)$, $f'(x_1)$, $f(x_2)$, $f'(x_2)$ путем решения следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} f_1 = f(x_1) = a_0; \\ f_2 = f(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_1); \\ f_1' = f'(x_1) = a_1 + a_2(x_1 - x_2); \\ f_2' = f'(x_2) = a_1 + a_2(x_2 - x_1) + a_3(x_2 - x_1)^2. \end{cases}$$

Данная система легко решается рекурсивным методом. После того как коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 найдены, действуя по аналогии со случаем квадратичной аппроксимации можно оценить координату стационарной точки функции с помощью аппроксимирующего полинома третьей степени $\overline{f}(x)$. При этом приравнивание к нолю производной $d\,\overline{f}(x)/dx$ приводит к квадратному уравнению. Используя формулу для вычисления корней квадратного уравнения, запишем решение, определяющее стационарную точку аппроксимирующего кубичного полинома, в следующем виде:

$$\overline{x} = \begin{cases} x_2, & \text{если } \mu < 0; \\ x_2 - \mu(x_2 - x_1), & \text{если } 0 \le \mu \le 1; \\ x_1, & \text{если } \mu > 0, \end{cases}$$

где $\mu = \dfrac{f_2' + \omega - z}{f_2' - f_1' + 2\omega}$; $z = \dfrac{3\left(f_1' - f_2'\right)}{x_2 - x_1} + f_1' + f_2'$;

$$\omega = \begin{cases} \left(z^2 - f_1'/f_2'\right)^{0,5}, \text{ если } x_1 < x_2; \\ -\left(z^2 - f_1'/f_2'\right)^{0,5}, \text{ если } x_1 > x_2. \end{cases}$$

Формула для ω обеспечивает надлежащий выбор одного из двух корней квадратного уравнения для значений μ, заключенных в интервале от ноля до единицы. Формула для $\overline{x}$ гарантирует, что получаемая точка $\overline{x}$ расположена между точками x_1 и x_2.

Затем снова выбираются две точки для реализации процедуры кубичной аппроксимации $\overline{x}$ и одна из точек x_1 или x_2, причем значения производной исследуемой функции в этих точках должны быть противоположными по знаку. Процедура кубичной аппроксимации повторяется.

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальную точку $x0$, величину шага $\Delta x > 0$ и малые положительные числа, характеризующие точность расчета.

Шаг 2. Вычислить $f'(x0)$.

Шаг 3. Проверить знак производной в точке $x0$:

а) если $f'(x0) < 0$, вычислить $x_{k+1} = x_k + 2^k \Delta$ для значений $k = 0, 1, \ldots$, вплоть до точки x_M, в которой $f_1'\left(x_{M-1}\right) f_2'\left(x_M\right) \leq 0$;

б) если $f'(x0) > 0$, вычислить $x_{k+1} = x_k - 2^k \Delta$ для значений $k = 0,1,\ldots$, вплоть до точки x_M, в которой $f_1'\left(x_{M-1}\right) f_2'\left(x_M\right) \leq 0$.

Шаг 4. Положить $x_1 = x_{M-1}$, $x_2 = x_M$ и вычислить $f\left(x_1\right) = f_1$, $f'\left(x_1\right) = f_1'$, $f\left(x_2\right) = f$, $f'\left(x_2\right) = f_2'$.

Шаг 5. Найти стационарную точку $\overline{x}$ аппроксимирующего кубичного полинома по формуле:

$$\overline{x} = \begin{cases} x_2, & \text{если } \mu < 0; \\ x_2 - \mu\left(x_2 - x_1\right), & \text{если } 0 \leq \mu \leq 1; \\ x_1, & \text{если } \mu > 1, \end{cases}$$

где $\mu = \dfrac{f_2' + \omega - z}{f_2' - f_1' + 2\omega}$; $z = \dfrac{3\left(f_1 - f_2\right)}{x_2 - x_1} + f_1' + f_2'$;

$$\omega = \begin{cases} \left(z^2 - f_1' \cdot f_2'\right)^{0,5}, & \text{если } x_1 < x_2; \\ -\left(z^2 - f_1' \cdot f_2'\right)^{0,5}, & \text{если } x_1 > x_2, \end{cases}$$

и значение $f\left(\overline{x}\right)$.

Шаг 6. Проверить условие убывания:

а) если $f(\overline{x}) < f(x_1)$, перейти к шагу 7;

б) если $f(\overline{x}) \geq f(x_1)$, вычислять $\overline{x}$ по формуле $\overline{x} = \overline{x} - \dfrac{\overline{x} - x_1}{2}$ до тех пор, пока не будет выполняться неравенство $f(\overline{x}) \leq f(x_1)$.

Шаг 7. Проверка выполнения условий окончания: $\left|f'(\overline{x})\right| \leq \varepsilon_1$ и $\left|\overline{x} - x_1/\overline{x}\right| \leq \varepsilon_2$:

а) если условия выполнены, поиск закончить и $x^* \cong \overline{x}$;

б) если хотя бы одно из условий не выполняется, положить либо $x_1 = \overline{x}$, $x_2 = x_1$, если $f'\left(\overline{x}\right) f_1'\left(x_1\right) < 0$, либо $x_1 = \overline{x}$, $x_2 = x_2$, если $f'\left(\overline{x}\right) f_1'\left(x_2\right) > 0$. Перейти к шагу 5.

Комментарии

1. На шагах 2 и 3 реализуют процедуру поиска границ интервала неопределенности по эвристическому методу, где изменение знака производной свидетельствует о переходе через точку оптимума.

2. Формула, используемая на шаге 5, гарантирует, что точка $\overline{x}$ не выйдет за границы интервала $\left[x_1; x_2\right]$.

3. На шаге 6 проверяют, действительно ли точка $\overline{x}$ является приближением к минимуму.

4. На шаге 7 из точек x_1, x_2, $\overline{x}$ выбирают две, в которых знаки первых производных различны, после чего процедура кубической аппроксимации повторяется.

5. Аппроксимирующий полином третьей степени строится по двум точкам вместо обычных четырех, так как в каждой точке используется информация о производной.

6. В случае, когда значения производной вычисляются непосредственно, метод поиска с использованием кубичной аппроксимации, безусловно, оказывается более эффективным по сравнению с любым из представленных выше методов поиска. Однако, если значение производной вычисляется путем разностного дифференцирования, то предпочтение следует отдать методу Пауэлла, основанному на квадратичной аппроксимации.

Пример 2.9. Минимизировать функцию $f(x) = 2x^2 + 16/x$, *используя метод кубической аппроксимации. Начальная точка –* $x0 = 1$, *шаг –* $\Delta x = 1$, *точность расчета по производной –* $\varepsilon_1 = 0{,}01$, *по координате –* $\varepsilon_2 = 0{,}03$.

Перед началом расчета аналитически вычислить первую производную функции: $f'(x) = 4x - 16\big/x^2$ и написать однострочную функцию для расчета внутренней точки.

Определение начального интервала неопределенности

1^0. Задать начальную точку – $x0 = 1$, шаг – $\Delta x = 1$, точность расчета по производной – $\varepsilon_1 = 0{,}01$, по координате – $\varepsilon_2 = 0{,}03$.

2^0. Вычислить производную в точке $x0$: $f'(x0) = -12 < 0$.

3^0. Вычислить следующую точку. Так как $f'(x0) < 0$, значит $x0_1 = x0 + \Delta x = 1 + 1 = 2$. Вычислить $f'(x0_1) = 4$. $f'(x0) f'(x0_1) < 0$, $M = 1$.

4^0. Положить $x_1 = x_{M-1} = x0 = 1$, $x_2 = x_M = x0_1 = 2$ и вычислить:

$$f'(x_1) = f'(1) = f_1' = -12,\ f(x_1) = f(1) = f_1 = 18,$$

$$f'(x_2) = f'(2) = f_2' = 4;\ f(x_2) = f(2) = f_2 = 16.$$

5^0. Вычислить:

$$z = \frac{3(18-16)}{1} + (-12) + 4 = -2;\ \omega = \left(4 - (-12)4\right)^{0{,}5} = 7{,}211;$$

$$\mu = \frac{4 + 7{,}211 - (-2)}{4 - (-12) + 2 \cdot 7{,}211} = 0{,}4343;$$

$$\bar{x} = 2 - 0{,}4343(2-1) = 1{,}5657;\ f(\bar{x}) = 15{,}1219.$$

6^0. Проверить условие убывания. Так как значение функции $f(\bar{x}) = 15{,}1219 < f(x_1) = 18$, надо перейти к шагу 7.

7^0. Проверить условие выполнения окончания расчета $\left|f'(\bar{x})\right| \le \varepsilon_1$: $\left|f'(\bar{x})\right| = \left|f'(1{,}5657)\right| = \left|-0{,}264\right| > \varepsilon_1 = 0{,}01$. Условие выполняется. Так как $f'(\bar{x}) f'(x_2) = -0{,}264 \cdot 4 < 0$, $x_1 = \bar{x} = 1{,}5657$, $x_2 = x_2 = 2$. Перейти к шагу 4.

4^1. Положить $x_1 = x_{M-1} = x0 = 1$, $x_2 = x_M = x0_1 = 2$ и вычислить:

$$f'(x_1) = f_1' = -0{,}264;\ f(x_1) = f_1 = 15{,}1219;$$

$$f'(x_2) = f_2' = 4;\ f(x_2) = f(2) = f_2 = 16.$$

5^1. Вычислить:

$$z = \frac{3(15{,}1219 - 16)}{0{,}4343} + (-0{,}264) + 4 = -2{,}3296;$$

$$\omega = \left(2{,}3296^2 - (-0{,}264)4\right)^{0{,}5} = 2{,}5462;$$

$$\mu = \frac{4 + 2{,}5462 - (-2{,}3296)}{4 - (-0{,}264) + 2 \cdot 2{,}5462} = 0{,}9486;$$

$$\overline{x} = 2 - 0{,}9486(2 - 1{,}5657) = 1{,}588,\ f(\overline{x}) = 15{,}119.$$

6^1. Проверить условие убывания.

Так как $f(\overline{x}) = 15{,}119 < f(x_1) = 15{,}1219$, надо перейти к шагу 7.

7^1. Проверить условие выполнения окончания расчета $|f'(\overline{x})| \le \varepsilon_1$ и $\left|\frac{\overline{x} - x_1}{\overline{x}}\right| \le \varepsilon_2$: $|f'(\overline{x})| = |f'(1{,}588)| = |0{,}0072| < \varepsilon_1\ (\varepsilon_1 = 0{,}01)$, условие выполняется, $\left|\frac{\overline{x} - x_1}{\overline{x}}\right| = \left|\frac{1{,}588 - 1{,}5657}{1{,}588}\right| = 0{,}014 \le \varepsilon_2\ (\varepsilon_2 = 0{,}03)$, условие выполняется. Расчет завершен. Точка минимума – $x^* \cong \overline{x} = 1{,}588$, значение функции в точке x^* – $f(x^*) = 15{,}119$.

Листинг программы в пакете MathCAD 15 и описание пользовательских функций, использованных в программе, приведены в прил. Б – рис. Б 9.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD 15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Размещение переменных в сопроводительном тексте.
- Просмотр результатов расчета, редактирование числа выводимых десятичных знаков и формата вывода целых чисел.
- Определение однострочной и многострочной функций и их вызов.
- Загрузка файла с формулами в текст программы.

- Векторизация.
- Неравенства.
- Доступ к столбцам и элементам массива.
- Функция augment, оператор if.
- Символьные операции: дифференцирования, simplify, solve, substitute.
- Матричные операции и функции.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых (см. пример 1.1).

2.10. Сравнение методов

Ниже проводится сравнение относительной эффективности рассмотренных методов исключения интервалов. Обозначим длину исходного интервала неопределенности L_1, а длину интервала, получаемого в результате N вычислений значений функции, – через L_N. В качестве показателя эффективности того или иного метода исключения интервалов введем в рассмотрение характеристику *относительного уменьшения* исходного интервала $R(N)=L_N/L_1$. При использовании метода равномерного поиска, метода деления интервала пополам и метода золотого сечения длина получаемого интервала составляет $L_1/(N+1)$, $L_1(0,5)^{N/2}$ и $L_1(0,618)^{N-1}$ соответственно. Функции для расчета относительного уменьшения интервала после N вычислений значений функции приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Функции для расчета $R(N)$

Функция $R(N)$	Метод исключения интервала
$2/(N+1)$	Метод деления интервала пополам
$(0{,}5)^{N/2}$	Метод деления интервала пополам
$(0{,}618)^{N-1}$	Метод золотого сечения

В табл. 2.2 представлены значения $R(N)$, соответствующие выбранным N, для трех методов поиска.

Таблица 2.2

Величины относительного уменьшения интервала

Метод поиска	Количество вычислений значений функции				
	$N = 2$	$N = 5$	$N = 10$	$N = 15$	$N = 20$
Деление интервала пополам	0,5	0,177	0,031	0,006	0,0009
Золотое сечение	0,618	0,146	0,013	0,001	0,0001
Равномерный поиск	0,667	0,333	0,182	0,125	0,095

Из табл. 2.2 следует, что поиск с помощью метода золотого сечения обеспечивает наибольшее относительное уменьшение исходного интервала при одном и том же количестве вычислений значений функции. С другой стороны, можно также сравнить количество вычислений значений функции, требуемых для достижения заданной величины относительного уменьшения интервала или заданной степени точности. Если величина $R(N) = E$ задана, то значение N вычисляется по следующим формулам:

- для метода деления интервала пополам $N = 2\ln(E)/\ln(0,5)$;
- для метода золотого сечения $N = 1 + [\ln(E)/\ln(0,618)]$;
- для метода равномерного поиска $N = (2/E) - 1$.

В табл. 2.3 приведены данные о количестве вычислений значений функции, необходимых для определения координаты точки минимума с заданной точностью.

Таблица 2.3

Требуемое количество вычислений значений функции

Метод поиска	Количество вычислений значений функции			
	$E = 0,1$	$E = 0,05$	$E = 0,01$	$E = 0,001$
Деление интервала пополам	7	9	14	20
Золотое сечение	6	8	11	16
Равномерный поиск	19	39	199	1999

Следует еще раз подчеркнуть, что метод золотого сечения оказывается более эффективным по сравнению с остальными методами, поскольку он требует наименьшего числа оцениваний значения функции для достижения одной и той же заданной точности.

Можно показать, что такие методы точечного оценивания, как метод Пауэлла или метод поиска с использованием кубичной аппроксимации и производных, существенно эффективнее методов исключения интервалов, среди которых выделяется метод золотого сечения. В частности известно, что применение схемы поиска с использованием квадратичной аппроксимации позволяет достигнуть асимптотически суперлинейной скорости сходимости к точке истинного минимума, т. е. отклонение $(k+1)$-й оценки от истинной координаты точки минимума пропорционально отклонению k-й оценки, возведенному в степень $\alpha > 1$. Для сравнения отметим, что если при реализации метода золотого сечения в качестве k-й оценки координаты точки истинного минимума берется координата средней точки интервала, полученного в результате k вычислений значения функции, то отклонение этой оценки от точной координаты линейно убывает при переходе от k-й к $(k+1)$-й итерации. Это означает, что в случае, когда интервалы сходимости сравнимы между собой, метод, основанный на квадратичной аппроксимации, сходится быстрее, чем любой из методов исключения интервалов. Разумеется, сделанный вывод справедлив лишь в предположении, что интервалы сходимости сравнимы между собой, а исследуемая функция является достаточно гладкой и унимодальной.

Результаты численных экспериментов, представленные в специальной литературе, не подтверждают преимущества методов с использованием производных и квадратичной аппроксимации или метода исключения интервалов над остальными методами. Если для вычисления значений целевой функции требуется значительное машинное время, то предпочтительнее использовать стратегию поиска, основанную на модификации метода Пауэлла.

Если необходимо получить решение с очень высокой степенью точности, то лучшими оказываются методы поиска на основе полиномиальной аппроксимации. С другой стороны, известно, что при исследовании мультимодальных или быстро изменяющихся функций метод Пауэлла сходится значительно медленнее, чем методы исключения интервалов. Таким образом, если очень важно добиться надежной работы алгоритма, то целесообразно выбрать метод золотого сечения. Поэтому поисковые методы типа метода Пауэлла следует использовать совместно с методом золотого сечения, переход к алгоритму которого осуществляется в тех случаях, когда реализация соответствующих итераций на ЭВМ связана с определенными трудностями.

Сравнительное исследование трех методов точечного оценивания, а именно метода средней точки, метода Пауэлла и метода поиска с использованием кубичной аппроксимации, было проведено в соответствии с учебной программой по университетскому (Purdue University) курсу теории оптимизации. Перечисленные методы использовались для решения задачи минимизации функции $f(x)=\sin^k(x)$ при различных значениях k. Кроме того, для сравнения был также использован метод золотого сечения как наилучший из методов исключения интервалов.

Для оценки эффективности выбранных методов использовались три характеристики: 1) время, затраченное на получение решения; 2) точность решения; 3) чувствительность к изменениям параметра сходимости. Первые две характеристики исследовались путем варьирования значений показателя степени k на множестве нечетных чисел от 1 до 79. Следует отметить, что для всех значений k минимум функции достигается в точке $x^*=4{,}71239$; при этом $f(x^*)=-1$. Однако с увеличением k степень гладкости функции, которая обладает узкими впадинами в окрестности точки минимума, уменьшается. Данное обстоятельство приводит к понижению точности и замедлению сходимости методов точечного оценивания.

Проверка методов на чувствительность проводилась путем варьирования значений параметра сходимости. Как и ожидалось, в результате исследований установлена тенденция к увеличению затрат времени на решение задачи с ростом показателя степени k, которая особенно ярко проявляется при реализации метода средней точки вследствие резкого увеличения модуля градиента функции в окрестности точки минимума. Однако возрастание показателя степени k не оказывает заметного влияния на продолжительность поиска с помощью метода золотого сечения. Аналогично точность решения, измеряемая как относительная (в процентах) ошибка оценивания координаты точки истинного минимума, падает с ростом k для всех трех методов – метода средней точки, метода Пауэлла и метода поиска с использованием кубичной аппроксимации. Однако метод золотого сечения оказывается весьма нечувствительным к изменениям крутизны функции. Исследования также показали, что чувствительность всех четырех выбранных методов к изменениям параметра сходимости минимальна.

2.11. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти начальный интервал неопределенности для поиска минимума функции $f(x)=(x-5)^2$ методом Свенна.

2. Найти минимум функции $f(x) = D\sin\left(Ax^B + C\right)$ на интервале [–1; 2] с точностью $\Delta x = 0,2$. Параметры A, B, C, D приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Параметры A, B, C, D функции $f(x) = D\sin\left(Ax^B + C\right)$

№ варианта	A	B	C	D
1	1	1	2	1
2	1	2	0	2
3	2	3	3	3

3. Найти минимум функции $f(x) = \frac{127}{4}x^2 - \frac{61}{4}x + 2$ методами золотого сечения, квадратичной аппроксимации при точности расчета $\Delta = 0{,}15$. Предварительно определить начальный интервал неопределенности из условия: начальная точка – $x_0 = 0{,}25$, шаг – $\Delta x = 0{,}25$.

4. Реализовать процедуру одномерного поиска точки оптимума функции $f(x) = 3x^2 + \frac{12}{x^3} - 5$ в интервале $0{,}5 \le x \le 2{,}5$, используя методы золотого сечения, деления интервала пополам, квадратичной аппроксимации, кубической аппроксимации. В каждом случае провести по четыре вычисления значений функции. Сравнить результирующие интервалы неопределенности.

5. Найти точку минимума функции $f(x) = \left(10x^3 + 3x^2 + x + 5\right)^2$. Заданы начальная точка $x0 = 2$ и длина шага $\Delta x = 0{,}5$. Найти границы начального интервала неопределенности эвристическим способом. Поиск минимума искать, используя методы золотого сечения и квадратичной аппроксимации.

6. Используя любой из методов одномерного поиска, минимизировать следующие функции с точностью до одного знака после запятой:

$f(x) = 3x^4 + (x-1)^2$ в интервале $[0;\,4]$;

$f(x) = 4x \cdot \sin(x)$ в интервале $[0;\,\pi]$;

$f(x) = 2(x-3)^2 + e^{0.5x^2}$ в интервале $[0;100]$.

СПИСОК ПРИМЕРОВ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильков Ю.В., Василькова Н.Н.** Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 256 с.

2. **Дьяконов В.П.** MathCAD 11/12/13 в математике: Справ. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 958 с.

3. Использование MathCAD в теории матриц: Метод. указания / И.В. Кудрявцева, В.А. Рыков, С.А. Рыков, С.В. Рыков. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2011. – 50 с.

4. **Охорзин В.А.** Прикладная математика в системе MathCAD: Учеб. пособие. 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Лань, 2008. – 352 с.

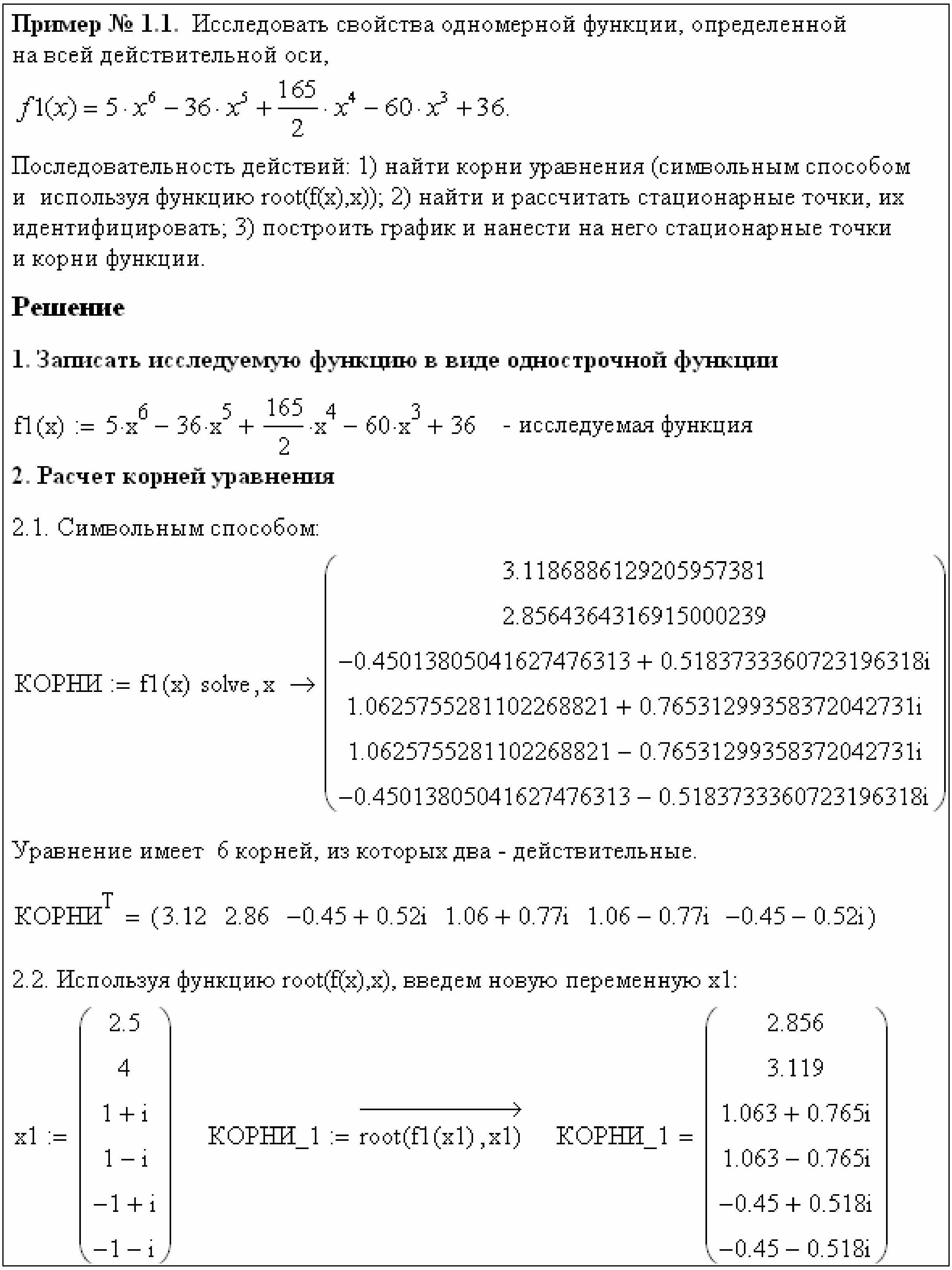
5. **Пантелеев А.В., Летова Т.А.** Методы оптимизации в примерах и задачах: Учеб. пособие. 2-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2005. – 544 с.

6. Практические занятия в пакете MathCAD по исследованию систем линейных алгебраических уравнений: Пособие / В.А. Рыков, С.А. Рыков, И.В. Кудрявцева, С.В. Рыков. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2009. – 107 с.

7. **Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгстел К.** Оптимизация в технике. В 2 кн. Кн. 1. – М.: Мир, 1986. – 349 с.

8. **Рыков С.В., Рябова Т.В.** Расчет линии фазового равновесия аммиака в пакете MathCAD // Холодильная техника и кондиционирование. 2013. № 2. С. 8.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ЛИСТИНГИ ПРИМЕРОВ В MATHCAD 15
АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ



Пример № 1.1. Исследовать свойства одномерной функции, определенной на всей действительной оси,

$$f1(x) = 5\cdot x^6 - 36\cdot x^5 + \frac{165}{2}\cdot x^4 - 60\cdot x^3 + 36.$$

Последовательность действий: 1) найти корни уравнения (символьным способом и используя функцию root(f(x),x)); 2) найти и рассчитать стационарные точки, их идентифицировать; 3) построить график и нанести на него стационарные точки и корни функции.

Решение

1. Записать исследуемую функцию в виде однострочной функции

$$f1(x) := 5\cdot x^6 - 36\cdot x^5 + \frac{165}{2}\cdot x^4 - 60\cdot x^3 + 36 \quad \text{- исследуемая функция}$$

2. Расчет корней уравнения

2.1. Символьным способом:

$$\text{КОРНИ} := f1(x)\ \text{solve}, x\ \rightarrow \begin{pmatrix} 3.1186886129205957381 \\ 2.8564364316915000239 \\ -0.45013805041627476313 + 0.51837333607231963 18i \\ 1.0625755281102268821 + 0.76531299358372042731i \\ 1.0625755281102268821 - 0.76531299358372042731i \\ -0.45013805041627476313 - 0.51837333607231963 18i \end{pmatrix}$$

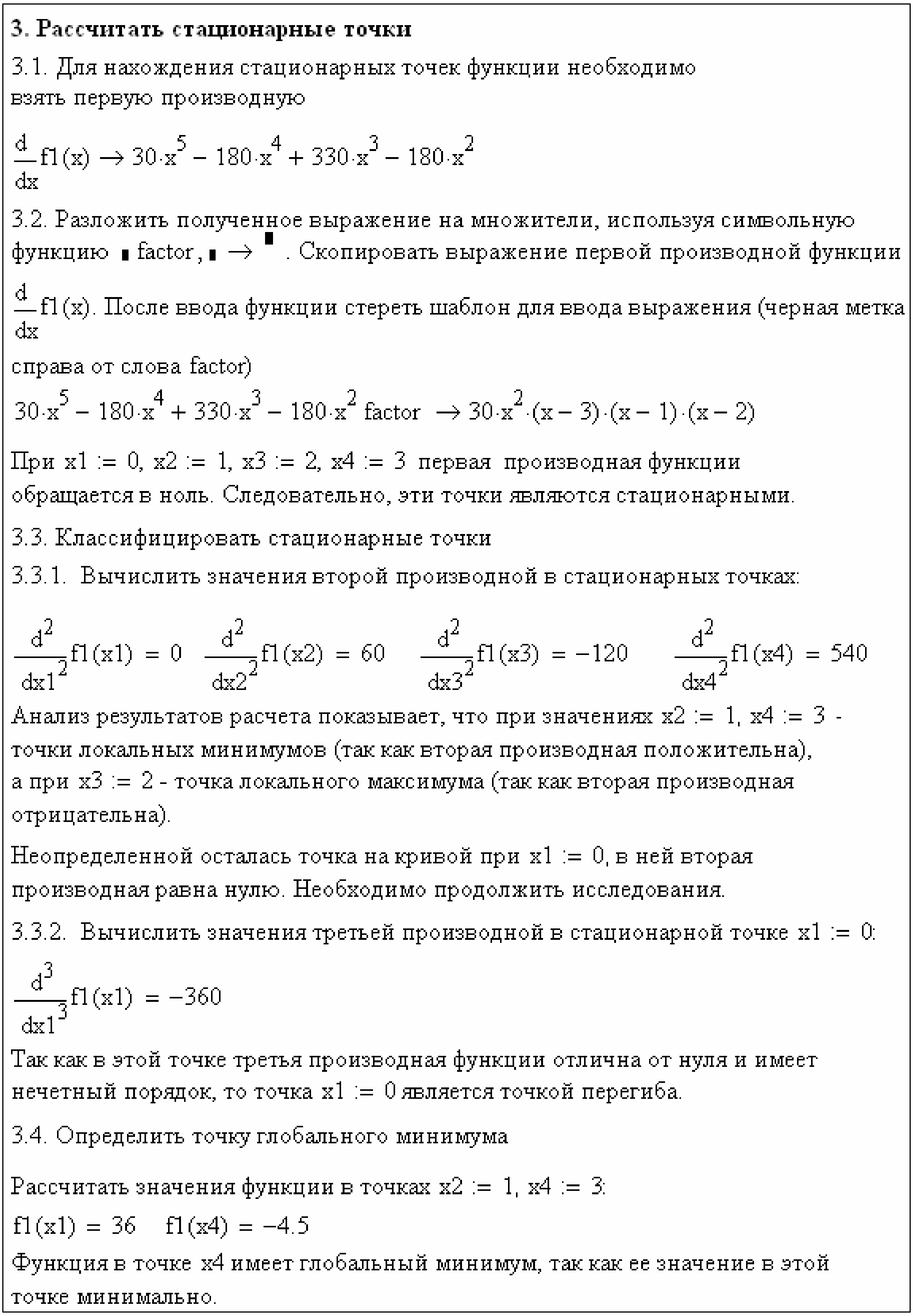
Уравнение имеет 6 корней, из которых два - действительные.

$$\text{КОРНИ}^{T} = (3.12\ \ 2.86\ \ -0.45 + 0.52i\ \ 1.06 + 0.77i\ \ 1.06 - 0.77i\ \ -0.45 - 0.52i)$$

2.2. Используя функцию root(f(x),x), введем новую переменную x1:

$$x1 := \begin{pmatrix} 2.5 \\ 4 \\ 1+i \\ 1-i \\ -1+i \\ -1-i \end{pmatrix} \qquad \text{КОРНИ\_1} := \overrightarrow{\text{root}(f1(x1), x1)} \qquad \text{КОРНИ\_1} = \begin{pmatrix} 2.856 \\ 3.119 \\ 1.063 + 0.765i \\ 1.063 - 0.765i \\ -0.45 + 0.518i \\ -0.45 - 0.518i \end{pmatrix}$$

Рис. А 1. Листинг программы исследования функции



3. Рассчитать стационарные точки

3.1. Для нахождения стационарных точек функции необходимо
взять первую производную

$$\frac{d}{dx}f1(x) \rightarrow 30\cdot x^5 - 180\cdot x^4 + 330\cdot x^3 - 180\cdot x^2$$

3.2. Разложить полученное выражение на множители, используя символьную функцию ■ factor, ■ → ■ . Скопировать выражение первой производной функции $\frac{d}{dx}f1(x)$. После ввода функции стереть шаблон для ввода выражения (черная метка справа от слова factor)

$$30\cdot x^5 - 180\cdot x^4 + 330\cdot x^3 - 180\cdot x^2 \text{ factor } \rightarrow 30\cdot x^2\cdot(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)$$

При $x1 := 0$, $x2 := 1$, $x3 := 2$, $x4 := 3$ первая производная функции обращается в ноль. Следовательно, эти точки являются стационарными.

3.3. Классифицировать стационарные точки

3.3.1. Вычислить значения второй производной в стационарных точках:

$$\frac{d^2}{dx1^2}f1(x1) = 0 \quad \frac{d^2}{dx2^2}f1(x2) = 60 \quad \frac{d^2}{dx3^2}f1(x3) = -120 \quad \frac{d^2}{dx4^2}f1(x4) = 540$$

Анализ результатов расчета показывает, что при значениях $x2 := 1$, $x4 := 3$ - точки локальных минимумов (так как вторая производная положительна),
а при $x3 := 2$ - точка локального максимума (так как вторая производная отрицательна).

Неопределенной осталась точка на кривой при $x1 := 0$, в ней вторая производная равна нулю. Необходимо продолжить исследования.

3.3.2. Вычислить значения третьей производной в стационарной точке $x1 := 0$:

$$\frac{d^3}{dx1^3}f1(x1) = -360$$

Так как в этой точке третья производная функции отлична от нуля и имеет нечетный порядок, то точка $x1 := 0$ является точкой перегиба.

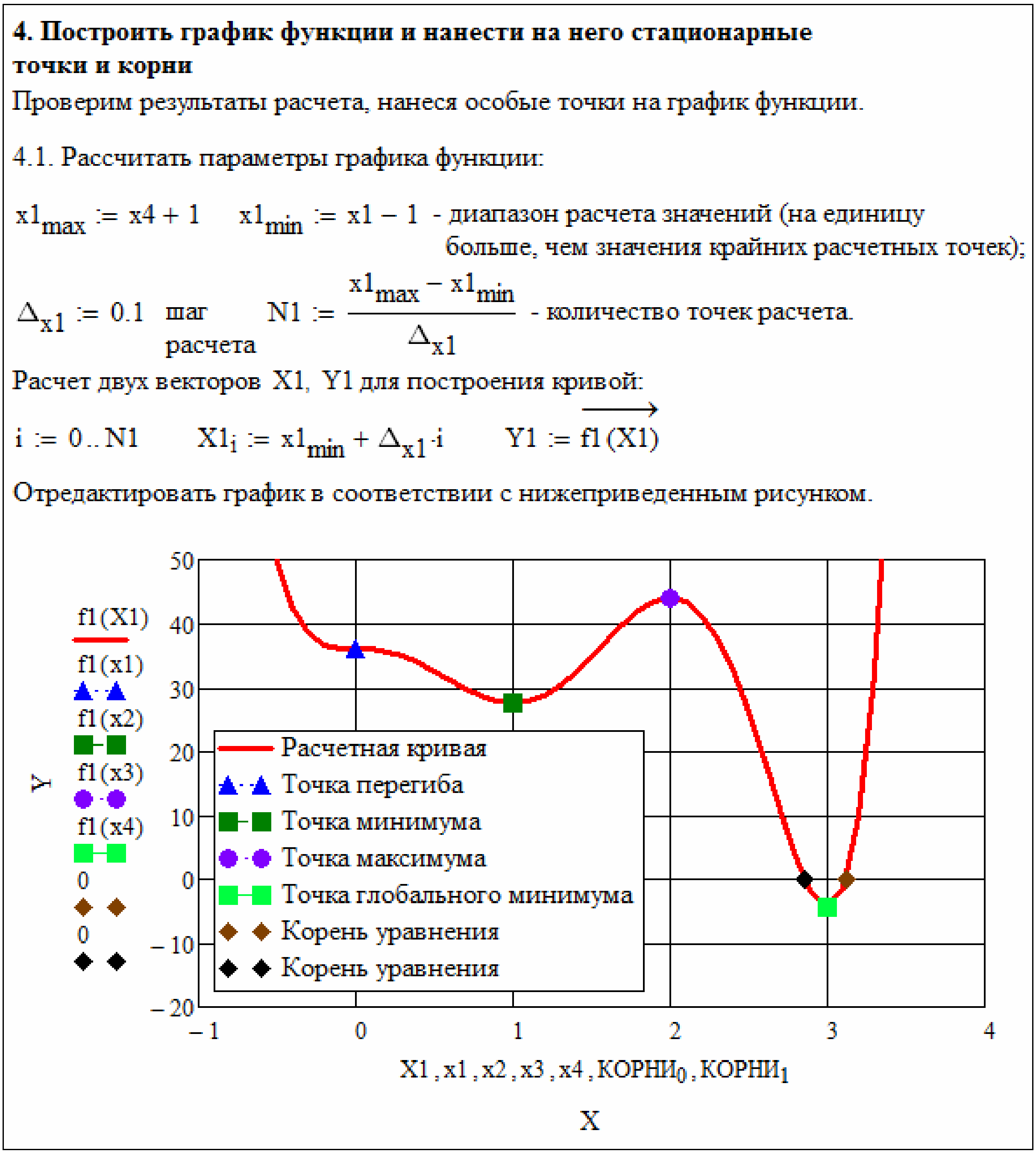
3.4. Определить точку глобального минимума

Рассчитать значения функции в точках $x2 := 1$, $x4 := 3$:

$f1(x1) = 36 \quad f1(x4) = -4.5$

Функция в точке x4 имеет глобальный минимум, так как ее значение в этой точке минимально.

Рис. А 1. Листинг программы исследования функции (продолжение)



4. Построить график функции и нанести на него стационарные точки и корни

Проверим результаты расчета, нанеся особые точки на график функции.

4.1. Рассчитать параметры графика функции:

$x1_{max} := x4 + 1$ $x1_{min} := x1 - 1$ - диапазон расчета значений (на единицу больше, чем значения крайних расчетных точек);

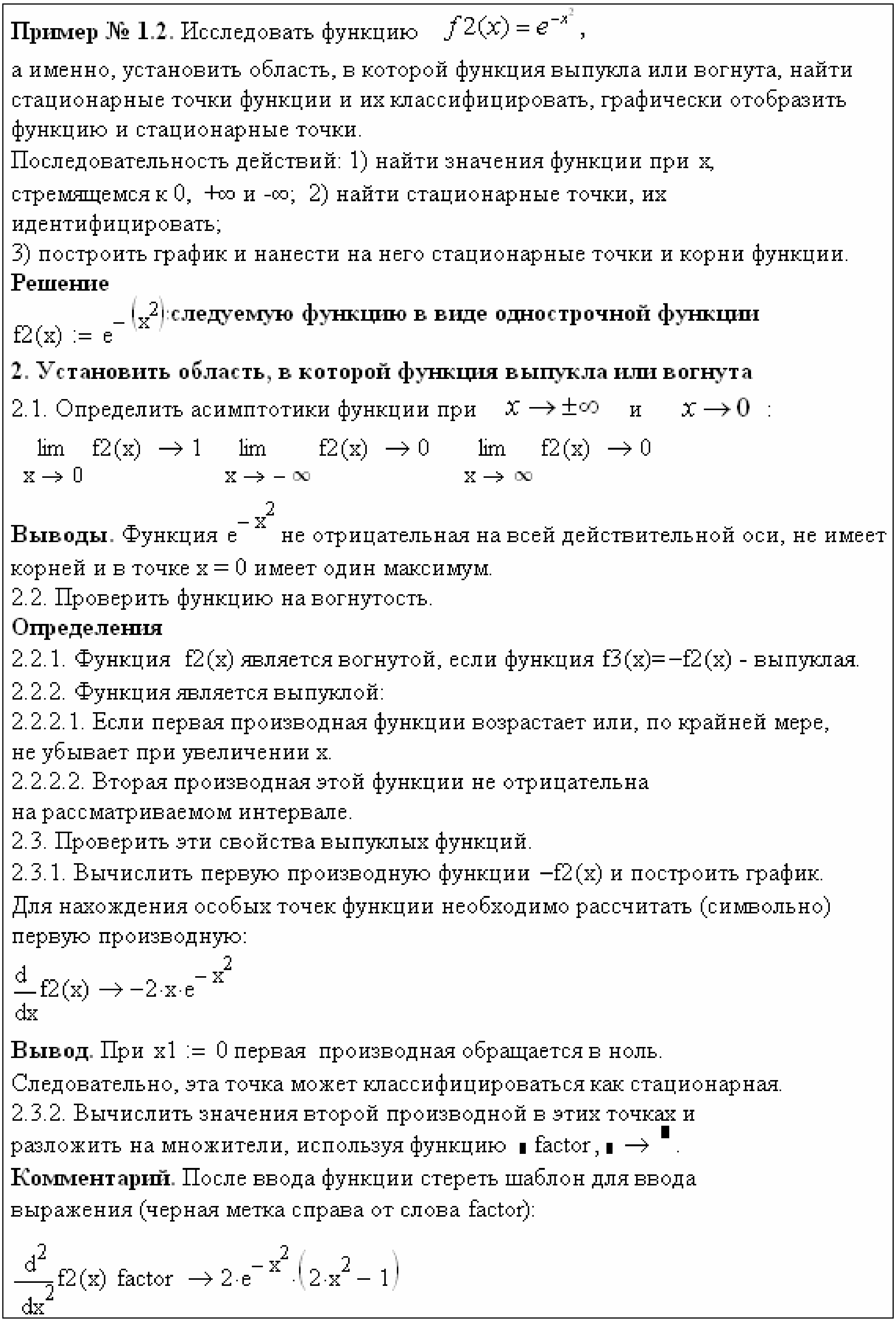
$\Delta_{x1} := 0.1$ шаг расчета $N1 := \dfrac{x1_{max} - x1_{min}}{\Delta_{x1}}$ - количество точек расчета.

Расчет двух векторов X1, Y1 для построения кривой:

$i := 0..N1$ $X1_i := x1_{min} + \Delta_{x1} \cdot i$ $Y1 := \overrightarrow{f1(X1)}$

Отредактировать график в соответствии с нижеприведенным рисунком.

Рис. А 1. Листинг программы исследования функции (окончание)



Пример № 1.2. Исследовать функцию $f2(x) = e^{-x^2}$,

а именно, установить область, в которой функция выпукла или вогнута, найти стационарные точки функции и их классифицировать, графически отобразить функцию и стационарные точки.

Последовательность действий: 1) найти значения функции при x, стремящемся к 0, +∞ и -∞; 2) найти стационарные точки, их идентифицировать;

3) построить график и нанести на него стационарные точки и корни функции.

Решение

$f2(x) := e^{-\left(x^2\right)}$ **следуемую функцию в виде однострочной функции**

2. Установить область, в которой функция выпукла или вогнута

2.1. Определить асимптотики функции при $x \rightarrow \pm\infty$ и $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \to 0} f2(x) \rightarrow 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} f2(x) \rightarrow 0 \qquad \lim_{x \to \infty} f2(x) \rightarrow 0$$

Выводы. Функция e^{-x^2} не отрицательная на всей действительной оси, не имеет корней и в точке x = 0 имеет один максимум.

2.2. Проверить функцию на вогнутость.

Определения

2.2.1. Функция f2(x) является вогнутой, если функция f3(x)=−f2(x) - выпуклая.

2.2.2. Функция является выпуклой:

2.2.2.1. Если первая производная функции возрастает или, по крайней мере, не убывает при увеличении x.

2.2.2.2. Вторая производная этой функции не отрицательна на рассматриваемом интервале.

2.3. Проверить эти свойства выпуклых функций.

2.3.1. Вычислить первую производную функции −f2(x) и построить график.

Для нахождения особых точек функции необходимо рассчитать (символьно) первую производную:

$$\frac{d}{dx} f2(x) \rightarrow -2 \cdot x \cdot e^{-x^2}$$

Вывод. При x1 := 0 первая производная обращается в ноль.

Следовательно, эта точка может классифицироваться как стационарная.

2.3.2. Вычислить значения второй производной в этих точках и разложить на множители, используя функцию ■ factor, ■ → ■.

Комментарий. После ввода функции стереть шаблон для ввода выражения (черная метка справа от слова factor):

$$\frac{d^2}{dx^2} f2(x) \text{ factor } \rightarrow 2 \cdot e^{-x^2} \cdot \left(2 \cdot x^2 - 1\right)$$

Рис. А 2. Листинг программы исследования функции

Значение второй призводной при x1 := 0 (скопировать аналитическое выражение второй производной)

$$2\cdot e^{-x1^{2}}\cdot\left[(-1)+2\cdot x1^{2}\right] = -2$$

Вывод. Стационарная точка при x1 := 0 имеет максимум.
Значение глобального максимума в точке $x1 := 0,\ y1 := f2(x1) = 1$.

3. Построение графика функции (нанести стационарную точку)

$x2_{max} := x1 + 2 \qquad x2_{min} := x1 - 2$

$\Delta_{x2} := 0.01$ - шаг расчета;

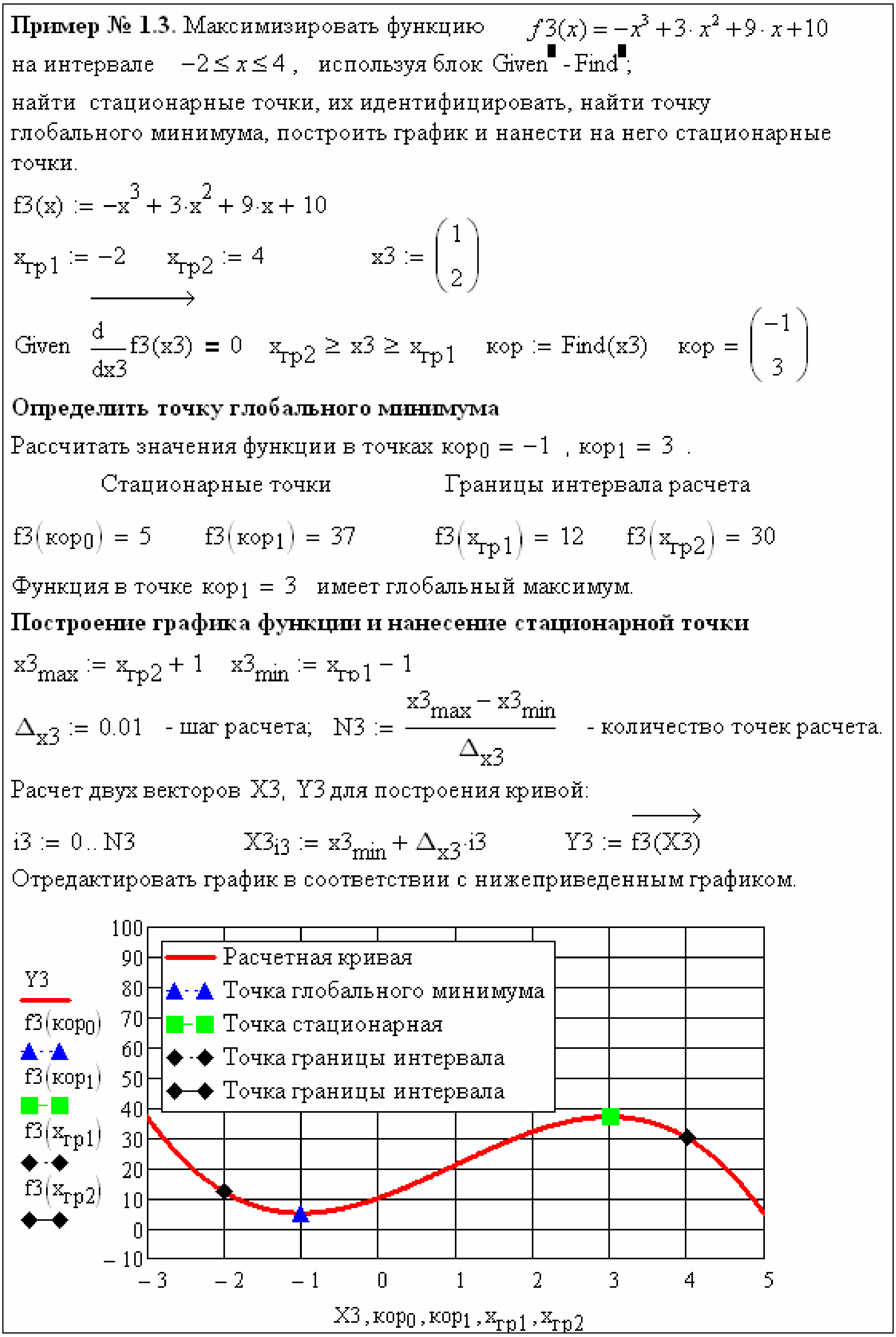
$N2 := \dfrac{x2_{max} - x2_{min}}{\Delta_{x2}}$ - количество точек расчета.

Расчет двух векторов X1, Y1 для построения расчетной кривой:

$i2 := 0..N2 \quad X2_{i2} := x2_{min} + \Delta_{x2}\cdot i2 \qquad Y2 := \overrightarrow{f2(X2)}$

Отредактировать график в соответствии с нижеприведенным рисунком.

Рис. А 2. Листинг программы исследования функции (окончание)



Пример № 1.3. Максимизировать функцию $f3(x) = -x^3 + 3\cdot x^2 + 9\cdot x + 10$ на интервале $-2 \le x \le 4$, используя блок Given - Find;

найти стационарные точки, их идентифицировать, найти точку глобального минимума, построить график и нанести на него стационарные точки.

$f3(x) := -x^3 + 3\cdot x^2 + 9\cdot x + 10$

$x_{тр1} := -2 \qquad x_{тр2} := 4 \qquad x3 := \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Given $\overrightarrow{\frac{d}{dx3} f3(x3)} = 0 \quad x_{тр2} \ge x3 \ge x_{тр1} \quad кор := Find(x3) \quad кор = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

Определить точку глобального минимума

Рассчитать значения функции в точках $кор_0 = -1$, $кор_1 = 3$.

Стационарные точки   Границы интервала расчета

$f3(кор_0) = 5 \qquad f3(кор_1) = 37 \qquad f3(x_{тр1}) = 12 \qquad f3(x_{тр2}) = 30$

Функция в точке $кор_1 = 3$ имеет глобальный максимум.

Построение графика функции и нанесение стационарной точки

$x3_{max} := x_{тр2} + 1 \qquad x3_{min} := x_{тр1} - 1$

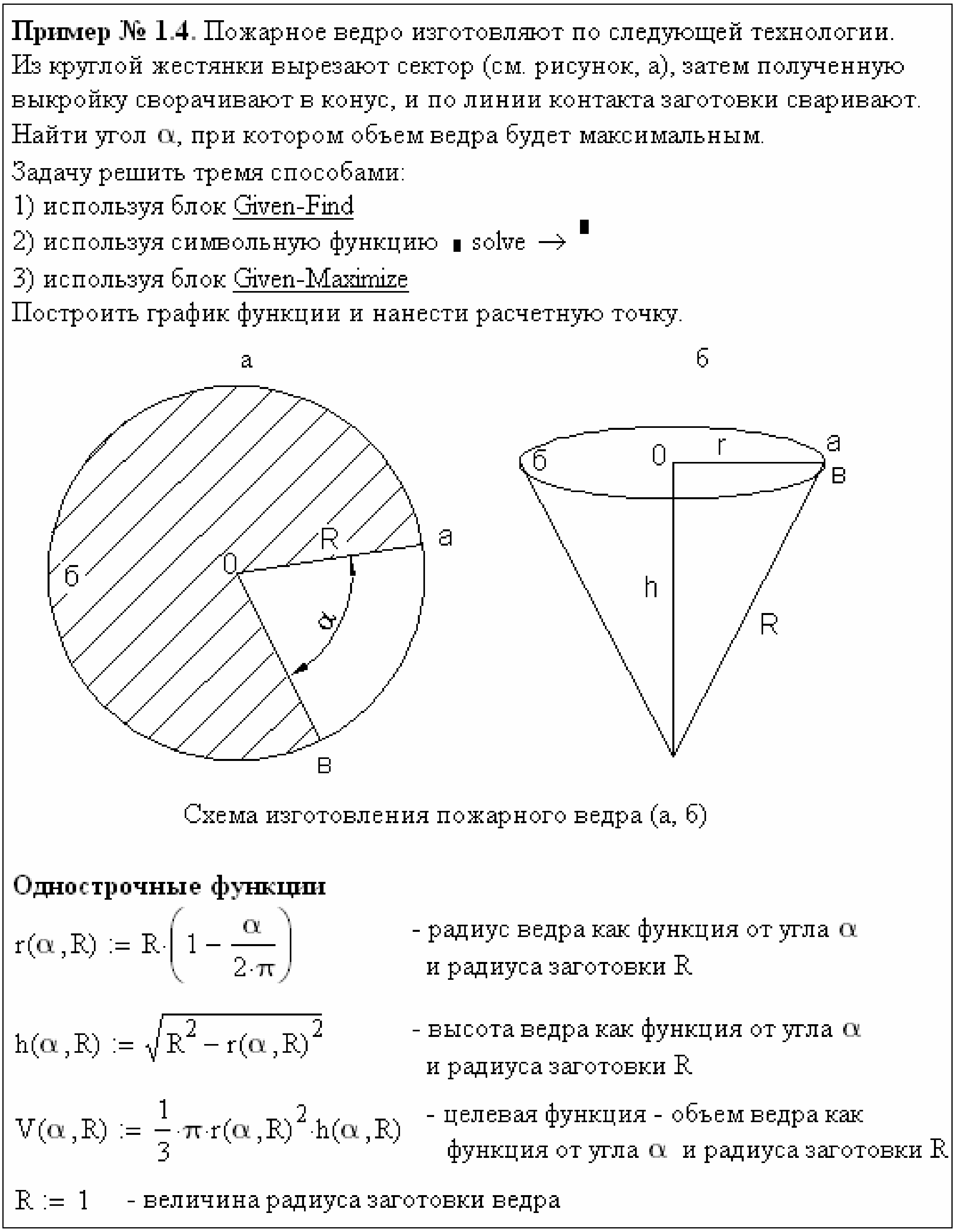
$\Delta_{x3} := 0.01$ - шаг расчета; $N3 := \frac{x3_{max} - x3_{min}}{\Delta_{x3}}$ - количество точек расчета.

Расчет двух векторов X3, Y3 для построения кривой:

$i3 := 0..N3 \qquad X3_{i3} := x3_{min} + \Delta_{x3}\cdot i3 \qquad Y3 := \overrightarrow{f3(X3)}$

Отредактировать график в соответствии с нижеприведенным графиком.

Рис. А 3. Листинг программы исследования функции



Пример № 1.4. Пожарное ведро изготовляют по следующей технологии. Из круглой жестянки вырезают сектор (см. рисунок, а), затем полученную выкройку сворачивают в конус, и по линии контакта заготовки сваривают. Найти угол α, при котором объем ведра будет максимальным.

Задачу решить тремя способами:

1) используя блок Given-Find

2) используя символьную функцию ▪ solve → ▪

3) используя блок Given-Maximize

Построить график функции и нанести расчетную точку.

Схема изготовления пожарного ведра (а, б)

Однострочные функции

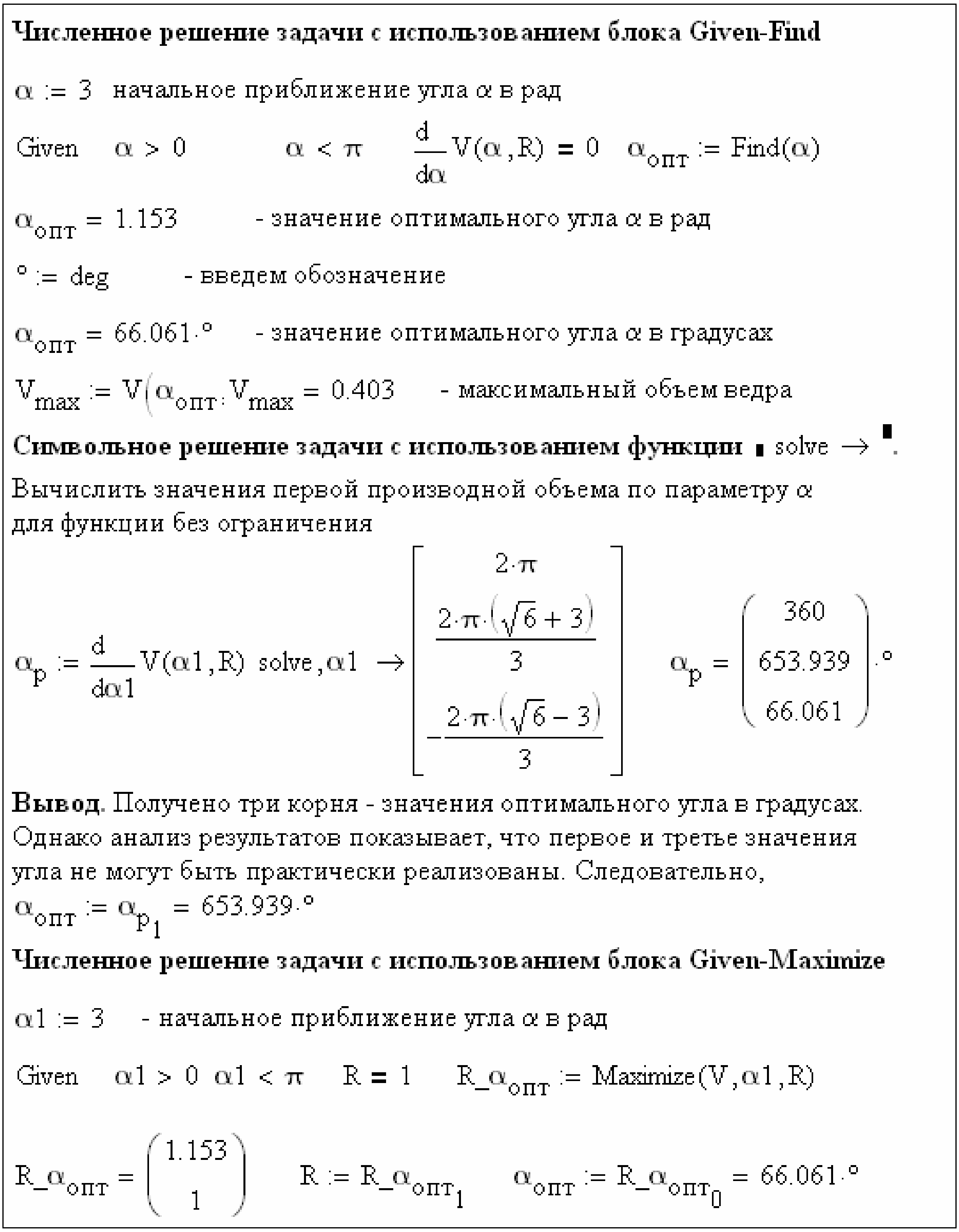
$r(\alpha, R) := R\cdot\left(1 - \frac{\alpha}{2\cdot\pi}\right)$ - радиус ведра как функция от угла α и радиуса заготовки R

$h(\alpha, R) := \sqrt{R^2 - r(\alpha, R)^2}$ - высота ведра как функция от угла α и радиуса заготовки R

$V(\alpha, R) := \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r(\alpha, R)^2\cdot h(\alpha, R)$ - целевая функция - объем ведра как функция от угла α и радиуса заготовки R

$R := 1$ - величина радиуса заготовки ведра

Рис. А 4. Листинг программы оптимизации объема пожарного ведра



Численное решение задачи с использованием блока Given-Find

$\alpha := 3$ начальное приближение угла α в рад

Given $\alpha > 0$ $\alpha < \pi$ $\frac{d}{d\alpha}V(\alpha, R) = 0$ $\alpha_{опт} := \mathrm{Find}(\alpha)$

$\alpha_{опт} = 1.153$ - значение оптимального угла α в рад

$^{\circ} := deg$ - введем обозначение

$\alpha_{опт} = 66.061 \cdot ^{\circ}$ - значение оптимального угла α в градусах

$V_{max} := V(\alpha_{опт} \cdot V_{max} = 0.403$ - максимальный объем ведра

Символьное решение задачи с использованием функции ■ solve → ■.

Вычислить значения первой производной объема по параметру α
для функции без ограничения

$$\alpha_p := \frac{d}{d\alpha 1}V(\alpha 1, R) \text{ solve}, \alpha 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \cdot \pi \\ \frac{2 \cdot \pi \cdot (\sqrt{6} + 3)}{3} \\ -\frac{2 \cdot \pi \cdot (\sqrt{6} - 3)}{3} \end{bmatrix} \qquad \alpha_p = \begin{pmatrix} 360 \\ 653.939 \\ 66.061 \end{pmatrix} \cdot ^{\circ}$$

Вывод. Получено три корня - значения оптимального угла в градусах. Однако анализ результатов показывает, что первое и третье значения угла не могут быть практически реализованы. Следовательно,
$\alpha_{опт} := \alpha_{p_1} = 653.939 \cdot ^{\circ}$

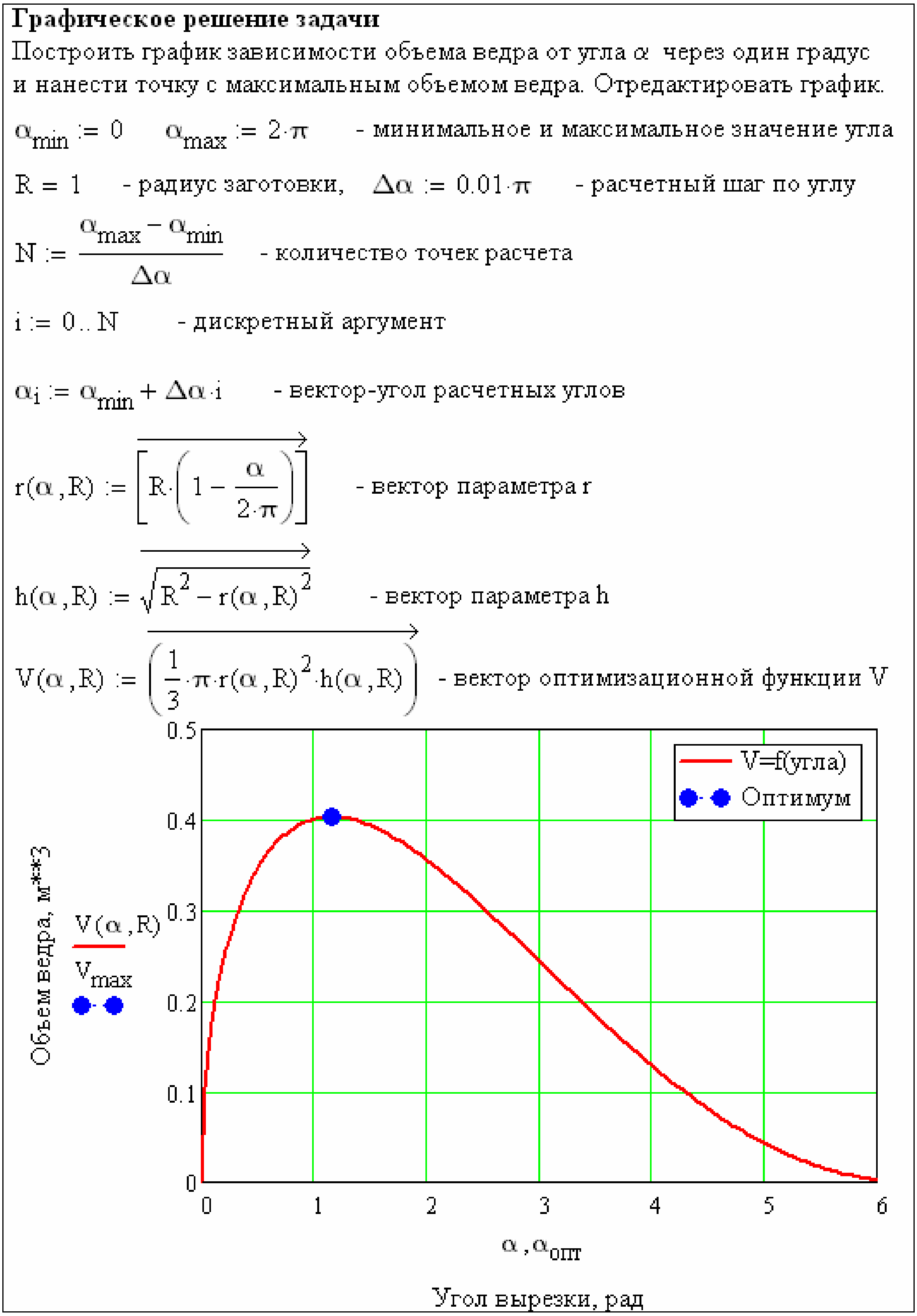
Численное решение задачи с использованием блока Given-Maximize

$\alpha 1 := 3$ - начальное приближение угла α в рад

Given $\alpha 1 > 0$ $\alpha 1 < \pi$ $R = 1$ $R\_\alpha_{опт} := \mathrm{Maximize}(V, \alpha 1, R)$

$$R\_\alpha_{опт} = \begin{pmatrix} 1.153 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad R := R\_\alpha_{опт_1} \qquad \alpha_{опт} := R\_\alpha_{опт_0} = 66.061 \cdot ^{\circ}$$

Рис. А 4. Листинг программы оптимизации объема пожарного ведра (продолжение)



Графическое решение задачи

Построить график зависимости объема ведра от угла α через один градус и нанести точку с максимальным объемом ведра. Отредактировать график.

$\alpha_{min} := 0$ $\alpha_{max} := 2 \cdot \pi$ - минимальное и максимальное значение угла

$R = 1$ - радиус заготовки, $\Delta\alpha := 0.01 \cdot \pi$ - расчетный шаг по углу

$$N := \frac{\alpha_{max} - \alpha_{min}}{\Delta\alpha}$$ - количество точек расчета

$i := 0 .. N$ - дискретный аргумент

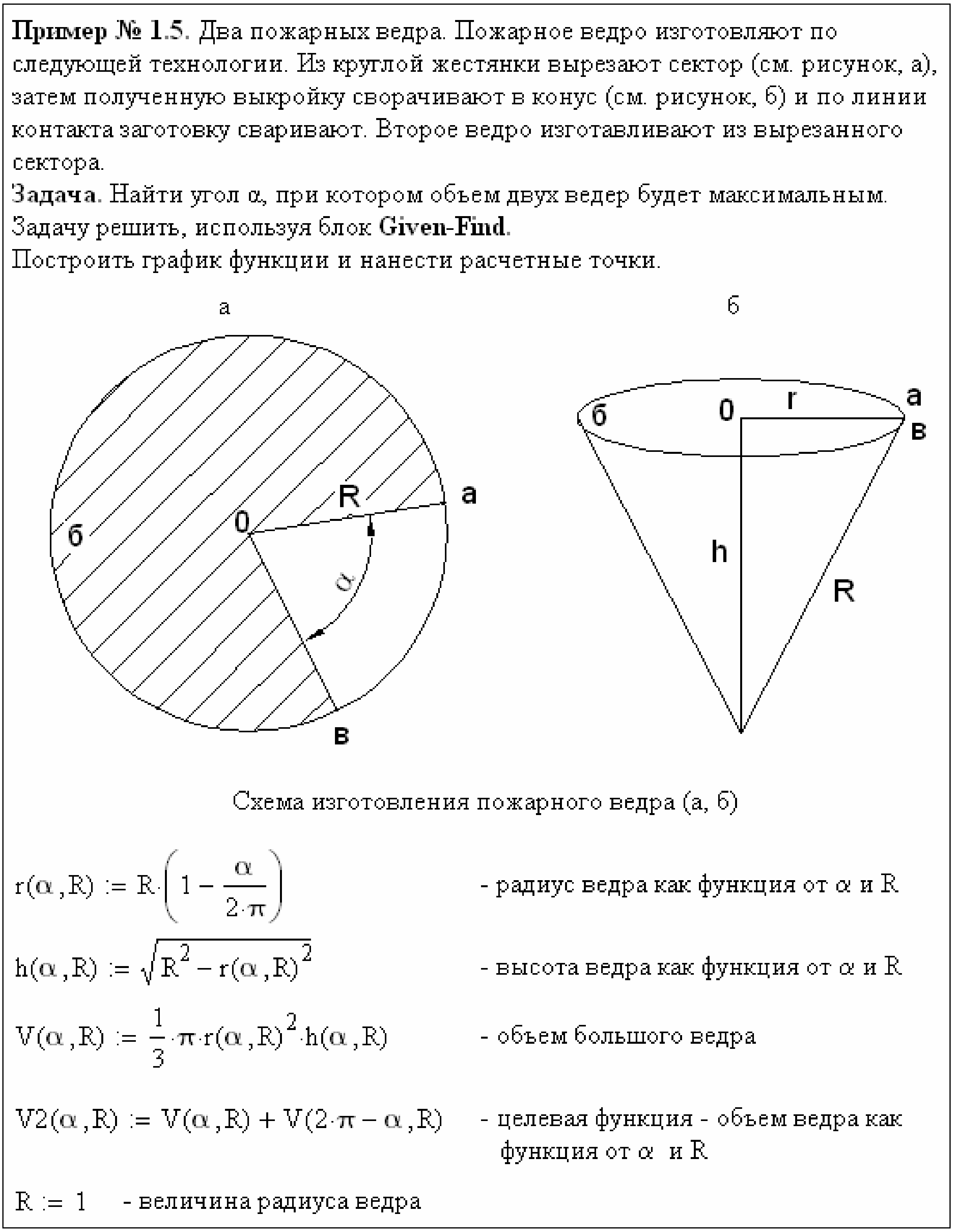
$\alpha_i := \alpha_{min} + \Delta\alpha \cdot i$ - вектор-угол расчетных углов

$$r(\alpha, R) := \overrightarrow{\left[R \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2 \cdot \pi}\right)\right]}$$ - вектор параметра r

$$h(\alpha, R) := \overrightarrow{\sqrt{R^2 - r(\alpha, R)^2}}$$ - вектор параметра h

$$V(\alpha, R) := \overrightarrow{\left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r(\alpha, R)^2 \cdot h(\alpha, R)\right)}$$ - вектор оптимизационной функции V

Рис. А 4. Листинг программы оптимизации объема пожарного ведра (окончание)



Пример № 1.5. Два пожарных ведра. Пожарное ведро изготовляют по следующей технологии. Из круглой жестянки вырезают сектор (см. рисунок, а), затем полученную выкройку сворачивают в конус (см. рисунок, б) и по линии контакта заготовку сваривают. Второе ведро изготавливают из вырезанного сектора.

Задача. Найти угол α, при котором обьем двух ведер будет максимальным. Задачу решить, используя блок **Given-Find**.

Построить график функции и нанести расчетные точки.

Схема изготовления пожарного ведра (а, б)

$r(\alpha,R) := R\cdot\left(1-\dfrac{\alpha}{2\cdot\pi}\right)$ - радиус ведра как функция от α и R

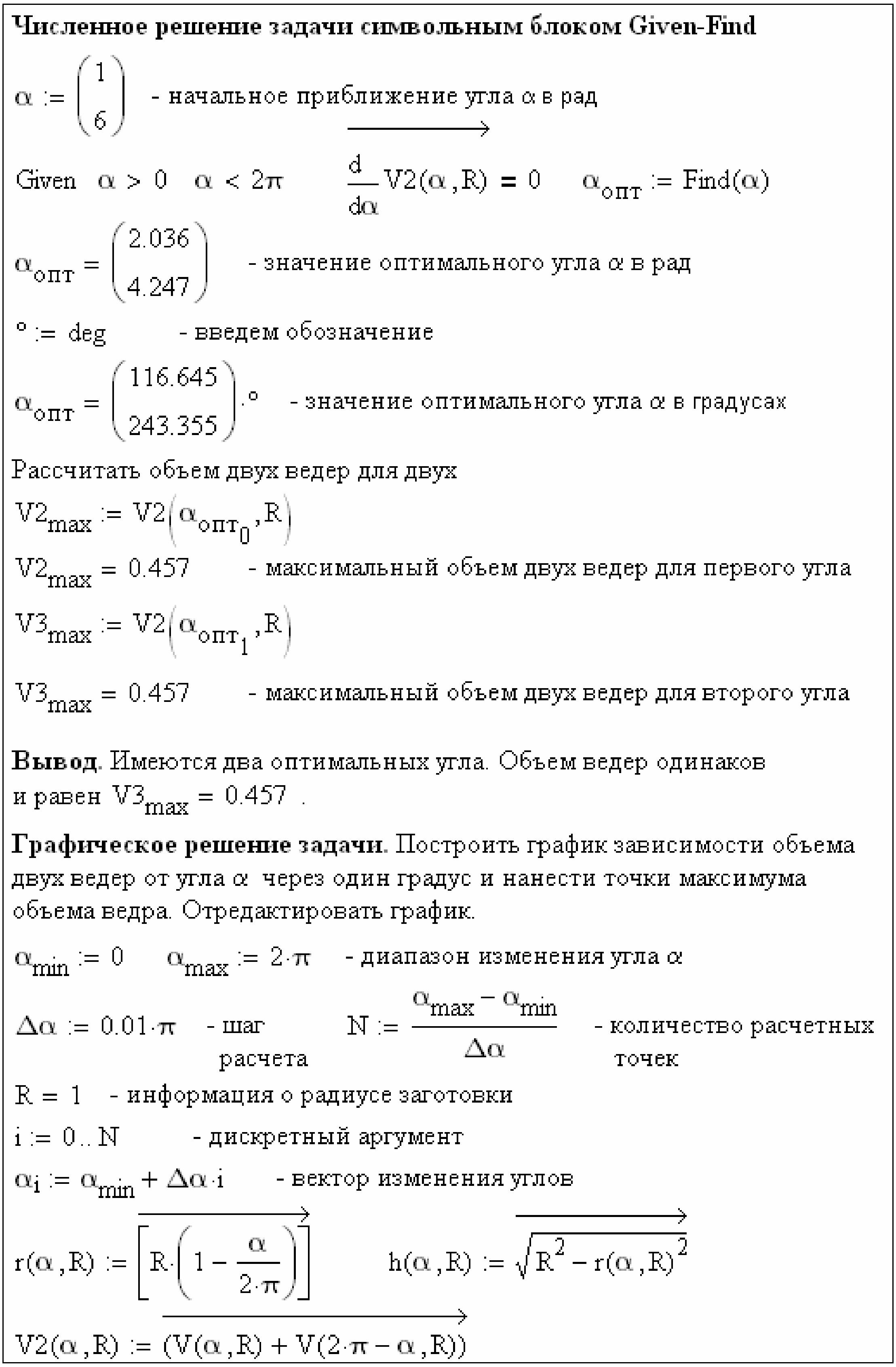
$h(\alpha,R) := \sqrt{R^2 - r(\alpha,R)^2}$ - высота ведра как функция от α и R

$V(\alpha,R) := \dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot r(\alpha,R)^2\cdot h(\alpha,R)$ - объем большого ведра

$V2(\alpha,R) := V(\alpha,R) + V(2\cdot\pi-\alpha,R)$ - целевая функция - обьем ведра как функция от α и R

$R := 1$ - величина радиуса ведра

Рис. А 5. Листинг программы оптимизации объема двух пожарных ведер



Численное решение задачи символьным блоком Given-Find

$\alpha := \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ - начальное приближение угла α в рад

Given $\alpha > 0$ $\alpha < 2\pi$ $\overrightarrow{\frac{d}{d\alpha}V2(\alpha,R)} = 0$ $\alpha_{опт} := \mathrm{Find}(\alpha)$

$\alpha_{опт} = \begin{pmatrix} 2.036 \\ 4.247 \end{pmatrix}$ - значение оптимального угла α в рад

$° := \deg$ - введем обозначение

$\alpha_{опт} = \begin{pmatrix} 116.645 \\ 243.355 \end{pmatrix} \cdot °$ - значение оптимального угла α в градусах

Рассчитать объем двух ведер для двух

$V2_{max} := V2\left(\alpha_{опт_0}, R\right)$

$V2_{max} = 0.457$ - максимальный объем двух ведер для первого угла

$V3_{max} := V2\left(\alpha_{опт_1}, R\right)$

$V3_{max} = 0.457$ - максимальный объем двух ведер для второго угла

Вывод. Имеются два оптимальных угла. Объем ведер одинаков и равен $V3_{max} = 0.457$.

Графическое решение задачи. Построить график зависимости объема двух ведер от угла α через один градус и нанести точки максимума обьема ведра. Отредактировать график.

$\alpha_{min} := 0$ $\alpha_{max} := 2\cdot\pi$ - диапазон изменения угла α

$\Delta\alpha := 0.01\cdot\pi$ - шаг расчета $N := \dfrac{\alpha_{max} - \alpha_{min}}{\Delta\alpha}$ - количество расчетных точек

$R = 1$ - информация о радиусе заготовки

$i := 0..N$ - дискретный аргумент

$\alpha_i := \alpha_{min} + \Delta\alpha\cdot i$ - вектор изменения углов

$r(\alpha,R) := \overrightarrow{\left[R\cdot\left(1 - \dfrac{\alpha}{2\cdot\pi}\right)\right]}$ $h(\alpha,R) := \overrightarrow{\sqrt{R^2 - r(\alpha,R)^2}}$

$V2(\alpha,R) := \overrightarrow{(V(\alpha,R) + V(2\cdot\pi - \alpha,R))}$

Рис. А 5. Листинг программы оптимизации объема двух пожарных ведер (продолжение)

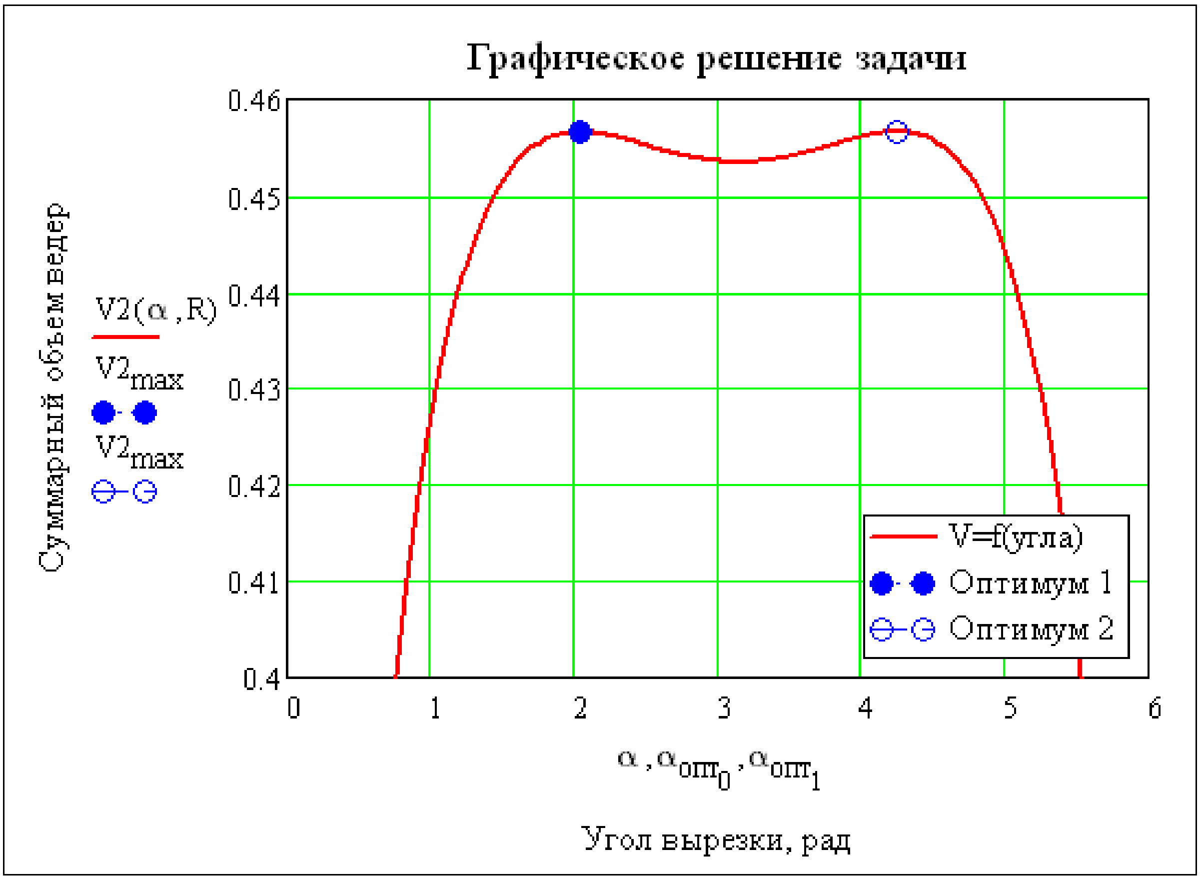


Рис. А 5. Листинг программы оптимизации объема двух пожарных ведер (окончание)

Пример № 1.6. Изготовление прямоугольной балки из круглого бревна.
На лесопилке из круглого бревна диаметром D изготавливают брус.
Рассчитать размер сечения бруса, имеющего максимальную прочность при диаметре бревна D = 250 мм. Известно, что прочность бруса пропорциональна моменту сопротивления поперечного сечения бруса.
Решить задачу численно, используя функцию **Maximize**, символьно.
Построить график и нанести рассчитанные точки.

Схема изготовления бруса из кругляка

Исходные уравнения

$H(D,B) := \sqrt{D^2 - B^2}$ - связь диаметра бревна с шириной бруса

$W(D,B) := \frac{B\cdot H(D,B)^2}{6}$ - целевая функция - зависимость прочности бруса от диаметра бревна

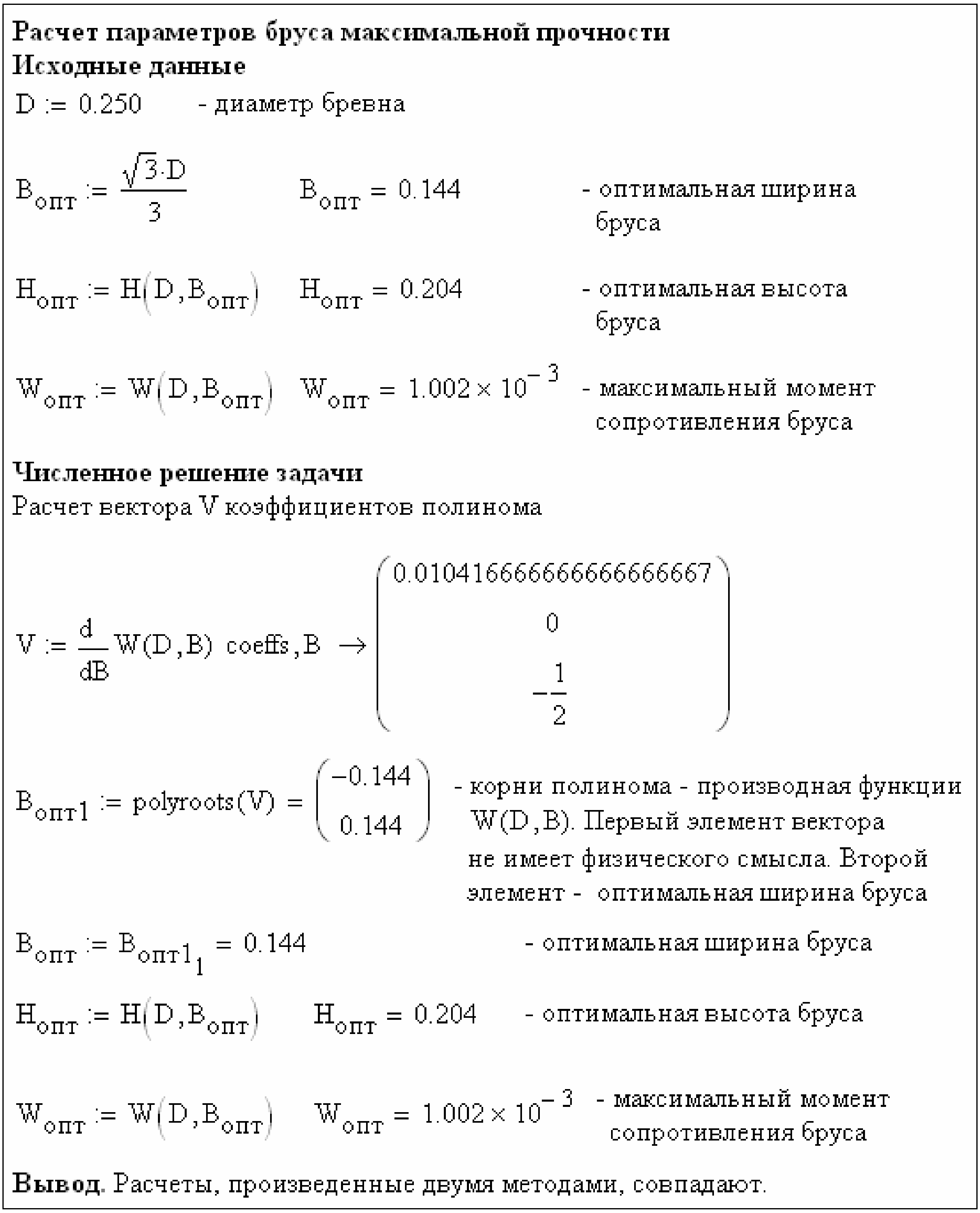
Аналитическое решение

$$B_{опт} := \frac{d}{dB}W(D,B) \text{ solve}, B \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}\cdot D}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}\cdot D}{3} \end{pmatrix}$$

Вывод. Оптимальная ширина бруса вычисляется из выражения $\frac{\sqrt{3}\cdot D}{3}$.

Второе решение (отрицательное) не имеет физического смысла.

Рис. А 6. Листинг программы оптимизации сечения бруса



Расчет параметров бруса максимальной прочности

Исходные данные

$D := 0.250$ - диаметр бревна

$B_{опт} := \frac{\sqrt{3} \cdot D}{3}$ $B_{опт} = 0.144$ - оптимальная ширина бруса

$H_{опт} := H(D, B_{опт})$ $H_{опт} = 0.204$ - оптимальная высота бруса

$W_{опт} := W(D, B_{опт})$ $W_{опт} = 1.002 \times 10^{-3}$ - максимальный момент сопротивления бруса

Численное решение задачи

Расчет вектора V коэффициентов полинома

$$V := \frac{d}{dB} W(D,B) \text{ coeffs}, B \rightarrow \begin{pmatrix} 0.010416666666666667 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$B_{опт1} := \text{polyroots}(V) = \begin{pmatrix} -0.144 \\ 0.144 \end{pmatrix}$ - корни полинома - производная функции $W(D,B)$. Первый элемент вектора не имеет физического смысла. Второй элемент - оптимальная ширина бруса

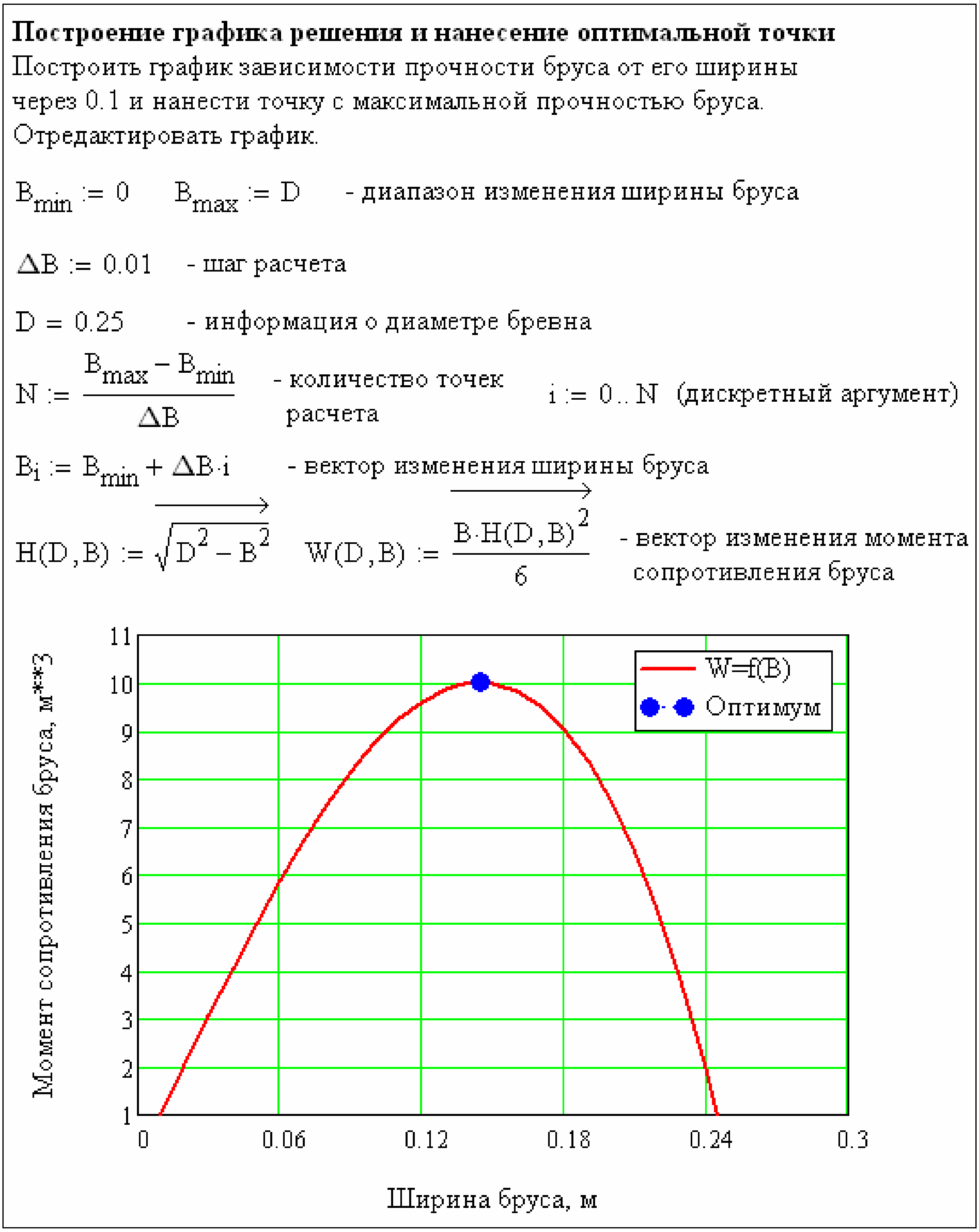
$B_{опт} := {B_{опт1}}_1 = 0.144$ - оптимальная ширина бруса

$H_{опт} := H(D, B_{опт})$ $H_{опт} = 0.204$ - оптимальная высота бруса

$W_{опт} := W(D, B_{опт})$ $W_{опт} = 1.002 \times 10^{-3}$ - максимальный момент сопротивления бруса

Вывод. Расчеты, произведенные двумя методами, совпадают.

Рис. А 6. Листинг программы оптимизации сечения бруса (продолжение)



Построение графика решения и нанесение оптимальной точки

Построить график зависимости прочности бруса от его ширины через 0.1 и нанести точку с максимальной прочностью бруса. Отредактировать график.

$B_{min} := 0$ $B_{max} := D$ - диапазон изменения ширины бруса

$\Delta B := 0.01$ - шаг расчета

$D = 0.25$ - информация о диаметре бревна

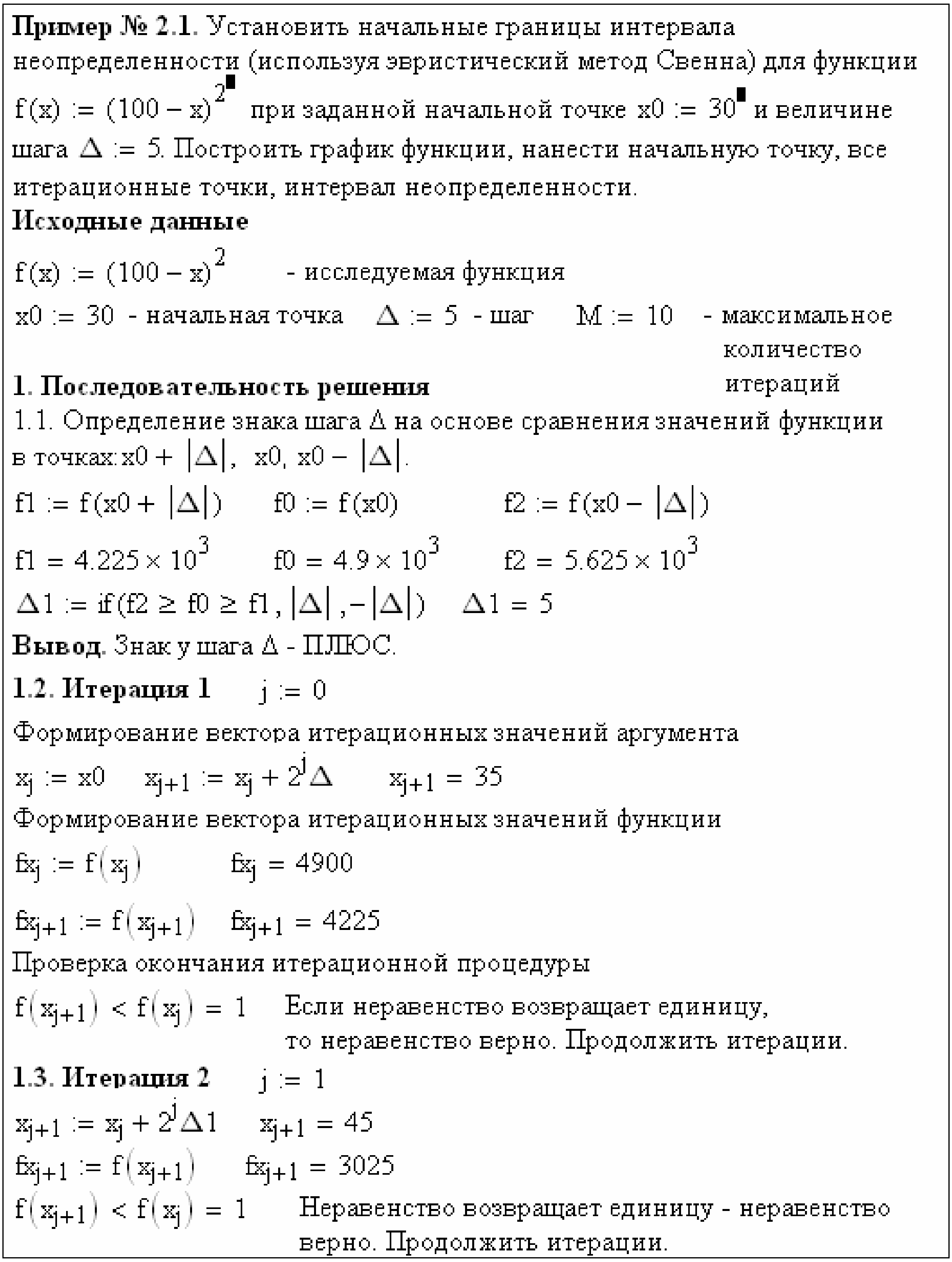
$N := \frac{B_{max} - B_{min}}{\Delta B}$ - количество точек расчета $i := 0..N$ (дискретный аргумент)

$B_i := B_{min} + \Delta B \cdot i$ - вектор изменения ширины бруса

$H(D,B) := \overrightarrow{\sqrt{D^2 - B^2}}$ $W(D,B) := \frac{\overrightarrow{B \cdot H(D,B)^2}}{6}$ - вектор изменения момента сопротивления бруса

Рис. А 6. Листинг программы оптимизации сечения бруса (окончание)

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. ЛИСТИНГИ ПРИМЕРОВ В MATHCAD 15 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ



Пример № 2.1. Установить начальные границы интервала неопределенности (используя эвристический метод Свенна) для функции $f(x) := (100 - x)^2$ при заданной начальной точке $x0 := 30$ и величине шага $\Delta := 5$. Построить график функции, нанести начальную точку, все итерационные точки, интервал неопределенности.

Исходные данные

$f(x) := (100 - x)^2$ - исследуемая функция

$x0 := 30$ - начальная точка $\Delta := 5$ - шаг $M := 10$ - максимальное количество итераций

1. Последовательность решения

1.1. Определение знака шага Δ на основе сравнения значений функции в точках: $x0 + |\Delta|$, $x0$, $x0 - |\Delta|$.

$f1 := f(x0 + |\Delta|)$ $f0 := f(x0)$ $f2 := f(x0 - |\Delta|)$

$f1 = 4.225 \times 10^3$ $f0 = 4.9 \times 10^3$ $f2 = 5.625 \times 10^3$

$\Delta1 := \mathrm{if}(f2 \geq f0 \geq f1, |\Delta|, -|\Delta|)$ $\Delta1 = 5$

Вывод. Знак у шага Δ - ПЛЮС.

1.2. Итерация 1 $j := 0$

Формирование вектора итерационных значений аргумента

$x_j := x0$ $x_{j+1} := x_j + 2^j\Delta$ $x_{j+1} = 35$

Формирование вектора итерационных значений функции

$fx_j := f(x_j)$ $fx_j = 4900$

$fx_{j+1} := f(x_{j+1})$ $fx_{j+1} = 4225$

Проверка окончания итерационной процедуры

$f(x_{j+1}) < f(x_j) = 1$ Если неравенство возвращает единицу, то неравенство верно. Продолжить итерации.

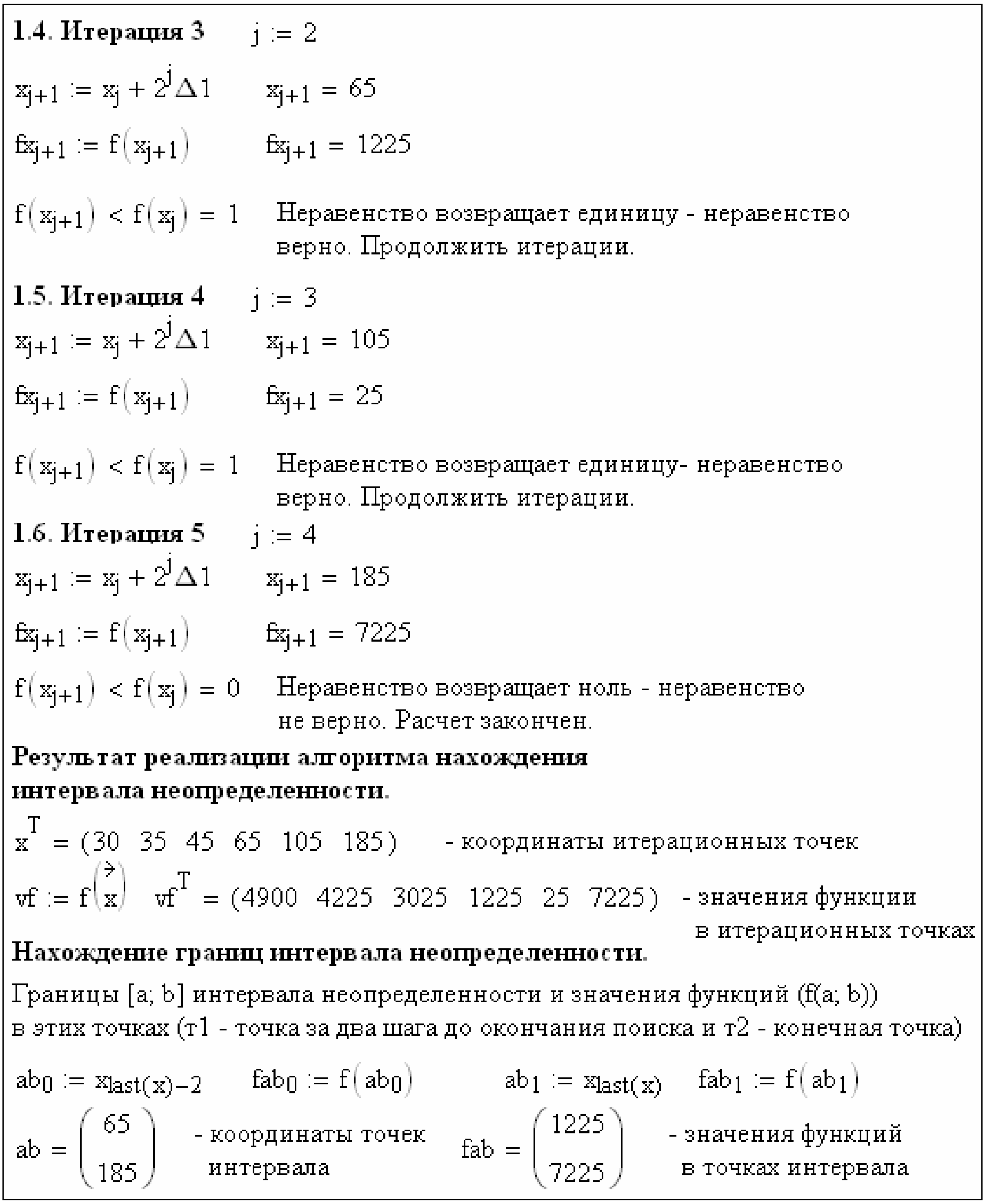
1.3. Итерация 2 $j := 1$

$x_{j+1} := x_j + 2^j\Delta1$ $x_{j+1} = 45$

$fx_{j+1} := f(x_{j+1})$ $fx_{j+1} = 3025$

$f(x_{j+1}) < f(x_j) = 1$ Неравенство возвращает единицу - неравенство верно. Продолжить итерации.

Рис. Б 1. Листинг программы определения начального интервала неопределенности



1.4. Итерация 3 $j := 2$

$x_{j+1} := x_j + 2^j \Delta 1$ $x_{j+1} = 65$

$fx_{j+1} := f(x_{j+1})$ $fx_{j+1} = 1225$

$f(x_{j+1}) < f(x_j) = 1$ Неравенство возвращает единицу - неравенство верно. Продолжить итерации.

1.5. Итерация 4 $j := 3$

$x_{j+1} := x_j + 2^j \Delta 1$ $x_{j+1} = 105$

$fx_{j+1} := f(x_{j+1})$ $fx_{j+1} = 25$

$f(x_{j+1}) < f(x_j) = 1$ Неравенство возвращает единицу- неравенство верно. Продолжить итерации.

1.6. Итерация 5 $j := 4$

$x_{j+1} := x_j + 2^j \Delta 1$ $x_{j+1} = 185$

$fx_{j+1} := f(x_{j+1})$ $fx_{j+1} = 7225$

$f(x_{j+1}) < f(x_j) = 0$ Неравенство возвращает ноль - неравенство не верно. Расчет закончен.

Результат реализации алгоритма нахождения интервала неопределенности.

$x^T = (30 \ \ 35 \ \ 45 \ \ 65 \ \ 105 \ \ 185)$ - координаты итерационных точек

$vf := f\left(\overrightarrow{x}\right)$ $vf^T = (4900 \ \ 4225 \ \ 3025 \ \ 1225 \ \ 25 \ \ 7225)$ - значения функции в итерационных точках

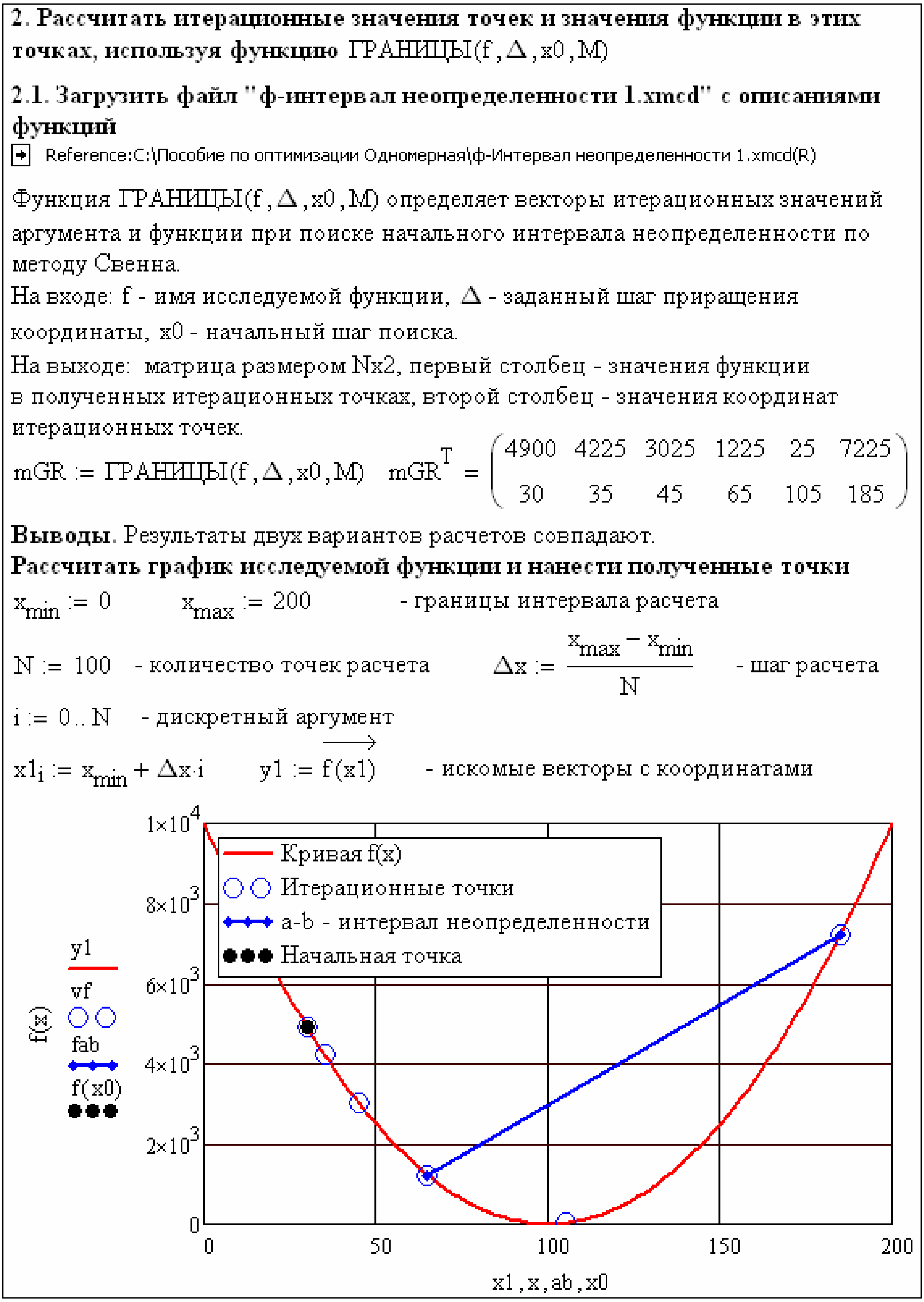
Нахождение границ интервала неопределенности.

Границы [a; b] интервала неопределенности и значения функций (f(a; b)) в этих точках (т1 - точка за два шага до окончания поиска и т2 - конечная точка)

$ab_0 := x_{last(x)-2}$ $fab_0 := f(ab_0)$ $ab_1 := x_{last(x)}$ $fab_1 := f(ab_1)$

$ab = \begin{pmatrix} 65 \\ 185 \end{pmatrix}$ - координаты точек интервала $fab = \begin{pmatrix} 1225 \\ 7225 \end{pmatrix}$ - значения функций в точках интервала

Рис. Б 1. Листинг программы определения начального интервала неопределенности (продолжение)



2. Рассчитать итерационные значения точек и значения функции в этих точках, используя функцию ГРАНИЦЫ$(f,\Delta,x0,M)$

2.1. Загрузить файл "ф-интервал неопределенности 1.xmcd" с описаниями функций

Reference:C:\Пособие по оптимизации Одномерная\ф-Интервал неопределенности 1.xmcd(R)

Функция ГРАНИЦЫ$(f,\Delta,x0,M)$ определяет векторы итерационных значений аргумента и функции при поиске начального интервала неопределенности по методу Свенна.

На входе: f - имя исследуемой функции, Δ - заданный шаг приращения координаты, x0 - начальный шаг поиска.

На выходе: матрица размером Nx2, первый столбец - значения функции в полученных итерационных точках, второй столбец - значения координат итерационных точек.

$$mGR := \text{ГРАНИЦЫ}(f,\Delta,x0,M) \quad mGR^T = \begin{pmatrix} 4900 & 4225 & 3025 & 1225 & 25 & 7225 \\ 30 & 35 & 45 & 65 & 105 & 185 \end{pmatrix}$$

Выводы. Результаты двух вариантов расчетов совпадают.

Рассчитать график исследуемой функции и нанести полученные точки

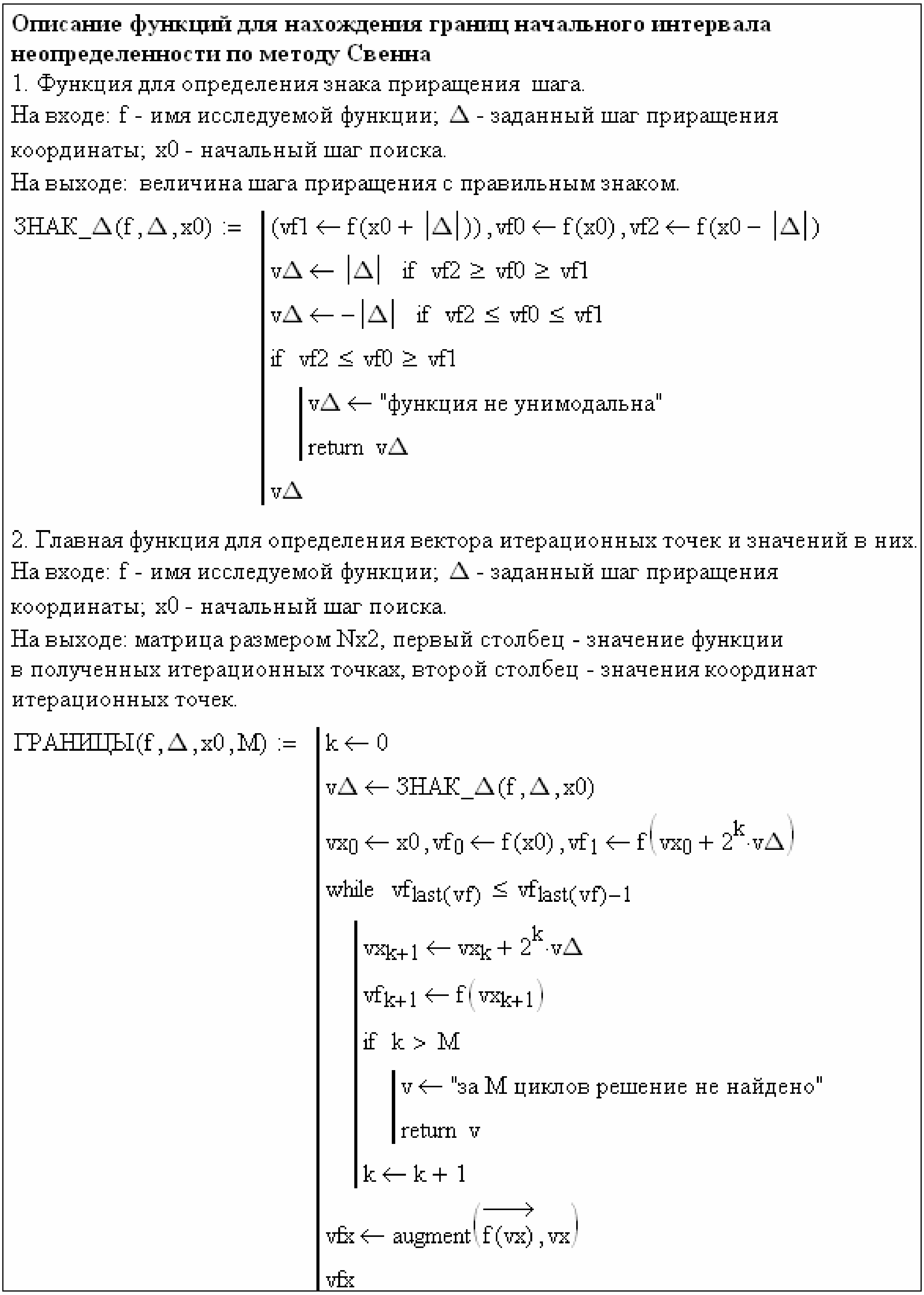
$x_{min} := 0 \qquad x_{max} := 200$ - границы интервала расчета

$N := 100$ - количество точек расчета $\qquad \Delta x := \dfrac{x_{max} - x_{min}}{N}$ - шаг расчета

$i := 0..N$ - дискретный аргумент

$x1_i := x_{min} + \Delta x \cdot i \qquad y1 := \overrightarrow{f(x1)}$ - искомые векторы с координатами

Рис. Б 1. Листинг программы определения начального интервала неопределенности (продолжение)



Описание функций для нахождения границ начального интервала неопределенности по методу Свенна

1. Функция для определения знака приращения шага.

На входе: f - имя исследуемой функции; Δ - заданный шаг приращения координаты; x0 - начальный шаг поиска.

На выходе: величина шага приращения с правильным знаком.

```
ЗНАК_Δ(f, Δ, x0) :=
    (vf1 ← f(x0 + |Δ|)), vf0 ← f(x0), vf2 ← f(x0 − |Δ|)
    vΔ ← |Δ|   if  vf2 ≥ vf0 ≥ vf1
    vΔ ← −|Δ|   if  vf2 ≤ vf0 ≤ vf1
    if  vf2 ≤ vf0 ≥ vf1
        vΔ ← "функция не унимодальна"
        return  vΔ
    vΔ
```

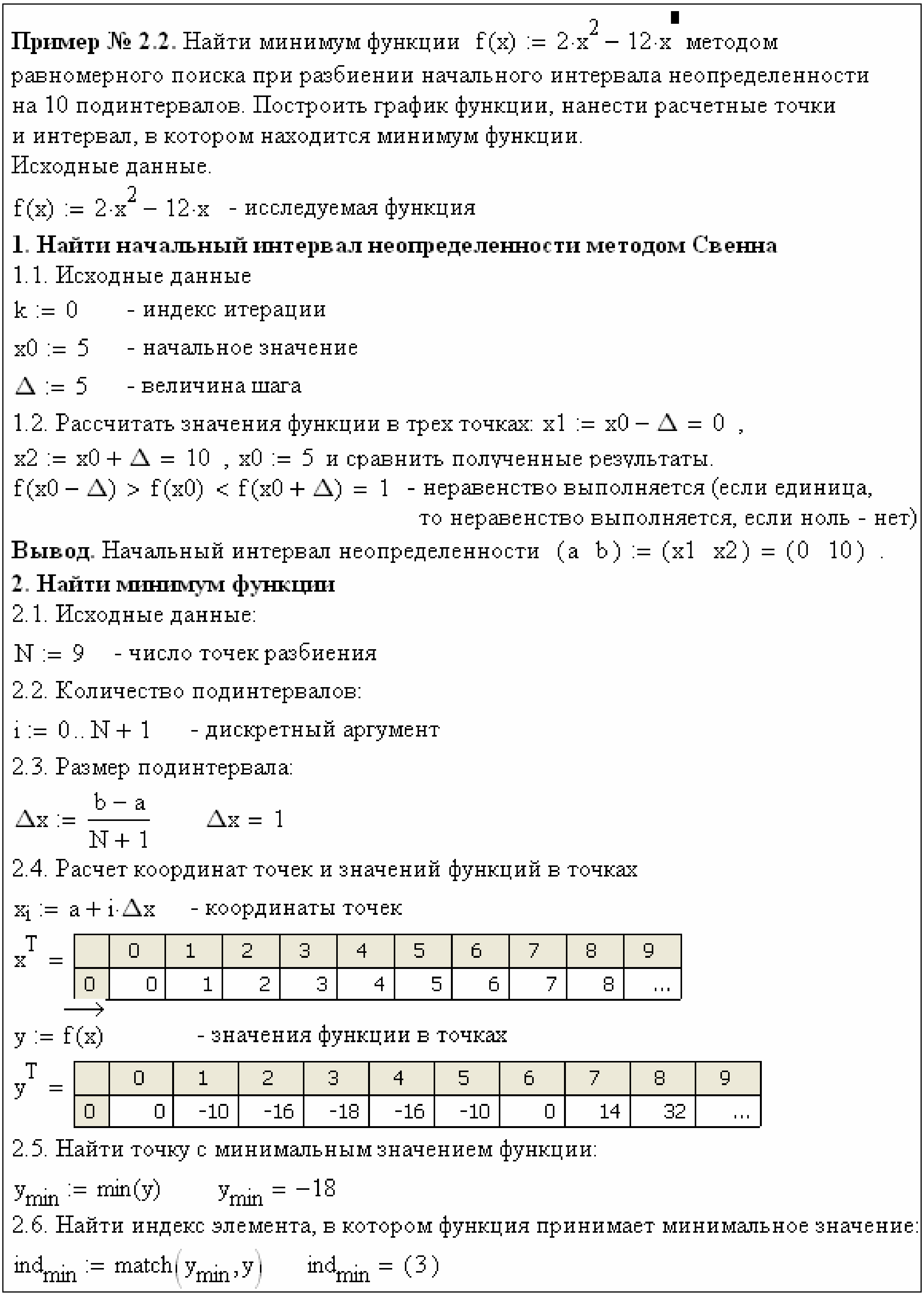
2. Главная функция для определения вектора итерационных точек и значений в них.

На входе: f - имя исследуемой функции; Δ - заданный шаг приращения координаты; x0 - начальный шаг поиска.

На выходе: матрица размером Nx2, первый столбец - значение функции в полученных итерационных точках, второй столбец - значения координат итерационных точек.

```
ГРАНИЦЫ(f, Δ, x0, M) :=
    k ← 0
    vΔ ← ЗНАК_Δ(f, Δ, x0)
    $vx_0 \leftarrow x0,\ vf_0 \leftarrow f(x0),\ vf_1 \leftarrow f\left(vx_0 + 2^k \cdot v\Delta\right)$
    while  $vf_{last(vf)} \le vf_{last(vf)-1}$
        $vx_{k+1} \leftarrow vx_k + 2^k \cdot v\Delta$
        $vf_{k+1} \leftarrow f\left(vx_{k+1}\right)$
        if  k > M
            v ← "за M циклов решение не найдено"
            return  v
        k ← k + 1
    $vfx \leftarrow augment\left(\overrightarrow{f(vx)}, vx\right)$
    vfx
```

Рис. Б 1. Листинг программы определения начального интервала неопределенности (окончание)



Пример № 2.2. Найти минимум функции $f(x) := 2 \cdot x^2 - 12 \cdot x$ методом равномерного поиска при разбиении начального интервала неопределенности на 10 подинтервалов. Построить график функции, нанести расчетные точки и интервал, в котором находится минимум функции.

Исходные данные.

$f(x) := 2 \cdot x^2 - 12 \cdot x$ - исследуемая функция

1. Найти начальный интервал неопределенности методом Свенна

1.1. Исходные данные

$k := 0$ - индекс итерации

$x0 := 5$ - начальное значение

$\Delta := 5$ - величина шага

1.2. Рассчитать значения функции в трех точках: $x1 := x0 - \Delta = 0$, $x2 := x0 + \Delta = 10$, $x0 := 5$ и сравнить полученные результаты.

$f(x0 - \Delta) > f(x0) < f(x0 + \Delta) = 1$ - неравенство выполняется (если единица, то неравенство выполняется, если ноль - нет)

Вывод. Начальный интервал неопределенности $(a \;\; b) := (x1 \;\; x2) = (0 \;\; 10)$.

2. Найти минимум функции

2.1. Исходные данные:

$N := 9$ - число точек разбиения

2.2. Количество подинтервалов:

$i := 0 .. N + 1$ - дискретный аргумент

2.3. Размер подинтервала:

$\Delta x := \dfrac{b - a}{N + 1} \qquad \Delta x = 1$

2.4. Расчет координат точек и значений функций в точках

$x_i := a + i \cdot \Delta x$ - координаты точек

$x^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...

$y := \overrightarrow{f(x)}$ - значения функции в точках

$y^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	-10	-16	-18	-16	-10	0	14	32	...

2.5. Найти точку с минимальным значением функции:

$y_{min} := \min(y) \qquad y_{min} = -18$

2.6. Найти индекс элемента, в котором функция принимает минимальное значение:

$ind_{min} := \mathrm{match}(y_{min}, y) \qquad ind_{min} = (3)$

Рис. Б 2. Листинг программы минимизации функции методом равномерного поиска

2.7. Найти значение координаты, в которой функция принимает минимальное значение:

$x_{min} := x_{\left(ind_{min_0}\right)}$ $\qquad x_{min} = 3$

2.8. Найти интервал, в котором расположены точки минимума, и рассчитать значения функции в этих точках:

$$\Delta X_{int} := \begin{bmatrix} x_{\left(ind_{min_0}\right)-1} \\ x_{\left(ind_{min_0}\right)+1} \end{bmatrix} \quad \Delta X_{int} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Delta Y_{int} := \begin{bmatrix} y_{\left(ind_{min_0}\right)-1} \\ y_{\left(ind_{min_0}\right)+1} \end{bmatrix} \quad \Delta Y_{int} = \begin{pmatrix} -16 \\ -16 \end{pmatrix}$$

3. Построить график функции и нанести расчетные точки

$j := 0..\ 10\cdot(N+1)$ - дискретный аргумент

$\Delta xp := \dfrac{b-a}{10\cdot(N+1)}$ $\qquad \Delta xp = 0.1$ - шаг расчета

$xp_j := a + j\cdot\Delta xp$ - вектор точек расчета

$xp^T =$

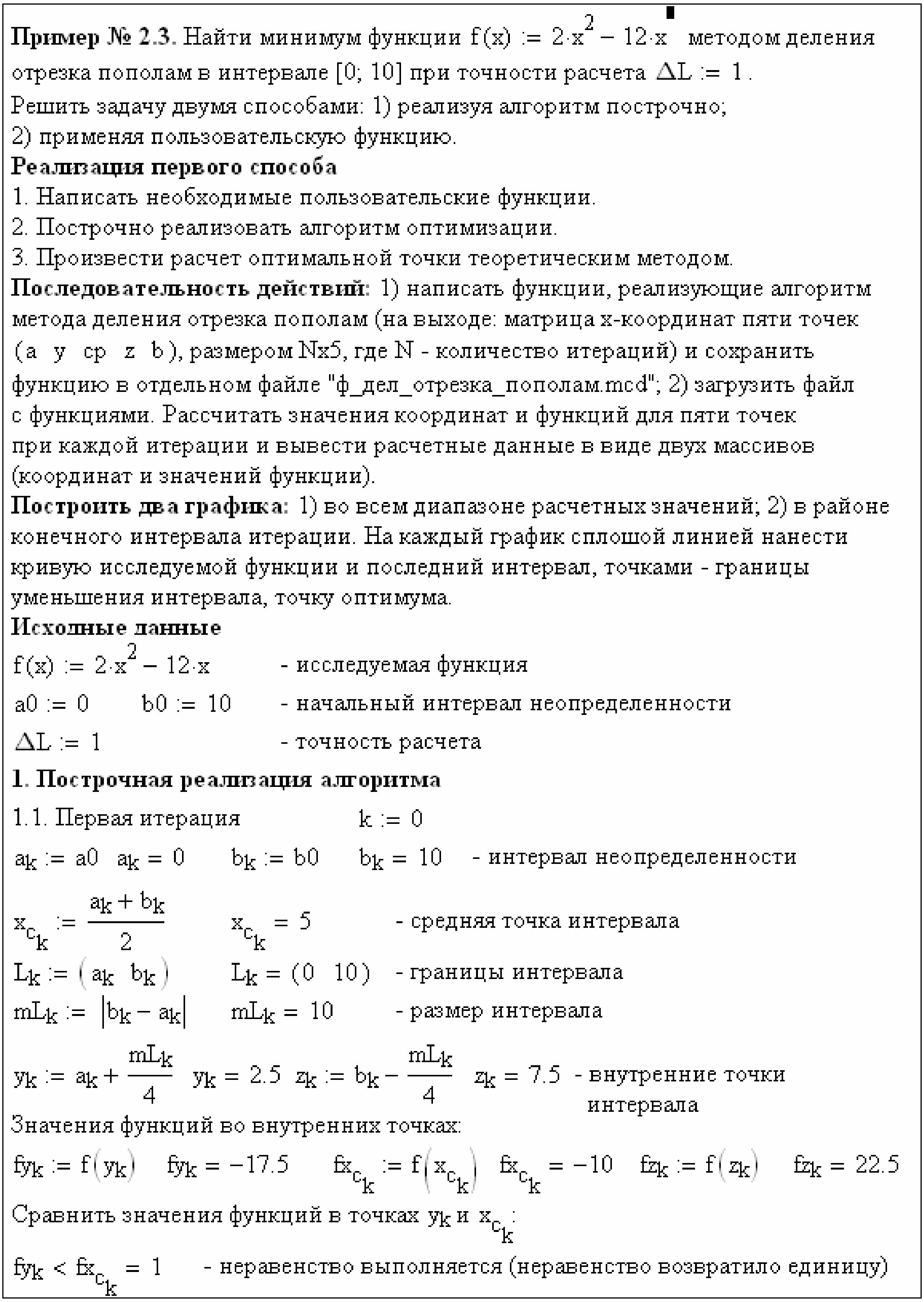
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	...

$yp := \overrightarrow{f(xp)}$ - вектор значений функции в точках расчета

$y^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	-10	-16	-18	-16	-10	0	14	32	...

Рис. Б 2. Листинг программы минимизации функции методом равномерного поиска (окончание)



Пример № 2.3. Найти минимум функции $f(x) := 2\cdot x^2 - 12\cdot x$ методом деления отрезка пополам в интервале [0; 10] при точности расчета $\Delta L := 1$.

Решить задачу двумя способами: 1) реализуя алгоритм построчно; 2) применяя пользовательскую функцию.

Реализация первого способа

1. Написать необходимые пользовательские функции.
2. Построчно реализовать алгоритм оптимизации.
3. Произвести расчет оптимальной точки теоретическим методом.

Последовательность действий: 1) написать функции, реализующие алгоритм метода деления отрезка пополам (на выходе: матрица x-координат пяти точек $(a\ \ y\ \ cp\ \ z\ \ b)$, размером Nx5, где N - количество итераций) и сохранить функцию в отдельном файле "ф_дел_отрезка_пополам.mcd"; 2) загрузить файл с функциями. Рассчитать значения координат и функций для пяти точек при каждой итерации и вывести расчетные данные в виде двух массивов (координат и значений функции).

Построить два графика: 1) во всем диапазоне расчетных значений; 2) в районе конечного интервала итерации. На каждый график сплошной линией нанести кривую исследуемой функции и последний интервал, точками - границы уменьшения интервала, точку оптимума.

Исходные данные

$f(x) := 2\cdot x^2 - 12\cdot x$ - исследуемая функция

$a0 := 0 \quad b0 := 10$ - начальный интервал неопределенности

$\Delta L := 1$ - точность расчета

1. Построчная реализация алгоритма

1.1. Первая итерация $k := 0$

$a_k := a0 \quad a_k = 0 \quad b_k := b0 \quad b_k = 10$ - интервал неопределенности

$x_{c_k} := \frac{a_k + b_k}{2} \quad x_{c_k} = 5$ - средняя точка интервала

$L_k := (a_k\ \ b_k) \quad L_k = (0\ \ 10)$ - границы интервала

$mL_k := |b_k - a_k| \quad mL_k = 10$ - размер интервала

$y_k := a_k + \frac{mL_k}{4} \quad y_k = 2.5 \quad z_k := b_k - \frac{mL_k}{4} \quad z_k = 7.5$ - внутренние точки интервала

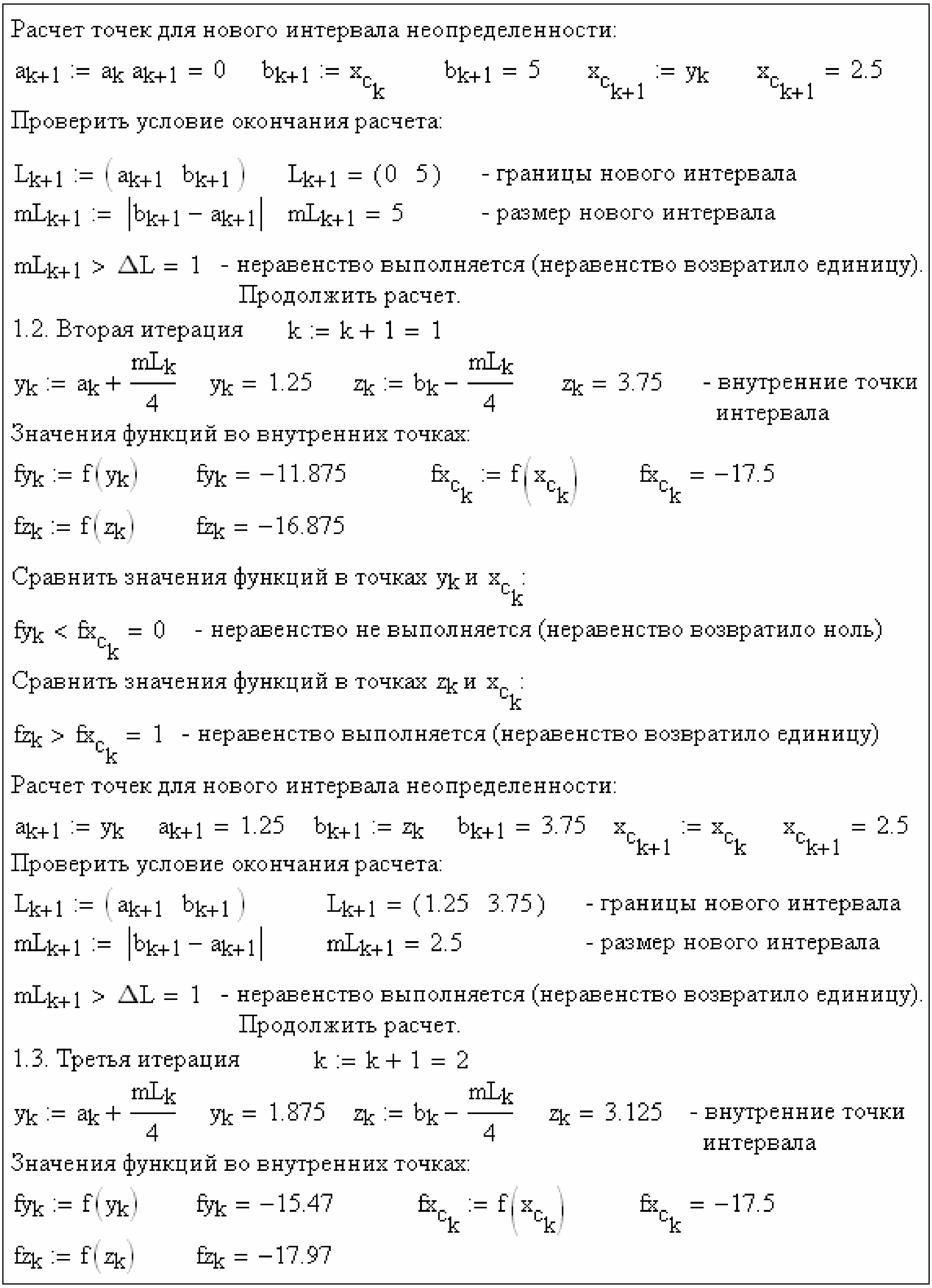
Значения функций во внутренних точках:

$fy_k := f(y_k) \quad fy_k = -17.5 \quad fx_{c_k} := f(x_{c_k}) \quad fx_{c_k} = -10 \quad fz_k := f(z_k) \quad fz_k = 22.5$

Сравнить значения функций в точках y_k и x_{c_k}:

$fy_k < fx_{c_k} = 1$ - неравенство выполняется (неравенство возвратило единицу)

Рис. Б 3. Листинг программы минимизации функции методом деления интервала пополам



Расчет точек для нового интервала неопределенности:

$a_{k+1} := a_k \quad a_{k+1} = 0 \quad b_{k+1} := x_{c_k} \quad b_{k+1} = 5 \quad x_{c_{k+1}} := y_k \quad x_{c_{k+1}} = 2.5$

Проверить условие окончания расчета:

$L_{k+1} := \left(a_{k+1} \;\; b_{k+1} \right) \quad L_{k+1} = (0 \;\; 5)$ - границы нового интервала

$mL_{k+1} := \left| b_{k+1} - a_{k+1} \right| \quad mL_{k+1} = 5$ - размер нового интервала

$mL_{k+1} > \Delta L = 1$ - неравенство выполняется (неравенство возвратило единицу). Продолжить расчет.

1.2. Вторая итерация $\quad k := k + 1 = 1$

$y_k := a_k + \frac{mL_k}{4} \quad y_k = 1.25 \quad z_k := b_k - \frac{mL_k}{4} \quad z_k = 3.75$ - внутренние точки интервала

Значения функций во внутренних точках:

$fy_k := f(y_k) \quad fy_k = -11.875 \quad fx_{c_k} := f\left(x_{c_k}\right) \quad fx_{c_k} = -17.5$

$fz_k := f(z_k) \quad fz_k = -16.875$

Сравнить значения функций в точках y_k и x_{c_k}:

$fy_k < fx_{c_k} = 0$ - неравенство не выполняется (неравенство возвратило ноль)

Сравнить значения функций в точках z_k и x_{c_k}:

$fz_k > fx_{c_k} = 1$ - неравенство выполняется (неравенство возвратило единицу)

Расчет точек для нового интервала неопределенности:

$a_{k+1} := y_k \quad a_{k+1} = 1.25 \quad b_{k+1} := z_k \quad b_{k+1} = 3.75 \quad x_{c_{k+1}} := x_{c_k} \quad x_{c_{k+1}} = 2.5$

Проверить условие окончания расчета:

$L_{k+1} := \left(a_{k+1} \;\; b_{k+1} \right) \quad L_{k+1} = (1.25 \;\; 3.75)$ - границы нового интервала

$mL_{k+1} := \left| b_{k+1} - a_{k+1} \right| \quad mL_{k+1} = 2.5$ - размер нового интервала

$mL_{k+1} > \Delta L = 1$ - неравенство выполняется (неравенство возвратило единицу). Продолжить расчет.

1.3. Третья итерация $\quad k := k + 1 = 2$

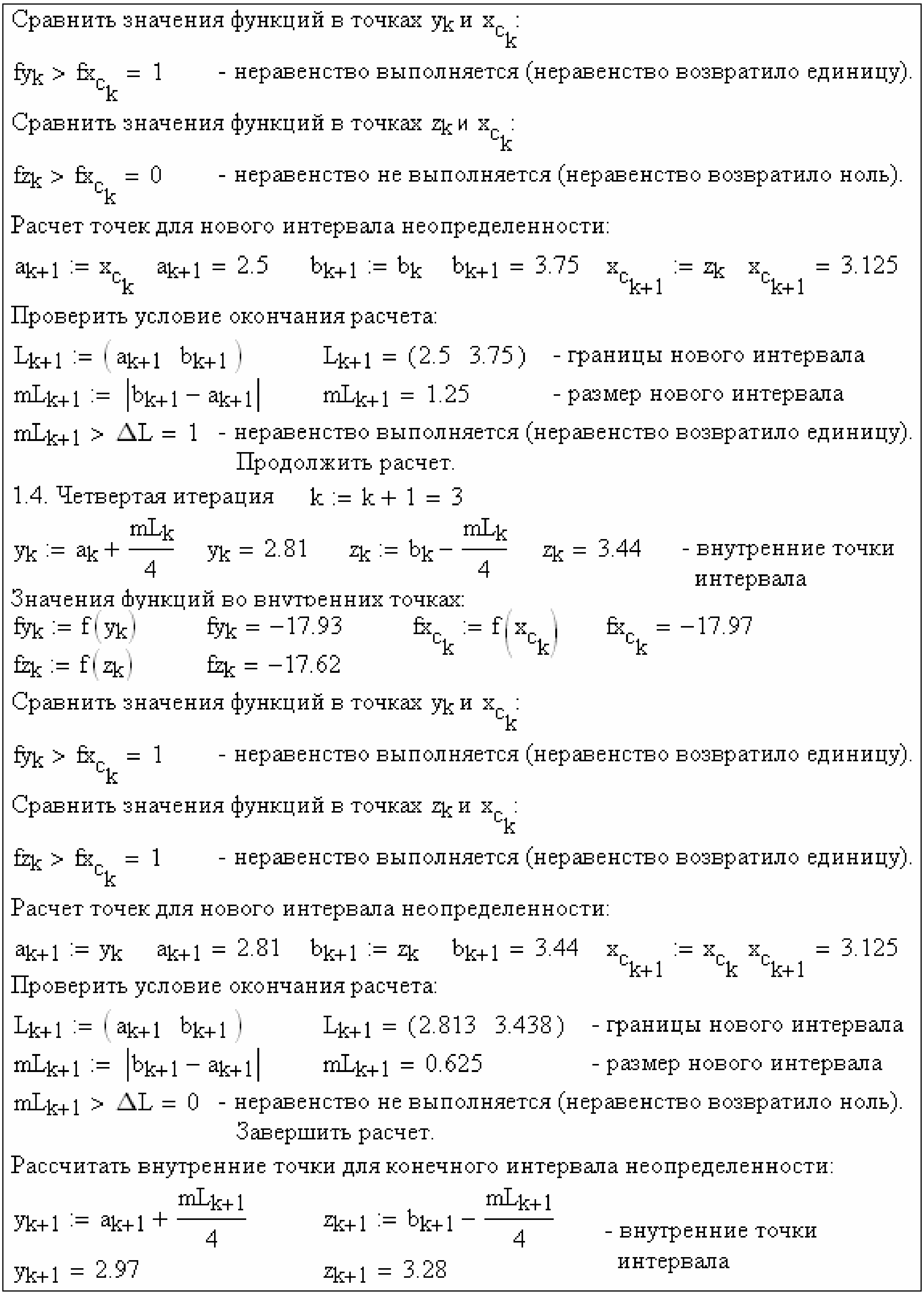
$y_k := a_k + \frac{mL_k}{4} \quad y_k = 1.875 \quad z_k := b_k - \frac{mL_k}{4} \quad z_k = 3.125$ - внутренние точки интервала

Значения функций во внутренних точках:

$fy_k := f(y_k) \quad fy_k = -15.47 \quad fx_{c_k} := f\left(x_{c_k}\right) \quad fx_{c_k} = -17.5$

$fz_k := f(z_k) \quad fz_k = -17.97$

Рис. Б 3. Листинг программы минимизации функции методом деления интервала пополам (продолжение)



Сравнить значения функций в точках y_k и x_{c_k}:

$fy_k > fx_{c_k} = 1$ - неравенство выполняется (неравенство возвратило единицу).

Сравнить значения функций в точках z_k и x_{c_k}:

$fz_k > fx_{c_k} = 0$ - неравенство не выполняется (неравенство возвратило ноль).

Расчет точек для нового интервала неопределенности:

$a_{k+1} := x_{c_k}$ $a_{k+1} = 2.5$ $b_{k+1} := b_k$ $b_{k+1} = 3.75$ $x_{c_{k+1}} := z_k$ $x_{c_{k+1}} = 3.125$

Проверить условие окончания расчета:

$L_{k+1} := (a_{k+1}\ \ b_{k+1})$ $L_{k+1} = (2.5\ \ 3.75)$ - границы нового интервала

$mL_{k+1} := |b_{k+1} - a_{k+1}|$ $mL_{k+1} = 1.25$ - размер нового интервала

$mL_{k+1} > \Delta L = 1$ - неравенство выполняется (неравенство возвратило единицу).
Продолжить расчет.

1.4. Четвертая итерация $k := k + 1 = 3$

$y_k := a_k + \frac{mL_k}{4}$ $y_k = 2.81$ $z_k := b_k - \frac{mL_k}{4}$ $z_k = 3.44$ - внутренние точки интервала

Значения функций во внутренних точках:

$fy_k := f(y_k)$ $fy_k = -17.93$ $fx_{c_k} := f(x_{c_k})$ $fx_{c_k} = -17.97$

$fz_k := f(z_k)$ $fz_k = -17.62$

Сравнить значения функций в точках y_k и x_{c_k}:

$fy_k > fx_{c_k} = 1$ - неравенство выполняется (неравенство возвратило единицу).

Сравнить значения функций в точках z_k и x_{c_k}:

$fz_k > fx_{c_k} = 1$ - неравенство выполняется (неравенство возвратило единицу).

Расчет точек для нового интервала неопределенности:

$a_{k+1} := y_k$ $a_{k+1} = 2.81$ $b_{k+1} := z_k$ $b_{k+1} = 3.44$ $x_{c_{k+1}} := x_{c_k}$ $x_{c_{k+1}} = 3.125$

Проверить условие окончания расчета:

$L_{k+1} := (a_{k+1}\ \ b_{k+1})$ $L_{k+1} = (2.813\ \ 3.438)$ - границы нового интервала

$mL_{k+1} := |b_{k+1} - a_{k+1}|$ $mL_{k+1} = 0.625$ - размер нового интервала

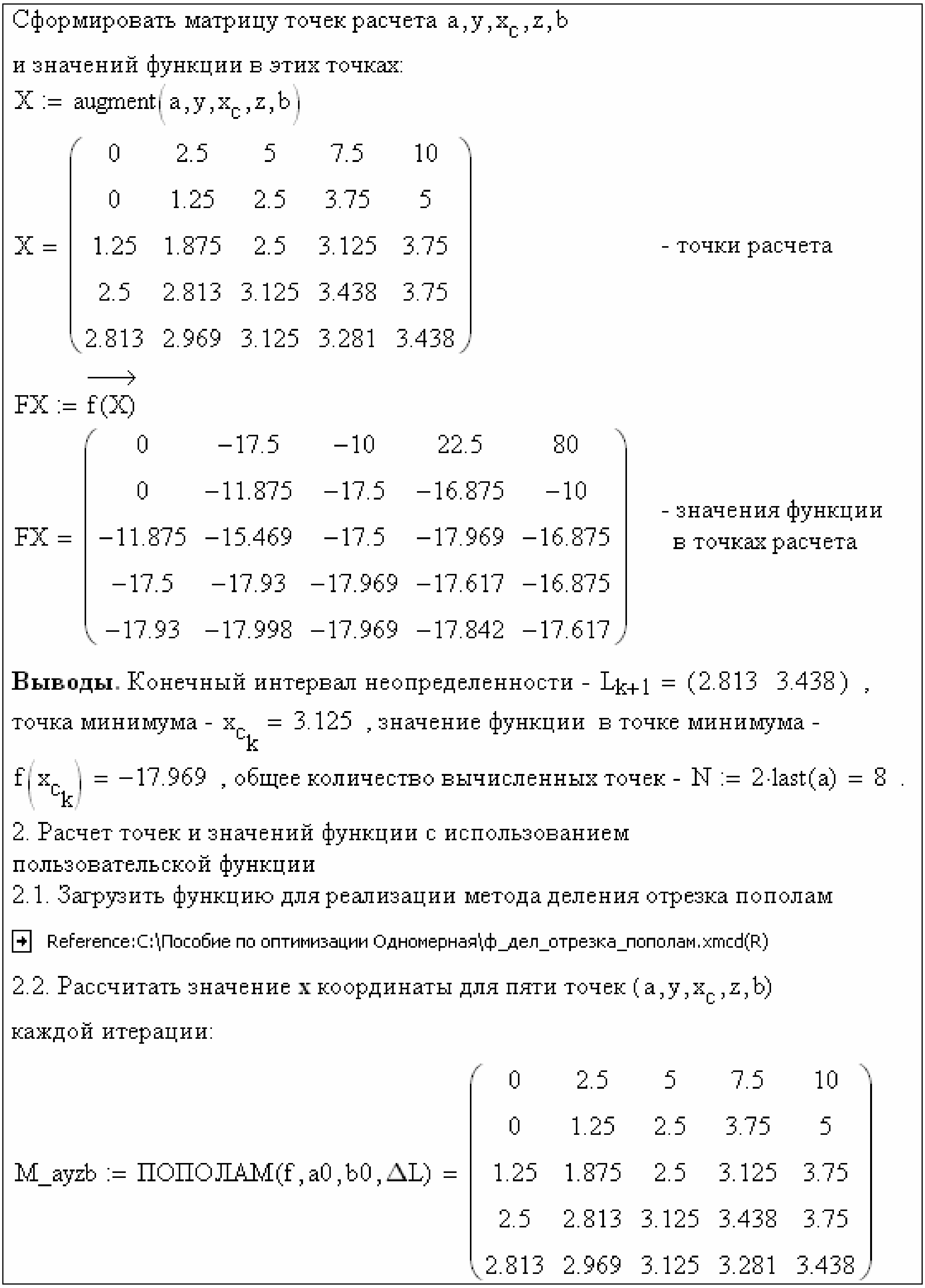
$mL_{k+1} > \Delta L = 0$ - неравенство не выполняется (неравенство возвратило ноль).
Завершить расчет.

Рассчитать внутренние точки для конечного интервала неопределенности:

$y_{k+1} := a_{k+1} + \frac{mL_{k+1}}{4}$ $z_{k+1} := b_{k+1} - \frac{mL_{k+1}}{4}$ - внутренние точки интервала

$y_{k+1} = 2.97$ $z_{k+1} = 3.28$

Рис. Б 3. Листинг программы минимизации функции
методом деления интервала пополам (продолжение)



Сформировать матрицу точек расчета a, y, x_c, z, b

и значений функции в этих точках:

$X := \mathrm{augment}(a, y, x_c, z, b)$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2.5 & 5 & 7.5 & 10 \\ 0 & 1.25 & 2.5 & 3.75 & 5 \\ 1.25 & 1.875 & 2.5 & 3.125 & 3.75 \\ 2.5 & 2.813 & 3.125 & 3.438 & 3.75 \\ 2.813 & 2.969 & 3.125 & 3.281 & 3.438 \end{pmatrix}$$

- точки расчета

$FX := \overrightarrow{f(X)}$

$$FX = \begin{pmatrix} 0 & -17.5 & -10 & 22.5 & 80 \\ 0 & -11.875 & -17.5 & -16.875 & -10 \\ -11.875 & -15.469 & -17.5 & -17.969 & -16.875 \\ -17.5 & -17.93 & -17.969 & -17.617 & -16.875 \\ -17.93 & -17.998 & -17.969 & -17.842 & -17.617 \end{pmatrix}$$

- значения функции в точках расчета

Выводы. Конечный интервал неопределенности - $L_{k+1} = (2.813 \quad 3.438)$, точка минимума - $x_{c_k} = 3.125$, значение функции в точке минимума - $f\left(x_{c_k}\right) = -17.969$, общее количество вычисленных точек - $N := 2 \cdot \mathrm{last}(a) = 8$.

2. Расчет точек и значений функции с использованием пользовательской функции

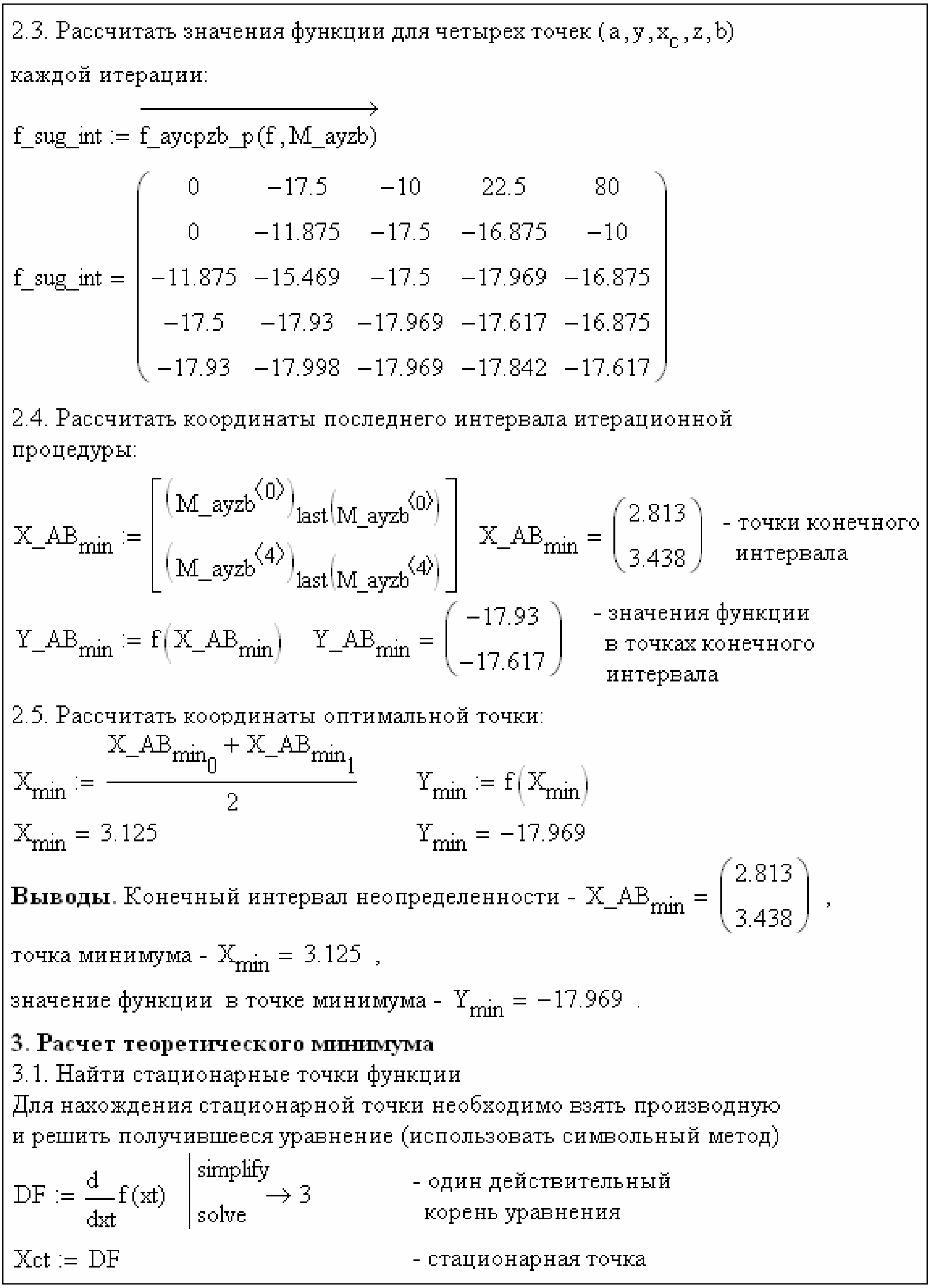
2.1. Загрузить функцию для реализации метода деления отрезка пополам

→ Reference:C:\Пособие по оптимизации Одномерная\ф_дел_отрезка_пополам.xmcd(R)

2.2. Рассчитать значение **x** координаты для пяти точек (a, y, x_c, z, b) каждой итерации:

$$M\_ayzb := \text{ПОПОЛАМ}(f, a0, b0, \Delta L) = \begin{pmatrix} 0 & 2.5 & 5 & 7.5 & 10 \\ 0 & 1.25 & 2.5 & 3.75 & 5 \\ 1.25 & 1.875 & 2.5 & 3.125 & 3.75 \\ 2.5 & 2.813 & 3.125 & 3.438 & 3.75 \\ 2.813 & 2.969 & 3.125 & 3.281 & 3.438 \end{pmatrix}$$

Рис. Б 3. Листинг программы минимизации функции методом деления интервала пополам (продолжение)



2.3. Рассчитать значения функции для четырех точек (a, y, x_c, z, b) каждой итерации:

$$f\_sug\_int := \overrightarrow{f\_aycpzb\_p(f, M\_ayzb)}$$

$$f\_sug\_int = \begin{pmatrix} 0 & -17.5 & -10 & 22.5 & 80 \\ 0 & -11.875 & -17.5 & -16.875 & -10 \\ -11.875 & -15.469 & -17.5 & -17.969 & -16.875 \\ -17.5 & -17.93 & -17.969 & -17.617 & -16.875 \\ -17.93 & -17.998 & -17.969 & -17.842 & -17.617 \end{pmatrix}$$

2.4. Рассчитать координаты последнего интервала итерационной процедуры:

$$X\_AB_{min} := \begin{bmatrix} \left(M\_ayzb^{\langle 0\rangle}\right)_{last\left(M\_ayzb^{\langle 0\rangle}\right)} \\ \left(M\_ayzb^{\langle 4\rangle}\right)_{last\left(M\_ayzb^{\langle 4\rangle}\right)} \end{bmatrix} \quad X\_AB_{min} = \begin{pmatrix} 2.813 \\ 3.438 \end{pmatrix}$$

- точки конечного интервала

$$Y\_AB_{min} := f\left(X\_AB_{min}\right) \quad Y\_AB_{min} = \begin{pmatrix} -17.93 \\ -17.617 \end{pmatrix}$$

- значения функции в точках конечного интервала

2.5. Рассчитать координаты оптимальной точки:

$$X_{min} := \frac{X\_AB_{min_0} + X\_AB_{min_1}}{2} \qquad Y_{min} := f\left(X_{min}\right)$$

$$X_{min} = 3.125 \qquad Y_{min} = -17.969$$

Выводы. Конечный интервал неопределенности - $X\_AB_{min} = \begin{pmatrix} 2.813 \\ 3.438 \end{pmatrix}$,

точка минимума - $X_{min} = 3.125$,

значение функции в точке минимума - $Y_{min} = -17.969$.

3. Расчет теоретического минимума

3.1. Найти стационарные точки функции

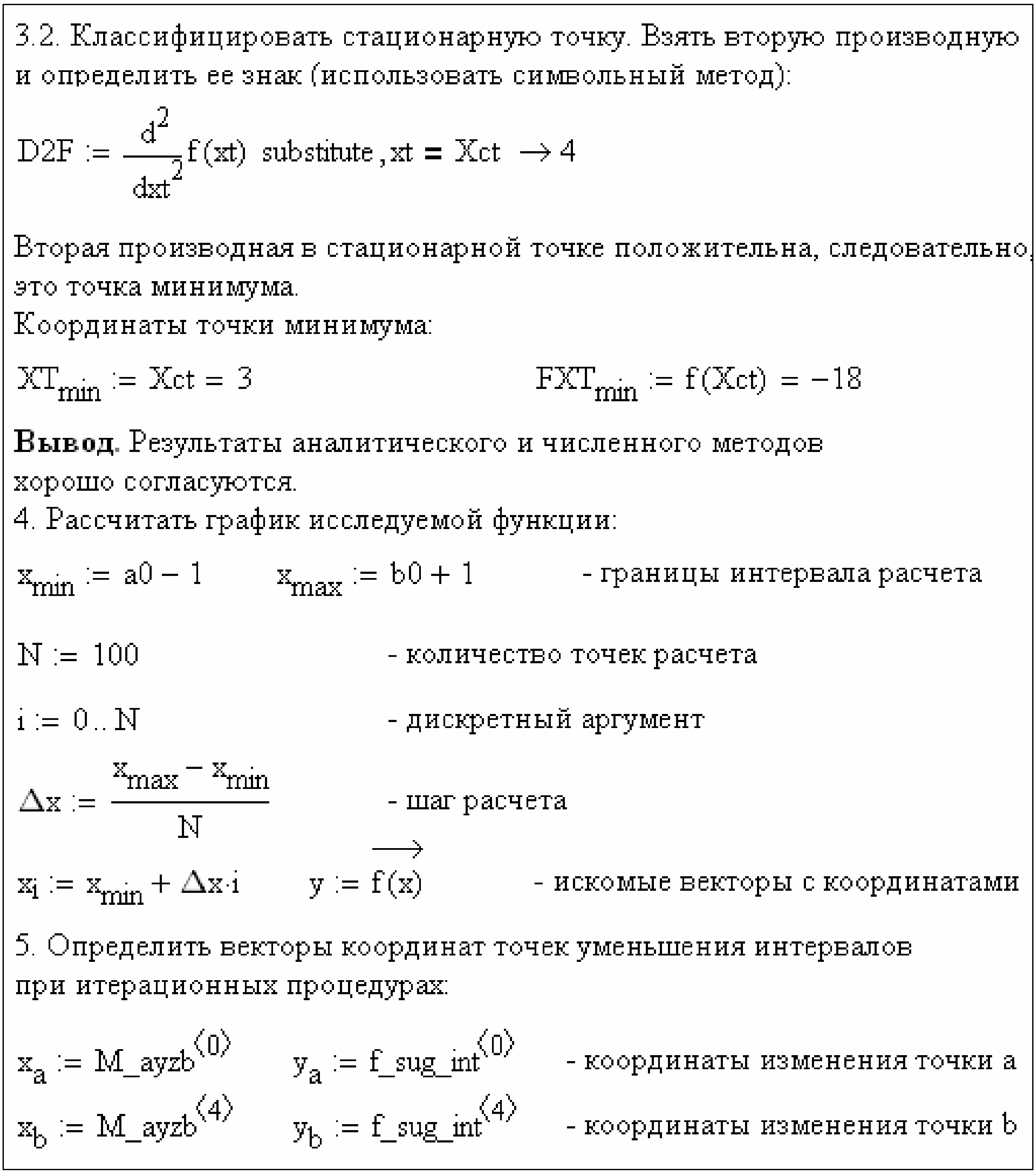
Для нахождения стационарной точки необходимо взять производную и решить получившееся уравнение (использовать символьный метод)

$$DF := \frac{d}{dxt} f(xt) \; \Big| \begin{array}{l} simplify \\ solve \end{array} \rightarrow 3$$

- один действительный корень уравнения

$Xct := DF$ - стационарная точка

Рис. Б 3. Листинг программы минимизации функции методом деления интервала пополам (продолжение)



3.2. Классифицировать стационарную точку. Взять вторую производную и определить ее знак (использовать символьный метод):

$$D2F := \frac{d^2}{dxt^2} f(xt) \text{ substitute}, xt = Xct \rightarrow 4$$

Вторая производная в стационарной точке положительна, следовательно, это точка минимума.

Координаты точки минимума:

$XT_{min} := Xct = 3$ $\qquad$ $FXT_{min} := f(Xct) = -18$

Вывод. Результаты аналитического и численного методов хорошо согласуются.

4. Рассчитать график исследуемой функции:

$x_{min} := a0 - 1 \qquad x_{max} := b0 + 1$ - границы интервала расчета

$N := 100$ - количество точек расчета

$i := 0..N$ - дискретный аргумент

$\Delta x := \frac{x_{max} - x_{min}}{N}$ - шаг расчета

$x_i := x_{min} + \Delta x \cdot i \qquad y := \overrightarrow{f(x)}$ - искомые векторы с координатами

5. Определить векторы координат точек уменьшения интервалов при итерационных процедурах:

$x_a := M\_ayzb^{\langle 0 \rangle} \qquad y_a := f\_sug\_int^{\langle 0 \rangle}$ - координаты изменения точки a

$x_b := M\_ayzb^{\langle 4 \rangle} \qquad y_b := f\_sug\_int^{\langle 4 \rangle}$ - координаты изменения точки b

Рис. Б 3. Листинг программы минимизации функции методом деления интервала пополам (продолжение)

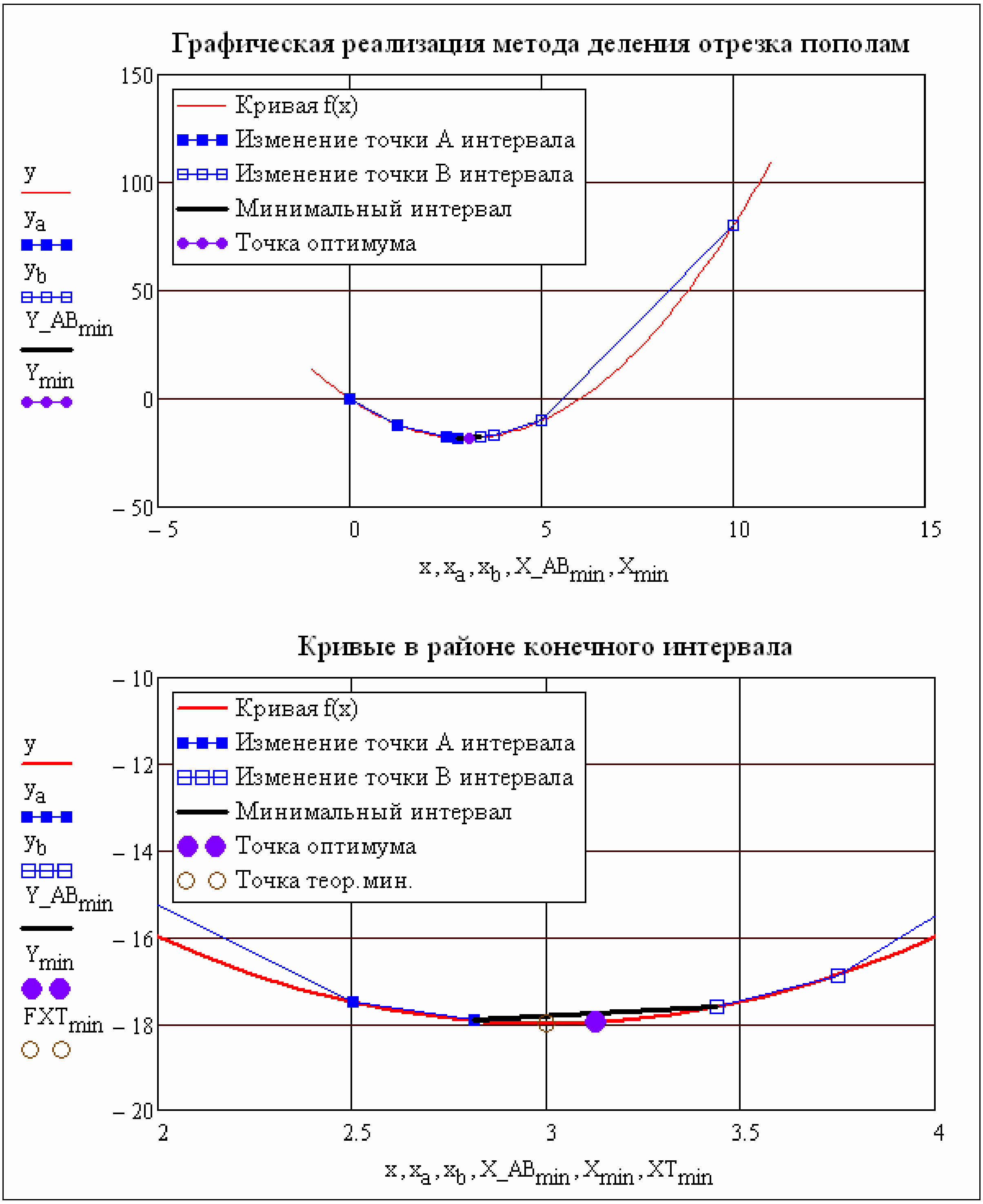
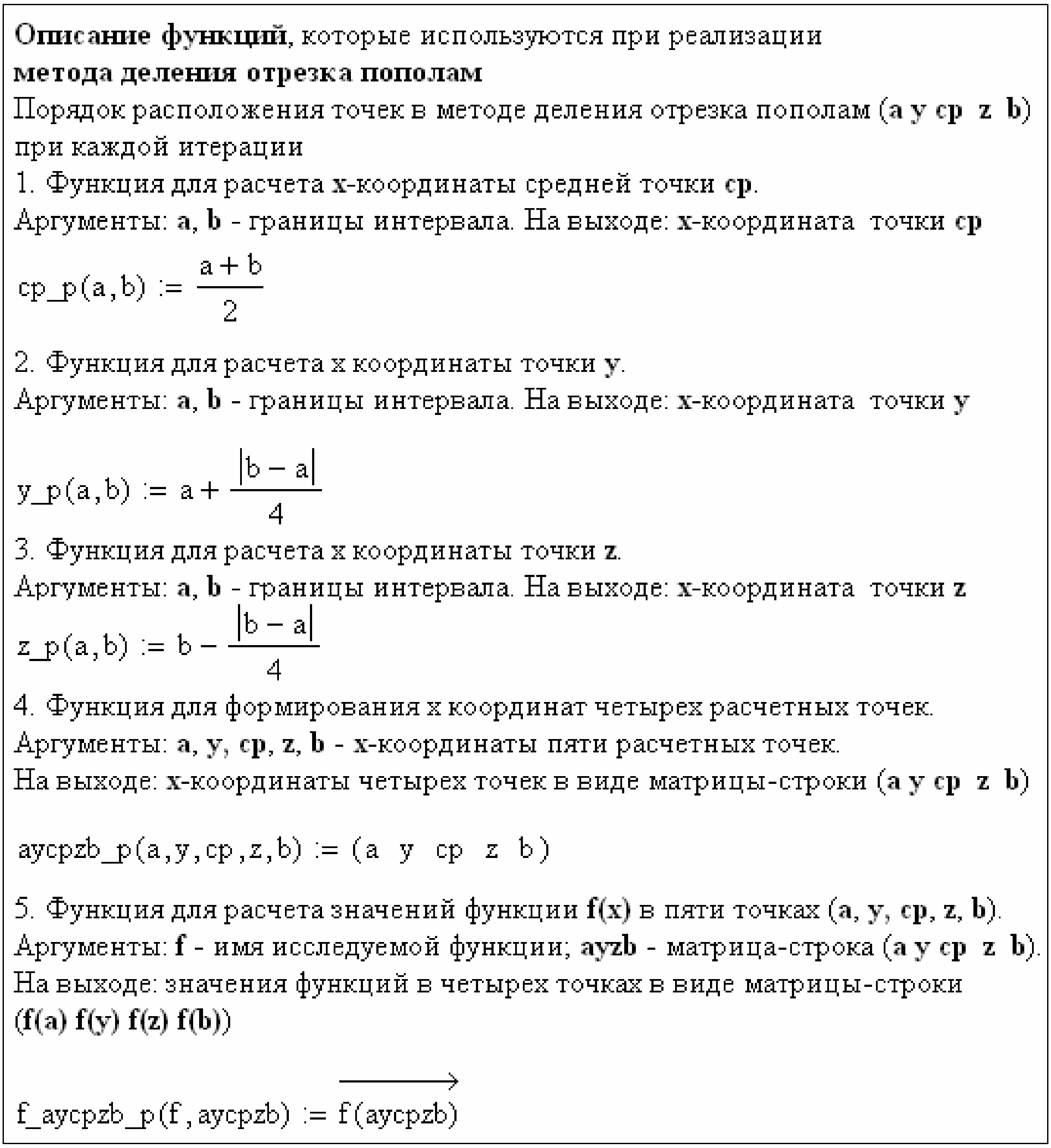


Рис. Б 3. Листинг программы минимизации функции методом деления интервала пополам (продолжение)



Описание функций, которые используются при реализации
метода деления отрезка пополам

Порядок расположения точек в методе деления отрезка пополам (**a y cp z b**) при каждой итерации

1. Функция для расчета **x**-координаты средней точки **cp**.

Аргументы: **a**, **b** - границы интервала. На выходе: **x**-координата точки **cp**

$$cp\_p(a,b) := \frac{a+b}{2}$$

2. Функция для расчета x координаты точки **y**.

Аргументы: **a**, **b** - границы интервала. На выходе: **x**-координата точки **y**

$$y\_p(a,b) := a + \frac{|b-a|}{4}$$

3. Функция для расчета x координаты точки **z**.

Аргументы: **a**, **b** - границы интервала. На выходе: **x**-координата точки **z**

$$z\_p(a,b) := b - \frac{|b-a|}{4}$$

4. Функция для формирования x координат четырех расчетных точек.

Аргументы: **a**, **y**, **cp**, **z**, **b** - **x**-координаты пяти расчетных точек.

На выходе: **x**-координаты четырех точек в виде матрицы-строки (**a y cp z b**)

$$aycpzb\_p(a,y,cp,z,b) := (a \;\; y \;\; cp \;\; z \;\; b)$$

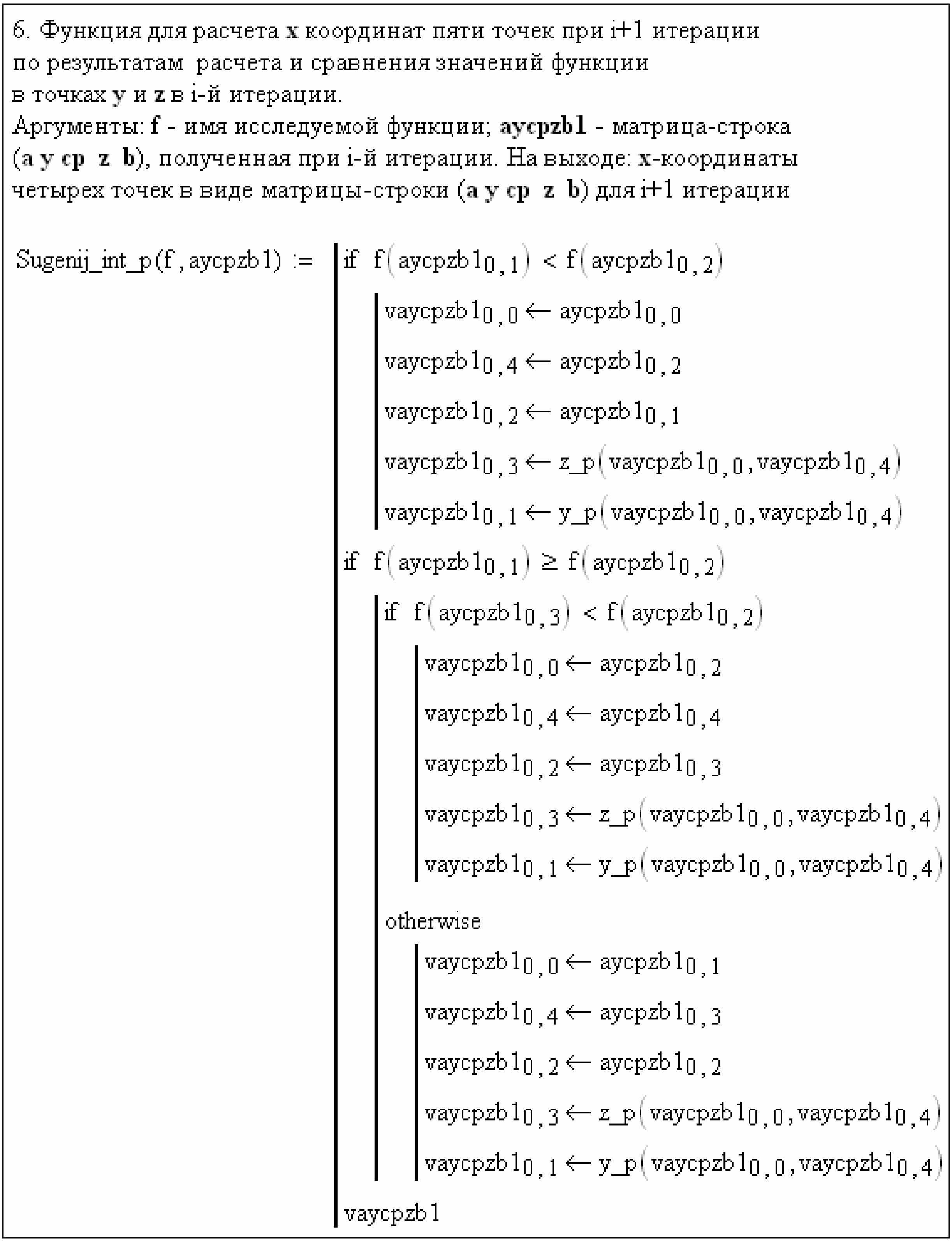
5. Функция для расчета значений функции **f(x)** в пяти точках (**a**, **y**, **cp**, **z**, **b**).

Аргументы: **f** - имя исследуемой функции; **ayzb** - матрица-строка (**a y cp z b**).

На выходе: значения функций в четырех точках в виде матрицы-строки
(**f(a) f(y) f(z) f(b)**)

$$f\_aycpzb\_p(f,aycpzb) := \overrightarrow{f(aycpzb)}$$

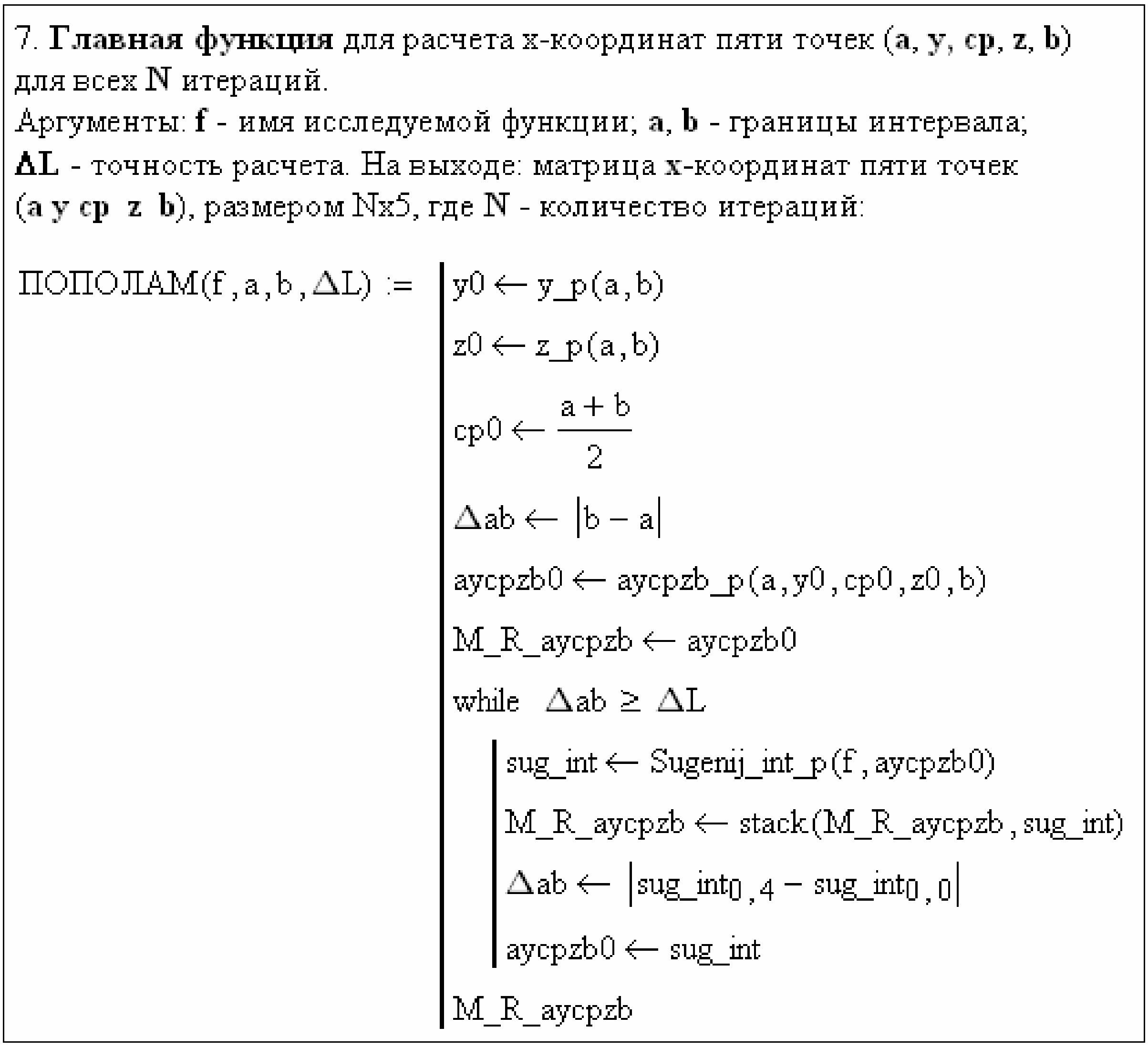
Рис. Б 3. Листинг программы минимизации функции
методом деления интервала пополам (продолжение)



6. Функция для расчета **x** координат пяти точек при i+1 итерации
по результатам расчета и сравнения значений функции
в точках **y** и **z** в i-й итерации.
Аргументы: **f** - имя исследуемой функции; **aycpzb1** - матрица-строка
(**a y cp z b**), полученная при i-й итерации. На выходе: **x**-координаты
четырех точек в виде матрицы-строки (**a y cp z b**) для i+1 итерации

```
Sugenij_int_p(f, aycpzb1) := | if  f(aycpzb1_{0,1}) < f(aycpzb1_{0,2})
                             |     vaycpzb1_{0,0} ← aycpzb1_{0,0}
                             |     vaycpzb1_{0,4} ← aycpzb1_{0,2}
                             |     vaycpzb1_{0,2} ← aycpzb1_{0,1}
                             |     vaycpzb1_{0,3} ← z_p(vaycpzb1_{0,0}, vaycpzb1_{0,4})
                             |     vaycpzb1_{0,1} ← y_p(vaycpzb1_{0,0}, vaycpzb1_{0,4})
                             | if  f(aycpzb1_{0,1}) ≥ f(aycpzb1_{0,2})
                             |     if  f(aycpzb1_{0,3}) < f(aycpzb1_{0,2})
                             |         vaycpzb1_{0,0} ← aycpzb1_{0,2}
                             |         vaycpzb1_{0,4} ← aycpzb1_{0,4}
                             |         vaycpzb1_{0,2} ← aycpzb1_{0,3}
                             |         vaycpzb1_{0,3} ← z_p(vaycpzb1_{0,0}, vaycpzb1_{0,4})
                             |         vaycpzb1_{0,1} ← y_p(vaycpzb1_{0,0}, vaycpzb1_{0,4})
                             |     otherwise
                             |         vaycpzb1_{0,0} ← aycpzb1_{0,1}
                             |         vaycpzb1_{0,4} ← aycpzb1_{0,3}
                             |         vaycpzb1_{0,2} ← aycpzb1_{0,2}
                             |         vaycpzb1_{0,3} ← z_p(vaycpzb1_{0,0}, vaycpzb1_{0,4})
                             |         vaycpzb1_{0,1} ← y_p(vaycpzb1_{0,0}, vaycpzb1_{0,4})
                             | vaycpzb1
```

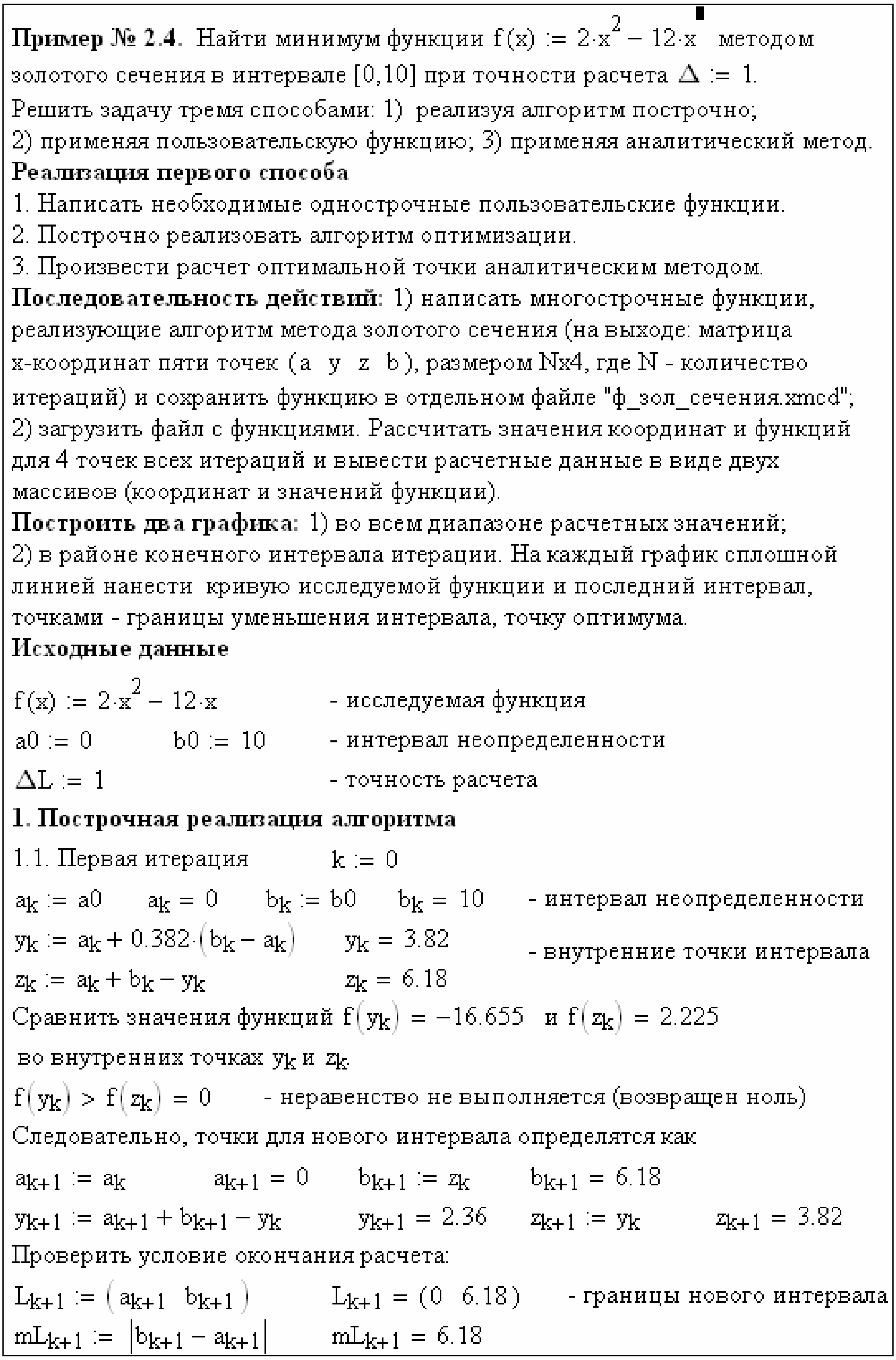
Рис. Б 3. Листинг программы минимизации функции методом деления интервала пополам (продолжение)



7. **Главная функция** для расчета x-координат пяти точек (**a**, **y**, **cp**, **z**, **b**) для всех **N** итераций.
Аргументы: **f** - имя исследуемой функции; **a**, **b** - границы интервала; **ΔL** - точность расчета. На выходе: матрица **x**-координат пяти точек (**a y cp z b**), размером Nx5, где **N** - количество итераций:

```
ПОПОЛАМ(f, a, b, ΔL) :=  | y0 ← y_p(a, b)
                         | z0 ← z_p(a, b)
                         | cp0 ← $\frac{a+b}{2}$
                         | Δab ← |b − a|
                         | aycpzb0 ← aycpzb_p(a, y0, cp0, z0, b)
                         | M_R_aycpzb ← aycpzb0
                         | while  Δab ≥ ΔL
                         |     | sug_int ← Sugenij_int_p(f, aycpzb0)
                         |     | M_R_aycpzb ← stack(M_R_aycpzb, sug_int)
                         |     | Δab ← $|sug\_int_{0,4} - sug\_int_{0,0}|$
                         |     | aycpzb0 ← sug_int
                         | M_R_aycpzb
```

Рис. Б 3. Листинг программы минимизации функции методом деления интервала пополам (окончание)



Пример № 2.4. Найти минимум функции $f(x) := 2\cdot x^2 - 12\cdot x$ методом золотого сечения в интервале [0,10] при точности расчета $\Delta := 1$.

Решить задачу тремя способами: 1) реализуя алгоритм построчно;
2) применяя пользовательскую функцию; 3) применяя аналитический метод.

Реализация первого способа

1. Написать необходимые однострочные пользовательские функции.
2. Построчно реализовать алгоритм оптимизации.
3. Произвести расчет оптимальной точки аналитическим методом.

Последовательность действий: 1) написать многострочные функции, реализующие алгоритм метода золотого сечения (на выходе: матрица x-координат пяти точек $(a\ \ y\ \ z\ \ b)$, размером Nx4, где N - количество итераций) и сохранить функцию в отдельном файле "ф_зол_сечения.xmcd";
2) загрузить файл с функциями. Рассчитать значения координат и функций для 4 точек всех итераций и вывести расчетные данные в виде двух массивов (координат и значений функции).

Построить два графика: 1) во всем диапазоне расчетных значений;
2) в районе конечного интервала итерации. На каждый график сплошной линией нанести кривую исследуемой функции и последний интервал, точками - границы уменьшения интервала, точку оптимума.

Исходные данные

$f(x) := 2\cdot x^2 - 12\cdot x$ - исследуемая функция

$a0 := 0$ $\quad b0 := 10$ - интервал неопределенности

$\Delta L := 1$ - точность расчета

1. Построчная реализация алгоритма

1.1. Первая итерация $\quad k := 0$

$a_k := a0 \quad a_k = 0 \quad b_k := b0 \quad b_k = 10$ - интервал неопределенности

$y_k := a_k + 0.382\cdot(b_k - a_k) \quad y_k = 3.82$

$z_k := a_k + b_k - y_k \quad z_k = 6.18$

- внутренние точки интервала

Сравнить значения функций $f(y_k) = -16.655$ и $f(z_k) = 2.225$

во внутренних точках y_k и z_k

$f(y_k) > f(z_k) = 0$ - неравенство не выполняется (возвращен ноль)

Следовательно, точки для нового интервала определятся как

$a_{k+1} := a_k \quad a_{k+1} = 0 \quad b_{k+1} := z_k \quad b_{k+1} = 6.18$

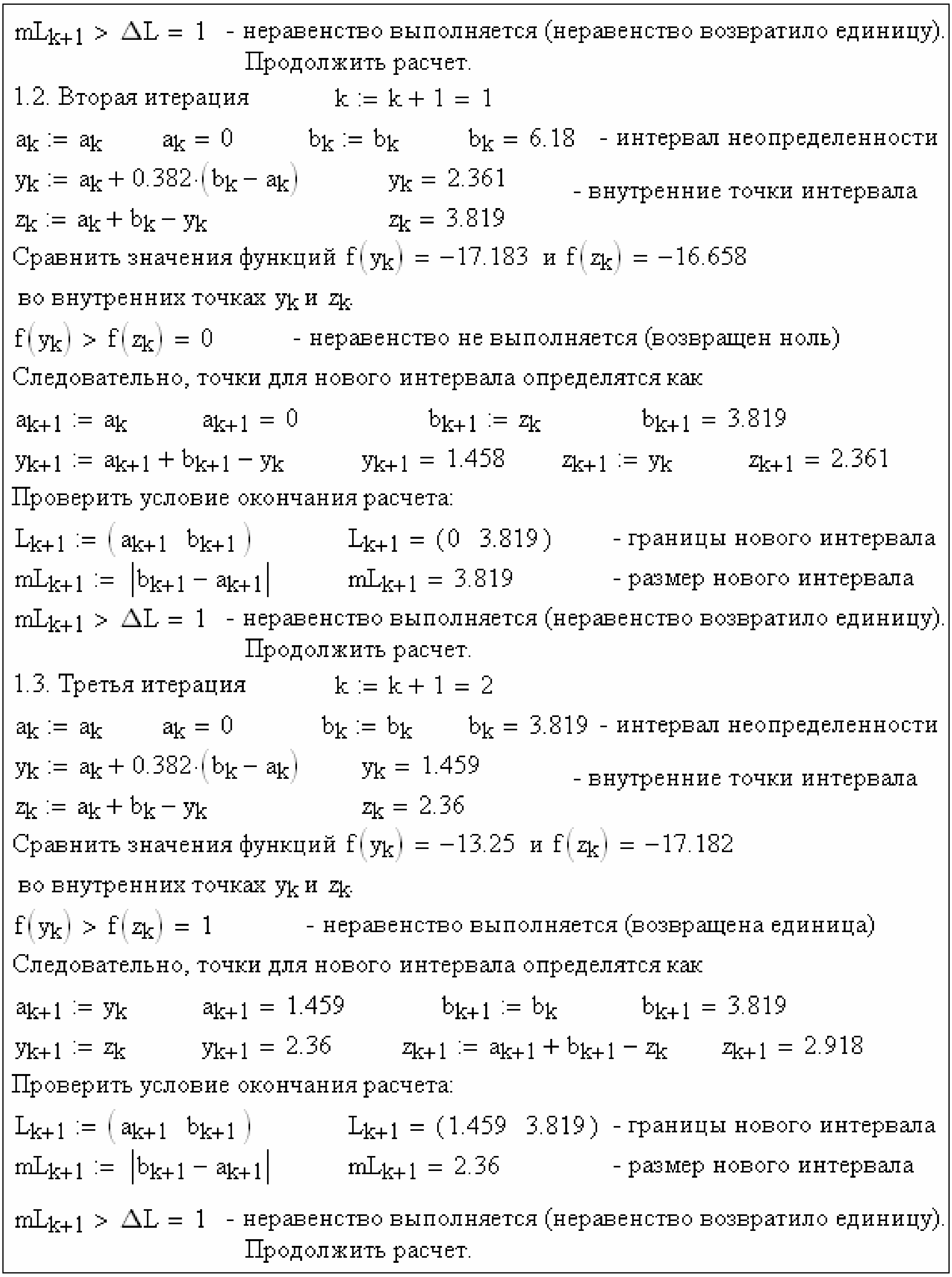
$y_{k+1} := a_{k+1} + b_{k+1} - y_k \quad y_{k+1} = 2.36 \quad z_{k+1} := y_k \quad z_{k+1} = 3.82$

Проверить условие окончания расчета:

$L_{k+1} := (a_{k+1}\ \ b_{k+1}) \quad L_{k+1} = (0\ \ 6.18)$ - границы нового интервала

$mL_{k+1} := |b_{k+1} - a_{k+1}| \quad mL_{k+1} = 6.18$

Рис. Б 4. Листинг программы минимизации функции
методом золотого сечения



$mL_{k+1} > \Delta L = 1$ - неравенство выполняется (неравенство возвратило единицу). Продолжить расчет.

1.2. Вторая итерация $k := k + 1 = 1$

$a_k := a_k$ $a_k = 0$ $b_k := b_k$ $b_k = 6.18$ - интервал неопределенности

$y_k := a_k + 0.382 \cdot (b_k - a_k)$ $y_k = 2.361$

$z_k := a_k + b_k - y_k$ $z_k = 3.819$ - внутренние точки интервала

Сравнить значения функций $f(y_k) = -17.183$ и $f(z_k) = -16.658$ во внутренних точках y_k и z_k.

$f(y_k) > f(z_k) = 0$ - неравенство не выполняется (возвращен ноль)

Следовательно, точки для нового интервала определятся как

$a_{k+1} := a_k$ $a_{k+1} = 0$ $b_{k+1} := z_k$ $b_{k+1} = 3.819$

$y_{k+1} := a_{k+1} + b_{k+1} - y_k$ $y_{k+1} = 1.458$ $z_{k+1} := y_k$ $z_{k+1} = 2.361$

Проверить условие окончания расчета:

$L_{k+1} := (a_{k+1} \ \ b_{k+1})$ $L_{k+1} = (0 \ \ 3.819)$ - границы нового интервала

$mL_{k+1} := |b_{k+1} - a_{k+1}|$ $mL_{k+1} = 3.819$ - размер нового интервала

$mL_{k+1} > \Delta L = 1$ - неравенство выполняется (неравенство возвратило единицу). Продолжить расчет.

1.3. Третья итерация $k := k + 1 = 2$

$a_k := a_k$ $a_k = 0$ $b_k := b_k$ $b_k = 3.819$ - интервал неопределенности

$y_k := a_k + 0.382 \cdot (b_k - a_k)$ $y_k = 1.459$

$z_k := a_k + b_k - y_k$ $z_k = 2.36$ - внутренние точки интервала

Сравнить значения функций $f(y_k) = -13.25$ и $f(z_k) = -17.182$ во внутренних точках y_k и z_k.

$f(y_k) > f(z_k) = 1$ - неравенство выполняется (возвращена единица)

Следовательно, точки для нового интервала определятся как

$a_{k+1} := y_k$ $a_{k+1} = 1.459$ $b_{k+1} := b_k$ $b_{k+1} = 3.819$

$y_{k+1} := z_k$ $y_{k+1} = 2.36$ $z_{k+1} := a_{k+1} + b_{k+1} - z_k$ $z_{k+1} = 2.918$

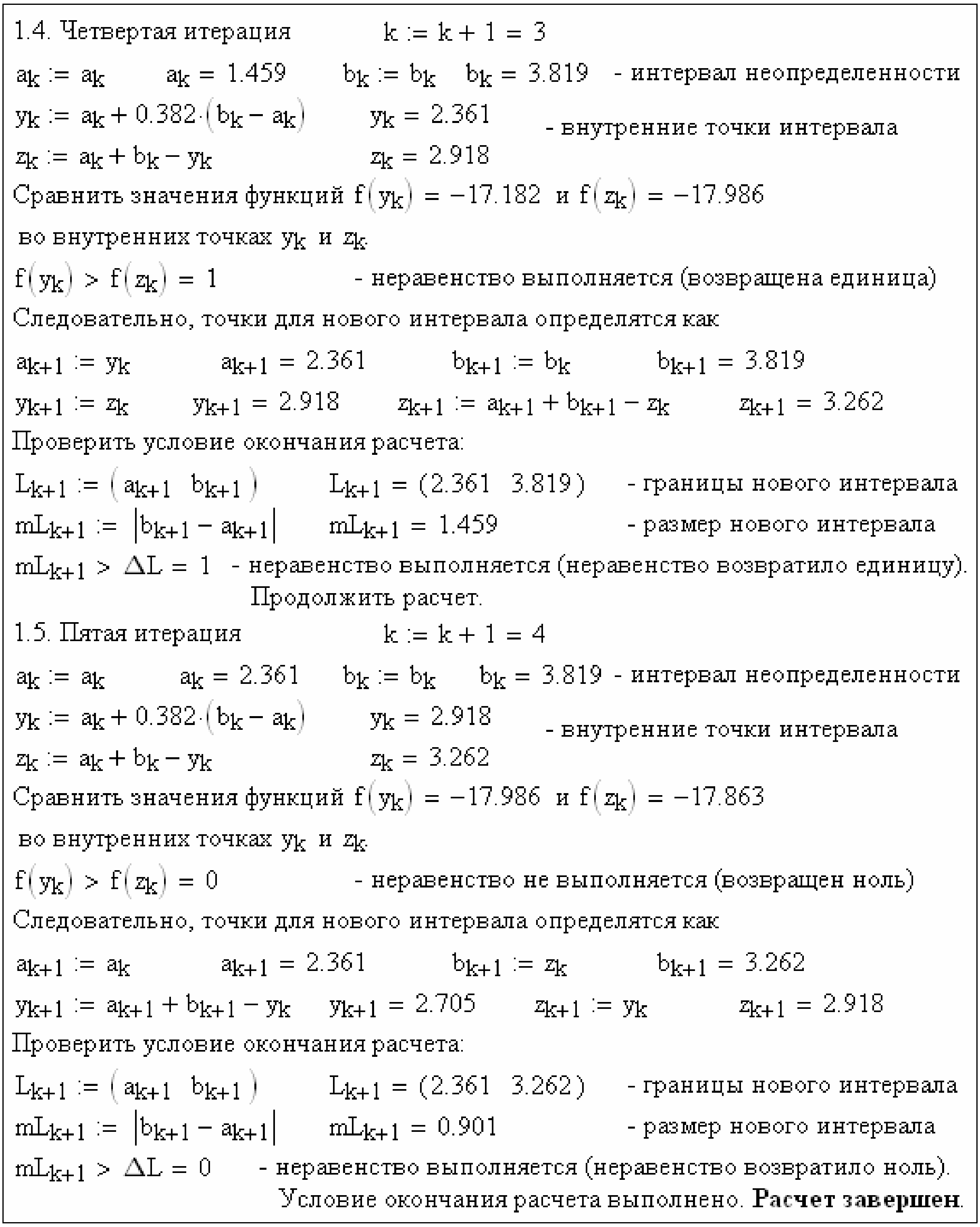
Проверить условие окончания расчета:

$L_{k+1} := (a_{k+1} \ \ b_{k+1})$ $L_{k+1} = (1.459 \ \ 3.819)$ - границы нового интервала

$mL_{k+1} := |b_{k+1} - a_{k+1}|$ $mL_{k+1} = 2.36$ - размер нового интервала

$mL_{k+1} > \Delta L = 1$ - неравенство выполняется (неравенство возвратило единицу). Продолжить расчет.

Рис. Б 4. Листинг программы минимизации функции методом золотого сечения (продолжение)



1.4. Четвертая итерация $k := k + 1 = 3$

$a_k := a_k$ $a_k = 1.459$ $b_k := b_k$ $b_k = 3.819$ - интервал неопределенности

$y_k := a_k + 0.382 \cdot (b_k - a_k)$ $y_k = 2.361$ - внутренние точки интервала

$z_k := a_k + b_k - y_k$ $z_k = 2.918$

Сравнить значения функций $f(y_k) = -17.182$ и $f(z_k) = -17.986$

во внутренних точках y_k и z_k.

$f(y_k) > f(z_k) = 1$ - неравенство выполняется (возвращена единица)

Следовательно, точки для нового интервала определятся как

$a_{k+1} := y_k$ $a_{k+1} = 2.361$ $b_{k+1} := b_k$ $b_{k+1} = 3.819$

$y_{k+1} := z_k$ $y_{k+1} = 2.918$ $z_{k+1} := a_{k+1} + b_{k+1} - z_k$ $z_{k+1} = 3.262$

Проверить условие окончания расчета:

$L_{k+1} := (a_{k+1} \ \ b_{k+1})$ $L_{k+1} = (2.361 \ \ 3.819)$ - границы нового интервала

$mL_{k+1} := |b_{k+1} - a_{k+1}|$ $mL_{k+1} = 1.459$ - размер нового интервала

$mL_{k+1} > \Delta L = 1$ - неравенство выполняется (неравенство возвратило единицу). Продолжить расчет.

1.5. Пятая итерация $k := k + 1 = 4$

$a_k := a_k$ $a_k = 2.361$ $b_k := b_k$ $b_k = 3.819$ - интервал неопределенности

$y_k := a_k + 0.382 \cdot (b_k - a_k)$ $y_k = 2.918$ - внутренние точки интервала

$z_k := a_k + b_k - y_k$ $z_k = 3.262$

Сравнить значения функций $f(y_k) = -17.986$ и $f(z_k) = -17.863$

во внутренних точках y_k и z_k.

$f(y_k) > f(z_k) = 0$ - неравенство не выполняется (возвращен ноль)

Следовательно, точки для нового интервала определятся как

$a_{k+1} := a_k$ $a_{k+1} = 2.361$ $b_{k+1} := z_k$ $b_{k+1} = 3.262$

$y_{k+1} := a_{k+1} + b_{k+1} - y_k$ $y_{k+1} = 2.705$ $z_{k+1} := y_k$ $z_{k+1} = 2.918$

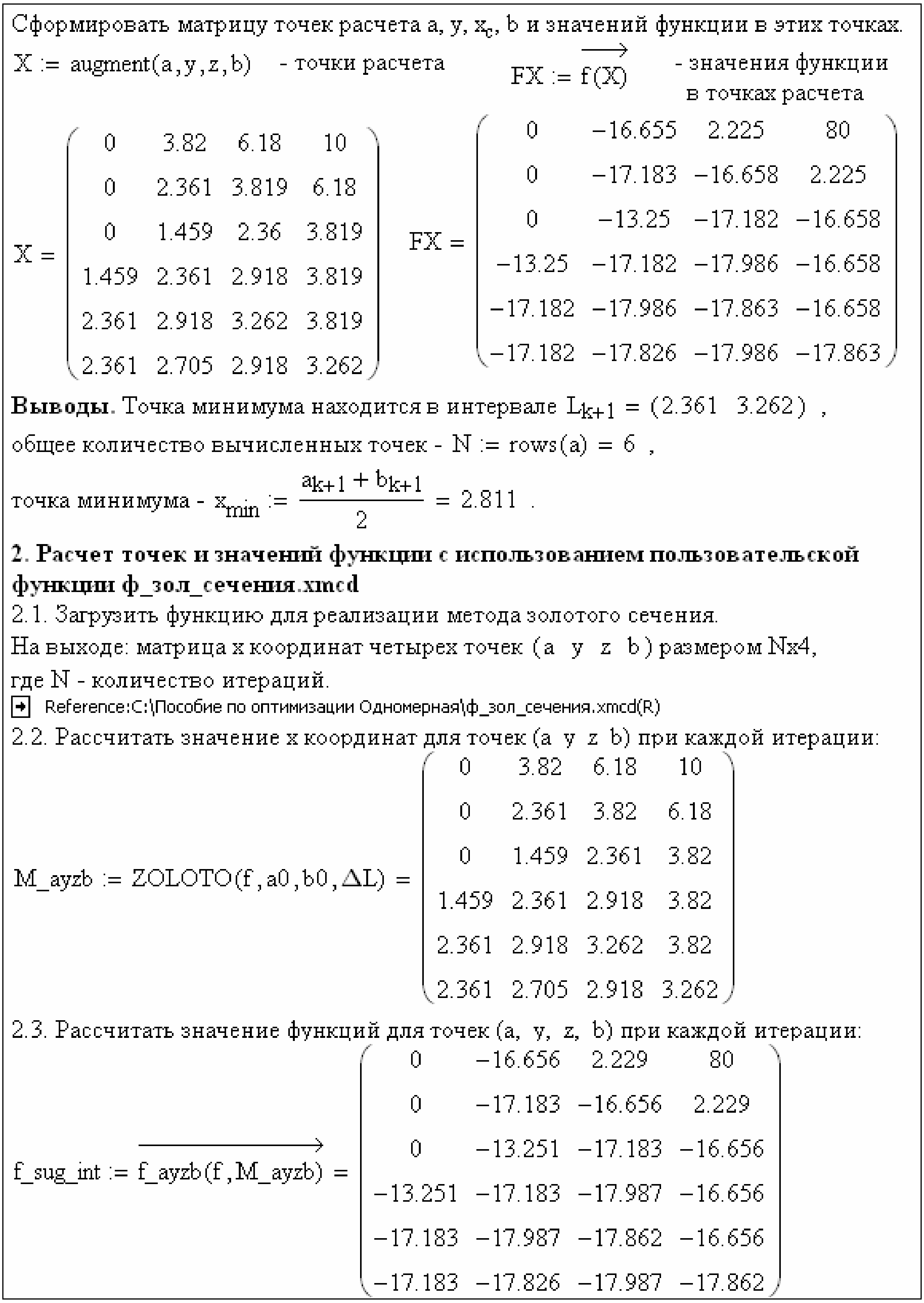
Проверить условие окончания расчета:

$L_{k+1} := (a_{k+1} \ \ b_{k+1})$ $L_{k+1} = (2.361 \ \ 3.262)$ - границы нового интервала

$mL_{k+1} := |b_{k+1} - a_{k+1}|$ $mL_{k+1} = 0.901$ - размер нового интервала

$mL_{k+1} > \Delta L = 0$ - неравенство выполняется (неравенство возвратило ноль). Условие окончания расчета выполнено. **Расчет завершен**.

Рис. Б 4. Листинг программы минимизации функции методом золотого сечения (продолжение)



Сформировать матрицу точек расчета a, y, x_c, b и значений функции в этих точках.

$X := \mathrm{augment}(a, y, z, b)$ - точки расчета $FX := \overrightarrow{f(X)}$ - значения функции в точках расчета

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 3.82 & 6.18 & 10 \\ 0 & 2.361 & 3.819 & 6.18 \\ 0 & 1.459 & 2.36 & 3.819 \\ 1.459 & 2.361 & 2.918 & 3.819 \\ 2.361 & 2.918 & 3.262 & 3.819 \\ 2.361 & 2.705 & 2.918 & 3.262 \end{pmatrix} \quad FX = \begin{pmatrix} 0 & -16.655 & 2.225 & 80 \\ 0 & -17.183 & -16.658 & 2.225 \\ 0 & -13.25 & -17.182 & -16.658 \\ -13.25 & -17.182 & -17.986 & -16.658 \\ -17.182 & -17.986 & -17.863 & -16.658 \\ -17.182 & -17.826 & -17.986 & -17.863 \end{pmatrix}$$

Выводы. Точка минимума находится в интервале $L_{k+1} = (2.361 \quad 3.262)$,

общее количество вычисленных точек - $N := \mathrm{rows}(a) = 6$,

точка минимума - $x_{min} := \dfrac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2} = 2.811$.

2. Расчет точек и значений функции с использованием пользовательской функции ф_зол_сечения.xmcd

2.1. Загрузить функцию для реализации метода золотого сечения.

На выходе: матрица x координат четырех точек (a y z b) размером Nx4,

где N - количество итераций.

➔ Reference:C:\Пособие по оптимизации Одномерная\ф_зол_сечения.xmcd(R)

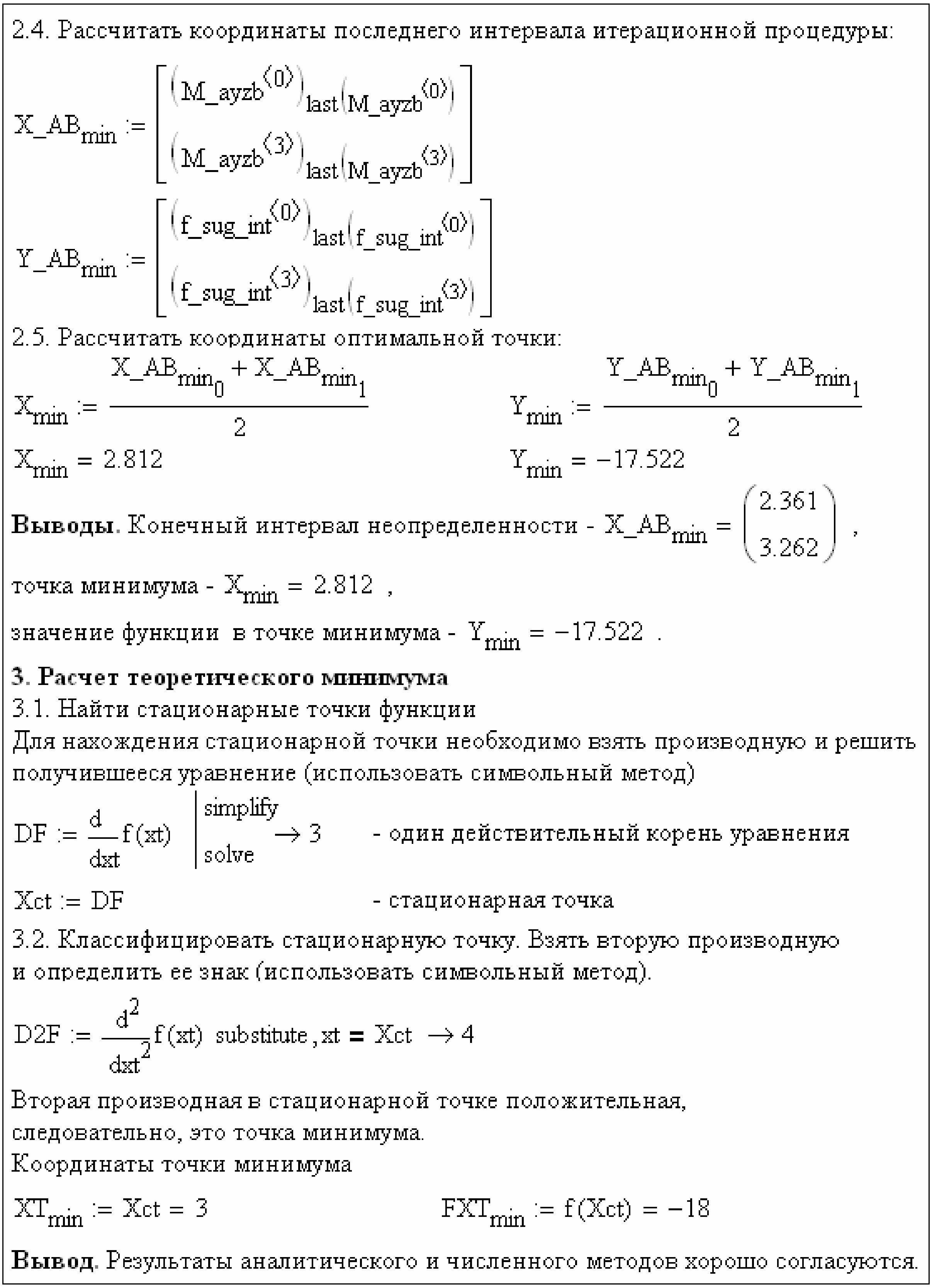
2.2. Рассчитать значение x координат для точек (a y z b) при каждой итерации:

$$M\_ayzb := \mathrm{ZOLOTO}(f, a0, b0, \Delta L) = \begin{pmatrix} 0 & 3.82 & 6.18 & 10 \\ 0 & 2.361 & 3.82 & 6.18 \\ 0 & 1.459 & 2.361 & 3.82 \\ 1.459 & 2.361 & 2.918 & 3.82 \\ 2.361 & 2.918 & 3.262 & 3.82 \\ 2.361 & 2.705 & 2.918 & 3.262 \end{pmatrix}$$

2.3. Рассчитать значение функций для точек (a, y, z, b) при каждой итерации:

$$f\_sug\_int := \overrightarrow{f\_ayzb(f, M\_ayzb)} = \begin{pmatrix} 0 & -16.656 & 2.229 & 80 \\ 0 & -17.183 & -16.656 & 2.229 \\ 0 & -13.251 & -17.183 & -16.656 \\ -13.251 & -17.183 & -17.987 & -16.656 \\ -17.183 & -17.987 & -17.862 & -16.656 \\ -17.183 & -17.826 & -17.987 & -17.862 \end{pmatrix}$$

Рис. Б 4. Листинг программы минимизации функции методом золотого сечения (продолжение)



2.4. Рассчитать координаты последнего интервала итерационной процедуры:

$$X\_AB_{min} := \begin{bmatrix} \left(M\_ayzb^{\langle 0\rangle}\right)_{last\left(M\_ayzb^{\langle 0\rangle}\right)} \\ \left(M\_ayzb^{\langle 3\rangle}\right)_{last\left(M\_ayzb^{\langle 3\rangle}\right)} \end{bmatrix}$$

$$Y\_AB_{min} := \begin{bmatrix} \left(f\_sug\_int^{\langle 0\rangle}\right)_{last\left(f\_sug\_int^{\langle 0\rangle}\right)} \\ \left(f\_sug\_int^{\langle 3\rangle}\right)_{last\left(f\_sug\_int^{\langle 3\rangle}\right)} \end{bmatrix}$$

2.5. Рассчитать координаты оптимальной точки:

$$X_{min} := \frac{X\_AB_{min_0} + X\_AB_{min_1}}{2} \qquad Y_{min} := \frac{Y\_AB_{min_0} + Y\_AB_{min_1}}{2}$$

$$X_{min} = 2.812 \qquad Y_{min} = -17.522$$

Выводы. Конечный интервал неопределенности - $X\_AB_{min} = \begin{pmatrix} 2.361 \\ 3.262 \end{pmatrix}$,

точка минимума - $X_{min} = 2.812$,

значение функции в точке минимума - $Y_{min} = -17.522$.

3. Расчет теоретического минимума

3.1. Найти стационарные точки функции

Для нахождения стационарной точки необходимо взять производную и решить получившееся уравнение (использовать символьный метод)

$$DF := \frac{d}{dxt} f(xt) \ \left|\begin{matrix} simplify \\ solve \end{matrix}\right. \rightarrow 3$$ - один действительный корень уравнения

$Xct := DF$ - стационарная точка

3.2. Классифицировать стационарную точку. Взять вторую производную и определить ее знак (использовать символьный метод).

$$D2F := \frac{d^2}{dxt^2} f(xt) \ substitute, xt = Xct \ \rightarrow 4$$

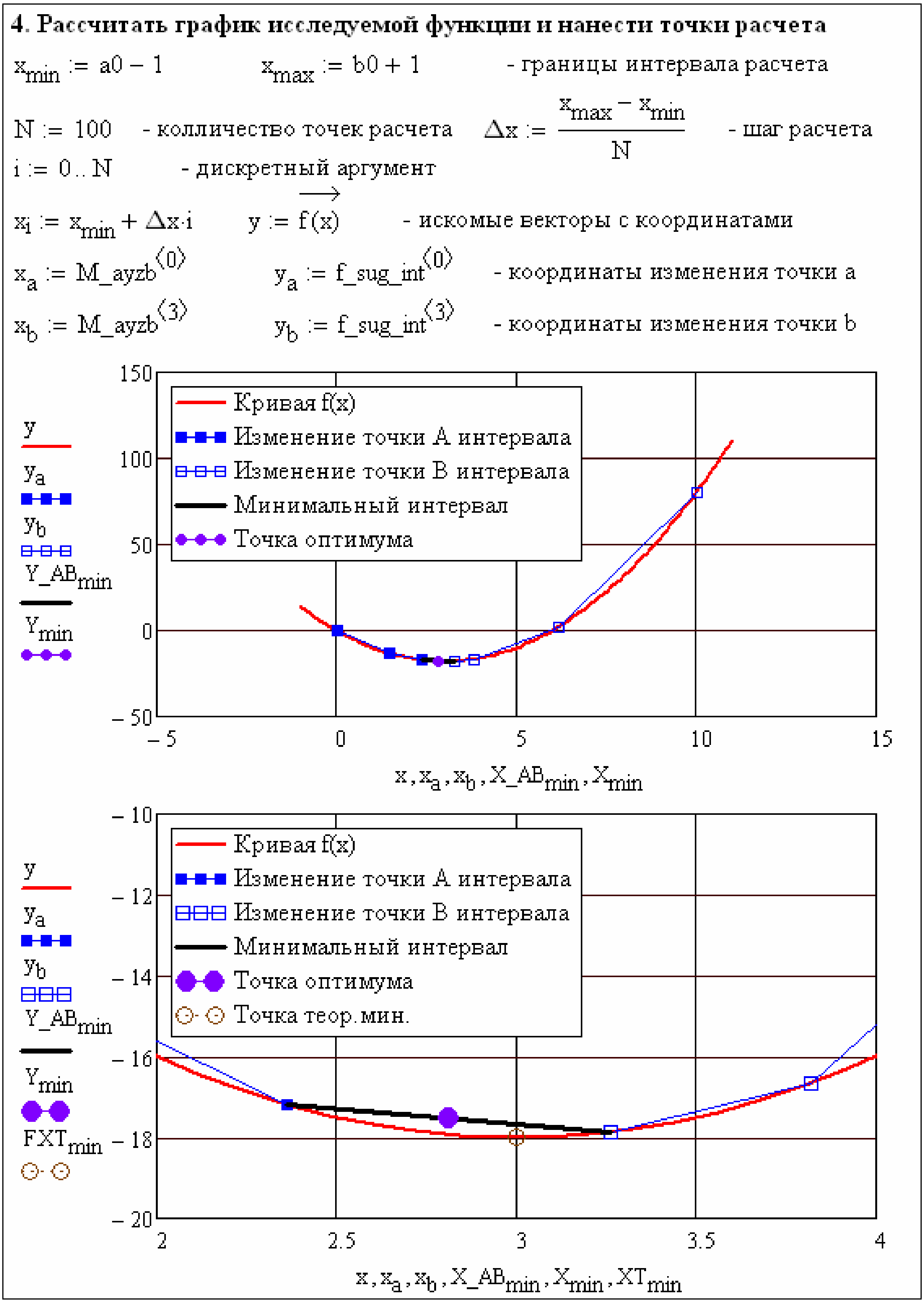
Вторая производная в стационарной точке положительная, следовательно, это точка минимума.

Координаты точки минимума

$$XT_{min} := Xct = 3 \qquad FXT_{min} := f(Xct) = -18$$

Вывод. Результаты аналитического и численного методов хорошо согласуются.

Рис. Б 4. Листинг программы минимизации функции методом золотого сечения (продолжение)



4. Рассчитать график исследуемой функции и нанести точки расчета

$x_{min} := a0 - 1$ $x_{max} := b0 + 1$ - границы интервала расчета

$N := 100$ - колличество точек расчета $\Delta x := \frac{x_{max} - x_{min}}{N}$ - шаг расчета

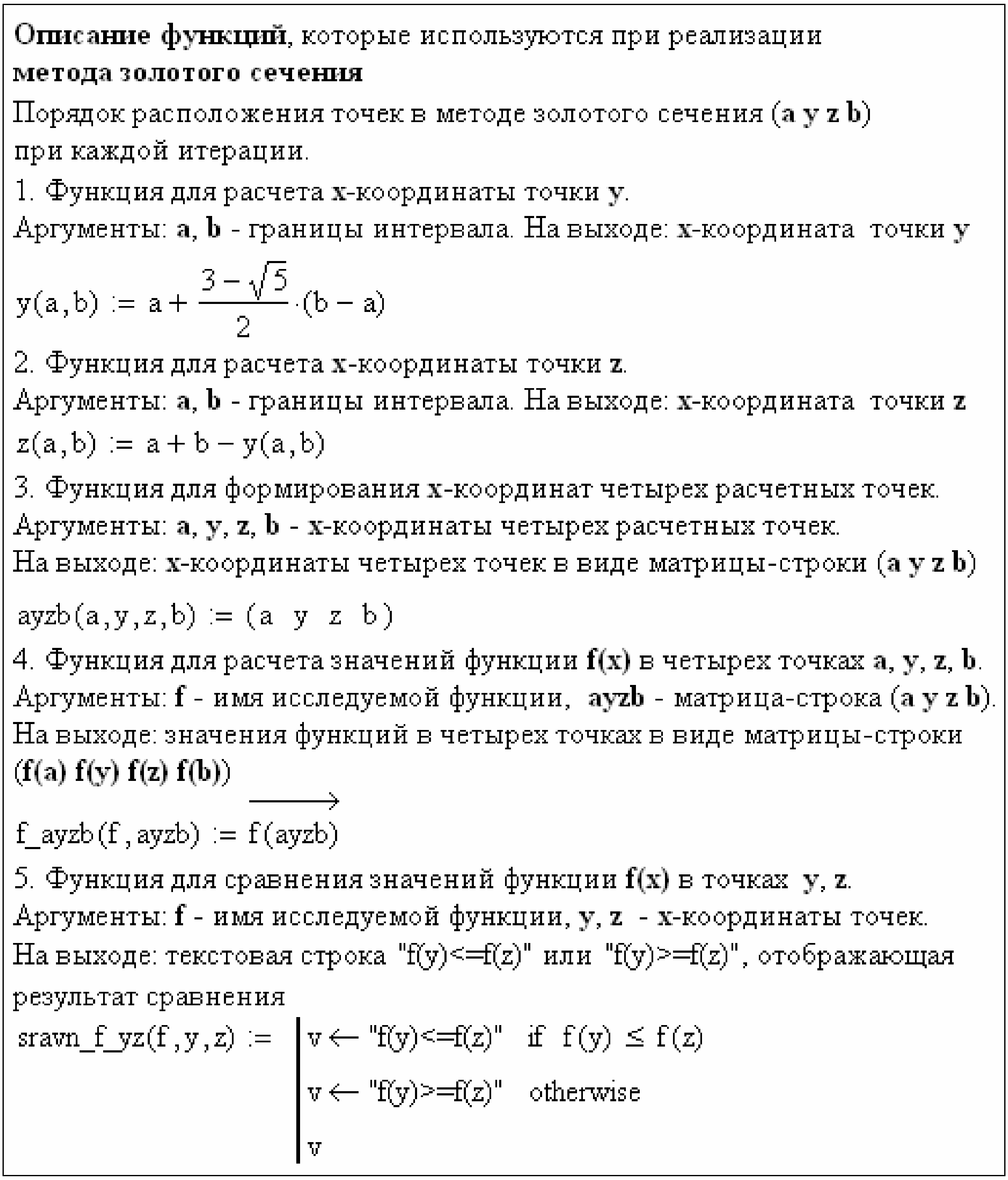
$i := 0..N$ - дискретный аргумент

$x_i := x_{min} + \Delta x \cdot i$ $y := \overrightarrow{f(x)}$ - искомые векторы с координатами

$x_a := M\_ayzb^{\langle 0 \rangle}$ $y_a := f\_sug\_int^{\langle 0 \rangle}$ - координаты изменения точки а

$x_b := M\_ayzb^{\langle 3 \rangle}$ $y_b := f\_sug\_int^{\langle 3 \rangle}$ - координаты изменения точки b

Рис. Б 4. Листинг программы минимизации функции методом золотого сечения (продолжение)



Описание функций, которые используются при реализации **метода золотого сечения**

Порядок расположения точек в методе золотого сечения (**a y z b**) при каждой итерации.

1. Функция для расчета **x**-координаты точки **y**.

Аргументы: **a**, **b** - границы интервала. На выходе: **x**-координата точки **y**

$$y(a,b) := a + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot(b-a)$$

2. Функция для расчета **x**-координаты точки **z**.

Аргументы: **a**, **b** - границы интервала. На выходе: **x**-координата точки **z**

$$z(a,b) := a + b - y(a,b)$$

3. Функция для формирования **x**-координат четырех расчетных точек.

Аргументы: **a**, **y**, **z**, **b** - **x**-координаты четырех расчетных точек.

На выходе: **x**-координаты четырех точек в виде матрицы-строки (**a y z b**)

$$ayzb(a,y,z,b) := \begin{pmatrix} a & y & z & b \end{pmatrix}$$

4. Функция для расчета значений функции **f(x)** в четырех точках **a**, **y**, **z**, **b**.

Аргументы: **f** - имя исследуемой функции, **ayzb** - матрица-строка (**a y z b**).

На выходе: значения функций в четырех точках в виде матрицы-строки (**f(a) f(y) f(z) f(b)**)

$$f\_ayzb(f,ayzb) := \overrightarrow{f(ayzb)}$$

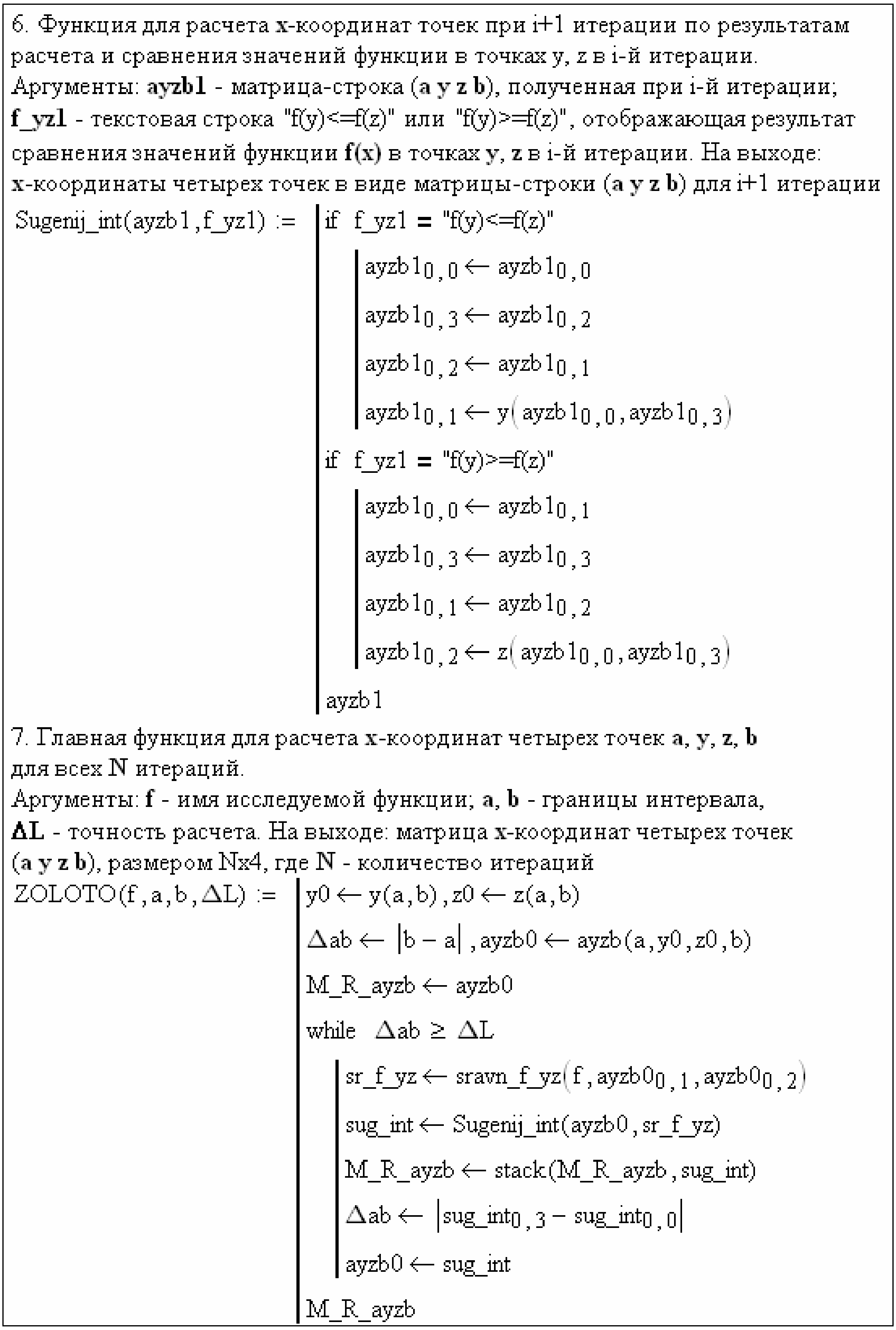
5. Функция для сравнения значений функции **f(x)** в точках **y**, **z**.

Аргументы: **f** - имя исследуемой функции, **y**, **z** - **x**-координаты точек.

На выходе: текстовая строка "f(y)<=f(z)" или "f(y)>=f(z)", отображающая результат сравнения

```
sravn_f_yz(f,y,z) :=  | v ← "f(y)<=f(z)"  if  f(y) ≤ f(z)
                      | v ← "f(y)>=f(z)"  otherwise
                      | v
```

Рис. Б 4. Листинг программы минимизации функции методом золотого сечения (продолжение)



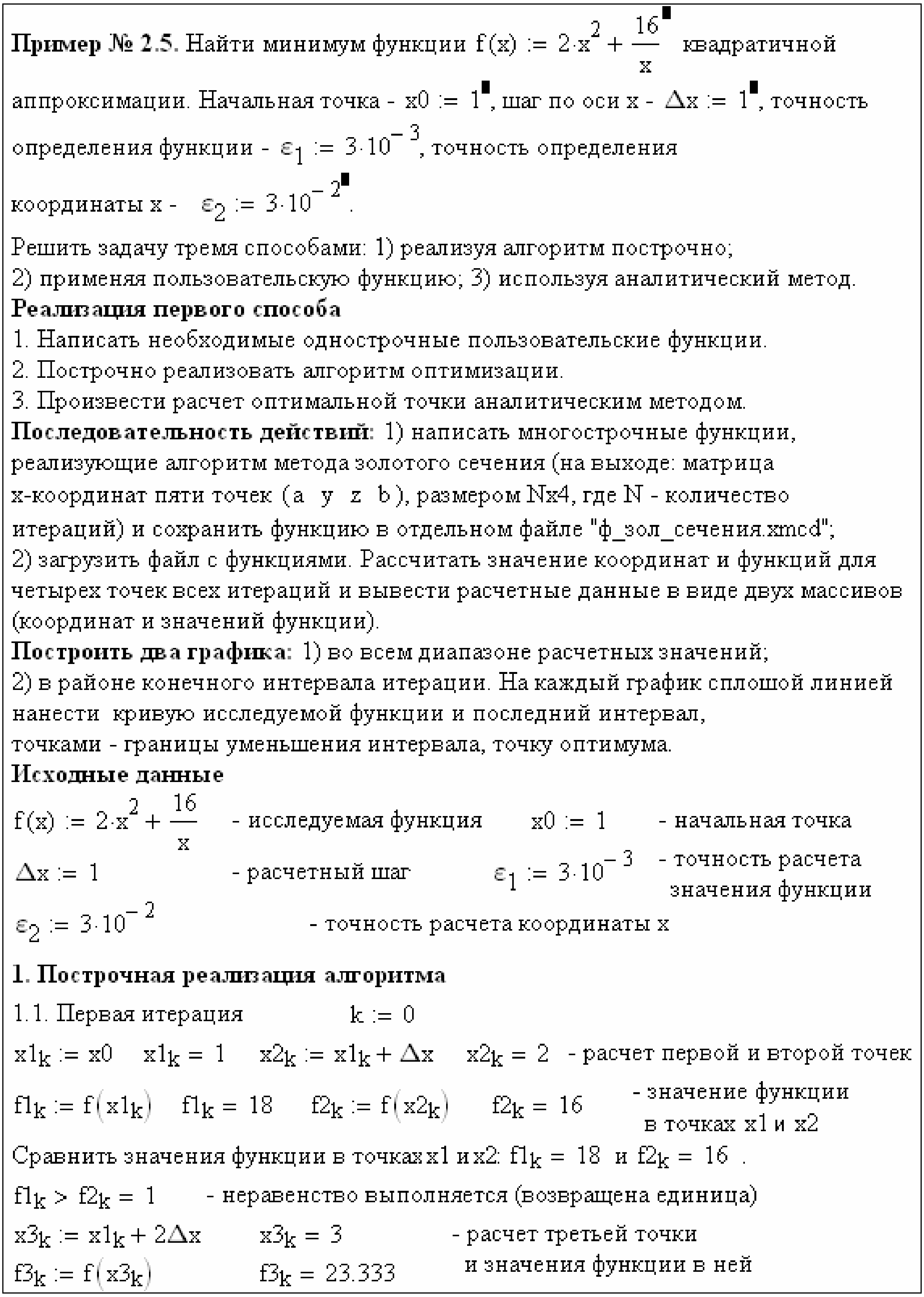
6. Функция для расчета **x**-координат точек при i+1 итерации по результатам расчета и сравнения значений функции в точках y, z в i-й итерации.
Аргументы: **ayzb1** - матрица-строка (**a y z b**), полученная при i-й итерации;
f_yz1 - текстовая строка "f(y)<=f(z)" или "f(y)>=f(z)", отображающая результат сравнения значений функции **f(x)** в точках **y**, **z** в i-й итерации. На выходе:
x-координаты четырех точек в виде матрицы-строки (**a y z b**) для i+1 итерации

```
Sugenij_int(ayzb1,f_yz1) := | if  f_yz1 = "f(y)<=f(z)"
                            |     | $ayzb1_{0,0} \leftarrow ayzb1_{0,0}$
                            |     | $ayzb1_{0,3} \leftarrow ayzb1_{0,2}$
                            |     | $ayzb1_{0,2} \leftarrow ayzb1_{0,1}$
                            |     | $ayzb1_{0,1} \leftarrow y(ayzb1_{0,0}, ayzb1_{0,3})$
                            | if  f_yz1 = "f(y)>=f(z)"
                            |     | $ayzb1_{0,0} \leftarrow ayzb1_{0,1}$
                            |     | $ayzb1_{0,3} \leftarrow ayzb1_{0,3}$
                            |     | $ayzb1_{0,1} \leftarrow ayzb1_{0,2}$
                            |     | $ayzb1_{0,2} \leftarrow z(ayzb1_{0,0}, ayzb1_{0,3})$
                            | ayzb1
```

7. Главная функция для расчета **x**-координат четырех точек **a**, **y**, **z**, **b** для всех N итераций.
Аргументы: **f** - имя исследуемой функции; **a**, **b** - границы интервала,
ΔL - точность расчета. На выходе: матрица **x**-координат четырех точек (**a y z b**), размером Nx4, где N - количество итераций

```
ZOLOTO(f,a,b,ΔL) := | $y0 \leftarrow y(a,b)$ , $z0 \leftarrow z(a,b)$
                    | $\Delta ab \leftarrow |b - a|$ , $ayzb0 \leftarrow ayzb(a,y0,z0,b)$
                    | $M\_R\_ayzb \leftarrow ayzb0$
                    | while  $\Delta ab \ge \Delta L$
                    |     | $sr\_f\_yz \leftarrow sravn\_f\_yz(f, ayzb0_{0,1}, ayzb0_{0,2})$
                    |     | $sug\_int \leftarrow Sugenij\_int(ayzb0, sr\_f\_yz)$
                    |     | $M\_R\_ayzb \leftarrow stack(M\_R\_ayzb, sug\_int)$
                    |     | $\Delta ab \leftarrow |sug\_int_{0,3} - sug\_int_{0,0}|$
                    |     | $ayzb0 \leftarrow sug\_int$
                    | M_R_ayzb
```

Рис. Б 4. Листинг программы минимизации функции
методом золотого сечения (окончание)



Пример № 2.5. Найти минимум функции $f(x) := 2 \cdot x^2 + \frac{16}{x}$ квадратичной аппроксимации. Начальная точка - $x0 := 1$, шаг по оси x - $\Delta x := 1$, точность определения функции - $\varepsilon_1 := 3 \cdot 10^{-3}$, точность определения координаты x - $\varepsilon_2 := 3 \cdot 10^{-2}$.

Решить задачу тремя способами: 1) реализуя алгоритм построчно; 2) применяя пользовательскую функцию; 3) используя аналитический метод.

Реализация первого способа

1. Написать необходимые однострочные пользовательские функции.
2. Построчно реализовать алгоритм оптимизации.
3. Произвести расчет оптимальной точки аналитическим методом.

Последовательность действий: 1) написать многострочные функции, реализующие алгоритм метода золотого сечения (на выходе: матрица x-координат пяти точек $(a \;\; y \;\; z \;\; b)$, размером Nx4, где N - количество итераций) и сохранить функцию в отдельном файле "ф_зол_сечения.xmcd"; 2) загрузить файл с функциями. Рассчитать значение координат и функций для четырех точек всех итераций и вывести расчетные данные в виде двух массивов (координат и значений функции).

Построить два графика: 1) во всем диапазоне расчетных значений; 2) в районе конечного интервала итерации. На каждый график сплошной линией нанести кривую исследуемой функции и последний интервал,
точками - границы уменьшения интервала, точку оптимума.

Исходные данные

$f(x) := 2 \cdot x^2 + \frac{16}{x}$ - исследуемая функция $\quad x0 := 1$ - начальная точка

$\Delta x := 1$ - расчетный шаг $\quad \varepsilon_1 := 3 \cdot 10^{-3}$ - точность расчета значения функции

$\varepsilon_2 := 3 \cdot 10^{-2}$ - точность расчета координаты x

1. Построчная реализация алгоритма

1.1. Первая итерация $\quad k := 0$

$x1_k := x0 \quad x1_k = 1 \quad x2_k := x1_k + \Delta x \quad x2_k = 2$ - расчет первой и второй точек

$f1_k := f(x1_k) \quad f1_k = 18 \quad f2_k := f(x2_k) \quad f2_k = 16$ - значение функции в точках x1 и x2

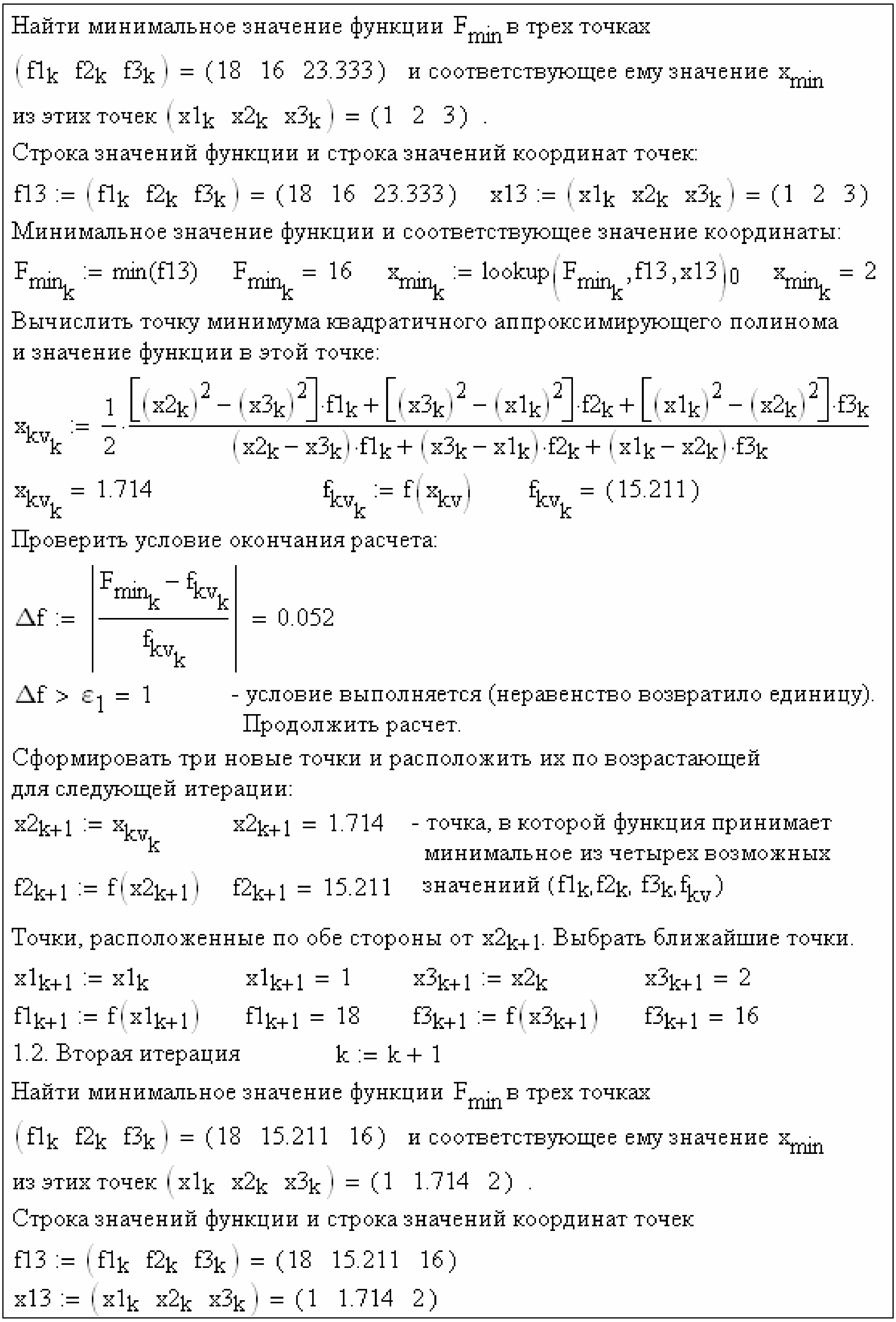
Сравнить значения функции в точках x1 и x2: $f1_k = 18$ и $f2_k = 16$.

$f1_k > f2_k = 1$ - неравенство выполняется (возвращена единица)

$x3_k := x1_k + 2\Delta x \quad x3_k = 3$ - расчет третьей точки и значения функции в ней

$f3_k := f(x3_k) \quad f3_k = 23.333$

Рис. Б 5. Листинг программы минимизации функции методом квадратичной аппроксимации



Найти минимальное значение функции F_{min} в трех точках

$(f1_k\ \ f2_k\ \ f3_k) = (18\ \ 16\ \ 23.333)$ и соответствующее ему значение x_{min}

из этих точек $(x1_k\ \ x2_k\ \ x3_k) = (1\ \ 2\ \ 3)$.

Строка значений функции и строка значений координат точек:

$f13 := (f1_k\ \ f2_k\ \ f3_k) = (18\ \ 16\ \ 23.333)$ $\quad x13 := (x1_k\ \ x2_k\ \ x3_k) = (1\ \ 2\ \ 3)$

Минимальное значение функции и соответствующее значение координаты:

$F_{min_k} := \min(f13) \quad F_{min_k} = 16 \quad x_{min_k} := \mathrm{lookup}(F_{min_k}, f13, x13)_0 \quad x_{min_k} = 2$

Вычислить точку минимума квадратичного аппроксимирующего полинома и значение функции в этой точке:

$$x_{kv_k} := \frac{1}{2}\cdot\frac{\left[(x2_k)^2-(x3_k)^2\right]\cdot f1_k+\left[(x3_k)^2-(x1_k)^2\right]\cdot f2_k+\left[(x1_k)^2-(x2_k)^2\right]\cdot f3_k}{(x2_k-x3_k)\cdot f1_k+(x3_k-x1_k)\cdot f2_k+(x1_k-x2_k)\cdot f3_k}$$

$x_{kv_k} = 1.714 \qquad f_{kv_k} := f(x_{kv}) \qquad f_{kv_k} = (15.211)$

Проверить условие окончания расчета:

$$\Delta f := \left|\frac{F_{min_k} - f_{kv_k}}{f_{kv_k}}\right| = 0.052$$

$\Delta f > \varepsilon_1 = 1$ - условие выполняется (неравенство возвратило единицу). Продолжить расчет.

Сформировать три новые точки и расположить их по возрастающей для следующей итерации:

$x2_{k+1} := x_{kv_k} \qquad x2_{k+1} = 1.714$ - точка, в которой функция принимает минимальное из четырех возможных

$f2_{k+1} := f(x2_{k+1}) \qquad f2_{k+1} = 15.211$ значениий $(f1_k, f2_k, f3_k, f_{kv})$

Точки, расположенные по обе стороны от $x2_{k+1}$. Выбрать ближайшие точки.

$x1_{k+1} := x1_k \qquad x1_{k+1} = 1 \qquad x3_{k+1} := x2_k \qquad x3_{k+1} = 2$

$f1_{k+1} := f(x1_{k+1}) \qquad f1_{k+1} = 18 \qquad f3_{k+1} := f(x3_{k+1}) \qquad f3_{k+1} = 16$

1.2. Вторая итерация $\qquad k := k + 1$

Найти минимальное значение функции F_{min} в трех точках

$(f1_k\ \ f2_k\ \ f3_k) = (18\ \ 15.211\ \ 16)$ и соответствующее ему значение x_{min}

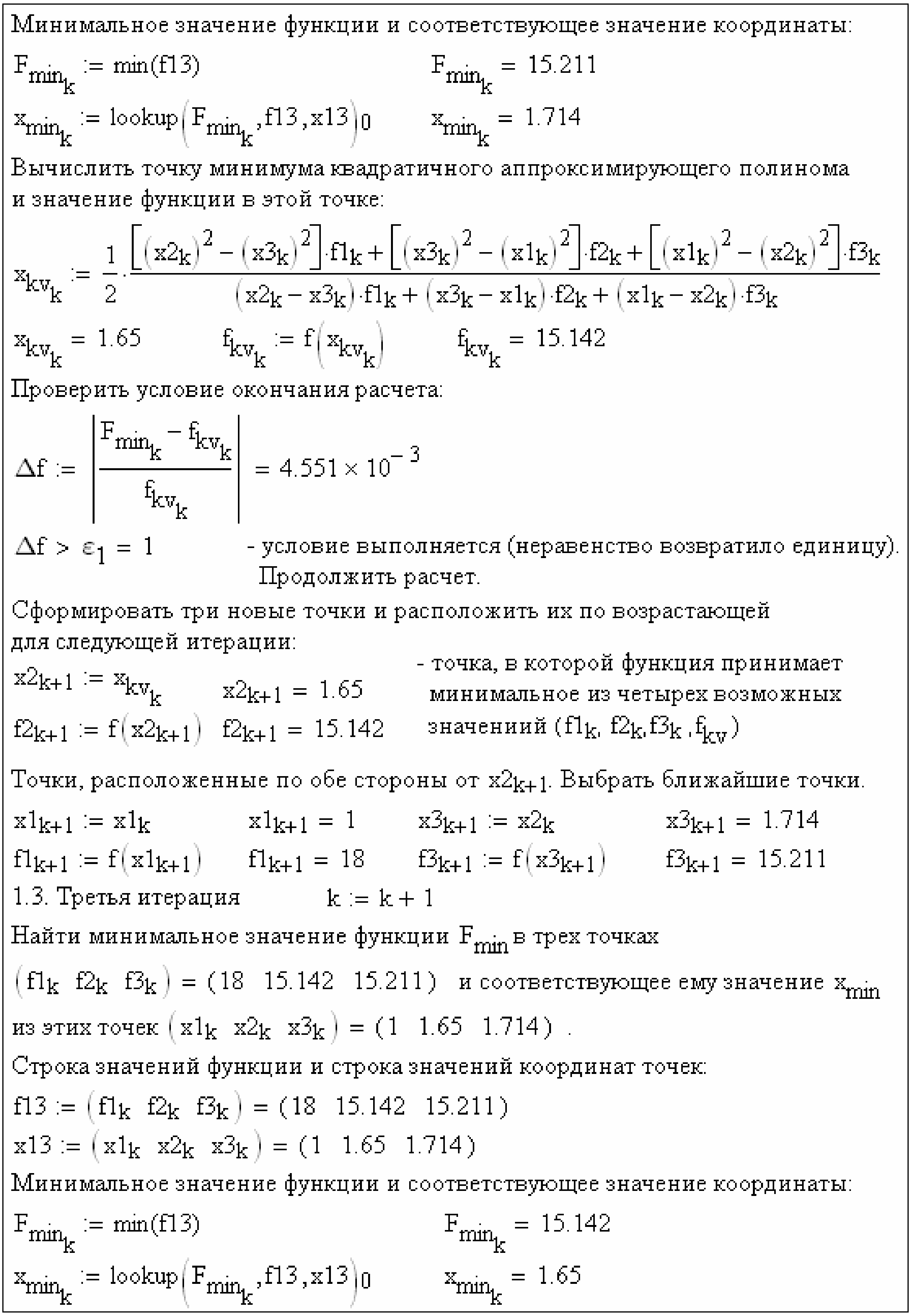
из этих точек $(x1_k\ \ x2_k\ \ x3_k) = (1\ \ 1.714\ \ 2)$.

Строка значений функции и строка значений координат точек

$f13 := (f1_k\ \ f2_k\ \ f3_k) = (18\ \ 15.211\ \ 16)$

$x13 := (x1_k\ \ x2_k\ \ x3_k) = (1\ \ 1.714\ \ 2)$

Рис. Б 5. Листинг программы минимизации функции методом квадратичной аппроксимации (продолжение)



Минимальное значение функции и соответствующее значение координаты:

$F_{min_k} := \min(f13)$ $F_{min_k} = 15.211$

$x_{min_k} := \mathrm{lookup}\left(F_{min_k}, f13, x13\right)_0$ $x_{min_k} = 1.714$

Вычислить точку минимума квадратичного аппроксимирующего полинома
и значение функции в этой точке:

$$x_{kv_k} := \frac{1}{2}\cdot\frac{\left[\left(x2_k\right)^2-\left(x3_k\right)^2\right]\cdot f1_k+\left[\left(x3_k\right)^2-\left(x1_k\right)^2\right]\cdot f2_k+\left[\left(x1_k\right)^2-\left(x2_k\right)^2\right]\cdot f3_k}{\left(x2_k-x3_k\right)\cdot f1_k+\left(x3_k-x1_k\right)\cdot f2_k+\left(x1_k-x2_k\right)\cdot f3_k}$$

$x_{kv_k} = 1.65$ $f_{kv_k} := f\left(x_{kv_k}\right)$ $f_{kv_k} = 15.142$

Проверить условие окончания расчета:

$$\Delta f := \left|\frac{F_{min_k}-f_{kv_k}}{f_{kv_k}}\right| = 4.551\times 10^{-3}$$

$\Delta f > \varepsilon_1 = 1$ - условие выполняется (неравенство возвратило единицу).
Продолжить расчет.

Сформировать три новые точки и расположить их по возрастающей
для следующей итерации:

$x2_{k+1} := x_{kv_k}$ $x2_{k+1} = 1.65$

$f2_{k+1} := f\left(x2_{k+1}\right)$ $f2_{k+1} = 15.142$

- точка, в которой функция принимает минимальное из четырех возможных значениий ($f1_k$, $f2_k$,$f3_k$,f_{kv})

Точки, расположенные по обе стороны от $x2_{k+1}$. Выбрать ближайшие точки.

$x1_{k+1} := x1_k$ $x1_{k+1} = 1$ $x3_{k+1} := x2_k$ $x3_{k+1} = 1.714$

$f1_{k+1} := f\left(x1_{k+1}\right)$ $f1_{k+1} = 18$ $f3_{k+1} := f\left(x3_{k+1}\right)$ $f3_{k+1} = 15.211$

1.3. Третья итерация $k := k + 1$

Найти минимальное значение функции F_{min} в трех точках

$\left(f1_k\ \ f2_k\ \ f3_k\right) = \left(18\ \ 15.142\ \ 15.211\right)$ и соответствующее ему значение x_{min}

из этих точек $\left(x1_k\ \ x2_k\ \ x3_k\right) = \left(1\ \ 1.65\ \ 1.714\right)$.

Строка значений функции и строка значений координат точек:

$f13 := \left(f1_k\ \ f2_k\ \ f3_k\right) = \left(18\ \ 15.142\ \ 15.211\right)$

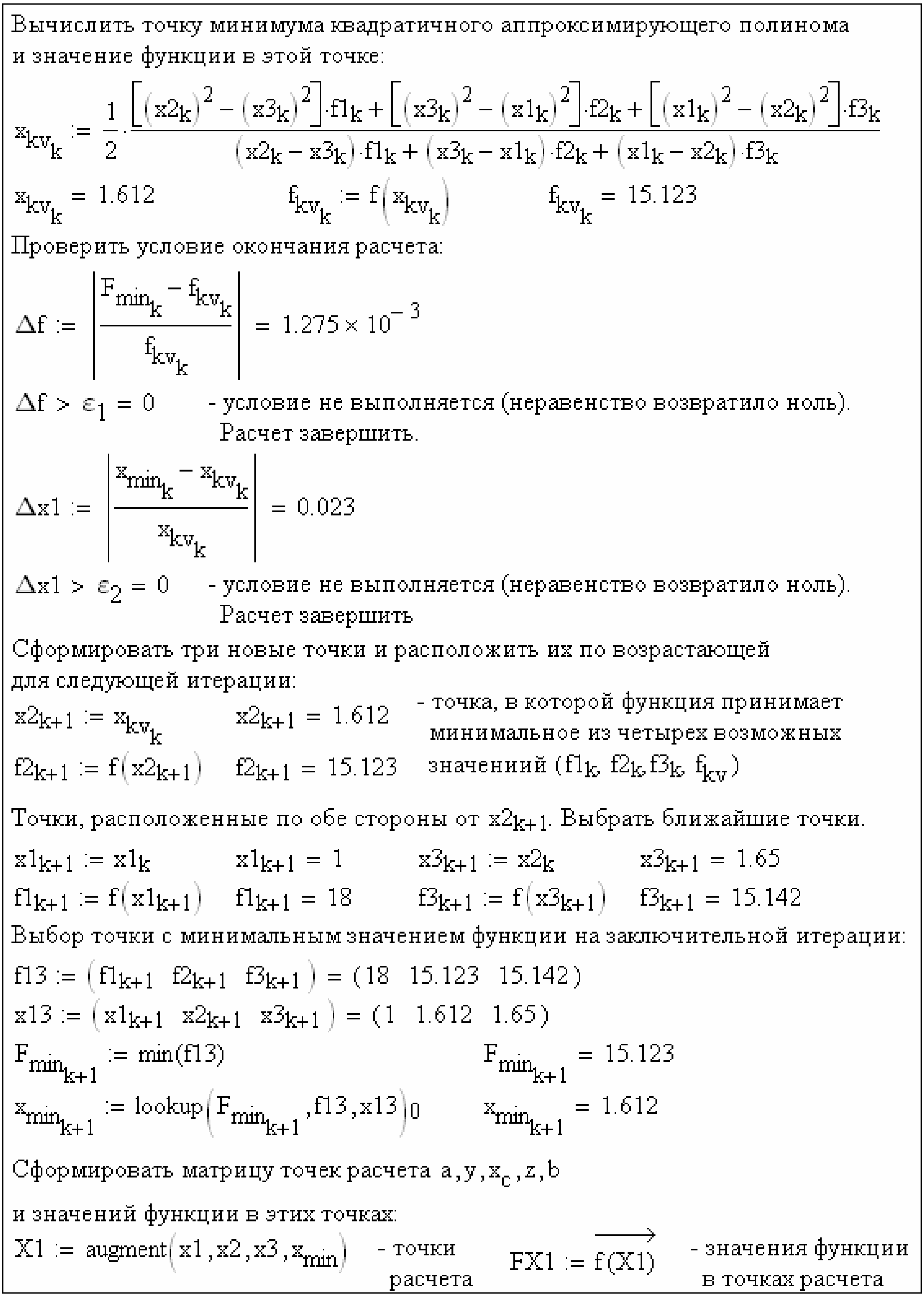
$x13 := \left(x1_k\ \ x2_k\ \ x3_k\right) = \left(1\ \ 1.65\ \ 1.714\right)$

Минимальное значение функции и соответствующее значение координаты:

$F_{min_k} := \min(f13)$ $F_{min_k} = 15.142$

$x_{min_k} := \mathrm{lookup}\left(F_{min_k}, f13, x13\right)_0$ $x_{min_k} = 1.65$

Рис. Б 5. Листинг программы минимизации функции
методом квадратичной аппроксимации (продолжение)



Вычислить точку минимума квадратичного аппроксимирующего полинома и значение функции в этой точке:

$$x_{kv_k} := \frac{1}{2}\cdot\frac{\left[\left(x2_k\right)^2-\left(x3_k\right)^2\right]\cdot f1_k+\left[\left(x3_k\right)^2-\left(x1_k\right)^2\right]\cdot f2_k+\left[\left(x1_k\right)^2-\left(x2_k\right)^2\right]\cdot f3_k}{\left(x2_k-x3_k\right)\cdot f1_k+\left(x3_k-x1_k\right)\cdot f2_k+\left(x1_k-x2_k\right)\cdot f3_k}$$

$x_{kv_k} = 1.612$ $\qquad$ $f_{kv_k} := f\left(x_{kv_k}\right)$ $\qquad$ $f_{kv_k} = 15.123$

Проверить условие окончания расчета:

$$\Delta f := \left|\frac{F_{min_k} - f_{kv_k}}{f_{kv_k}}\right| = 1.275\times 10^{-3}$$

$\Delta f > \varepsilon_1 = 0$ - условие не выполняется (неравенство возвратило ноль). Расчет завершить.

$$\Delta x1 := \left|\frac{x_{min_k} - x_{kv_k}}{x_{kv_k}}\right| = 0.023$$

$\Delta x1 > \varepsilon_2 = 0$ - условие не выполняется (неравенство возвратило ноль). Расчет завершить

Сформировать три новые точки и расположить их по возрастающей для следующей итерации:

$x2_{k+1} := x_{kv_k}$ $\qquad$ $x2_{k+1} = 1.612$ $\qquad$ - точка, в которой функция принимает минимальное из четырех возможных значениий ($f1_k$, $f2_k$, $f3_k$, f_{kv})

$f2_{k+1} := f\left(x2_{k+1}\right)$ $\qquad$ $f2_{k+1} = 15.123$

Точки, расположенные по обе стороны от $x2_{k+1}$. Выбрать ближайшие точки.

$x1_{k+1} := x1_k$ $\qquad$ $x1_{k+1} = 1$ $\qquad$ $x3_{k+1} := x2_k$ $\qquad$ $x3_{k+1} = 1.65$

$f1_{k+1} := f\left(x1_{k+1}\right)$ $\qquad$ $f1_{k+1} = 18$ $\qquad$ $f3_{k+1} := f\left(x3_{k+1}\right)$ $\qquad$ $f3_{k+1} = 15.142$

Выбор точки с минимальным значением функции на заключительной итерации:

$f13 := \left(f1_{k+1}\;\; f2_{k+1}\;\; f3_{k+1}\right) = (18\;\; 15.123\;\; 15.142)$

$x13 := \left(x1_{k+1}\;\; x2_{k+1}\;\; x3_{k+1}\right) = (1\;\; 1.612\;\; 1.65)$

$F_{min_{k+1}} := \min(f13)$ $\qquad$ $F_{min_{k+1}} = 15.123$

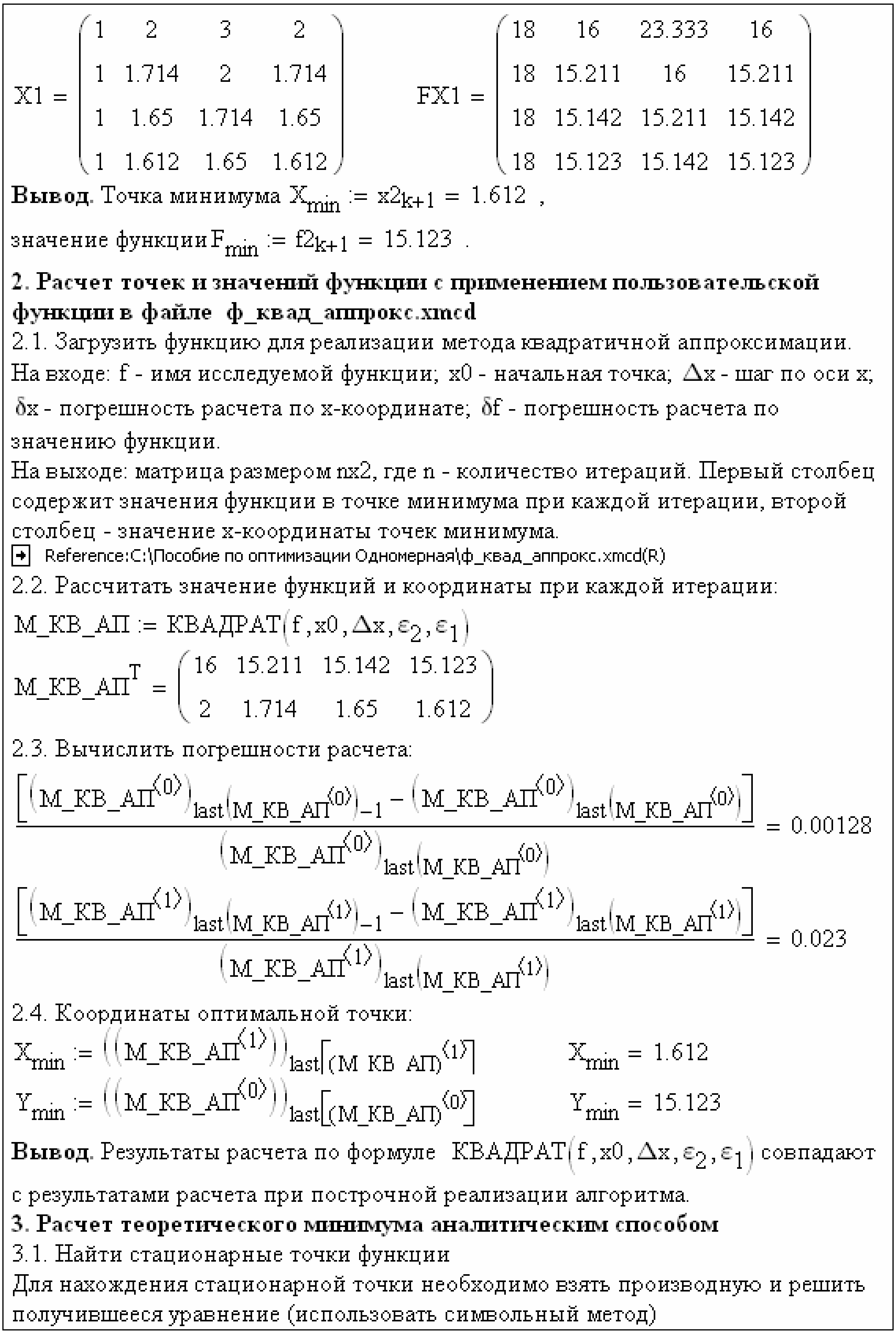
$x_{min_{k+1}} := \mathrm{lookup}\left(F_{min_{k+1}}, f13, x13\right)_0$ $\qquad$ $x_{min_{k+1}} = 1.612$

Сформировать матрицу точек расчета a, y, x_c, z, b

и значений функции в этих точках:

$X1 := \mathrm{augment}\left(x1, x2, x3, x_{min}\right)$ - точки расчета $\qquad$ $FX1 := \overrightarrow{f(X1)}$ - значения функции в точках расчета

Рис. Б 5. Листинг программы минимизации функции методом квадратичной аппроксимации (продолжение)



$$X1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1.714 & 2 & 1.714 \\ 1 & 1.65 & 1.714 & 1.65 \\ 1 & 1.612 & 1.65 & 1.612 \end{pmatrix} \qquad FX1 = \begin{pmatrix} 18 & 16 & 23.333 & 16 \\ 18 & 15.211 & 16 & 15.211 \\ 18 & 15.142 & 15.211 & 15.142 \\ 18 & 15.123 & 15.142 & 15.123 \end{pmatrix}$$

Вывод. Точка минимума $X_{min} := x2_{k+1} = 1.612$,

значение функции $F_{min} := f2_{k+1} = 15.123$.

2. Расчет точек и значений функции с применением пользовательской функции в файле ф_квад_аппрокс.xmcd

2.1. Загрузить функцию для реализации метода квадратичной аппроксимации.

На входе: f - имя исследуемой функции; x0 - начальная точка; Δx - шаг по оси x; δx - погрешность расчета по x-координате; δf - погрешность расчета по значению функции.

На выходе: матрица размером nx2, где n - количество итераций. Первый столбец содержит значения функции в точке минимума при каждой итерации, второй столбец - значение x-координаты точек минимума.

➔ Reference:C:\Пособие по оптимизации Одномерная\ф_квад_аппрокс.xmcd(R)

2.2. Рассчитать значение функций и координаты при каждой итерации:

$$\text{М\_КВ\_АП} := \text{КВАДРАТ}(f, x0, \Delta x, \varepsilon_2, \varepsilon_1)$$

$$\text{М\_КВ\_АП}^{T} = \begin{pmatrix} 16 & 15.211 & 15.142 & 15.123 \\ 2 & 1.714 & 1.65 & 1.612 \end{pmatrix}$$

2.3. Вычислить погрешности расчета:

$$\frac{\left[\left(\text{М\_КВ\_АП}^{\langle 0\rangle}\right)_{last\left(\text{М\_КВ\_АП}^{\langle 0\rangle}\right)-1}-\left(\text{М\_КВ\_АП}^{\langle 0\rangle}\right)_{last\left(\text{М\_КВ\_АП}^{\langle 0\rangle}\right)}\right]}{\left(\text{М\_КВ\_АП}^{\langle 0\rangle}\right)_{last\left(\text{М\_КВ\_АП}^{\langle 0\rangle}\right)}} = 0.00128$$

$$\frac{\left[\left(\text{М\_КВ\_АП}^{\langle 1\rangle}\right)_{last\left(\text{М\_КВ\_АП}^{\langle 1\rangle}\right)-1}-\left(\text{М\_КВ\_АП}^{\langle 1\rangle}\right)_{last\left(\text{М\_КВ\_АП}^{\langle 1\rangle}\right)}\right]}{\left(\text{М\_КВ\_АП}^{\langle 1\rangle}\right)_{last\left(\text{М\_КВ\_АП}^{\langle 1\rangle}\right)}} = 0.023$$

2.4. Координаты оптимальной точки:

$$X_{min} := \left(\left(\text{М\_КВ\_АП}^{\langle 1\rangle}\right)\right)_{last\left[(\text{М КВ АП})^{\langle 1\rangle}\right]} \qquad X_{min} = 1.612$$

$$Y_{min} := \left(\left(\text{М\_КВ\_АП}^{\langle 0\rangle}\right)\right)_{last\left[(\text{М\_КВ\_АП})^{\langle 0\rangle}\right]} \qquad Y_{min} = 15.123$$

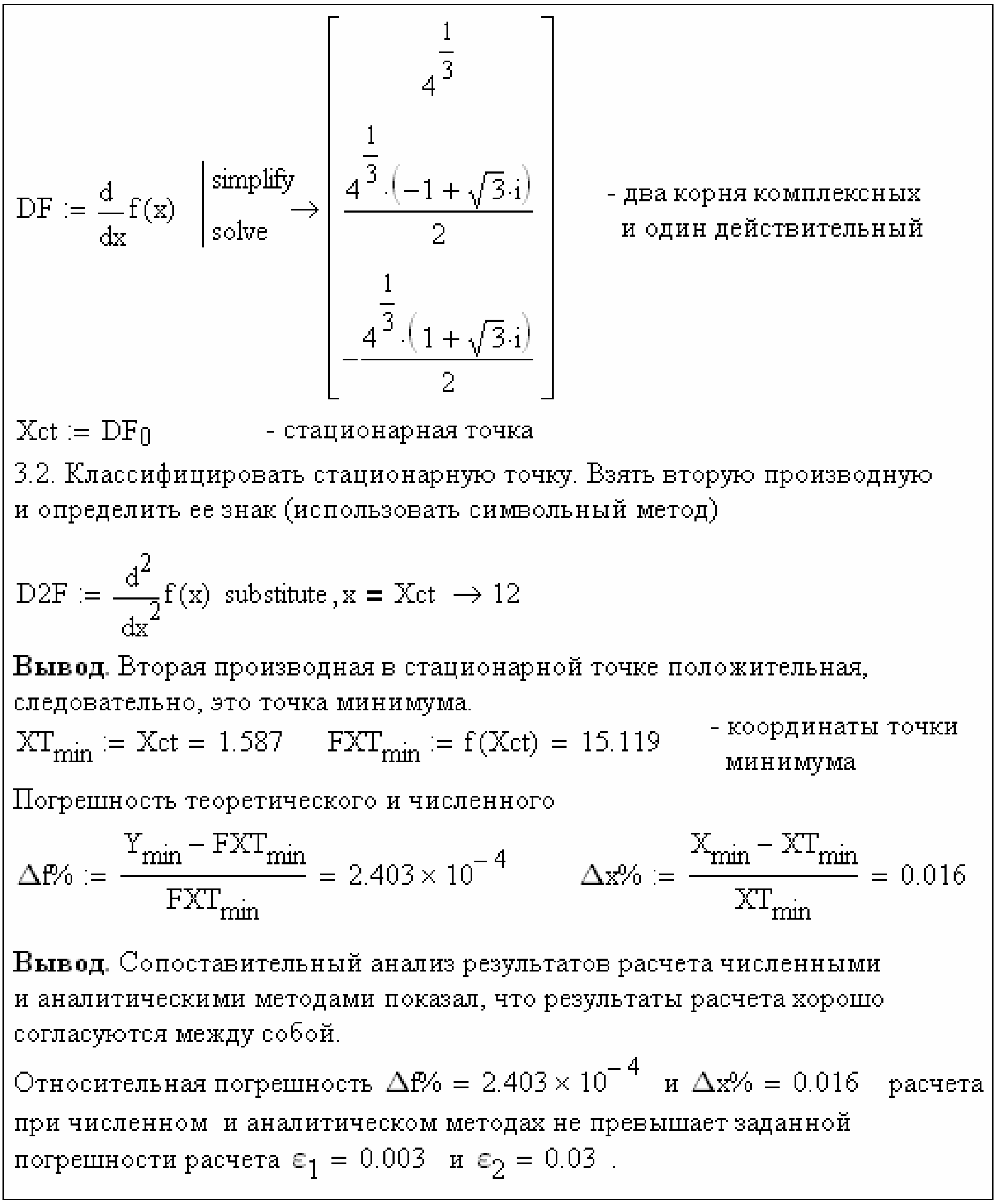
Вывод. Результаты расчета по формуле $\text{КВАДРАТ}(f, x0, \Delta x, \varepsilon_2, \varepsilon_1)$ совпадают с результатами расчета при построчной реализации алгоритма.

3. Расчет теоретического минимума аналитическим способом

3.1. Найти стационарные точки функции

Для нахождения стационарной точки необходимо взять производную и решить получившееся уравнение (использовать символьный метод)

Рис. Б 5. Листинг программы минимизации функции методом квадратичной аппроксимации (продолжение)



$$DF := \frac{d}{dx}f(x)\ \begin{vmatrix} \text{simplify} \\ \text{solve} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4^{\frac{1}{3}} \\ \frac{4^{\frac{1}{3}}\cdot\left(-1+\sqrt{3}\cdot i\right)}{2} \\ -\frac{4^{\frac{1}{3}}\cdot\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)}{2} \end{bmatrix}$$

- два корня комплексных и один действительный

$Xct := DF_0$ - стационарная точка

3.2. Классифицировать стационарную точку. Взять вторую производную и определить ее знак (использовать символьный метод)

$$D2F := \frac{d^2}{dx^2}f(x)\ \text{substitute}, x = Xct\ \rightarrow 12$$

Вывод. Вторая производная в стационарной точке положительная, следовательно, это точка минимума.

$XT_{min} := Xct = 1.587$ $FXT_{min} := f(Xct) = 15.119$ - координаты точки минимума

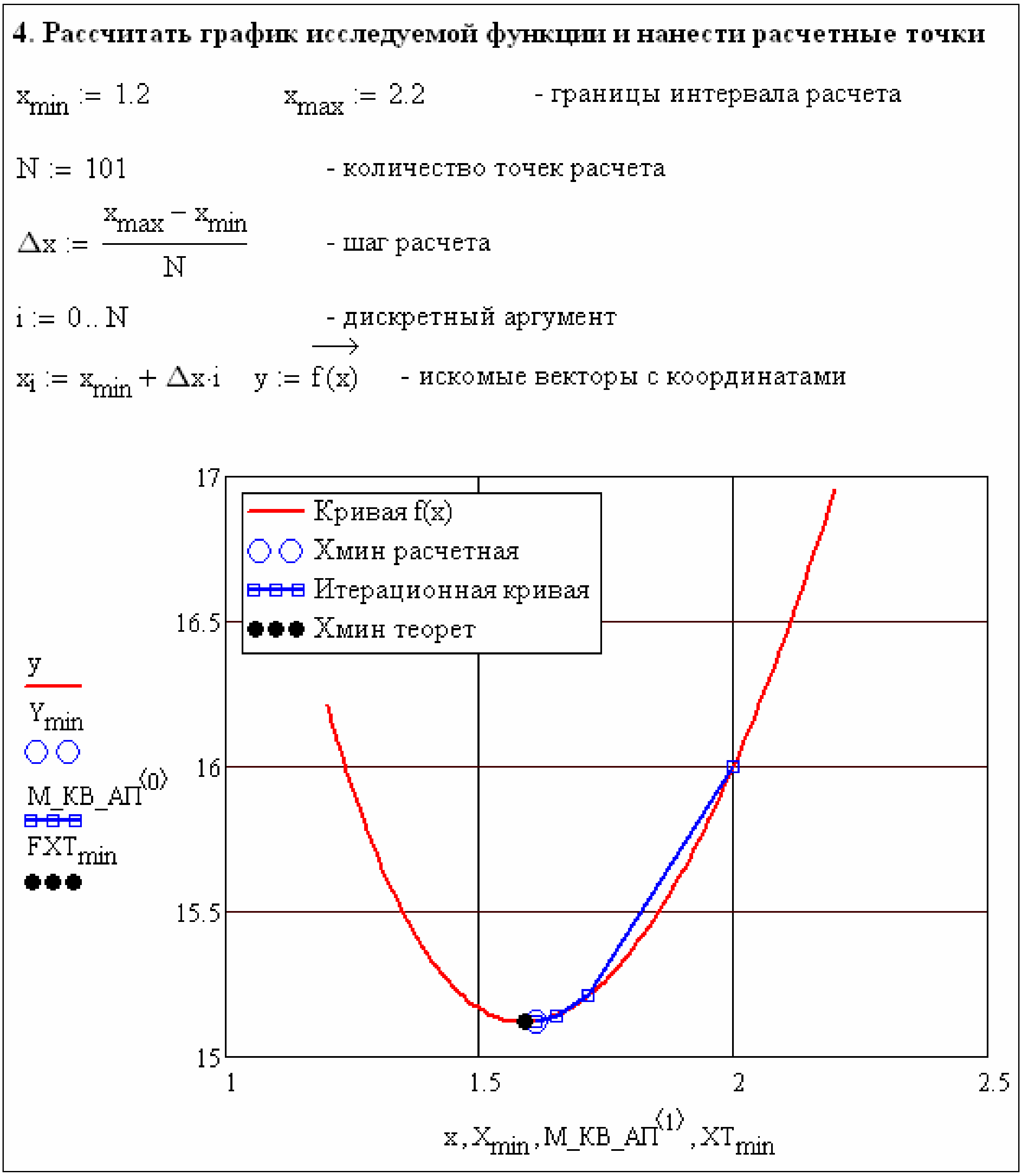
Погрешность теоретического и численного

$$\Delta f\% := \frac{Y_{min} - FXT_{min}}{FXT_{min}} = 2.403 \times 10^{-4} \qquad \Delta x\% := \frac{X_{min} - XT_{min}}{XT_{min}} = 0.016$$

Вывод. Сопоставительный анализ результатов расчета численными и аналитическими методами показал, что результаты расчета хорошо согласуются между собой.

Относительная погрешность $\Delta f\% = 2.403 \times 10^{-4}$ и $\Delta x\% = 0.016$ расчета при численном и аналитическом методах не превышает заданной погрешности расчета $\varepsilon_1 = 0.003$ и $\varepsilon_2 = 0.03$.

Рис. Б 5. Листинг программы минимизации функции методом квадратичной аппроксимации (продолжение)



4. Рассчитать график исследуемой функции и нанести расчетные точки

$x_{min} := 1.2$ $x_{max} := 2.2$ - границы интервала расчета

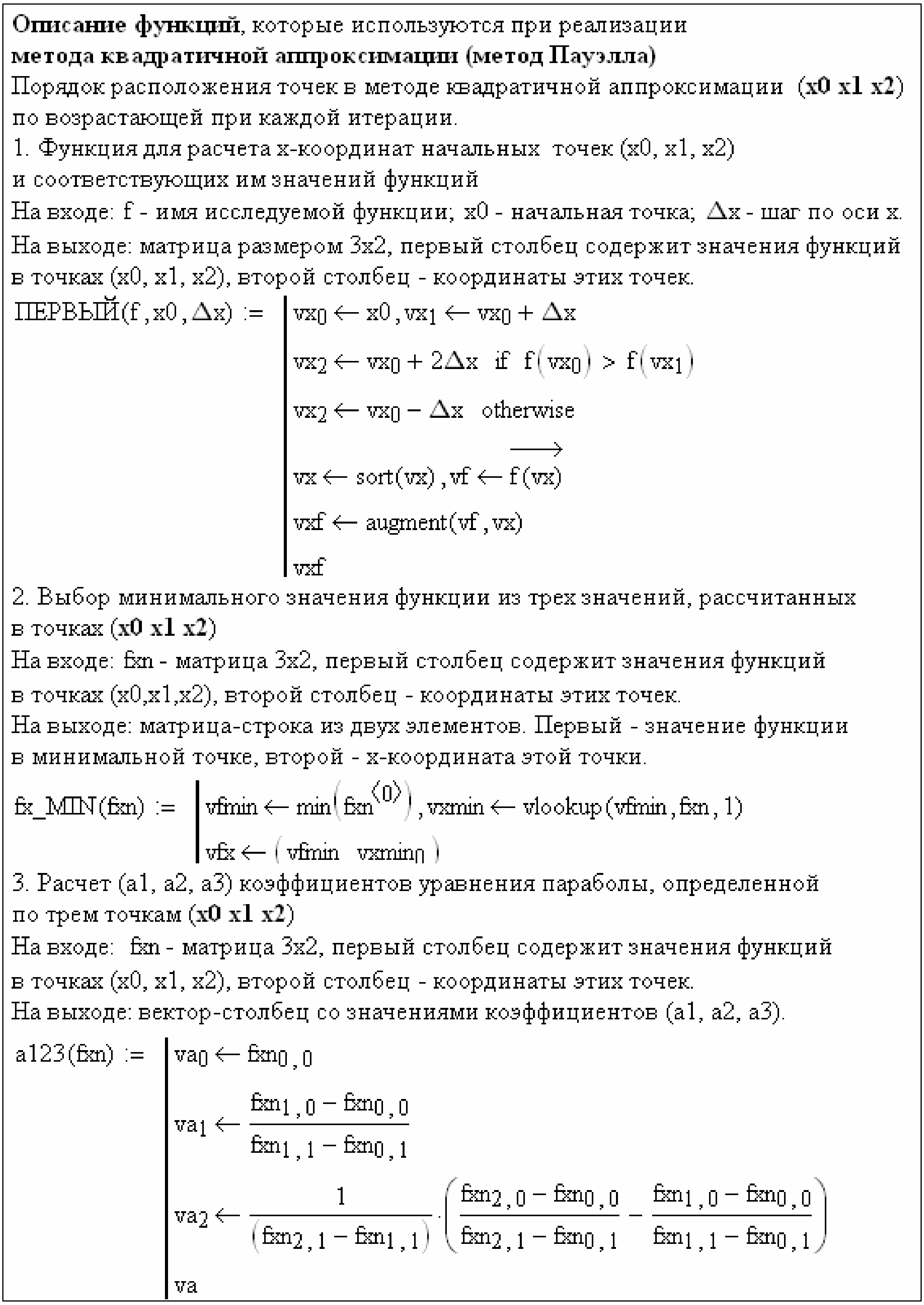
$N := 101$ - количество точек расчета

$\Delta x := \dfrac{x_{max} - x_{min}}{N}$ - шаг расчета

$i := 0..N$ - дискретный аргумент

$x_i := x_{min} + \Delta x \cdot i$ $y := \overrightarrow{f(x)}$ - искомые векторы с координатами

Рис. Б 5. Листинг программы минимизации функции методом квадратичной аппроксимации (продолжение)



Описание функций, которые используются при реализации **метода квадратичной аппроксимации (метод Пауэлла)**

Порядок расположения точек в методе квадратичной аппроксимации (**x0 x1 x2**) по возрастающей при каждой итерации.

1. Функция для расчета x-координат начальных точек (x0, x1, x2) и соответствующих им значений функций

На входе: f - имя исследуемой функции; x0 - начальная точка; Δx - шаг по оси x.

На выходе: матрица размером 3x2, первый столбец содержит значения функций в точках (x0, x1, x2), второй столбец - координаты этих точек.

```
ПЕРВЫЙ(f, x0, Δx) := | $vx_0 \leftarrow x0,\ vx_1 \leftarrow vx_0 + \Delta x$
                     | $vx_2 \leftarrow vx_0 + 2\Delta x$   if  $f(vx_0) > f(vx_1)$
                     | $vx_2 \leftarrow vx_0 - \Delta x$   otherwise
                     | $vx \leftarrow sort(vx),\ vf \leftarrow \overrightarrow{f(vx)}$
                     | $vxf \leftarrow augment(vf, vx)$
                     | vxf
```

2. Выбор минимального значения функции из трех значений, рассчитанных в точках (**x0 x1 x2**)

На входе: fxn - матрица 3x2, первый столбец содержит значения функций в точках (x0,x1,x2), второй столбец - координаты этих точек.

На выходе: матрица-строка из двух элементов. Первый - значение функции в минимальной точке, второй - x-координата этой точки.

```
fx_MIN(fxn) := | $vfmin \leftarrow min\left(fxn^{\langle 0 \rangle}\right),\ vxmin \leftarrow vlookup(vfmin, fxn, 1)$
               | $vfx \leftarrow (vfmin\ \ vxmin_0)$
```

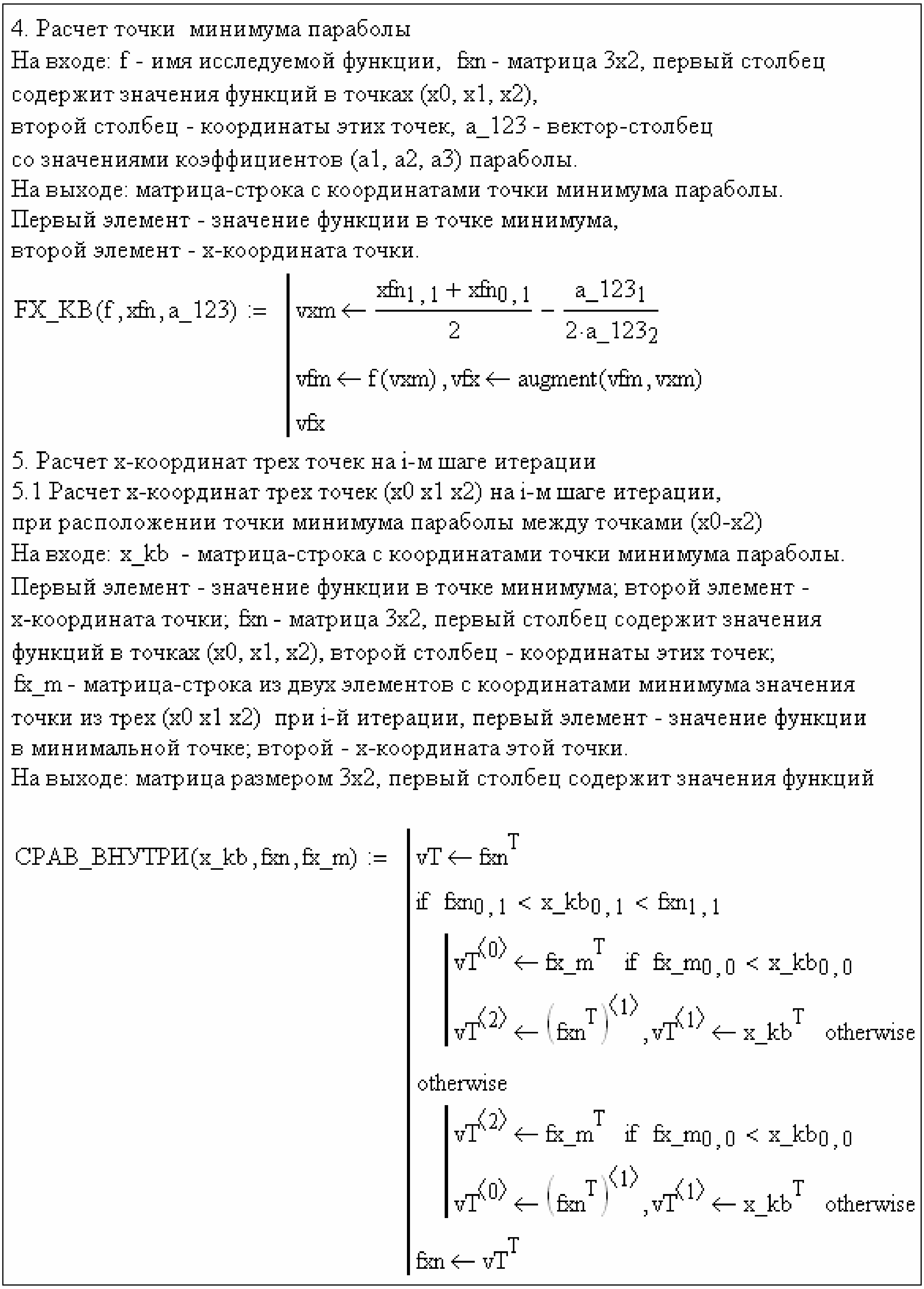
3. Расчет (a1, a2, a3) коэффициентов уравнения параболы, определенной по трем точкам (**x0 x1 x2**)

На входе: fxn - матрица 3x2, первый столбец содержит значения функций в точках (x0, x1, x2), второй столбец - координаты этих точек.

На выходе: вектор-столбец со значениями коэффициентов (a1, a2, a3).

```
a123(fxn) := | $va_0 \leftarrow fxn_{0,0}$
             | $va_1 \leftarrow \dfrac{fxn_{1,0} - fxn_{0,0}}{fxn_{1,1} - fxn_{0,1}}$
             | $va_2 \leftarrow \dfrac{1}{(fxn_{2,1} - fxn_{1,1})} \cdot \left(\dfrac{fxn_{2,0} - fxn_{0,0}}{fxn_{2,1} - fxn_{0,1}} - \dfrac{fxn_{1,0} - fxn_{0,0}}{fxn_{1,1} - fxn_{0,1}}\right)$
             | va
```

Рис. Б 5. Листинг программы минимизации функции методом квадратичной аппроксимации (продолжение)



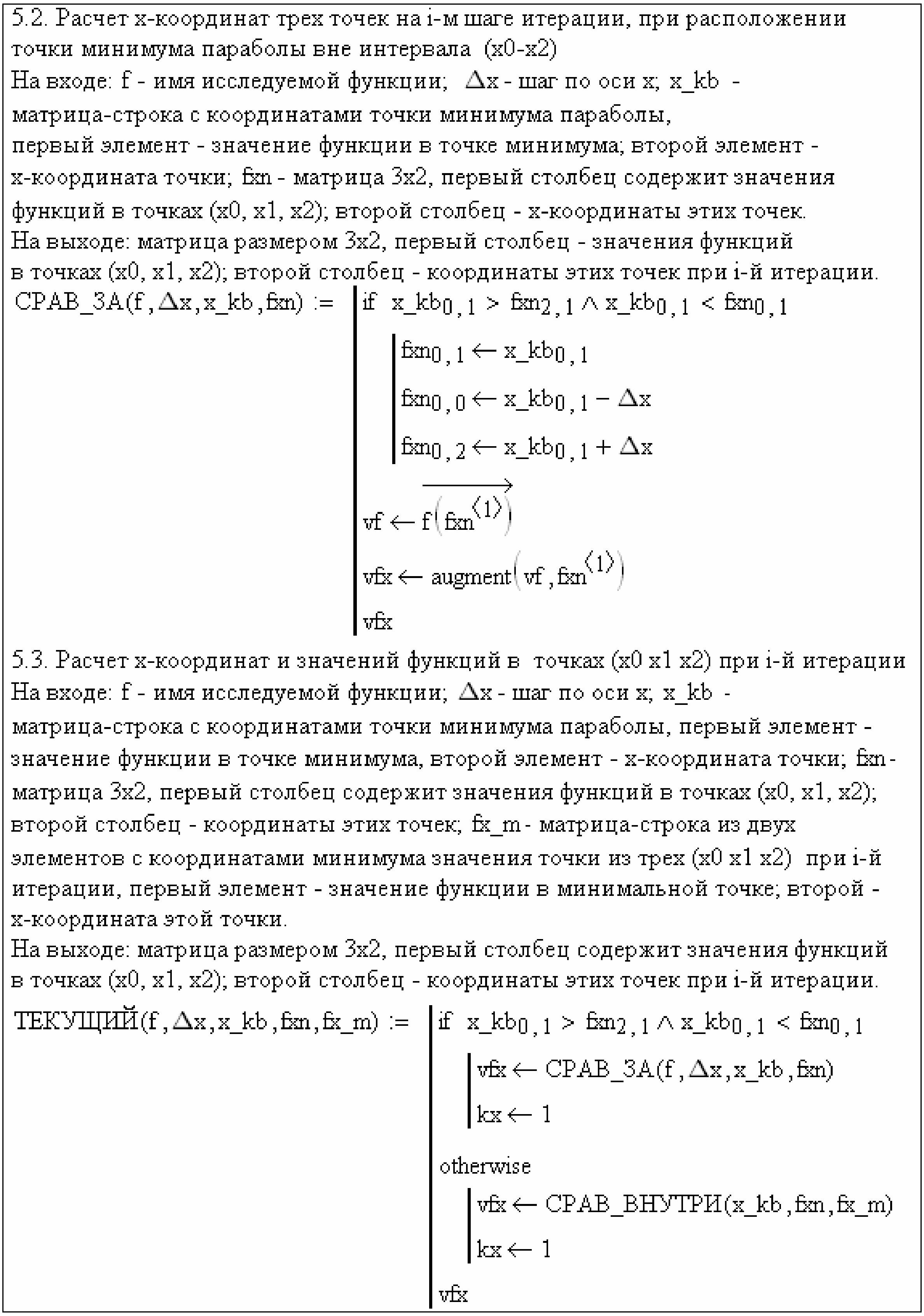
4. Расчет точки минимума параболы
На входе: f - имя исследуемой функции, fxn - матрица 3х2, первый столбец содержит значения функций в точках (x0, x1, x2),
второй столбец - координаты этих точек, a_123 - вектор-столбец
со значениями коэффициентов (a1, a2, a3) параболы.
На выходе: матрица-строка с координатами точки минимума параболы.
Первый элемент - значение функции в точке минимума,
второй элемент - x-координата точки.

```
FX_KB(f, xfn, a_123) :=
    vxm ← $\frac{xfn_{1,1} + xfn_{0,1}}{2} - \frac{a\_123_1}{2 \cdot a\_123_2}$
    vfm ← f(vxm), vfx ← augment(vfm, vxm)
    vfx
```

5. Расчет x-координат трех точек на i-м шаге итерации
5.1 Расчет x-координат трех точек (x0 x1 x2) на i-м шаге итерации,
при расположении точки минимума параболы между точками (x0-x2)
На входе: x_kb - матрица-строка с координатами точки минимума параболы.
Первый элемент - значение функции в точке минимума; второй элемент - x-координата точки; fxn - матрица 3х2, первый столбец содержит значения функций в точках (x0, x1, x2), второй столбец - координаты этих точек;
fx_m - матрица-строка из двух элементов с координатами минимума значения точки из трех (x0 x1 x2) при i-й итерации, первый элемент - значение функции в минимальной точке; второй - x-координата этой точки.
На выходе: матрица размером 3х2, первый столбец содержит значения функций

```
СРАВ_ВНУТРИ(x_kb, fxn, fx_m) :=
    vT ← $fxn^T$
    if $fxn_{0,1} < x\_kb_{0,1} < fxn_{1,1}$
        $vT^{\langle 0 \rangle}$ ← $fx\_m^T$  if $fx\_m_{0,0} < x\_kb_{0,0}$
        $vT^{\langle 2 \rangle}$ ← $\left(fxn^T\right)^{\langle 1 \rangle}$, $vT^{\langle 1 \rangle}$ ← $x\_kb^T$  otherwise
    otherwise
        $vT^{\langle 2 \rangle}$ ← $fx\_m^T$  if $fx\_m_{0,0} < x\_kb_{0,0}$
        $vT^{\langle 0 \rangle}$ ← $\left(fxn^T\right)^{\langle 1 \rangle}$, $vT^{\langle 1 \rangle}$ ← $x\_kb^T$  otherwise
    fxn ← $vT^T$
```

Рис. Б 5. Листинг программы минимизации функции
методом квадратичной аппроксимации (продолжение)



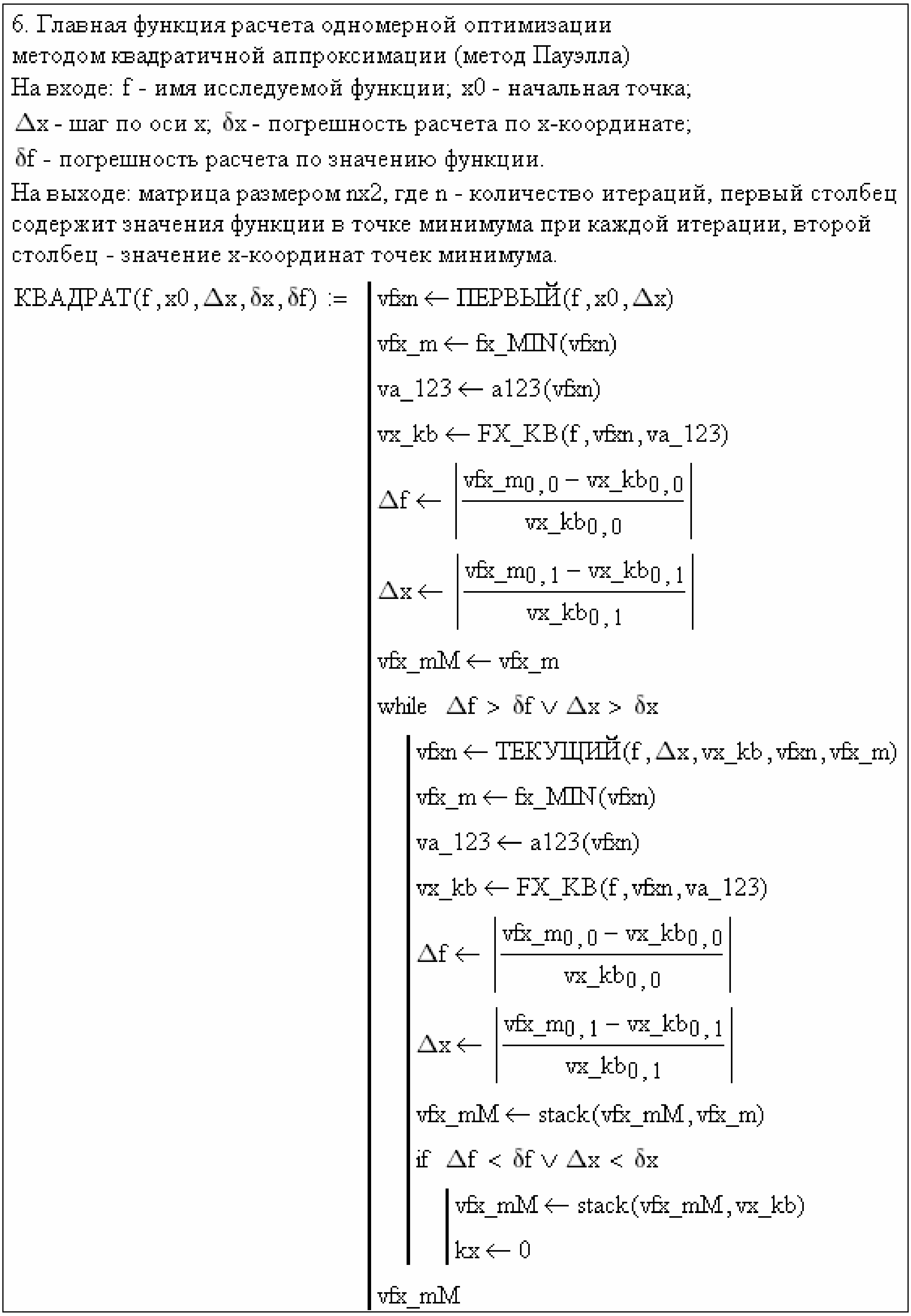
5.2. Расчет x-координат трех точек на i-м шаге итерации, при расположении точки минимума параболы вне интервала (x0-x2)
На входе: f - имя исследуемой функции; Δx - шаг по оси x; x_kb - матрица-строка с координатами точки минимума параболы,
первый элемент - значение функции в точке минимума; второй элемент - x-координата точки; fxn - матрица 3x2, первый столбец содержит значения функций в точках (x0, x1, x2); второй столбец - x-координаты этих точек.
На выходе: матрица размером 3x2, первый столбец - значения функций в точках (x0, x1, x2); второй столбец - координаты этих точек при i-й итерации.

```
$\mathrm{СРАВ\_ЗА}(f,\Delta x,x\_kb,fxn) :=$
    if $x\_kb_{0,1} > fxn_{2,1} \wedge x\_kb_{0,1} < fxn_{0,1}$
        $fxn_{0,1} \leftarrow x\_kb_{0,1}$
        $fxn_{0,0} \leftarrow x\_kb_{0,1} - \Delta x$
        $fxn_{0,2} \leftarrow x\_kb_{0,1} + \Delta x$
    $vf \leftarrow \overrightarrow{f\left(fxn^{\langle 1\rangle}\right)}$
    $vfx \leftarrow augment\left(vf, fxn^{\langle 1\rangle}\right)$
    vfx
```

5.3. Расчет x-координат и значений функций в точках (x0 x1 x2) при i-й итерации
На входе: f - имя исследуемой функции; Δx - шаг по оси x; x_kb - матрица-строка с координатами точки минимума параболы, первый элемент - значение функции в точке минимума, второй элемент - x-координата точки; fxn - матрица 3x2, первый столбец содержит значения функций в точках (x0, x1, x2); второй столбец - координаты этих точек; fx_m - матрица-строка из двух элементов с координатами минимума значения точки из трех (x0 x1 x2) при i-й итерации, первый элемент - значение функции в минимальной точке; второй - x-координата этой точки.
На выходе: матрица размером 3x2, первый столбец содержит значения функций в точках (x0, x1, x2); второй столбец - координаты этих точек при i-й итерации.

```
$\mathrm{ТЕКУЩИЙ}(f,\Delta x,x\_kb,fxn,fx\_m) :=$
    if $x\_kb_{0,1} > fxn_{2,1} \wedge x\_kb_{0,1} < fxn_{0,1}$
        $vfx \leftarrow \mathrm{СРАВ\_ЗА}(f,\Delta x,x\_kb,fxn)$
        $kx \leftarrow 1$
    otherwise
        $vfx \leftarrow \mathrm{СРАВ\_ВНУТРИ}(x\_kb,fxn,fx\_m)$
        $kx \leftarrow 1$
    vfx
```

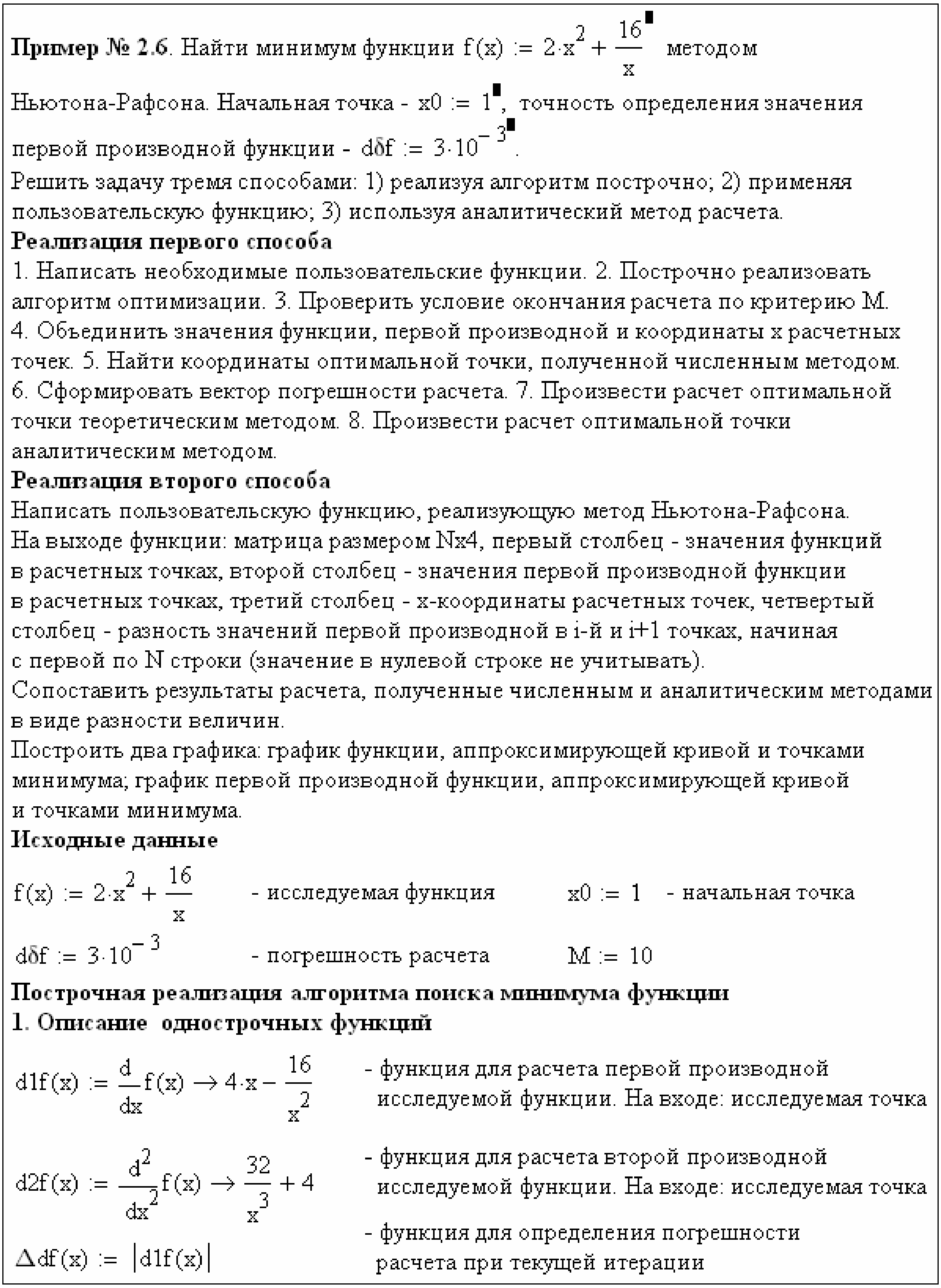
Рис. Б 5. Листинг программы минимизации функции методом квадратичной аппроксимации (продолжение)



6. Главная функция расчета одномерной оптимизации
методом квадратичной аппроксимации (метод Пауэлла)
На входе: f - имя исследуемой функции; x0 - начальная точка;
Δx - шаг по оси x; δx - погрешность расчета по x-координате;
δf - погрешность расчета по значению функции.
На выходе: матрица размером nx2, где n - количество итераций, первый столбец содержит значения функции в точке минимума при каждой итерации, второй столбец - значение x-координат точек минимума.

```
КВАДРАТ(f, x0, Δx, δx, δf) :=
    vfxn ← ПЕРВЫЙ(f, x0, Δx)
    vfx_m ← fx_MIN(vfxn)
    va_123 ← a123(vfxn)
    vx_kb ← FX_KB(f, vfxn, va_123)
    $\Delta f \leftarrow \left| \frac{vfx\_m_{0,0} - vx\_kb_{0,0}}{vx\_kb_{0,0}} \right|$
    $\Delta x \leftarrow \left| \frac{vfx\_m_{0,1} - vx\_kb_{0,1}}{vx\_kb_{0,1}} \right|$
    vfx_mM ← vfx_m
    while  Δf > δf ∨ Δx > δx
        vfxn ← ТЕКУЩИЙ(f, Δx, vx_kb, vfxn, vfx_m)
        vfx_m ← fx_MIN(vfxn)
        va_123 ← a123(vfxn)
        vx_kb ← FX_KB(f, vfxn, va_123)
        $\Delta f \leftarrow \left| \frac{vfx\_m_{0,0} - vx\_kb_{0,0}}{vx\_kb_{0,0}} \right|$
        $\Delta x \leftarrow \left| \frac{vfx\_m_{0,1} - vx\_kb_{0,1}}{vx\_kb_{0,1}} \right|$
        vfx_mM ← stack(vfx_mM, vfx_m)
        if  Δf < δf ∨ Δx < δx
            vfx_mM ← stack(vfx_mM, vx_kb)
            kx ← 0
    vfx_mM
```

Рис. Б 5. Листинг программы минимизации функции
методом квадратичной аппроксимации (окончание)



Пример № 2.6. Найти минимум функции $f(x) := 2 \cdot x^2 + \frac{16}{x}$ методом Ньютона-Рафсона. Начальная точка - $x0 := 1$, точность определения значения первой производной функции - $d\delta f := 3 \cdot 10^{-3}$.

Решить задачу тремя способами: 1) реализуя алгоритм построчно; 2) применяя пользовательскую функцию; 3) используя аналитический метод расчета.

Реализация первого способа

1. Написать необходимые пользовательские функции. 2. Построчно реализовать алгоритм оптимизации. 3. Проверить условие окончания расчета по критерию M. 4. Объединить значения функции, первой производной и координаты x расчетных точек. 5. Найти координаты оптимальной точки, полученной численным методом. 6. Сформировать вектор погрешности расчета. 7. Произвести расчет оптимальной точки теоретическим методом. 8. Произвести расчет оптимальной точки аналитическим методом.

Реализация второго способа

Написать пользовательскую функцию, реализующую метод Ньютона-Рафсона. На выходе функции: матрица размером Nx4, первый столбец - значения функций в расчетных точках, второй столбец - значения первой производной функции в расчетных точках, третий столбец - x-координаты расчетных точек, четвертый столбец - разность значений первой производной в i-й и i+1 точках, начиная с первой по N строки (значение в нулевой строке не учитывать).

Сопоставить результаты расчета, полученные численным и аналитическим методами в виде разности величин.

Построить два графика: график функции, аппроксимирующей кривой и точками минимума; график первой производной функции, аппроксимирующей кривой и точками минимума.

Исходные данные

$f(x) := 2 \cdot x^2 + \frac{16}{x}$ - исследуемая функция $x0 := 1$ - начальная точка

$d\delta f := 3 \cdot 10^{-3}$ - погрешность расчета $M := 10$

Построчная реализация алгоритма поиска минимума функции

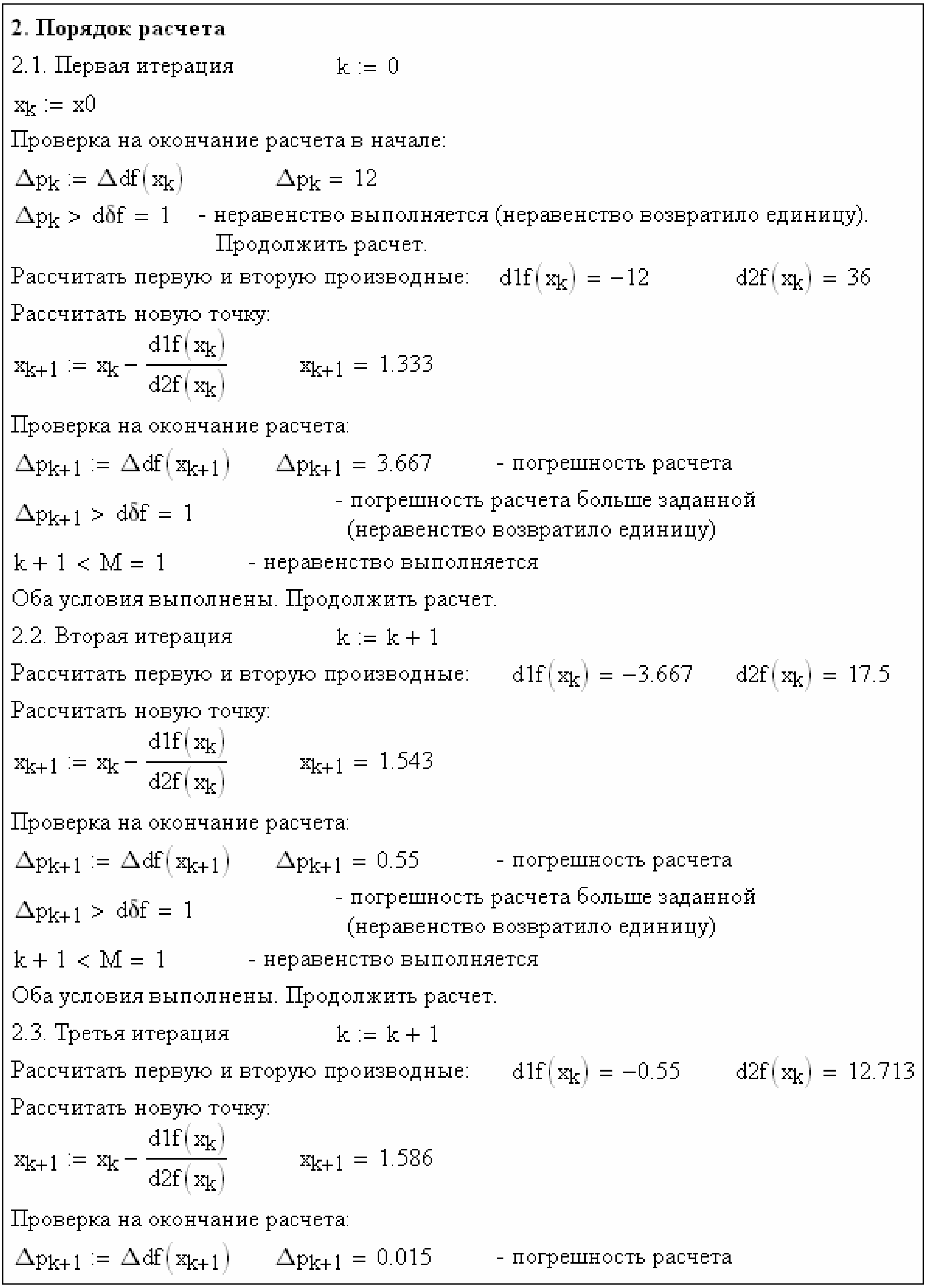
1. Описание однострочных функций

$d1f(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 4 \cdot x - \frac{16}{x^2}$ - функция для расчета первой производной исследуемой функции. На входе: исследуемая точка

$d2f(x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x) \rightarrow \frac{32}{x^3} + 4$ - функция для расчета второй производной исследуемой функции. На входе: исследуемая точка

$\Delta df(x) := |d1f(x)|$ - функция для определения погрешности расчета при текущей итерации

Рис. Б 6. Листинг программы минимизации функции методом Ньютона–Рафсона



2. Порядок расчета

2.1. Первая итерация $k := 0$

$x_k := x0$

Проверка на окончание расчета в начале:

$\Delta p_k := \Delta df(x_k)$ $\Delta p_k = 12$

$\Delta p_k > d\delta f = 1$ - неравенство выполняется (неравенство возвратило единицу). Продолжить расчет.

Рассчитать первую и вторую производные: $d1f(x_k) = -12$ $d2f(x_k) = 36$

Рассчитать новую точку:

$x_{k+1} := x_k - \frac{d1f(x_k)}{d2f(x_k)}$ $x_{k+1} = 1.333$

Проверка на окончание расчета:

$\Delta p_{k+1} := \Delta df(x_{k+1})$ $\Delta p_{k+1} = 3.667$ - погрешность расчета

$\Delta p_{k+1} > d\delta f = 1$ - погрешность расчета больше заданной (неравенство возвратило единицу)

$k + 1 < M = 1$ - неравенство выполняется

Оба условия выполнены. Продолжить расчет.

2.2. Вторая итерация $k := k + 1$

Рассчитать первую и вторую производные: $d1f(x_k) = -3.667$ $d2f(x_k) = 17.5$

Рассчитать новую точку:

$x_{k+1} := x_k - \frac{d1f(x_k)}{d2f(x_k)}$ $x_{k+1} = 1.543$

Проверка на окончание расчета:

$\Delta p_{k+1} := \Delta df(x_{k+1})$ $\Delta p_{k+1} = 0.55$ - погрешность расчета

$\Delta p_{k+1} > d\delta f = 1$ - погрешность расчета больше заданной (неравенство возвратило единицу)

$k + 1 < M = 1$ - неравенство выполняется

Оба условия выполнены. Продолжить расчет.

2.3. Третья итерация $k := k + 1$

Рассчитать первую и вторую производные: $d1f(x_k) = -0.55$ $d2f(x_k) = 12.713$

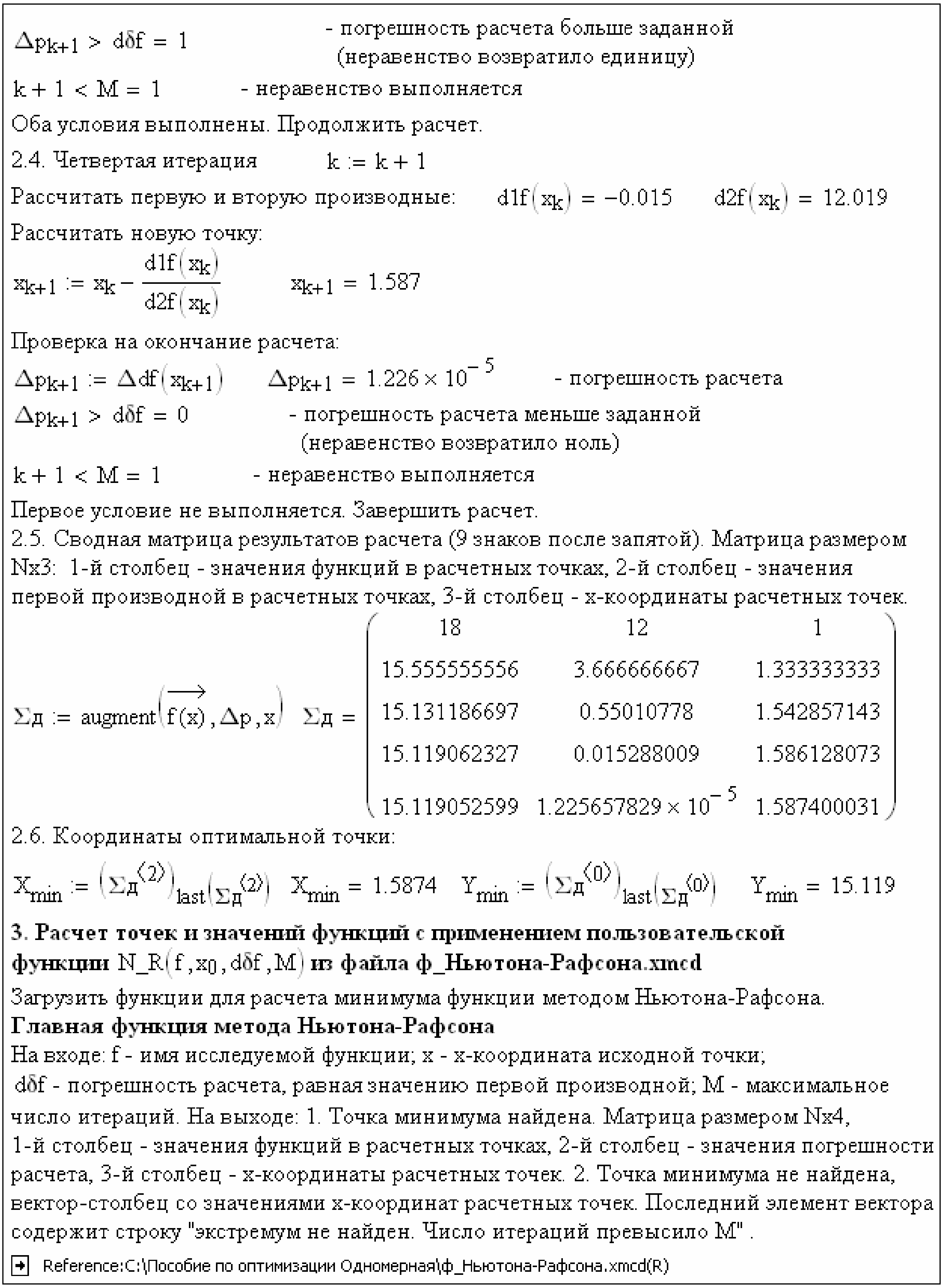
Рассчитать новую точку:

$x_{k+1} := x_k - \frac{d1f(x_k)}{d2f(x_k)}$ $x_{k+1} = 1.586$

Проверка на окончание расчета:

$\Delta p_{k+1} := \Delta df(x_{k+1})$ $\Delta p_{k+1} = 0.015$ - погрешность расчета

Рис. Б 6. Листинг программы минимизации функции
методом Ньютона–Рафсона (продолжение)



$\Delta p_{k+1} > d\delta f = 1$ - погрешность расчета больше заданной (неравенство возвратило единицу)

$k + 1 < M = 1$ - неравенство выполняется

Оба условия выполнены. Продолжить расчет.

2.4. Четвертая итерация $k := k + 1$

Рассчитать первую и вторую производные: $d1f(x_k) = -0.015$ $d2f(x_k) = 12.019$

Рассчитать новую точку:

$x_{k+1} := x_k - \dfrac{d1f(x_k)}{d2f(x_k)}$ $x_{k+1} = 1.587$

Проверка на окончание расчета:

$\Delta p_{k+1} := \Delta df(x_{k+1})$ $\Delta p_{k+1} = 1.226 \times 10^{-5}$ - погрешность расчета

$\Delta p_{k+1} > d\delta f = 0$ - погрешность расчета меньше заданной (неравенство возвратило ноль)

$k + 1 < M = 1$ - неравенство выполняется

Первое условие не выполняется. Завершить расчет.

2.5. Сводная матрица результатов расчета (9 знаков после запятой). Матрица размером Nx3: 1-й столбец - значения функций в расчетных точках, 2-й столбец - значения первой производной в расчетных точках, 3-й столбец - x-координаты расчетных точек.

$$\Sigma\text{д} := \text{augment}\left(\overrightarrow{f(x)}, \Delta p, x\right) \quad \Sigma\text{д} = \begin{pmatrix} 18 & 12 & 1 \\ 15.555555556 & 3.666666667 & 1.333333333 \\ 15.131186697 & 0.55010778 & 1.542857143 \\ 15.119062327 & 0.015288009 & 1.586128073 \\ 15.119052599 & 1.225657829 \times 10^{-5} & 1.587400031 \end{pmatrix}$$

2.6. Координаты оптимальной точки:

$X_{min} := \left(\Sigma\text{д}^{\langle 2\rangle}\right)_{\text{last}\left(\Sigma\text{д}^{\langle 2\rangle}\right)}$ $X_{min} = 1.5874$ $Y_{min} := \left(\Sigma\text{д}^{\langle 0\rangle}\right)_{\text{last}\left(\Sigma\text{д}^{\langle 0\rangle}\right)}$ $Y_{min} = 15.119$

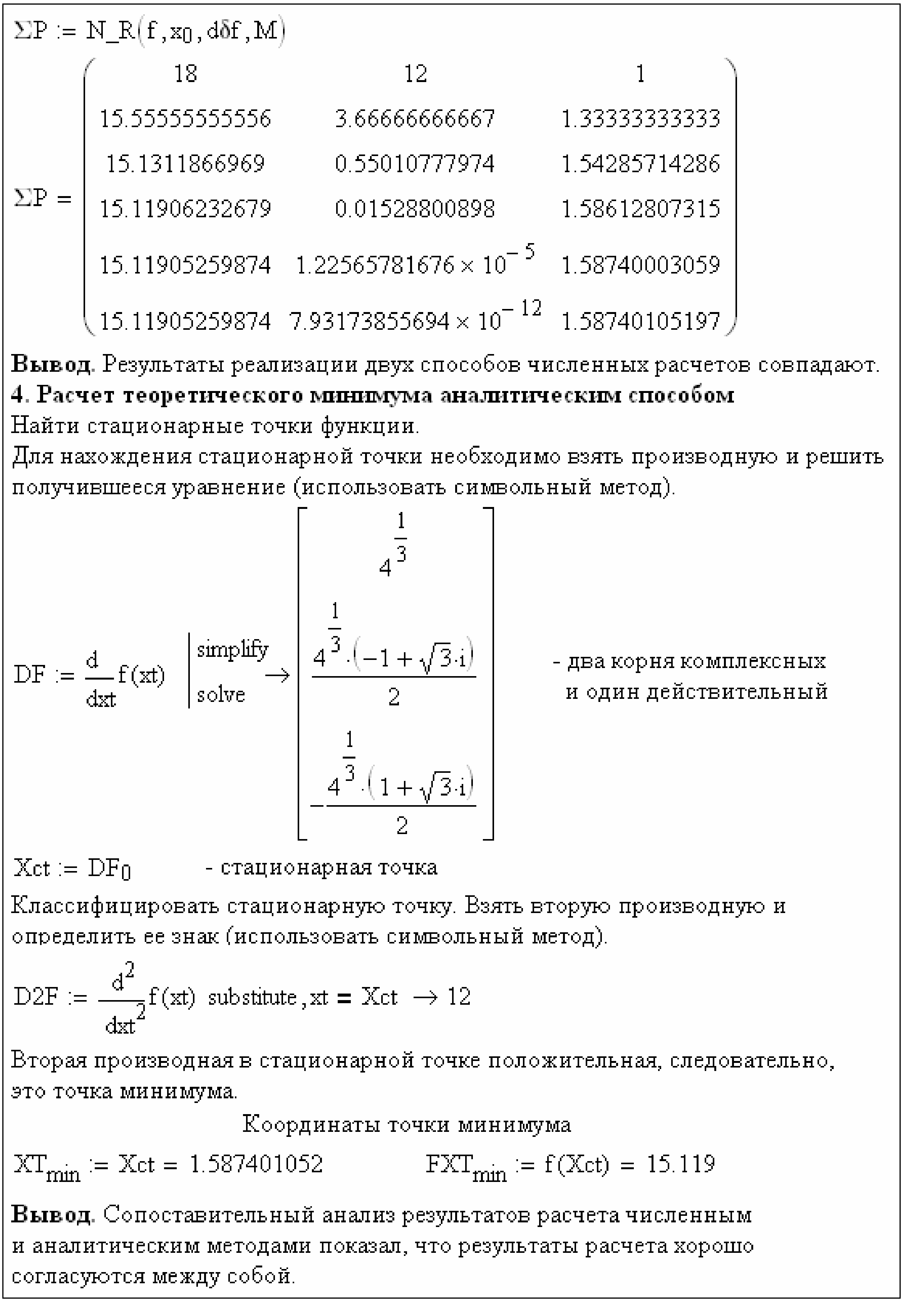
3. Расчет точек и значений функций с применением пользовательской функции $N\_R(f, x_0, d\delta f, M)$ **из файла ф_Ньютона-Рафсона.xmcd**

Загрузить функции для расчета минимума функции методом Ньютона-Рафсона.

Главная функция метода Ньютона-Рафсона

На входе: f - имя исследуемой функции; x - x-координата исходной точки; dδf - погрешность расчета, равная значению первой производной; M - максимальное число итераций. На выходе: 1. Точка минимума найдена. Матрица размером Nx4, 1-й столбец - значения функций в расчетных точках, 2-й столбец - значения погрешности расчета, 3-й столбец - x-координаты расчетных точек. 2. Точка минимума не найдена, вектор-столбец со значениями x-координат расчетных точек. Последний элемент вектора содержит строку "экстремум не найден. Число итераций превысило M" .

Рис. Б 6. Листинг программы минимизации функции методом Ньютона–Рафсона (продолжение)



$\Sigma P := N\_R(f, x_0, d\delta f, M)$

$$\Sigma P = \begin{pmatrix} 18 & 12 & 1 \\ 15.55555555556 & 3.66666666667 & 1.33333333333 \\ 15.1311866969 & 0.55010777974 & 1.54285714286 \\ 15.11906232679 & 0.01528800898 & 1.58612807315 \\ 15.11905259874 & 1.22565781676 \times 10^{-5} & 1.58740003059 \\ 15.11905259874 & 7.93173855694 \times 10^{-12} & 1.58740105197 \end{pmatrix}$$

Вывод. Результаты реализации двух способов численных расчетов совпадают.

4. Расчет теоретического минимума аналитическим способом

Найти стационарные точки функции.

Для нахождения стационарной точки необходимо взять производную и решить получившееся уравнение (использовать символьный метод).

$$DF := \frac{d}{dxt} f(xt) \left| \begin{matrix} simplify \\ solve \end{matrix} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} 4^{\frac{1}{3}} \\ \frac{4^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-1 + \sqrt{3} \cdot i\right)}{2} \\ -\frac{4^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 + \sqrt{3} \cdot i\right)}{2} \end{bmatrix}$$

- два корня комплексных и один действительный

$Xct := DF_0$ - стационарная точка

Классифицировать стационарную точку. Взять вторую производную и определить ее знак (использовать символьный метод).

$$D2F := \frac{d^2}{dxt^2} f(xt) \text{ substitute}, xt = Xct \rightarrow 12$$

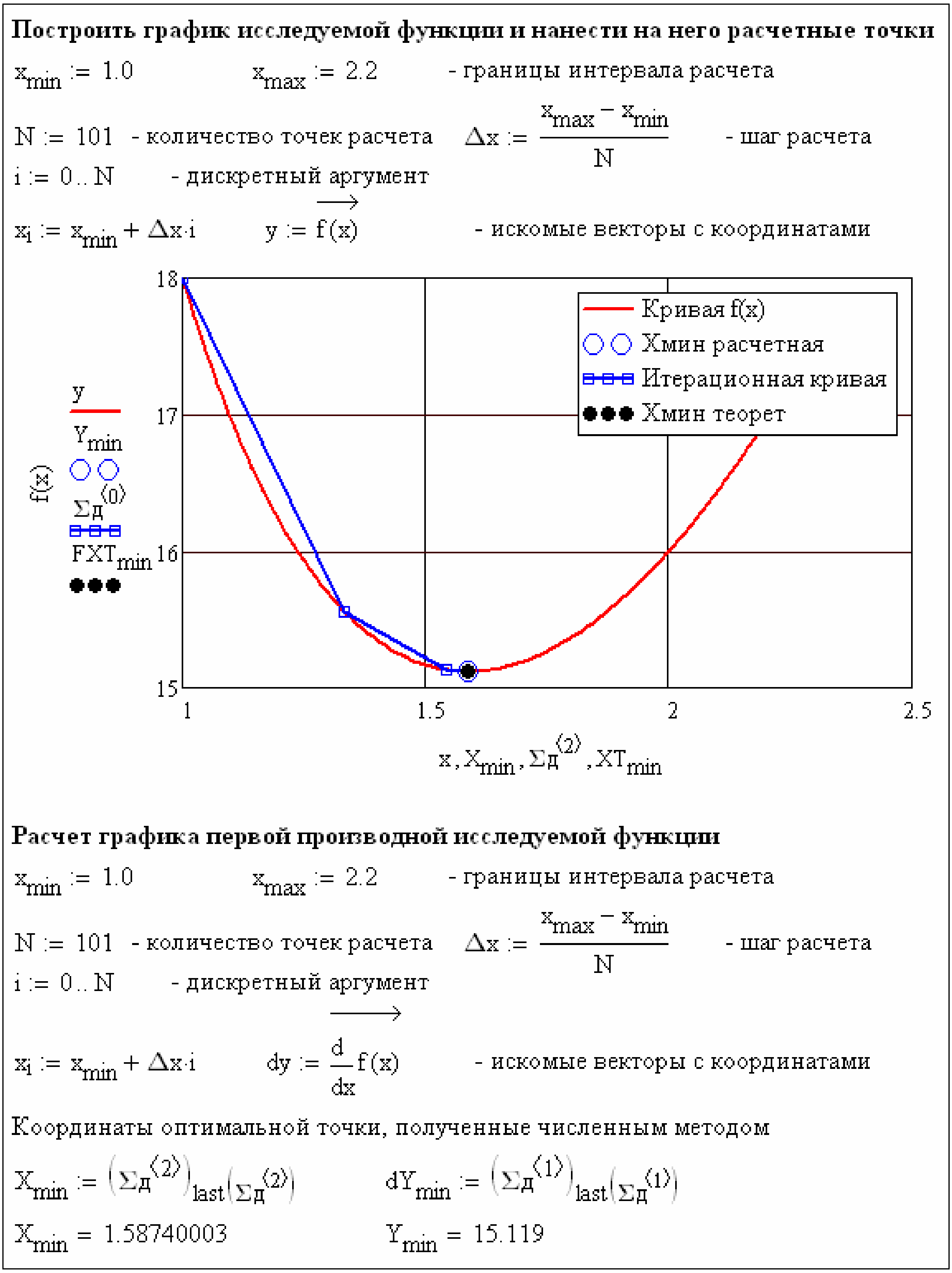
Вторая производная в стационарной точке положительная, следовательно, это точка минимума.

Координаты точки минимума

$XT_{min} := Xct = 1.587401052$ $FXT_{min} := f(Xct) = 15.119$

Вывод. Сопоставительный анализ результатов расчета численным и аналитическим методами показал, что результаты расчета хорошо согласуются между собой.

Рис. Б 6. Листинг программы минимизации функции методом Ньютона–Рафсона (продолжение)



Построить график исследуемой функции и нанести на него расчетные точки

$x_{min} := 1.0$ $x_{max} := 2.2$ - границы интервала расчета

$N := 101$ - количество точек расчета $\Delta x := \frac{x_{max} - x_{min}}{N}$ - шаг расчета

$i := 0..N$ - дискретный аргумент

$x_i := x_{min} + \Delta x \cdot i$ $y := \overrightarrow{f(x)}$ - искомые векторы с координатами

Расчет графика первой производной исследуемой функции

$x_{min} := 1.0$ $x_{max} := 2.2$ - границы интервала расчета

$N := 101$ - количество точек расчета $\Delta x := \frac{x_{max} - x_{min}}{N}$ - шаг расчета

$i := 0..N$ - дискретный аргумент

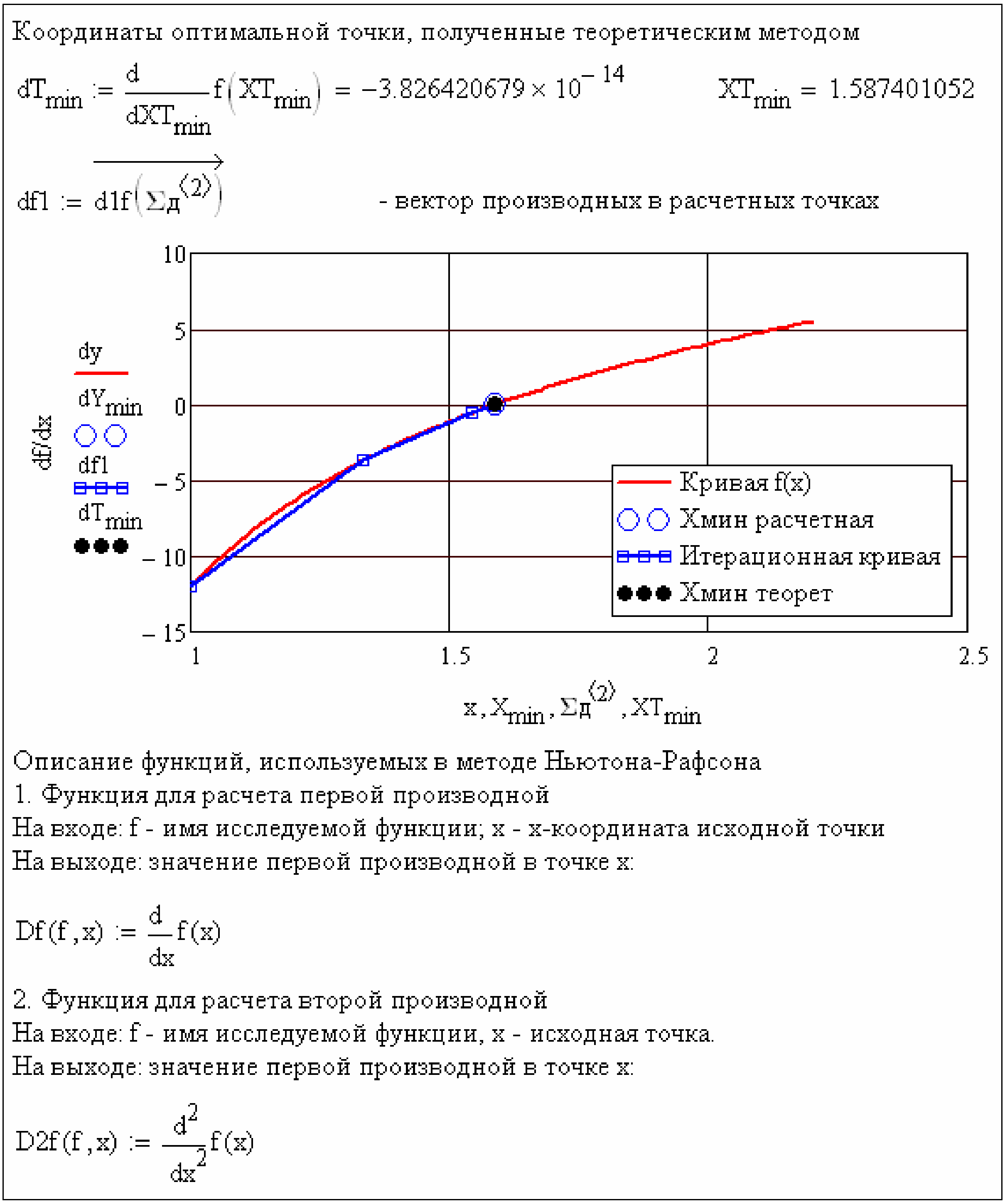
$x_i := x_{min} + \Delta x \cdot i$ $dy := \overrightarrow{\frac{d}{dx} f(x)}$ - искомые векторы с координатами

Координаты оптимальной точки, полученные численным методом

$X_{min} := \left(\Sigma д^{\langle 2\rangle}\right)_{last\left(\Sigma д^{\langle 2\rangle}\right)}$ $dY_{min} := \left(\Sigma д^{\langle 1\rangle}\right)_{last\left(\Sigma д^{\langle 1\rangle}\right)}$

$X_{min} = 1.58740003$ $Y_{min} = 15.119$

Рис. Б 6. Листинг программы минимизация функции
методом Ньютона–Рафсона (продолжение)



Координаты оптимальной точки, полученные теоретическим методом

$dT_{min} := \frac{d}{dXT_{min}} f\left(XT_{min}\right) = -3.826420679 \times 10^{-14}$ $\qquad XT_{min} = 1.587401052$

$df1 := \overrightarrow{d1f\left(\Sigma д^{\langle 2\rangle}\right)}$ - вектор производных в расчетных точках

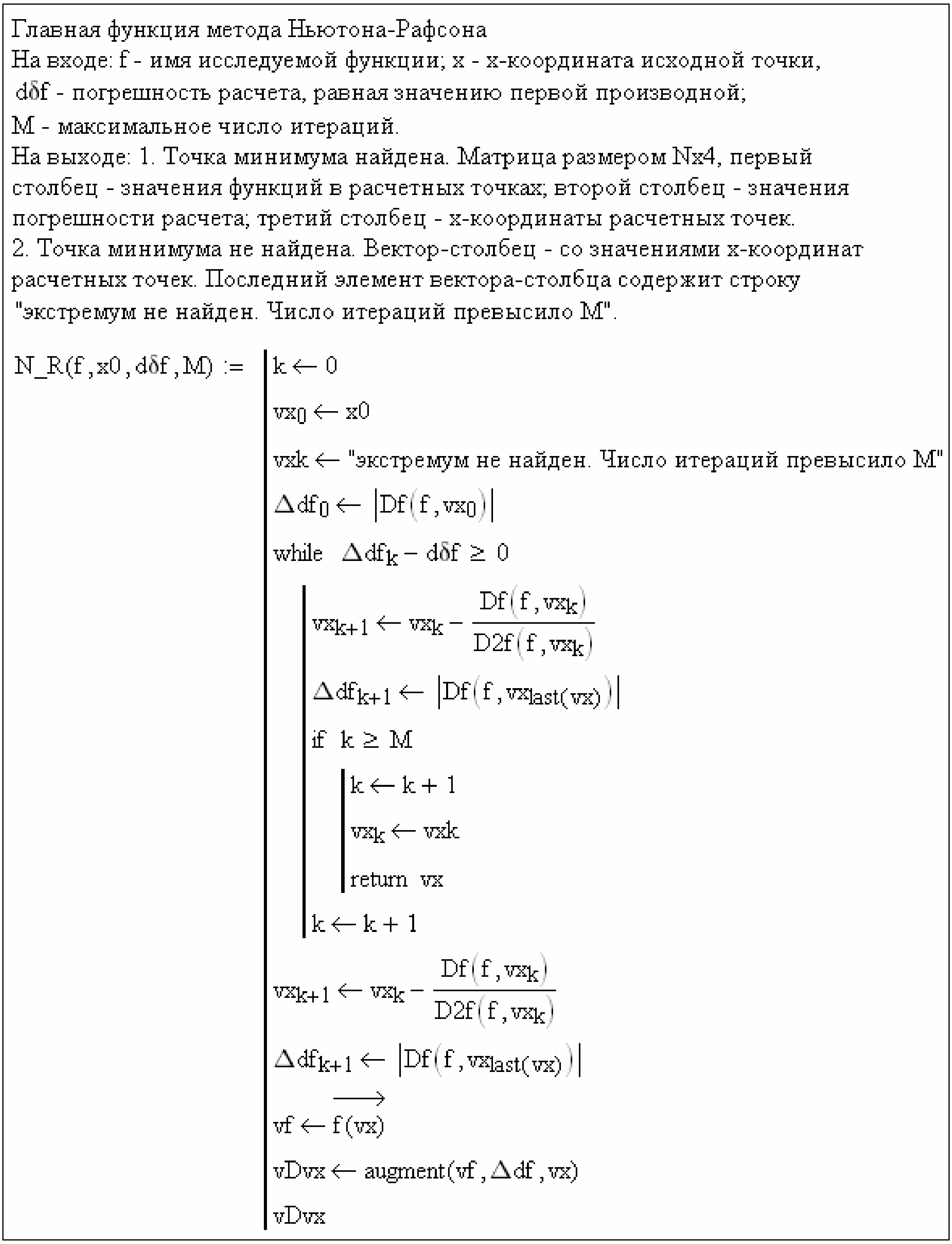
Описание функций, используемых в методе Ньютона-Рафсона
1. Функция для расчета первой производной
На входе: f - имя исследуемой функции; x - x-координата исходной точки
На выходе: значение первой производной в точке x:

$$Df(f,x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

2. Функция для расчета второй производной
На входе: f - имя исследуемой функции, x - исходная точка.
На выходе: значение первой производной в точке x:

$$D2f(f,x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

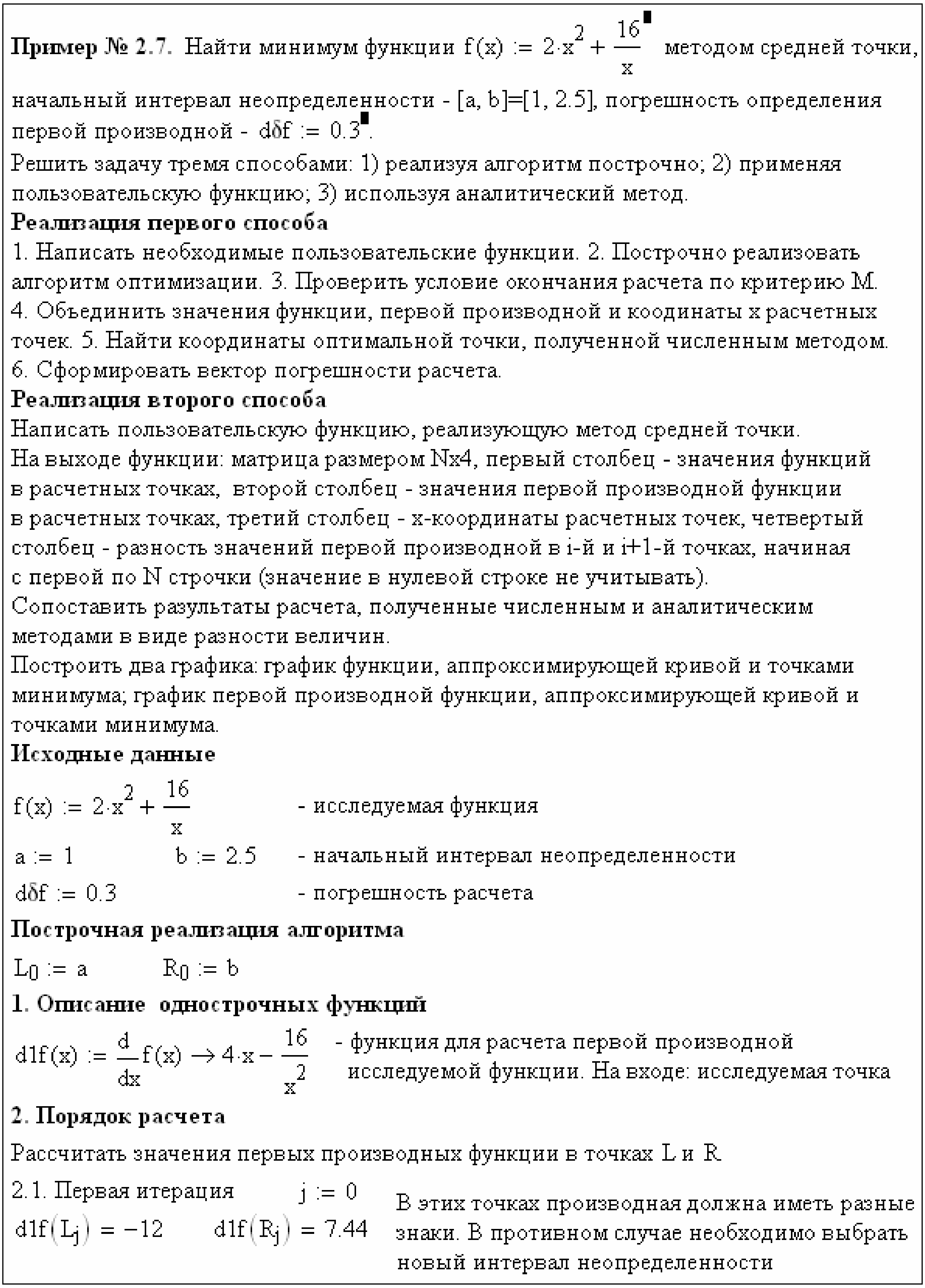
Рис. Б 6. Листинг программы минимизации функции
методом Ньютона–Рафсона (продолжение)



Главная функция метода Ньютона-Рафсона
На входе: f - имя исследуемой функции; x - x-координата исходной точки,
dδf - погрешность расчета, равная значению первой производной;
M - максимальное число итераций.
На выходе: 1. Точка минимума найдена. Матрица размером Nx4, первый
столбец - значения функций в расчетных точках; второй столбец - значения
погрешности расчета; третий столбец - x-координаты расчетных точек.
2. Точка минимума не найдена. Вектор-столбец - со значениями x-координат
расчетных точек. Последний элемент вектора-столбца содержит строку
"экстремум не найден. Число итераций превысило M".

```
$N\_R(f, x0, d\delta f, M) :=$
    $k \leftarrow 0$
    $vx_0 \leftarrow x0$
    $vxk \leftarrow$ "экстремум не найден. Число итераций превысило M"
    $\Delta df_0 \leftarrow \left|Df(f, vx_0)\right|$
    while  $\Delta df_k - d\delta f \geq 0$
        $vx_{k+1} \leftarrow vx_k - \frac{Df(f, vx_k)}{D2f(f, vx_k)}$
        $\Delta df_{k+1} \leftarrow \left|Df(f, vx_{last(vx)})\right|$
        if  $k \geq M$
            $k \leftarrow k + 1$
            $vx_k \leftarrow vxk$
            return  vx
        $k \leftarrow k + 1$
    $vx_{k+1} \leftarrow vx_k - \frac{Df(f, vx_k)}{D2f(f, vx_k)}$
    $\Delta df_{k+1} \leftarrow \left|Df(f, vx_{last(vx)})\right|$
    $vf \leftarrow \overrightarrow{f(vx)}$
    $vDvx \leftarrow augment(vf, \Delta df, vx)$
    vDvx
```

Рис. Б 6. Листинг программы минимизации функции
методом Ньютона–Рафсона (окончание)



Пример № 2.7. Найти минимум функции $f(x) := 2 \cdot x^2 + \frac{16}{x}$ методом средней точки, начальный интервал неопределенности - [a, b]=[1, 2.5], погрешность определения первой производной - $d\delta f := 0.3$.

Решить задачу тремя способами: 1) реализуя алгоритм построчно; 2) применяя пользовательскую функцию; 3) используя аналитический метод.

Реализация первого способа

1. Написать необходимые пользовательские функции. 2. Построчно реализовать алгоритм оптимизации. 3. Проверить условие окончания расчета по критерию M. 4. Объединить значения функции, первой производной и коодинаты x расчетных точек. 5. Найти координаты оптимальной точки, полученной численным методом. 6. Сформировать вектор погрешности расчета.

Реализация второго способа

Написать пользовательскую функцию, реализующую метод средней точки. На выходе функции: матрица размером Nx4, первый столбец - значения функций в расчетных точках, второй столбец - значения первой производной функции в расчетных точках, третий столбец - x-координаты расчетных точек, четвертый столбец - разность значений первой производной в i-й и i+1-й точках, начиная с первой по N строчки (значение в нулевой строке не учитывать).

Сопоставить разультаты расчета, полученные численным и аналитическим методами в виде разности величин.

Построить два графика: график функции, аппроксимирующей кривой и точками минимума; график первой производной функции, аппроксимирующей кривой и точками минимума.

Исходные данные

$f(x) := 2 \cdot x^2 + \frac{16}{x}$ - исследуемая функция

$a := 1$ $b := 2.5$ - начальный интервал неопределенности

$d\delta f := 0.3$ - погрешность расчета

Построчная реализация алгоритма

$L_0 := a$ $R_0 := b$

1. Описание одностроечных функций

$d1f(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 4 \cdot x - \frac{16}{x^2}$ - функция для расчета первой производной исследуемой функции. На входе: исследуемая точка

2. Порядок расчета

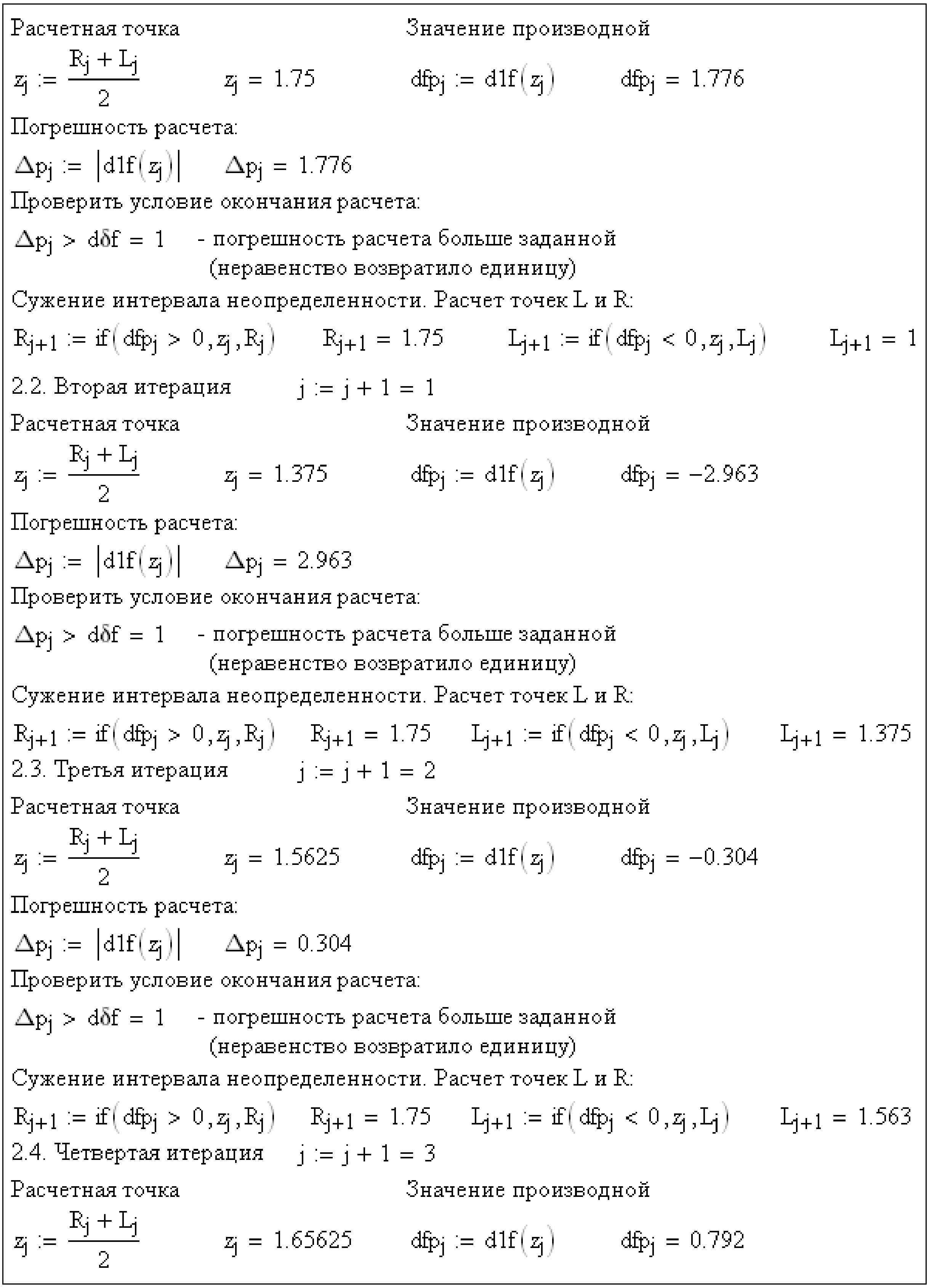
Рассчитать значения первых производных функции в точках L и R

2.1. Первая итерация $j := 0$

$d1f(L_j) = -12$ $d1f(R_j) = 7.44$

В этих точках производная должна иметь разные знаки. В противном случае необходимо выбрать новый интервал неопределенности

Рис. Б 7. Листинг программы минимизации функции методом средней точки



Расчетная точка Значение производной

$z_j := \frac{R_j + L_j}{2}$ $z_j = 1.75$ $dfp_j := d1f(z_j)$ $dfp_j = 1.776$

Погрешность расчета:

$\Delta p_j := |d1f(z_j)|$ $\Delta p_j = 1.776$

Проверить условие окончания расчета:

$\Delta p_j > d\delta f = 1$ - погрешность расчета больше заданной
(неравенство возвратило единицу)

Сужение интервала неопределенности. Расчет точек L и R:

$R_{j+1} := if(dfp_j > 0, z_j, R_j)$ $R_{j+1} = 1.75$ $L_{j+1} := if(dfp_j < 0, z_j, L_j)$ $L_{j+1} = 1$

2.2. Вторая итерация $j := j + 1 = 1$

Расчетная точка Значение производной

$z_j := \frac{R_j + L_j}{2}$ $z_j = 1.375$ $dfp_j := d1f(z_j)$ $dfp_j = -2.963$

Погрешность расчета:

$\Delta p_j := |d1f(z_j)|$ $\Delta p_j = 2.963$

Проверить условие окончания расчета:

$\Delta p_j > d\delta f = 1$ - погрешность расчета больше заданной
(неравенство возвратило единицу)

Сужение интервала неопределенности. Расчет точек L и R:

$R_{j+1} := if(dfp_j > 0, z_j, R_j)$ $R_{j+1} = 1.75$ $L_{j+1} := if(dfp_j < 0, z_j, L_j)$ $L_{j+1} = 1.375$

2.3. Третья итерация $j := j + 1 = 2$

Расчетная точка Значение производной

$z_j := \frac{R_j + L_j}{2}$ $z_j = 1.5625$ $dfp_j := d1f(z_j)$ $dfp_j = -0.304$

Погрешность расчета:

$\Delta p_j := |d1f(z_j)|$ $\Delta p_j = 0.304$

Проверить условие окончания расчета:

$\Delta p_j > d\delta f = 1$ - погрешность расчета больше заданной
(неравенство возвратило единицу)

Сужение интервала неопределенности. Расчет точек L и R:

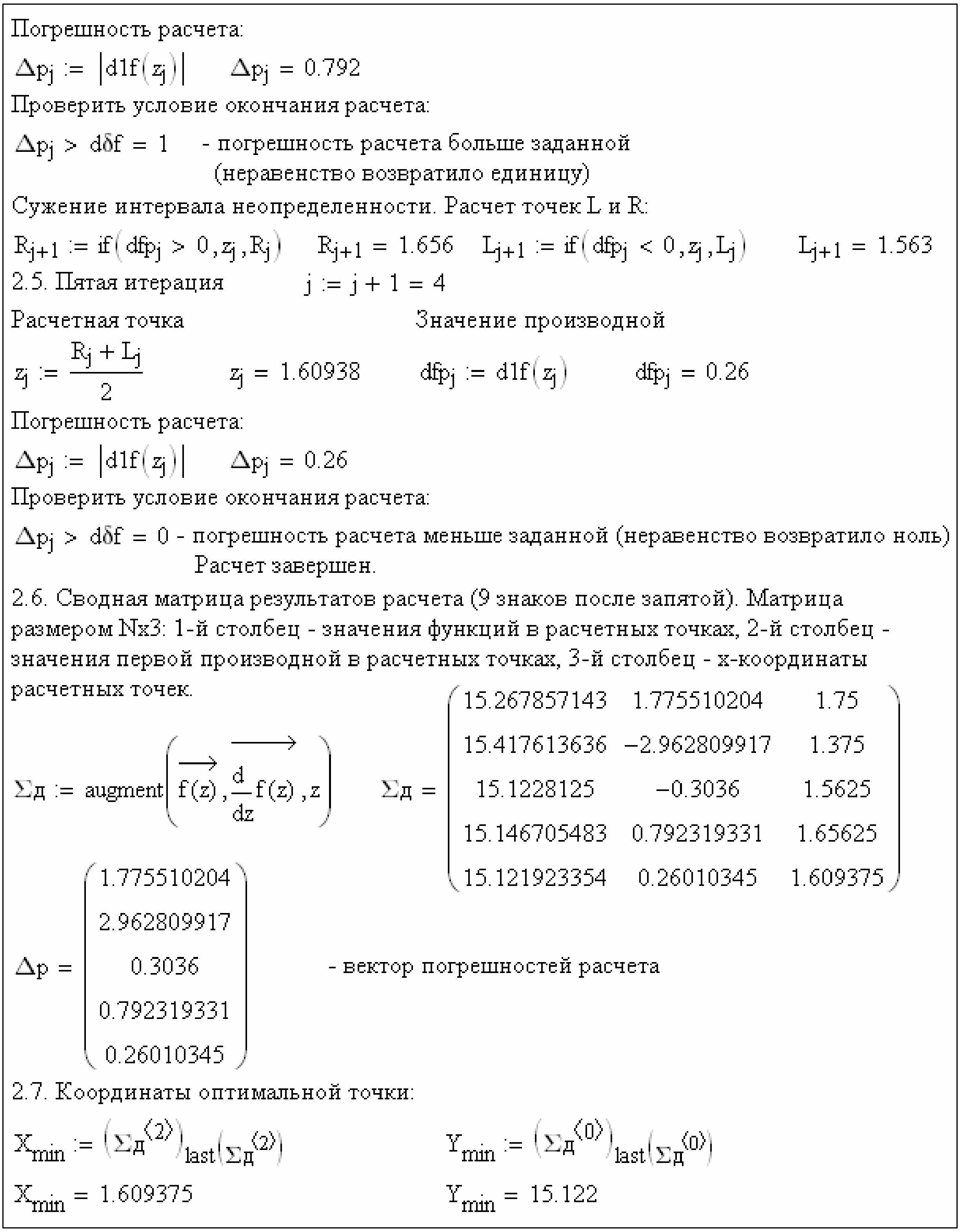
$R_{j+1} := if(dfp_j > 0, z_j, R_j)$ $R_{j+1} = 1.75$ $L_{j+1} := if(dfp_j < 0, z_j, L_j)$ $L_{j+1} = 1.563$

2.4. Четвертая итерация $j := j + 1 = 3$

Расчетная точка Значение производной

$z_j := \frac{R_j + L_j}{2}$ $z_j = 1.65625$ $dfp_j := d1f(z_j)$ $dfp_j = 0.792$

Рис. Б 7. Листинг программы минимизации функции
методом средней точки (продолжение)



Погрешность расчета:

$\Delta p_j := \left| d1f(z_j) \right| \qquad \Delta p_j = 0.792$

Проверить условие окончания расчета:

$\Delta p_j > d\delta f = 1$ - погрешность расчета больше заданной (неравенство возвратило единицу)

Сужение интервала неопределенности. Расчет точек L и R:

$R_{j+1} := \text{if}(dfp_j > 0, z_j, R_j) \qquad R_{j+1} = 1.656 \qquad L_{j+1} := \text{if}(dfp_j < 0, z_j, L_j) \qquad L_{j+1} = 1.563$

2.5. Пятая итерация $j := j + 1 = 4$

Расчетная точка Значение производной

$z_j := \frac{R_j + L_j}{2} \qquad z_j = 1.60938 \qquad dfp_j := d1f(z_j) \qquad dfp_j = 0.26$

Погрешность расчета:

$\Delta p_j := \left| d1f(z_j) \right| \qquad \Delta p_j = 0.26$

Проверить условие окончания расчета:

$\Delta p_j > d\delta f = 0$ - погрешность расчета меньше заданной (неравенство возвратило ноль) Расчет завершен.

2.6. Сводная матрица результатов расчета (9 знаков после запятой). Матрица размером Nx3: 1-й столбец - значения функций в расчетных точках, 2-й столбец - значения первой производной в расчетных точках, 3-й столбец - x-координаты расчетных точек.

$$\Sigma\text{д} := \text{augment}\left(\overrightarrow{f(z)}, \overrightarrow{\frac{d}{dz}f(z)}, z\right) \qquad \Sigma\text{д} = \begin{pmatrix} 15.267857143 & 1.775510204 & 1.75 \\ 15.417613636 & -2.962809917 & 1.375 \\ 15.1228125 & -0.3036 & 1.5625 \\ 15.146705483 & 0.792319331 & 1.65625 \\ 15.121923354 & 0.26010345 & 1.609375 \end{pmatrix}$$

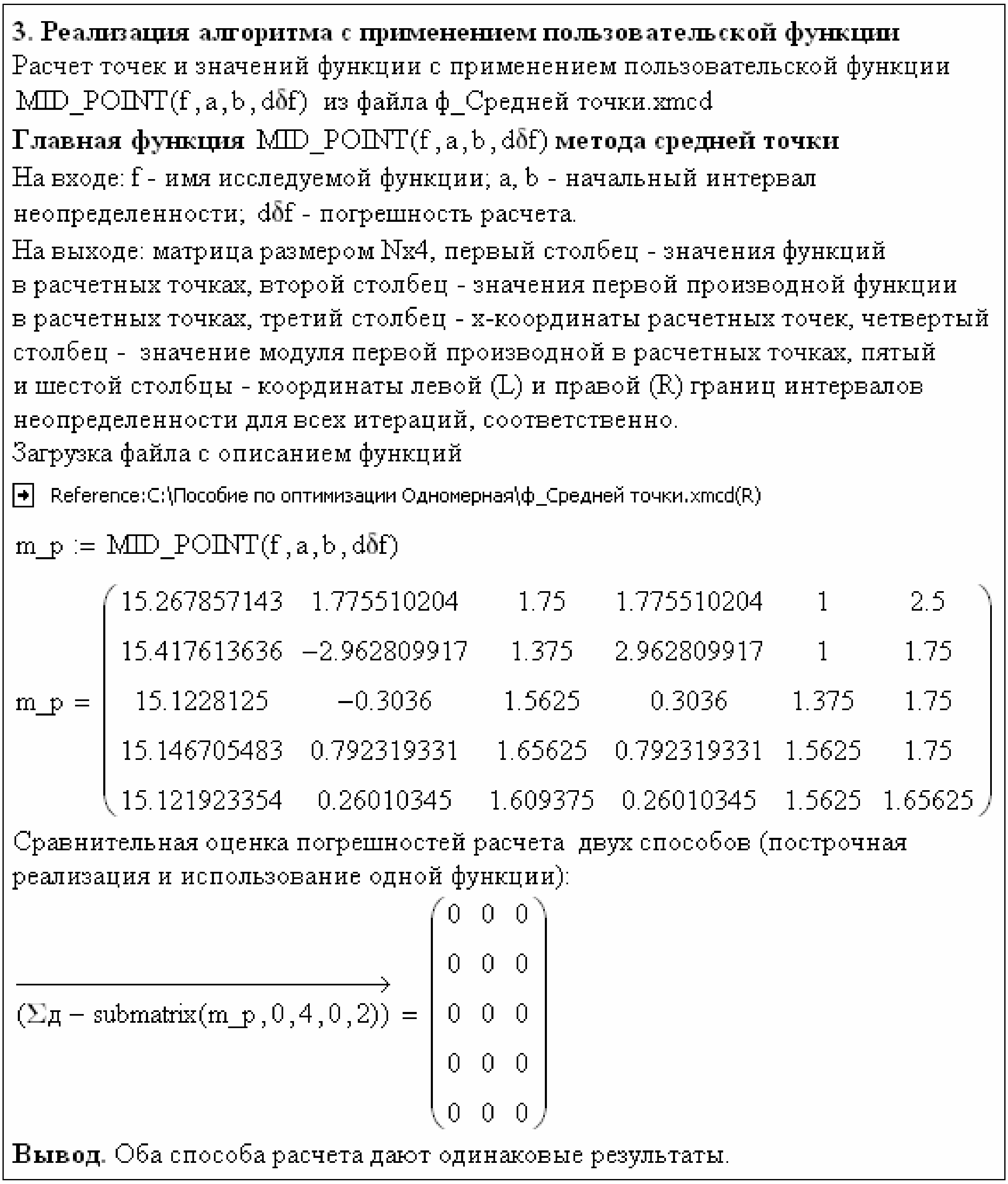
$$\Delta p = \begin{pmatrix} 1.775510204 \\ 2.962809917 \\ 0.3036 \\ 0.792319331 \\ 0.26010345 \end{pmatrix}$$ - вектор погрешностей расчета

2.7. Координаты оптимальной точки:

$X_{min} := \left(\Sigma\text{д}^{\langle 2\rangle}\right)_{\text{last}\left(\Sigma\text{д}^{\langle 2\rangle}\right)} \qquad Y_{min} := \left(\Sigma\text{д}^{\langle 0\rangle}\right)_{\text{last}\left(\Sigma\text{д}^{\langle 0\rangle}\right)}$

$X_{min} = 1.609375 \qquad Y_{min} = 15.122$

Рис. Б 7. Листинг программы минимизации функции методом средней точки (продолжение)



3. Реализация алгоритма с применением пользовательской функции

Расчет точек и значений функции с применением пользовательской функции $MID\_POINT(f, a, b, d\delta f)$ из файла ф_Средней точки.xmcd

Главная функция $MID\_POINT(f, a, b, d\delta f)$ **метода средней точки**

На входе: f - имя исследуемой функции; a, b - начальный интервал неопределенности; dδf - погрешность расчета.

На выходе: матрица размером Nx4, первый столбец - значения функций в расчетных точках, второй столбец - значения первой производной функции в расчетных точках, третий столбец - x-координаты расчетных точек, четвертый столбец - значение модуля первой производной в расчетных точках, пятый и шестой столбцы - координаты левой (L) и правой (R) границ интервалов неопределенности для всех итераций, соответственно.

Загрузка файла с описанием функций

➔ Reference:C:\Пособие по оптимизации Одномерная\ф_Средней точки.xmcd(R)

$m\_p := MID\_POINT(f, a, b, d\delta f)$

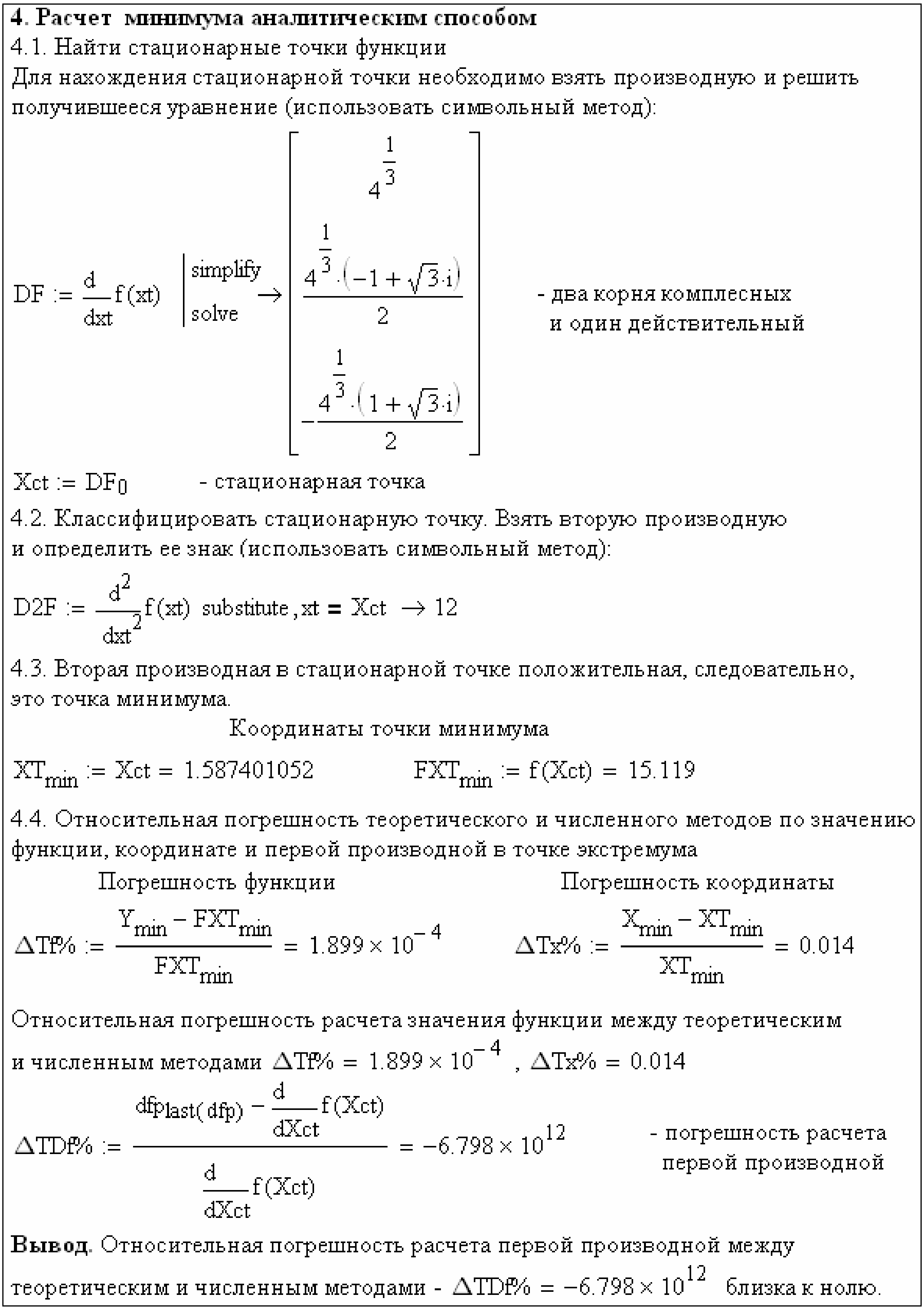
$$m\_p = \begin{pmatrix} 15.267857143 & 1.775510204 & 1.75 & 1.775510204 & 1 & 2.5 \\ 15.417613636 & -2.962809917 & 1.375 & 2.962809917 & 1 & 1.75 \\ 15.1228125 & -0.3036 & 1.5625 & 0.3036 & 1.375 & 1.75 \\ 15.146705483 & 0.792319331 & 1.65625 & 0.792319331 & 1.5625 & 1.75 \\ 15.121923354 & 0.26010345 & 1.609375 & 0.26010345 & 1.5625 & 1.65625 \end{pmatrix}$$

Сравнительная оценка погрешностей расчета двух способов (построчная реализация и использование одной функции):

$$\overrightarrow{(\Sigma д - \text{submatrix}(m\_p, 0, 4, 0, 2))} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вывод. Оба способа расчета дают одинаковые результаты.

Рис. Б 7. Листинг программы минимизации функции методом средней точки (продолжение)



4. Расчет минимума аналитическим способом

4.1. Найти стационарные точки функции

Для нахождения стационарной точки необходимо взять производную и решить получившееся уравнение (использовать символьный метод):

$$DF := \frac{d}{dxt} f(xt) \;\Big|\begin{matrix} simplify \\ solve \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4^{\frac{1}{3}} \\ \frac{4^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-1+\sqrt{3} \cdot i\right)}{2} \\ -\frac{4^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1+\sqrt{3} \cdot i\right)}{2} \end{bmatrix}$$

- два корня комплесных и один действительный

$Xct := DF_0$ - стационарная точка

4.2. Классифицировать стационарную точку. Взять вторую производную и определить ее знак (использовать символьный метод):

$$D2F := \frac{d^2}{dxt^2} f(xt) \text{ substitute}, xt = Xct \rightarrow 12$$

4.3. Вторая производная в стационарной точке положительная, следовательно, это точка минимума.

Координаты точки минимума

$XT_{min} := Xct = 1.587401052$ $FXT_{min} := f(Xct) = 15.119$

4.4. Относительная погрешность теоретического и численного методов по значению функции, координате и первой производной в точке экстремума

Погрешность функции

$$\Delta Tf\% := \frac{Y_{min} - FXT_{min}}{FXT_{min}} = 1.899 \times 10^{-4}$$

Погрешность координаты

$$\Delta Tx\% := \frac{X_{min} - XT_{min}}{XT_{min}} = 0.014$$

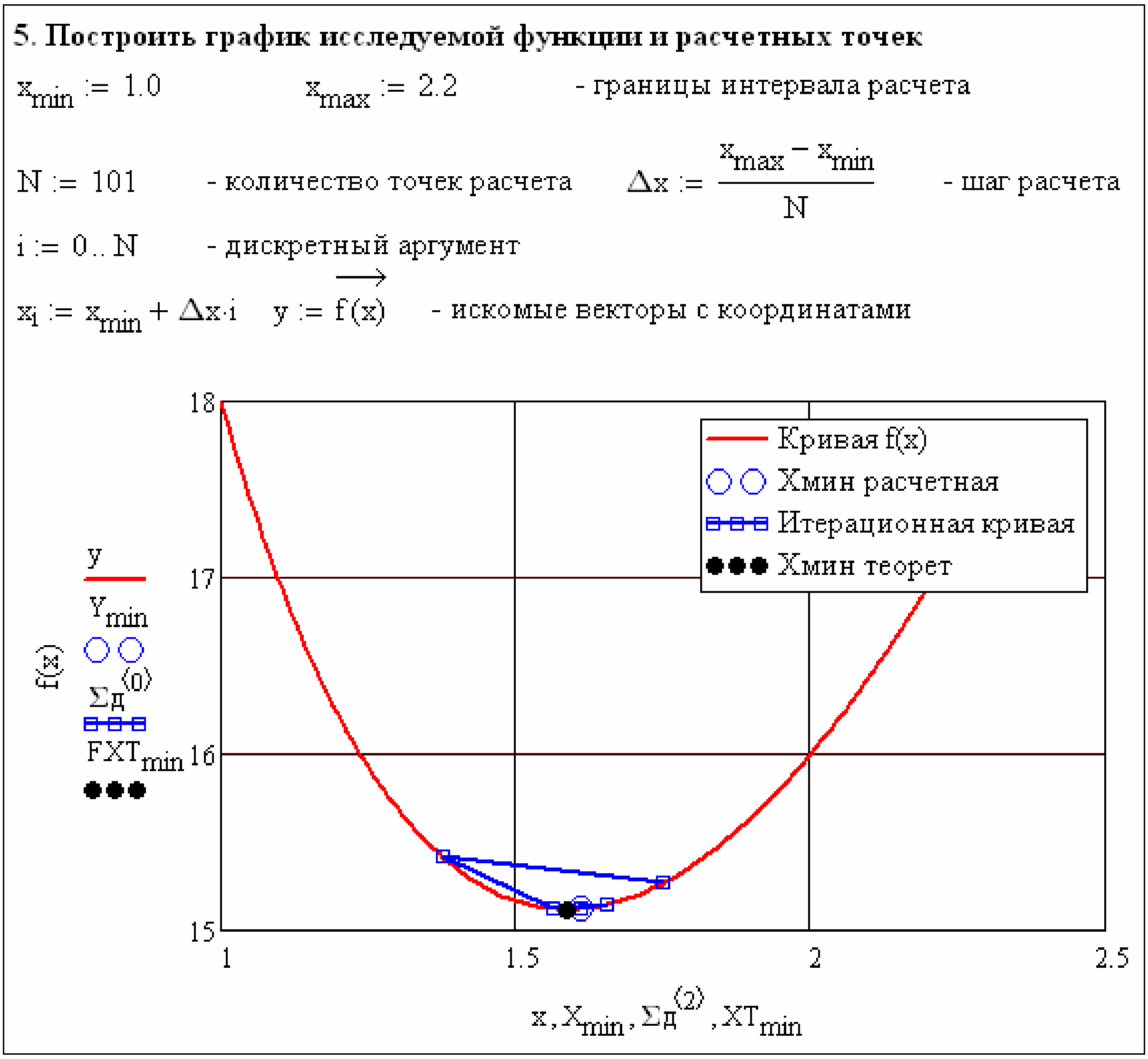
Относительная погрешность расчета значения функции между теоретическим и численным методами $\Delta Tf\% = 1.899 \times 10^{-4}$, $\Delta Tx\% = 0.014$

$$\Delta TDf\% := \frac{dfp_{last(dfp)} - \frac{d}{dXct} f(Xct)}{\frac{d}{dXct} f(Xct)} = -6.798 \times 10^{12}$$

- погрешность расчета первой производной

Вывод. Относительная погрешность расчета первой производной между теоретическим и численным методами - $\Delta TDf\% = -6.798 \times 10^{12}$ близка к нолю.

Рис. Б 7. Листинг программы минимизации функции методом средней точки (продолжение)



5. Построить график исследуемой функции и расчетных точек

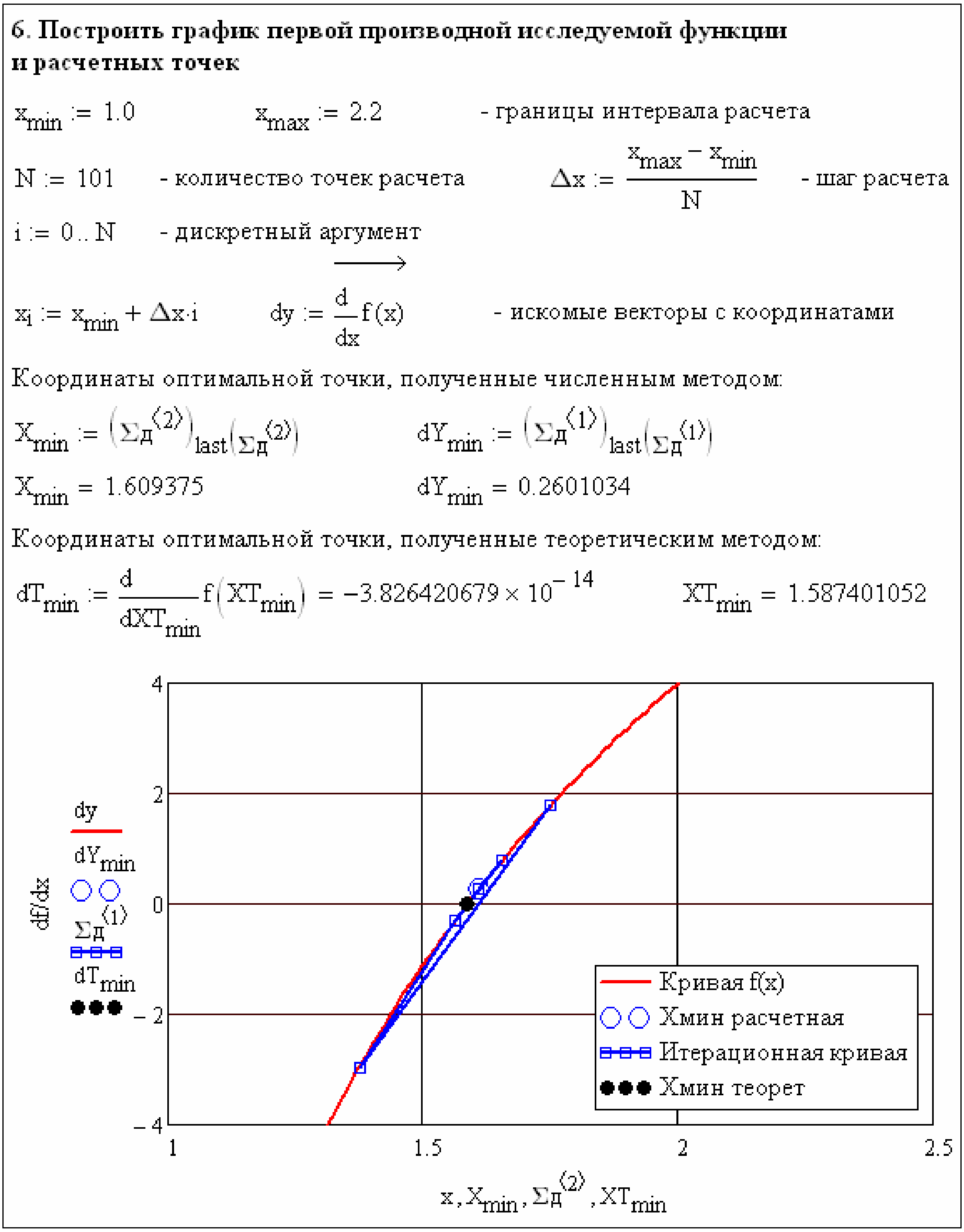
$x_{min} := 1.0$ $x_{max} := 2.2$ - границы интервала расчета

$N := 101$ - количество точек расчета $\Delta x := \dfrac{x_{max} - x_{min}}{N}$ - шаг расчета

$i := 0..N$ - дискретный аргумент

$x_i := x_{min} + \Delta x \cdot i$ $y := \overrightarrow{f(x)}$ - искомые векторы с координатами

Рис. Б 7. Листинг программы минимизации функции методом средней точки (продолжение)



6. Построить график первой производной исследуемой функции и расчетных точек

$x_{min} := 1.0$ $\quad x_{max} := 2.2$ - границы интервала расчета

$N := 101$ - количество точек расчета $\quad \Delta x := \frac{x_{max} - x_{min}}{N}$ - шаг расчета

$i := 0 .. N$ - дискретный аргумент

$x_i := x_{min} + \Delta x \cdot i \quad dy := \overrightarrow{\frac{d}{dx} f(x)}$ - искомые векторы с координатами

Координаты оптимальной точки, полученные численным методом:

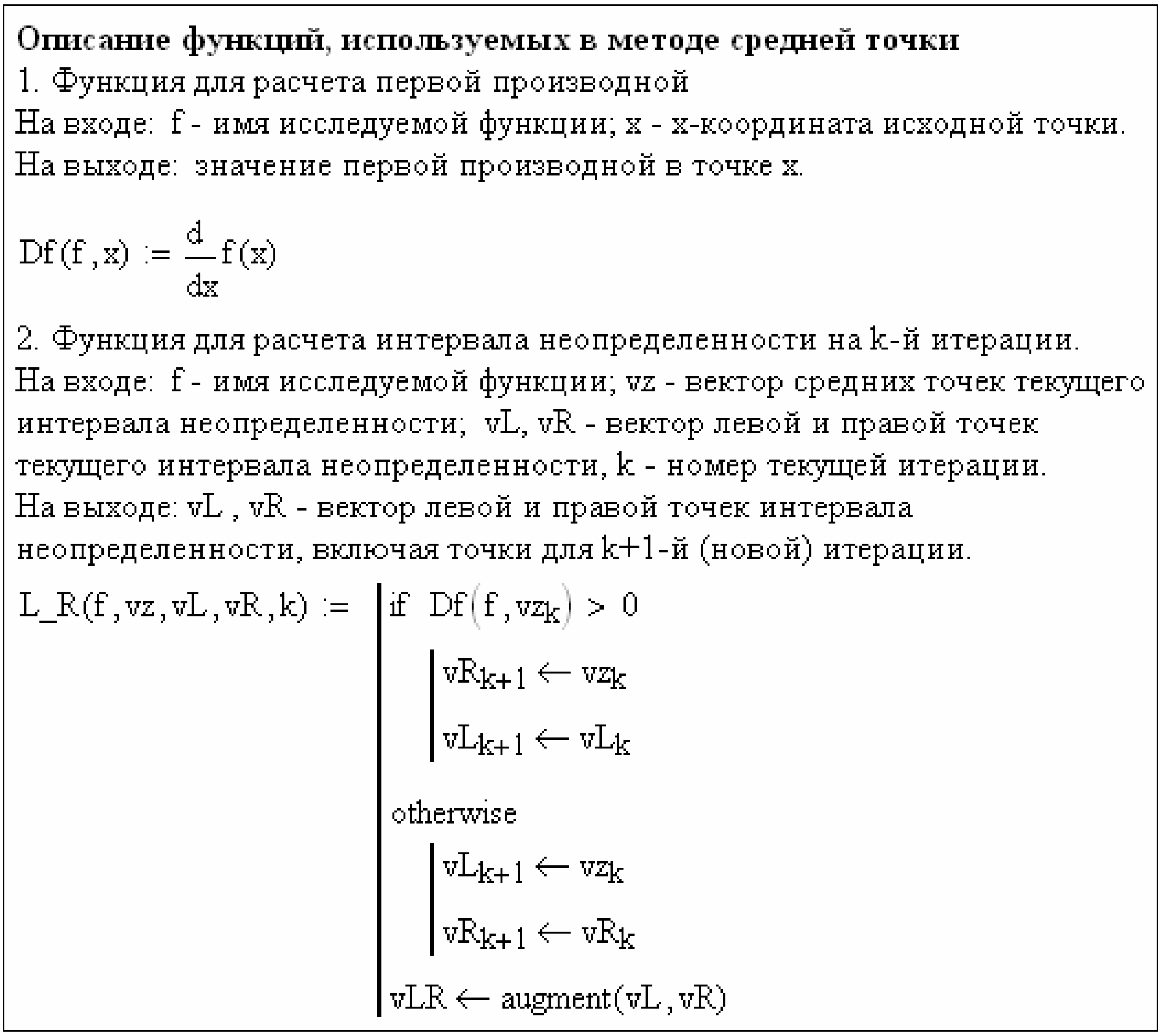
$X_{min} := \left(\Sigma д^{\langle 2 \rangle}\right)_{last\left(\Sigma д^{\langle 2 \rangle}\right)} \quad dY_{min} := \left(\Sigma д^{\langle 1 \rangle}\right)_{last\left(\Sigma д^{\langle 1 \rangle}\right)}$

$X_{min} = 1.609375 \quad dY_{min} = 0.2601034$

Координаты оптимальной точки, полученные теоретическим методом:

$dT_{min} := \frac{d}{dXT_{min}} f\left(XT_{min}\right) = -3.826420679 \times 10^{-14} \quad XT_{min} = 1.587401052$

Рис. Б 7. Листинг программы минимизации функции методом средней точки (продолжение)



Описание функций, используемых в методе средней точки

1. Функция для расчета первой производной

На входе: f - имя исследуемой функции; x - x-координата исходной точки.

На выходе: значение первой производной в точке x.

$$Df(f,x) := \frac{d}{dx}f(x)$$

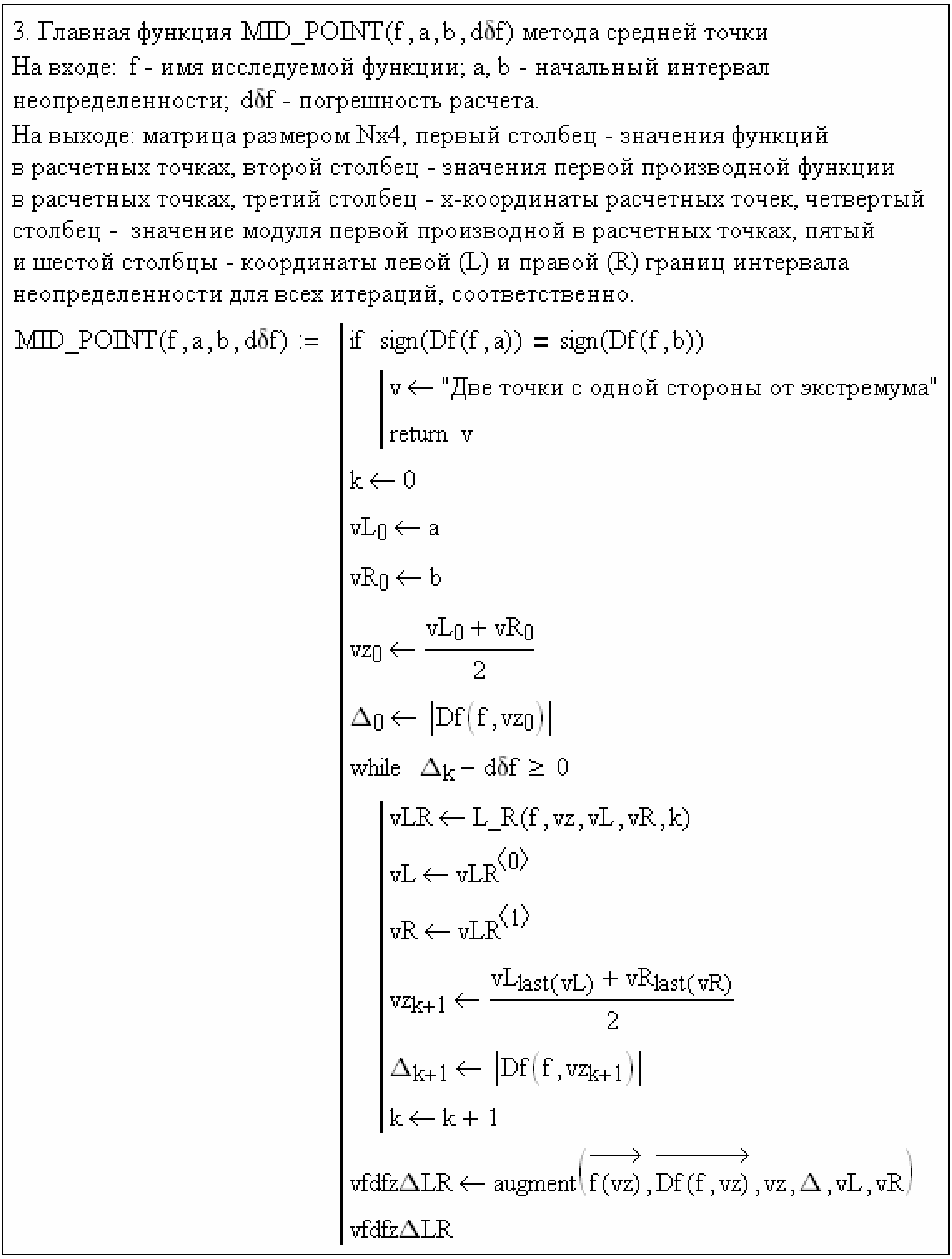
2. Функция для расчета интервала неопределенности на k-й итерации.

На входе: f - имя исследуемой функции; vz - вектор средних точек текущего интервала неопределенности; vL, vR - вектор левой и правой точек текущего интервала неопределенности, k - номер текущей итерации.

На выходе: vL , vR - вектор левой и правой точек интервала неопределенности, включая точки для k+1-й (новой) итерации.

```
L_R(f,vz,vL,vR,k) := | if Df(f,vz_k) > 0
                     |    | vR_{k+1} ← vz_k
                     |    | vL_{k+1} ← vL_k
                     | otherwise
                     |    | vL_{k+1} ← vz_k
                     |    | vR_{k+1} ← vR_k
                     | vLR ← augment(vL,vR)
```

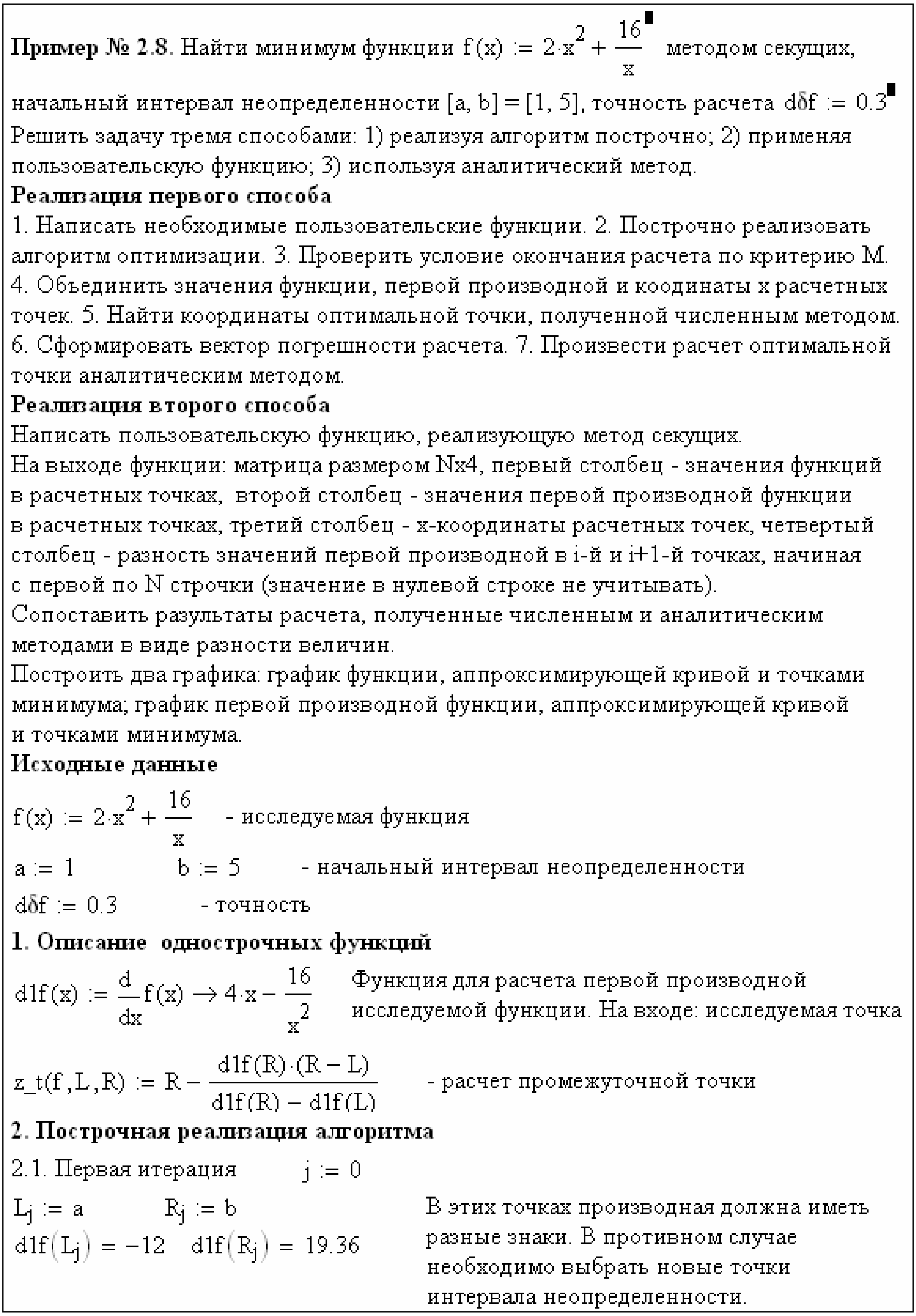
Рис. Б 7. Листинг программы минимизации функции методом средней точки (продолжение)



3. Главная функция MID_POINT(f, a, b, dδf) метода средней точки
На входе: f - имя исследуемой функции; a, b - начальный интервал неопределенности; dδf - погрешность расчета.
На выходе: матрица размером Nx4, первый столбец - значения функций в расчетных точках, второй столбец - значения первой производной функции в расчетных точках, третий столбец - x-координаты расчетных точек, четвертый столбец - значение модуля первой производной в расчетных точках, пятый и шестой столбцы - координаты левой (L) и правой (R) границ интервала неопределенности для всех итераций, соответственно.

```
$MID\_POINT(f, a, b, d\delta f) :=$
    if $sign(Df(f, a)) = sign(Df(f, b))$
        $v \leftarrow$ "Две точки с одной стороны от экстремума"
        return v
    $k \leftarrow 0$
    $vL_0 \leftarrow a$
    $vR_0 \leftarrow b$
    $vz_0 \leftarrow \frac{vL_0 + vR_0}{2}$
    $\Delta_0 \leftarrow \left|Df\left(f, vz_0\right)\right|$
    while $\Delta_k - d\delta f \geq 0$
        $vLR \leftarrow L\_R(f, vz, vL, vR, k)$
        $vL \leftarrow vLR^{\langle 0 \rangle}$
        $vR \leftarrow vLR^{\langle 1 \rangle}$
        $vz_{k+1} \leftarrow \frac{vL_{last(vL)} + vR_{last(vR)}}{2}$
        $\Delta_{k+1} \leftarrow \left|Df\left(f, vz_{k+1}\right)\right|$
        $k \leftarrow k + 1$
    $vfdfz\Delta LR \leftarrow augment\left(\overrightarrow{f(vz)}, \overrightarrow{Df(f, vz)}, vz, \Delta, vL, vR\right)$
    $vfdfz\Delta LR$
```

Рис. Б 7. Листинг программы минимизации функции методом средней точки (окончание)



Пример № 2.8. Найти минимум функции $f(x) := 2\cdot x^2 + \frac{16}{x}$ методом секущих, начальный интервал неопределенности [a, b] = [1, 5], точность расчета $d\delta f := 0.3$
Решить задачу тремя способами: 1) реализуя алгоритм построчно; 2) применяя пользовательскую функцию; 3) используя аналитический метод.

Реализация первого способа

1. Написать необходимые пользовательские функции. 2. Построчно реализовать алгоритм оптимизации. 3. Проверить условие окончания расчета по критерию M. 4. Объединить значения функции, первой производной и коодинаты x расчетных точек. 5. Найти координаты оптимальной точки, полученной численным методом. 6. Сформировать вектор погрешности расчета. 7. Произвести расчет оптимальной точки аналитическим методом.

Реализация второго способа

Написать пользовательскую функцию, реализующую метод секущих.
На выходе функции: матрица размером Nx4, первый столбец - значения функций в расчетных точках, второй столбец - значения первой производной функции в расчетных точках, третий столбец - x-координаты расчетных точек, четвертый столбец - разность значений первой производной в i-й и i+1-й точках, начиная с первой по N строчки (значение в нулевой строке не учитывать).
Сопоставить разультаты расчета, полученные численным и аналитическим методами в виде разности величин.
Построить два графика: график функции, аппроксимирующей кривой и точками минимума; график первой производной функции, аппроксимирующей кривой и точками минимума.

Исходные данные

$f(x) := 2\cdot x^2 + \frac{16}{x}$ - исследуемая функция

$a := 1$ $b := 5$ - начальный интервал неопределенности

$d\delta f := 0.3$ - точность

1. Описание однострочных функций

$d1f(x) := \frac{d}{dx}f(x) \rightarrow 4\cdot x - \frac{16}{x^2}$ Функция для расчета первой производной исследуемой функции. На входе: исследуемая точка

$z\_t(f, L, R) := R - \frac{d1f(R)\cdot(R-L)}{d1f(R) - d1f(L)}$ - расчет промежуточной точки

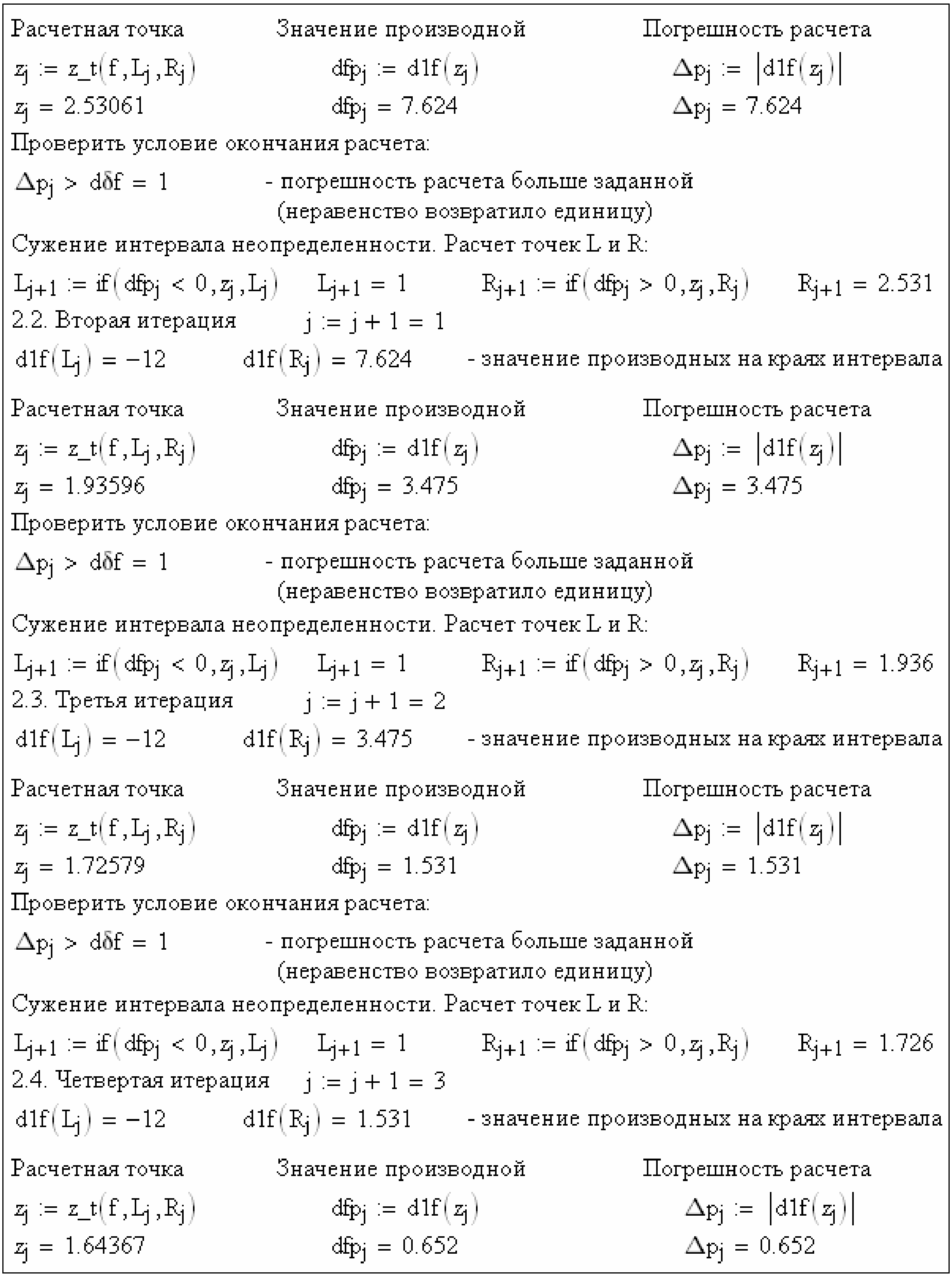
2. Построчная реализация алгоритма

2.1. Первая итерация $j := 0$

$L_j := a$ $R_j := b$
$d1f(L_j) = -12$ $d1f(R_j) = 19.36$

В этих точках производная должна иметь разные знаки. В противном случае необходимо выбрать новые точки интервала неопределенности.

Рис. Б 8. Листинг программы минимизации функции методом секущих



Расчетная точка Значение производной Погрешность расчета

$z_j := z\_t(f, L_j, R_j)$ $dfp_j := d1f(z_j)$ $\Delta p_j := |d1f(z_j)|$

$z_j = 2.53061$ $dfp_j = 7.624$ $\Delta p_j = 7.624$

Проверить условие окончания расчета:

$\Delta p_j > d\delta f = 1$ - погрешность расчета больше заданной (неравенство возвратило единицу)

Сужение интервала неопределенности. Расчет точек L и R:

$L_{j+1} := \text{if}(dfp_j < 0, z_j, L_j)$ $L_{j+1} = 1$ $R_{j+1} := \text{if}(dfp_j > 0, z_j, R_j)$ $R_{j+1} = 2.531$

2.2. Вторая итерация $j := j + 1 = 1$

$d1f(L_j) = -12$ $d1f(R_j) = 7.624$ - значение производных на краях интервала

Расчетная точка Значение производной Погрешность расчета

$z_j := z\_t(f, L_j, R_j)$ $dfp_j := d1f(z_j)$ $\Delta p_j := |d1f(z_j)|$

$z_j = 1.93596$ $dfp_j = 3.475$ $\Delta p_j = 3.475$

Проверить условие окончания расчета:

$\Delta p_j > d\delta f = 1$ - погрешность расчета больше заданной (неравенство возвратило единицу)

Сужение интервала неопределенности. Расчет точек L и R:

$L_{j+1} := \text{if}(dfp_j < 0, z_j, L_j)$ $L_{j+1} = 1$ $R_{j+1} := \text{if}(dfp_j > 0, z_j, R_j)$ $R_{j+1} = 1.936$

2.3. Третья итерация $j := j + 1 = 2$

$d1f(L_j) = -12$ $d1f(R_j) = 3.475$ - значение производных на краях интервала

Расчетная точка Значение производной Погрешность расчета

$z_j := z\_t(f, L_j, R_j)$ $dfp_j := d1f(z_j)$ $\Delta p_j := |d1f(z_j)|$

$z_j = 1.72579$ $dfp_j = 1.531$ $\Delta p_j = 1.531$

Проверить условие окончания расчета:

$\Delta p_j > d\delta f = 1$ - погрешность расчета больше заданной (неравенство возвратило единицу)

Сужение интервала неопределенности. Расчет точек L и R:

$L_{j+1} := \text{if}(dfp_j < 0, z_j, L_j)$ $L_{j+1} = 1$ $R_{j+1} := \text{if}(dfp_j > 0, z_j, R_j)$ $R_{j+1} = 1.726$

2.4. Четвертая итерация $j := j + 1 = 3$

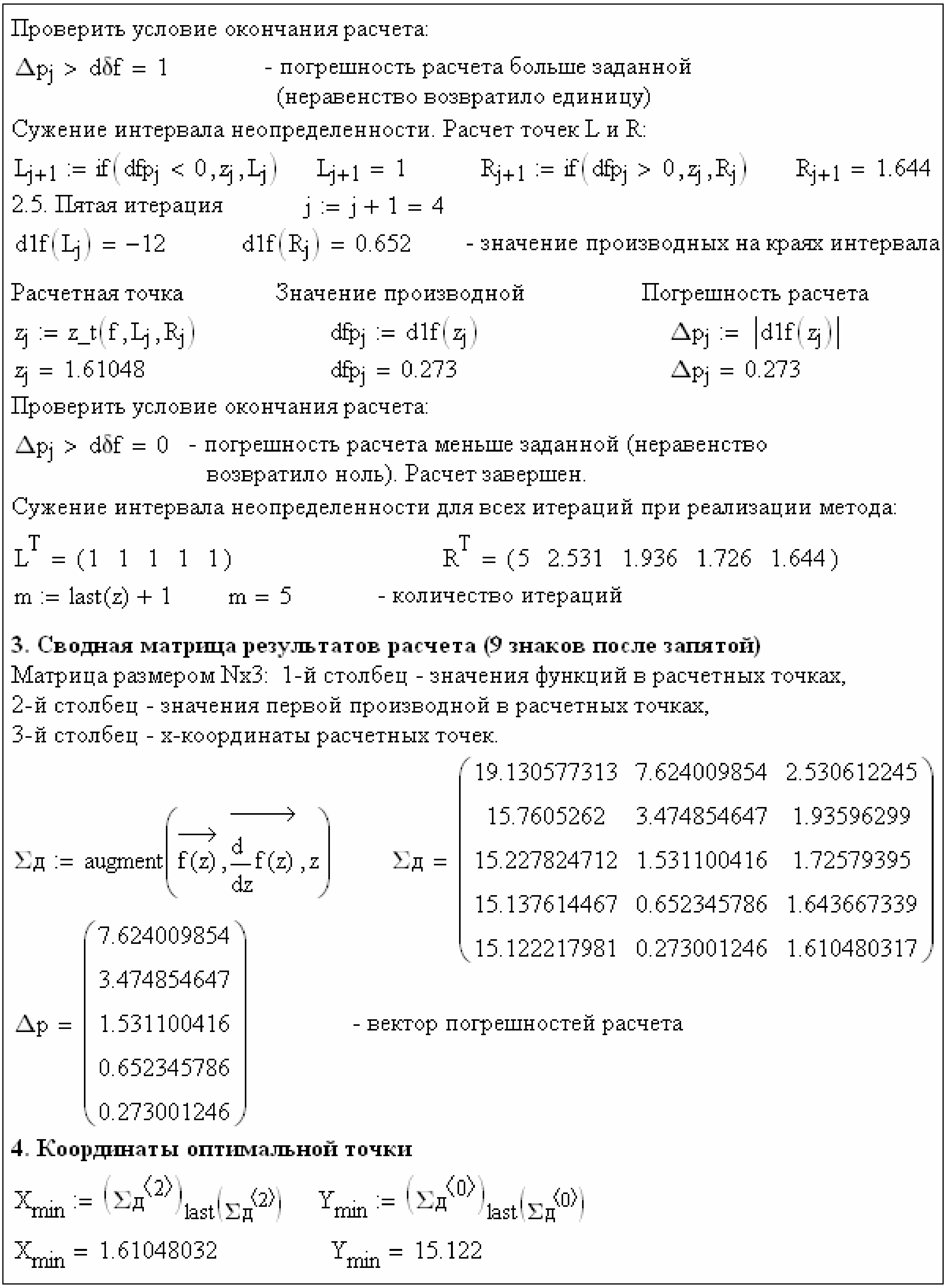
$d1f(L_j) = -12$ $d1f(R_j) = 1.531$ - значение производных на краях интервала

Расчетная точка Значение производной Погрешность расчета

$z_j := z\_t(f, L_j, R_j)$ $dfp_j := d1f(z_j)$ $\Delta p_j := |d1f(z_j)|$

$z_j = 1.64367$ $dfp_j = 0.652$ $\Delta p_j = 0.652$

Рис. Б 8. Листинг программы минимизации функции методом секущих (продолжение)



Проверить условие окончания расчета:

$\Delta p_j > d\delta f = 1$ - погрешность расчета больше заданной (неравенство возвратило единицу)

Сужение интервала неопределенности. Расчет точек L и R:

$L_{j+1} := \mathrm{if}(dfp_j < 0, z_j, L_j)$ $L_{j+1} = 1$ $R_{j+1} := \mathrm{if}(dfp_j > 0, z_j, R_j)$ $R_{j+1} = 1.644$

2.5. Пятая итерация $j := j + 1 = 4$

$d1f(L_j) = -12$ $d1f(R_j) = 0.652$ - значение производных на краях интервала

Расчетная точка	Значение производной	Погрешность расчета
$z_j := z\_t(f, L_j, R_j)$	$dfp_j := d1f(z_j)$	$\Delta p_j := \lvert d1f(z_j) \rvert$
$z_j = 1.61048$	$dfp_j = 0.273$	$\Delta p_j = 0.273$

Проверить условие окончания расчета:

$\Delta p_j > d\delta f = 0$ - погрешность расчета меньше заданной (неравенство возвратило ноль). Расчет завершен.

Сужение интервала неопределенности для всех итераций при реализации метода:

$L^T = (1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1)$ $R^T = (5 \;\; 2.531 \;\; 1.936 \;\; 1.726 \;\; 1.644)$

$m := \mathrm{last}(z) + 1$ $m = 5$ - количество итераций

3. Сводная матрица результатов расчета (9 знаков после запятой)

Матрица размером Nx3: 1-й столбец - значения функций в расчетных точках,
2-й столбец - значения первой производной в расчетных точках,
3-й столбец - x-координаты расчетных точек.

$$\Sigma д := \mathrm{augment}\left(\overrightarrow{f(z)}, \overrightarrow{\frac{d}{dz}f(z)}, z\right) \qquad \Sigma д = \begin{pmatrix} 19.130577313 & 7.624009854 & 2.530612245 \\ 15.7605262 & 3.474854647 & 1.93596299 \\ 15.227824712 & 1.531100416 & 1.72579395 \\ 15.137614467 & 0.652345786 & 1.643667339 \\ 15.122217981 & 0.273001246 & 1.610480317 \end{pmatrix}$$

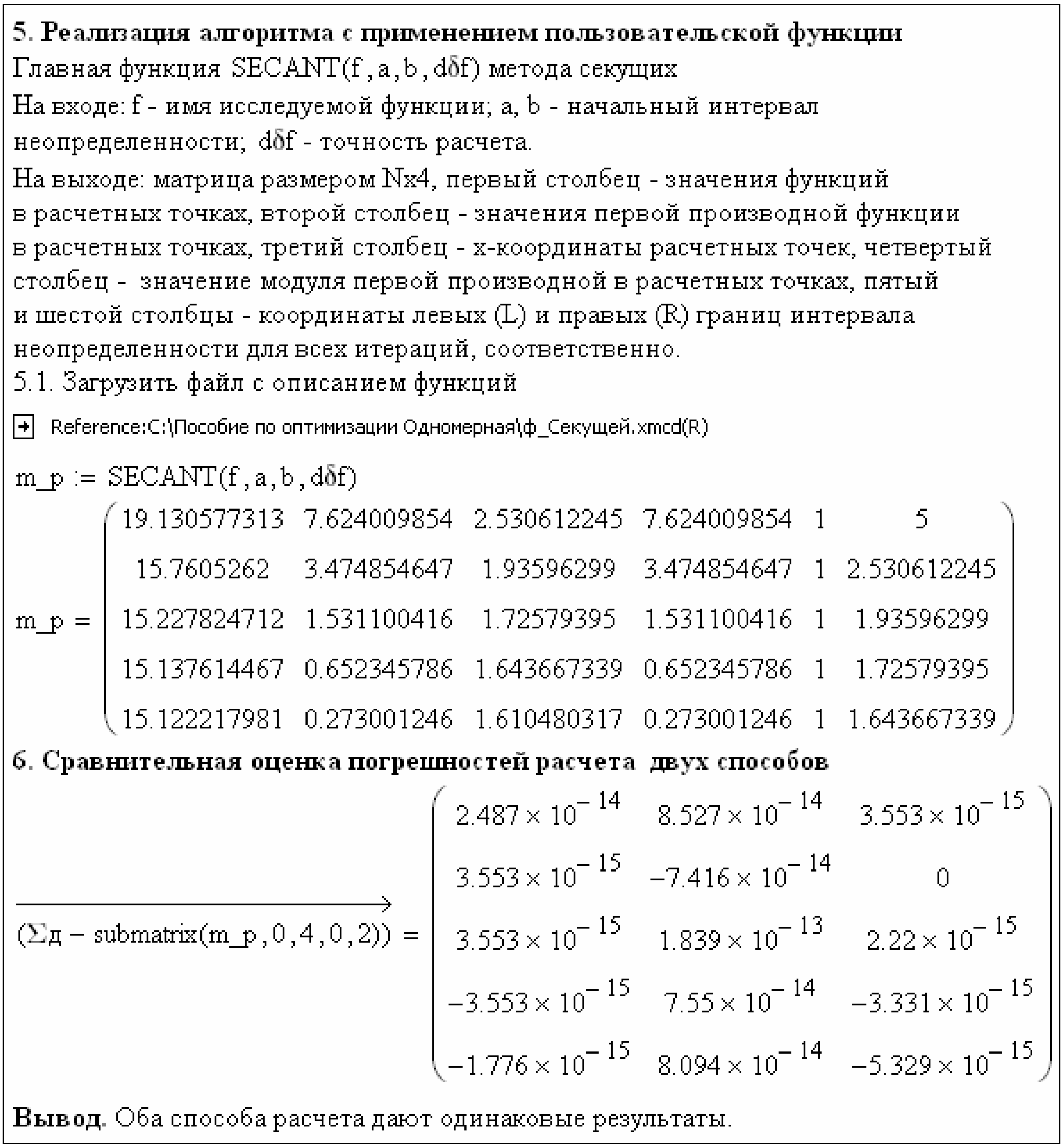
$$\Delta p = \begin{pmatrix} 7.624009854 \\ 3.474854647 \\ 1.531100416 \\ 0.652345786 \\ 0.273001246 \end{pmatrix}$$ - вектор погрешностей расчета

4. Координаты оптимальной точки

$X_{min} := \left(\Sigma д^{\langle 2 \rangle}\right)_{\mathrm{last}\left(\Sigma д^{\langle 2 \rangle}\right)}$ $Y_{min} := \left(\Sigma д^{\langle 0 \rangle}\right)_{\mathrm{last}\left(\Sigma д^{\langle 0 \rangle}\right)}$

$X_{min} = 1.61048032$ $Y_{min} = 15.122$

Рис. Б 8. Листинг программы минимизации функции методом секущих (продолжение)



5. Реализация алгоритма с применением пользовательской функции

Главная функция SECANT(f , a , b , dδf) метода секущих

На входе: f - имя исследуемой функции; a, b - начальный интервал неопределенности; dδf - точность расчета.

На выходе: матрица размером Nx4, первый столбец - значения функций в расчетных точках, второй столбец - значения первой производной функции в расчетных точках, третий столбец - x-координаты расчетных точек, четвертый столбец - значение модуля первой производной в расчетных точках, пятый и шестой столбцы - координаты левых (L) и правых (R) границ интервала неопределенности для всех итераций, соответственно.

5.1. Загрузить файл с описанием функций

➔ Reference:C:\Пособие по оптимизации Одномерная\ф_Секущей.xmcd(R)

$m\_p := SECANT(f , a , b , d\delta f)$

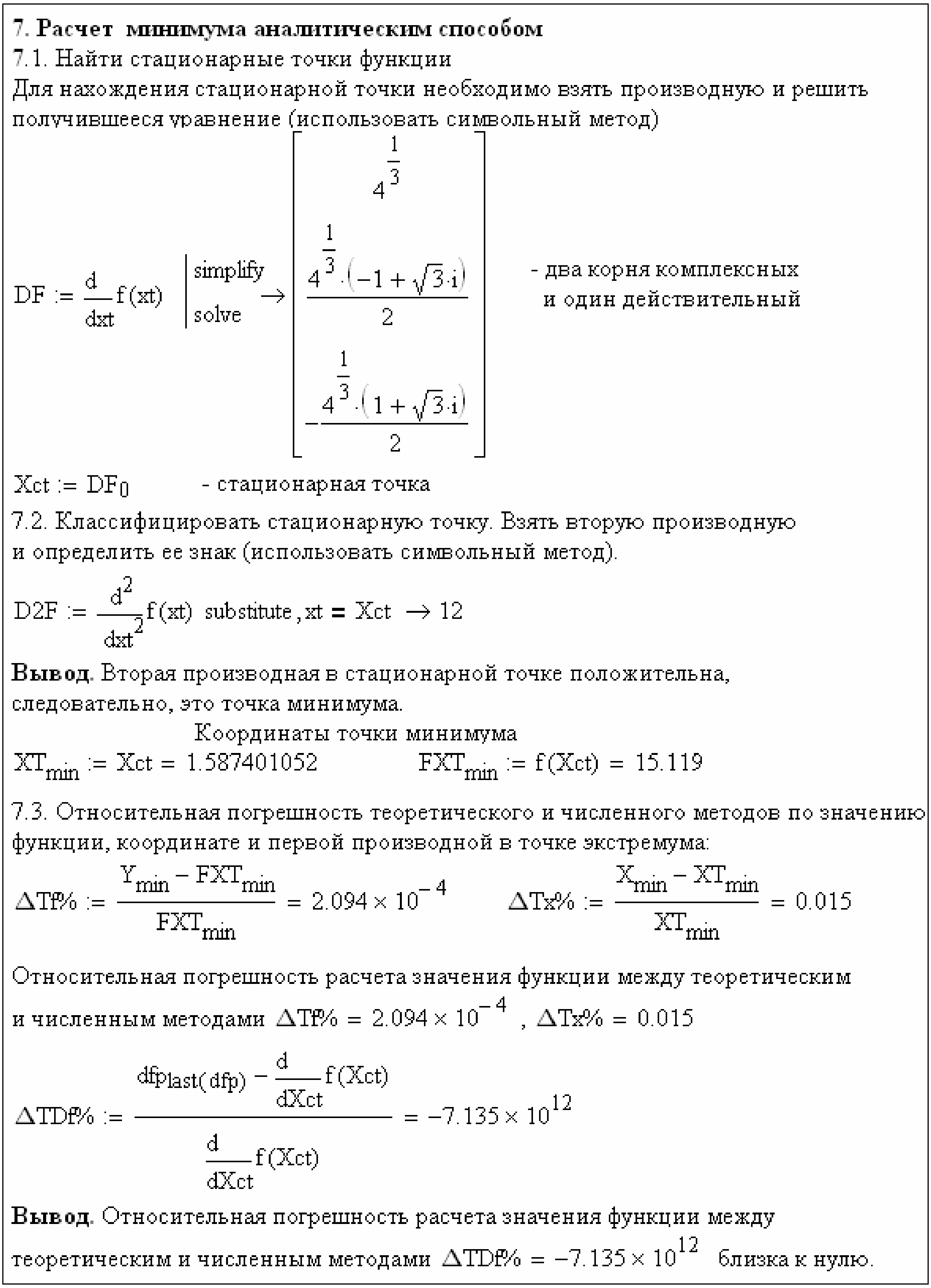
$$m\_p = \begin{pmatrix} 19.130577313 & 7.624009854 & 2.530612245 & 7.624009854 & 1 & 5 \\ 15.7605262 & 3.474854647 & 1.93596299 & 3.474854647 & 1 & 2.530612245 \\ 15.227824712 & 1.531100416 & 1.72579395 & 1.531100416 & 1 & 1.93596299 \\ 15.137614467 & 0.652345786 & 1.643667339 & 0.652345786 & 1 & 1.72579395 \\ 15.122217981 & 0.273001246 & 1.610480317 & 0.273001246 & 1 & 1.643667339 \end{pmatrix}$$

6. Сравнительная оценка погрешностей расчета двух способов

$$\overrightarrow{(\Sigma д - submatrix(m\_p , 0 , 4 , 0 , 2))} = \begin{pmatrix} 2.487 \times 10^{-14} & 8.527 \times 10^{-14} & 3.553 \times 10^{-15} \\ 3.553 \times 10^{-15} & -7.416 \times 10^{-14} & 0 \\ 3.553 \times 10^{-15} & 1.839 \times 10^{-13} & 2.22 \times 10^{-15} \\ -3.553 \times 10^{-15} & 7.55 \times 10^{-14} & -3.331 \times 10^{-15} \\ -1.776 \times 10^{-15} & 8.094 \times 10^{-14} & -5.329 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

Вывод. Оба способа расчета дают одинаковые результаты.

Рис. Б 8. Листинг программы минимизации функции методом секущих (продолжение)



7. Расчет минимума аналитическим способом

7.1. Найти стационарные точки функции

Для нахождения стационарной точки необходимо взять производную и решить получившееся уравнение (использовать символьный метод)

$$DF := \frac{d}{dxt}f(xt)\ \left|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{solve}\end{matrix}\right. \rightarrow \begin{bmatrix} 4^{\frac{1}{3}} \\ \dfrac{4^{\frac{1}{3}}\cdot\left(-1+\sqrt{3}\cdot i\right)}{2} \\ -\dfrac{4^{\frac{1}{3}}\cdot\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)}{2} \end{bmatrix}$$

- два корня комплексных и один действительный

$Xct := DF_0$ - стационарная точка

7.2. Классифицировать стационарную точку. Взять вторую производную и определить ее знак (использовать символьный метод).

$$D2F := \frac{d^2}{dxt^2}f(xt)\ \text{substitute}, xt = Xct\ \rightarrow 12$$

Вывод. Вторая производная в стационарной точке положительна, следовательно, это точка минимума.

Координаты точки минимума

$XT_{min} := Xct = 1.587401052$ $\quad FXT_{min} := f(Xct) = 15.119$

7.3. Относительная погрешность теоретического и численного методов по значению функции, координате и первой производной в точке экстремума:

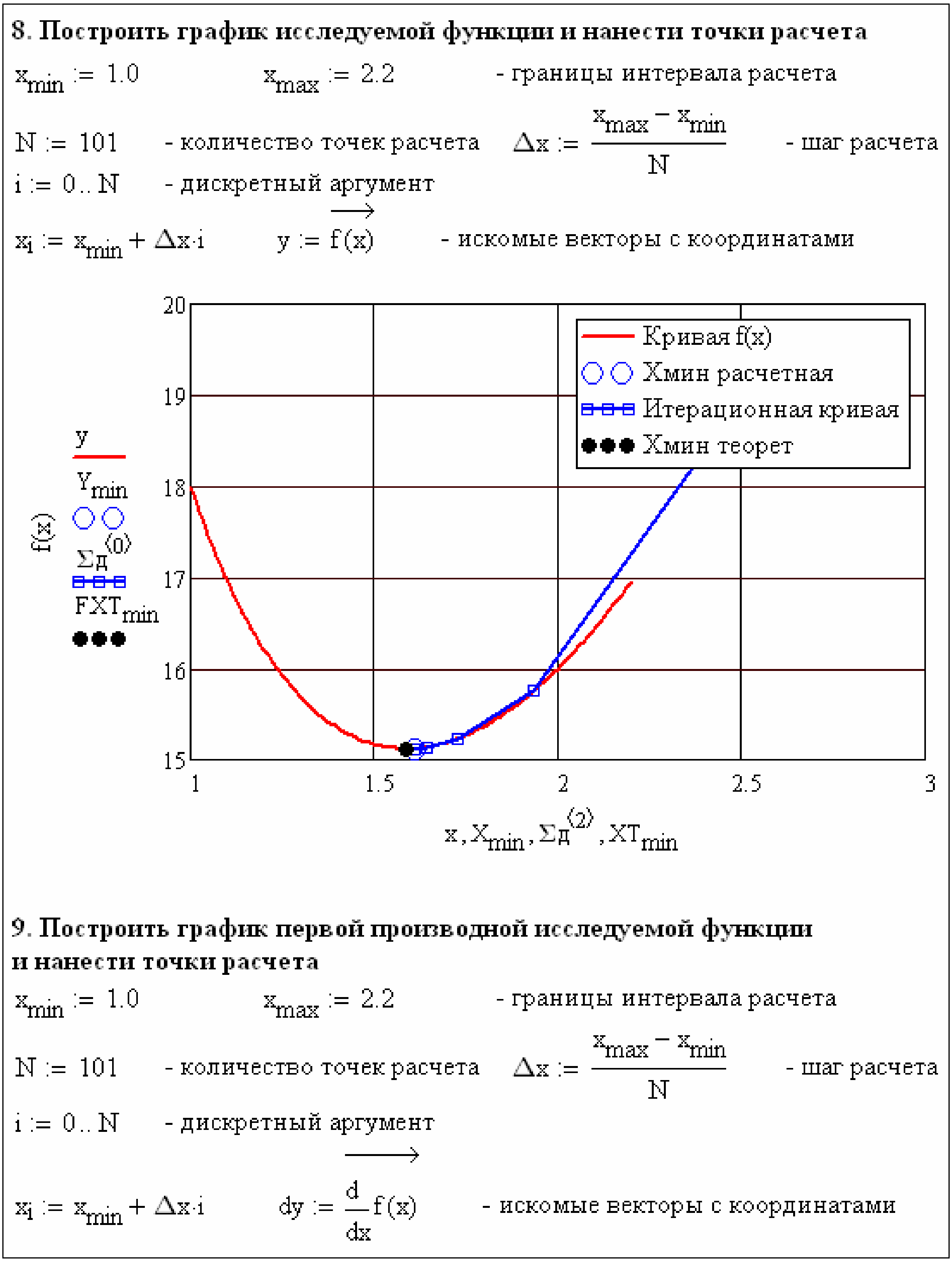
$$\Delta Tf\% := \frac{Y_{min} - FXT_{min}}{FXT_{min}} = 2.094\times 10^{-4} \qquad \Delta Tx\% := \frac{X_{min} - XT_{min}}{XT_{min}} = 0.015$$

Относительная погрешность расчета значения функции между теоретическим и численным методами $\Delta Tf\% = 2.094\times 10^{-4}$, $\Delta Tx\% = 0.015$

$$\Delta TDf\% := \frac{dfp_{last(dfp)} - \dfrac{d}{dXct}f(Xct)}{\dfrac{d}{dXct}f(Xct)} = -7.135\times 10^{12}$$

Вывод. Относительная погрешность расчета значения функции между теоретическим и численным методами $\Delta TDf\% = -7.135\times 10^{12}$ близка к нулю.

Рис. Б 8. Листинг программы минимизации функции методом секущих (продолжение)



8. Построить график исследуемой функции и нанести точки расчета

$x_{min} := 1.0$ $x_{max} := 2.2$ - границы интервала расчета

$N := 101$ - количество точек расчета $\Delta x := \dfrac{x_{max} - x_{min}}{N}$ - шаг расчета

$i := 0..N$ - дискретный аргумент

$x_i := x_{min} + \Delta x \cdot i$ $y := \overrightarrow{f(x)}$ - искомые векторы с координатами

9. Построить график первой производной исследуемой функции и нанести точки расчета

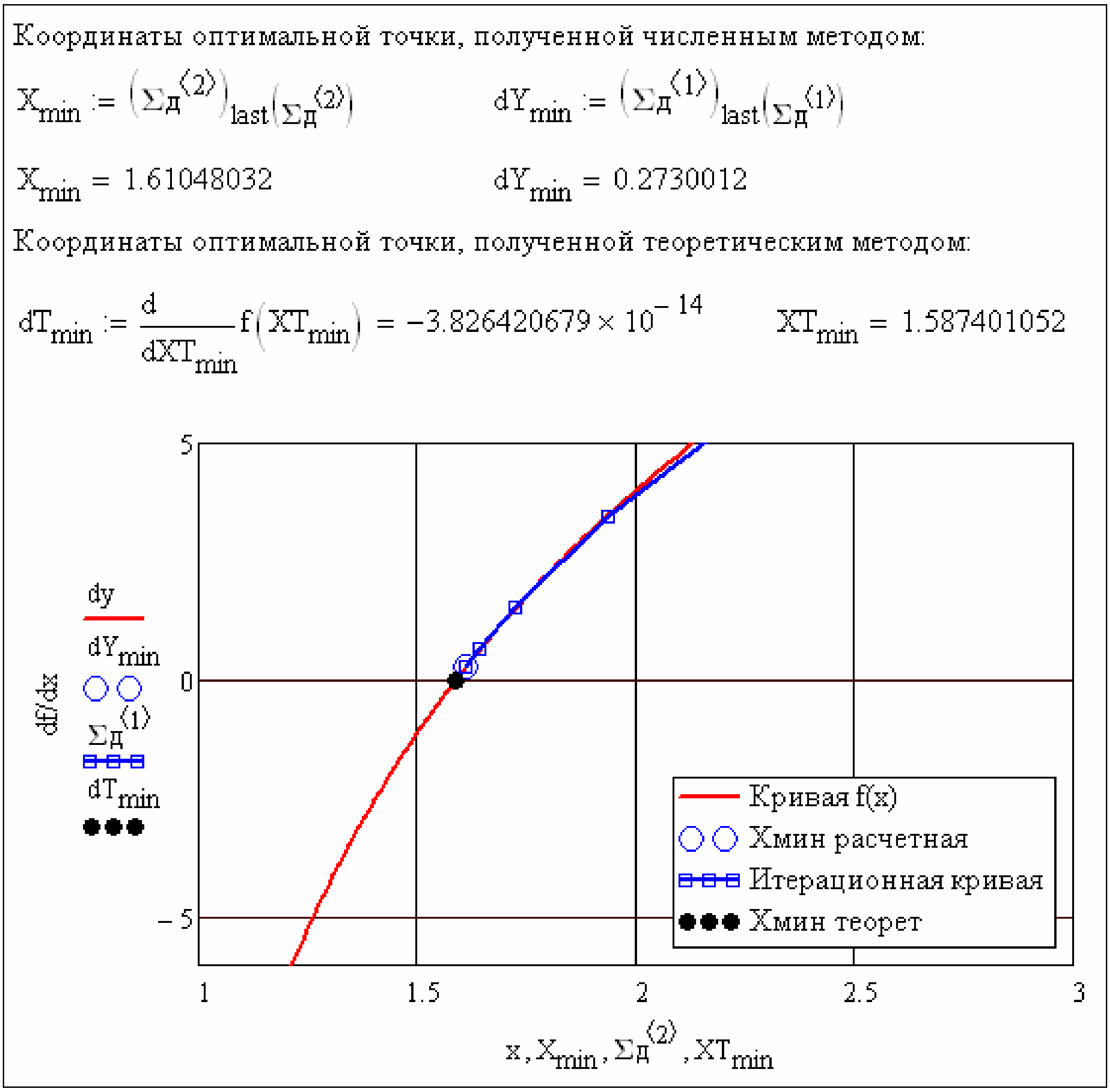
$x_{min} := 1.0$ $x_{max} := 2.2$ - границы интервала расчета

$N := 101$ - количество точек расчета $\Delta x := \dfrac{x_{max} - x_{min}}{N}$ - шаг расчета

$i := 0..N$ - дискретный аргумент

$x_i := x_{min} + \Delta x \cdot i$ $dy := \overrightarrow{\dfrac{d}{dx} f(x)}$ - искомые векторы с координатами

Рис. Б 8. Листинг программы минимизации функции методом секущих (продолжение)



Координаты оптимальной точки, полученной численным методом:

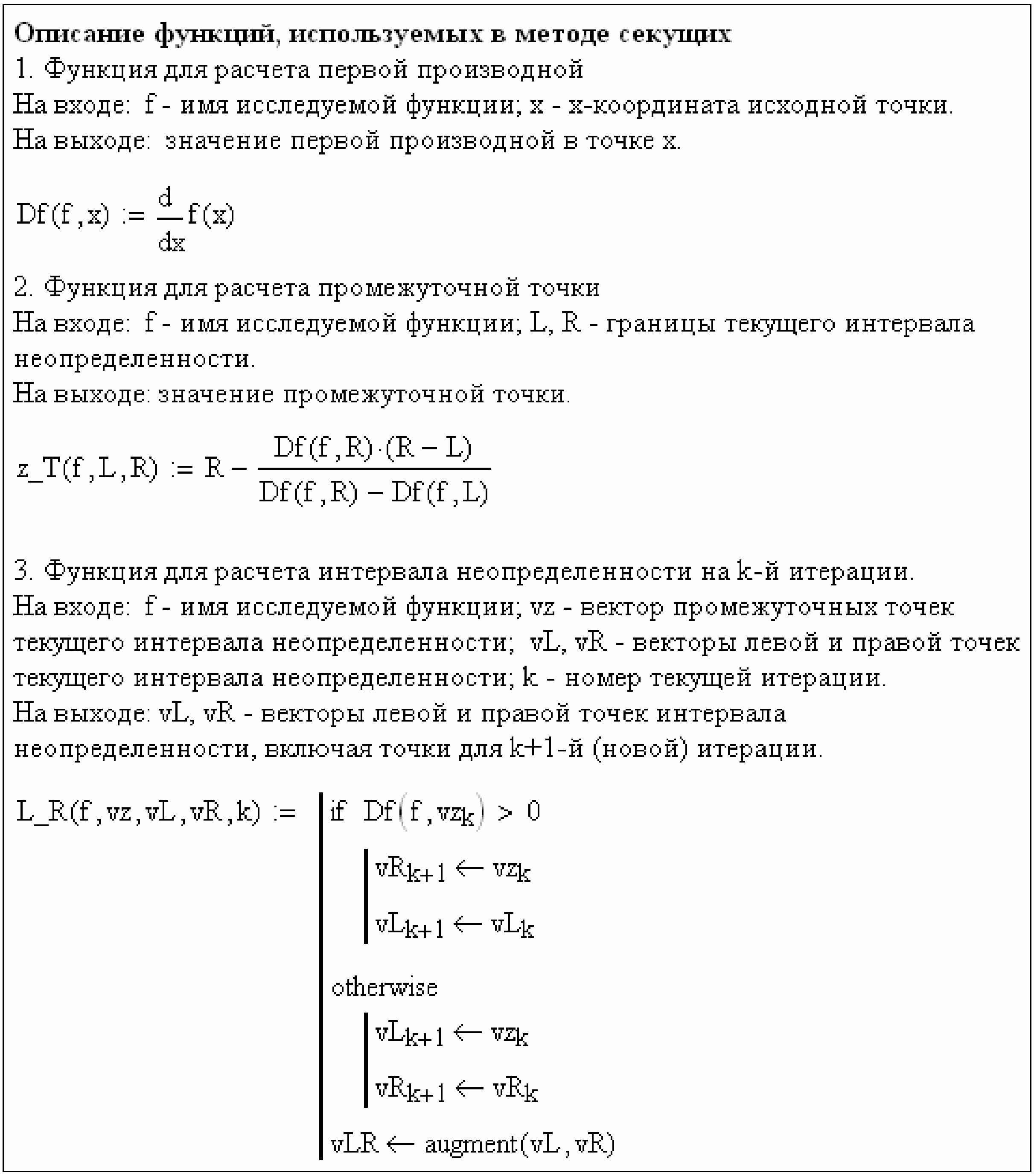
$X_{min} := \left(\Sigma д^{\langle 2\rangle}\right)_{last\left(\Sigma д^{\langle 2\rangle}\right)}$ $\qquad$ $dY_{min} := \left(\Sigma д^{\langle 1\rangle}\right)_{last\left(\Sigma д^{\langle 1\rangle}\right)}$

$X_{min} = 1.61048032$ $\qquad$ $dY_{min} = 0.2730012$

Координаты оптимальной точки, полученной теоретическим методом:

$dT_{min} := \frac{d}{dXT_{min}} f\left(XT_{min}\right) = -3.826420679 \times 10^{-14}$ $\qquad$ $XT_{min} = 1.587401052$

Рис. Б 8. Листинг программы минимизации функции методом секущих (продолжение)



Описание функций, используемых в методе секущих

1. Функция для расчета первой производной

На входе: f - имя исследуемой функции; x - x-координата исходной точки.

На выходе: значение первой производной в точке x.

$$\mathrm{Df}(f,x) := \frac{d}{dx}f(x)$$

2. Функция для расчета промежуточной точки

На входе: f - имя исследуемой функции; L, R - границы текущего интервала неопределенности.

На выходе: значение промежуточной точки.

$$z\_T(f,L,R) := R - \frac{\mathrm{Df}(f,R)\cdot(R-L)}{\mathrm{Df}(f,R)-\mathrm{Df}(f,L)}$$

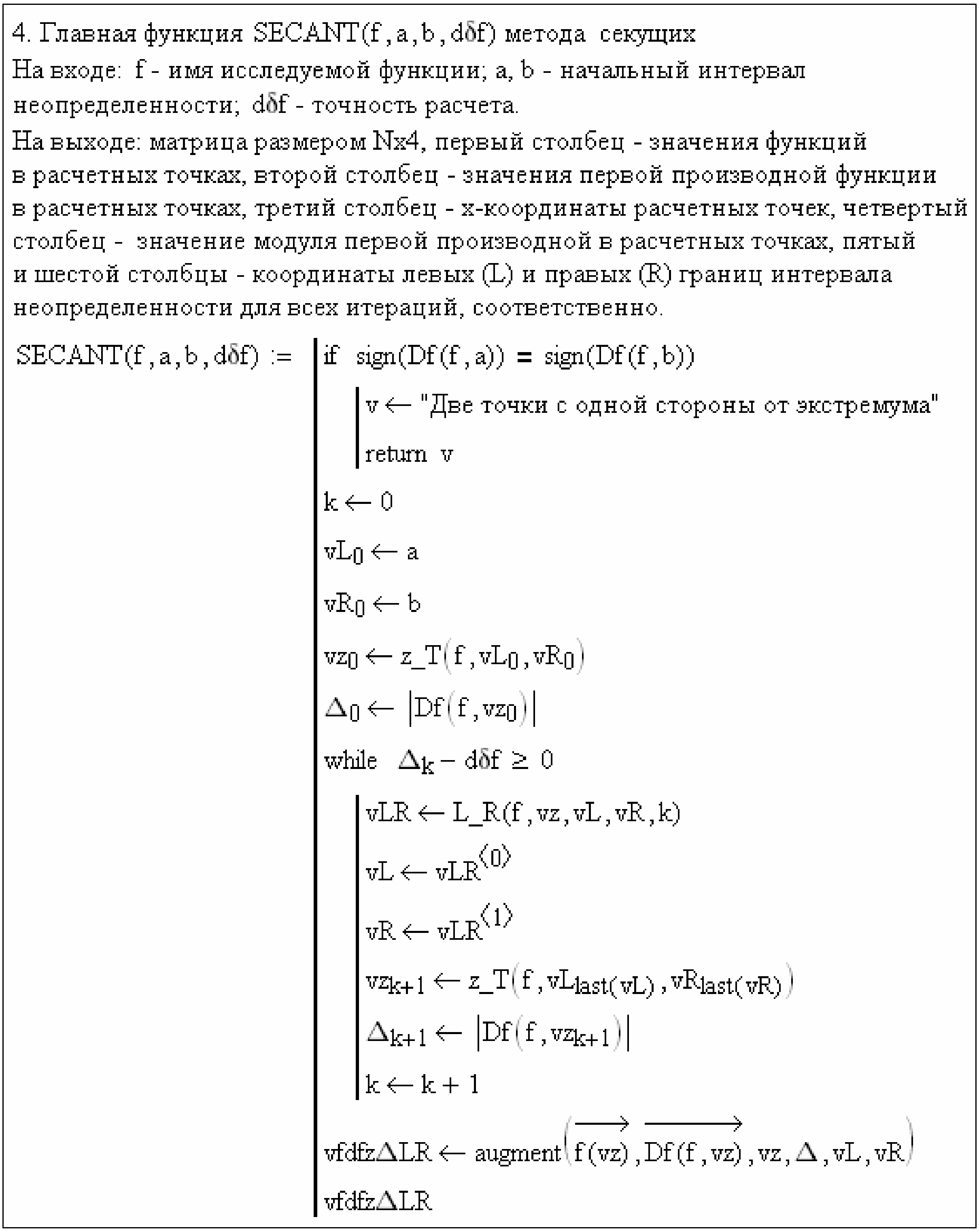
3. Функция для расчета интервала неопределенности на k-й итерации.

На входе: f - имя исследуемой функции; vz - вектор промежуточных точек текущего интервала неопределенности; vL, vR - векторы левой и правой точек текущего интервала неопределенности; k - номер текущей итерации.

На выходе: vL, vR - векторы левой и правой точек интервала неопределенности, включая точки для k+1-й (новой) итерации.

```
L_R(f,vz,vL,vR,k) :=  if Df(f,vz_k) > 0
                          vR_{k+1} ← vz_k
                          vL_{k+1} ← vL_k
                      otherwise
                          vL_{k+1} ← vz_k
                          vR_{k+1} ← vR_k
                      vLR ← augment(vL,vR)
```

Рис. Б 8. Листинг программы минимизации функции методом секущих (продолжение)



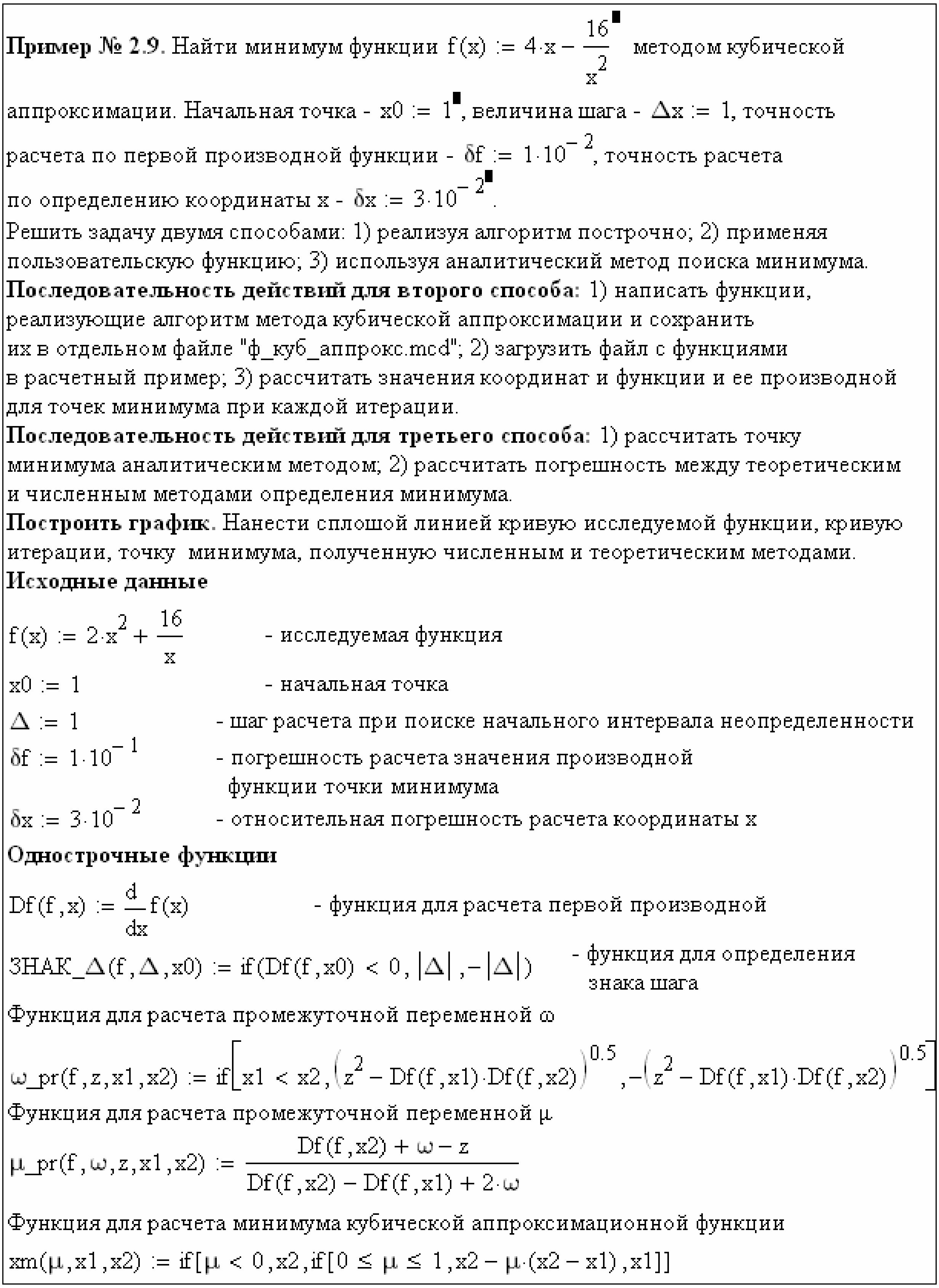
4. Главная функция SECANT(f, a, b, dδf) метода секущих

На входе: f - имя исследуемой функции; a, b - начальный интервал неопределенности; dδf - точность расчета.

На выходе: матрица размером Nx4, первый столбец - значения функций в расчетных точках, второй столбец - значения первой производной функции в расчетных точках, третий столбец - x-координаты расчетных точек, четвертый столбец - значение модуля первой производной в расчетных точках, пятый и шестой столбцы - координаты левых (L) и правых (R) границ интервала неопределенности для всех итераций, соответственно.

```
SECANT(f, a, b, dδf) := | if  sign(Df(f, a)) = sign(Df(f, b))
                        |     | v ← "Две точки с одной стороны от экстремума"
                        |     | return  v
                        | k ← 0
                        | vL_0 ← a
                        | vR_0 ← b
                        | vz_0 ← z_T(f, vL_0, vR_0)
                        | Δ_0 ← |Df(f, vz_0)|
                        | while  Δ_k − dδf ≥ 0
                        |     | vLR ← L_R(f, vz, vL, vR, k)
                        |     | vL ← vLR^⟨0⟩
                        |     | vR ← vLR^⟨1⟩
                        |     | vz_(k+1) ← z_T(f, vL_last(vL), vR_last(vR))
                        |     | Δ_(k+1) ← |Df(f, vz_(k+1))|
                        |     | k ← k + 1
                        | vfdfzΔLR ← augment(→f(vz), →Df(f, vz), vz, Δ, vL, vR)
                        | vfdfzΔLR
```

Рис. Б 8. Листинг программы минимизации функции методом секущих (окончание)



Пример № 2.9. Найти минимум функции $f(x) := 4\cdot x - \frac{16}{x^2}$ методом кубической аппроксимации. Начальная точка - $x0 := 1$, величина шага - $\Delta x := 1$, точность расчета по первой производной функции - $\delta f := 1\cdot 10^{-2}$, точность расчета по определению координаты x - $\delta x := 3\cdot 10^{-2}$.
Решить задачу двумя способами: 1) реализуя алгоритм построчно; 2) применяя пользовательскую функцию; 3) используя аналитический метод поиска минимума.
Последовательность действий для второго способа: 1) написать функции, реализующие алгоритм метода кубической аппроксимации и сохранить их в отдельном файле "ф_куб_аппрокс.mcd"; 2) загрузить файл с функциями в расчетный пример; 3) рассчитать значения координат и функции и ее производной для точек минимума при каждой итерации.
Последовательность действий для третьего способа: 1) рассчитать точку минимума аналитическим методом; 2) рассчитать погрешность между теоретическим и численным методами определения минимума.
Построить график. Нанести сплошой линией кривую исследуемой функции, кривую итерации, точку минимума, полученную численным и теоретическим методами.

Исходные данные

$f(x) := 2\cdot x^2 + \frac{16}{x}$ - исследуемая функция

$x0 := 1$ - начальная точка

$\Delta := 1$ - шаг расчета при поиске начального интервала неопределенности

$\delta f := 1\cdot 10^{-1}$ - погрешность расчета значения производной функции точки минимума

$\delta x := 3\cdot 10^{-2}$ - относительная погрешность расчета координаты x

Однострочные функции

$Df(f,x) := \frac{d}{dx}f(x)$ - функция для расчета первой производной

$ЗНАК\_\Delta(f,\Delta,x0) := \text{if}(Df(f,x0) < 0, |\Delta|, -|\Delta|)$ - функция для определения знака шага

Функция для расчета промежуточной переменной ω

$$\omega\_pr(f,z,x1,x2) := \text{if}\left[x1 < x2, \left(z^2 - Df(f,x1)\cdot Df(f,x2)\right)^{0.5}, -\left(z^2 - Df(f,x1)\cdot Df(f,x2)\right)^{0.5}\right]$$

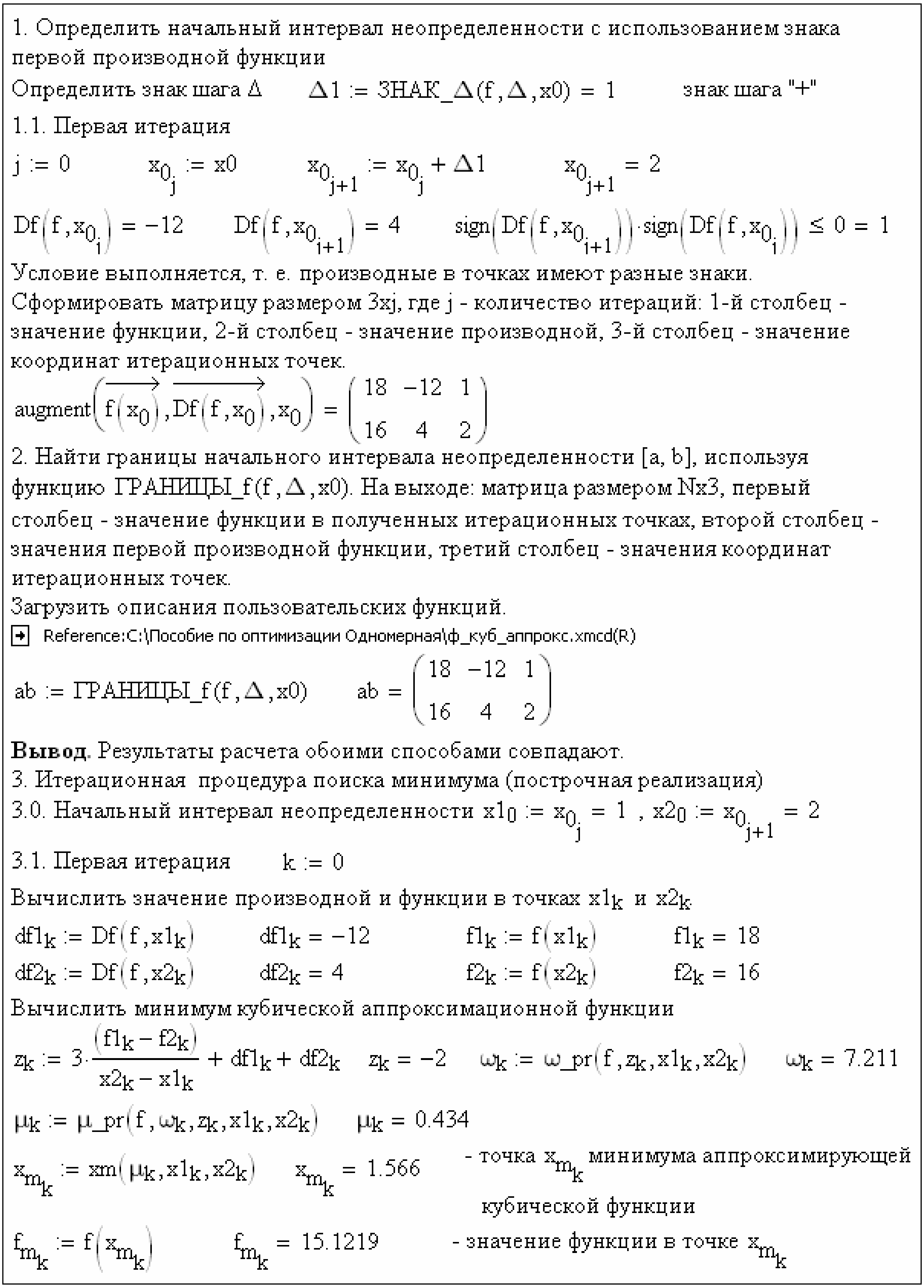
Функция для расчета промежуточной переменной μ

$$\mu\_pr(f,\omega,z,x1,x2) := \frac{Df(f,x2) + \omega - z}{Df(f,x2) - Df(f,x1) + 2\cdot\omega}$$

Функция для расчета минимума кубической аппроксимационной функции

$$xm(\mu,x1,x2) := \text{if}[\mu < 0, x2, \text{if}[0 \le \mu \le 1, x2 - \mu\cdot(x2 - x1), x1]]$$

Рис. Б 9. Листинг программы минимизации функции методом кубической аппроксимации



1. Определить начальный интервал неопределенности с использованием знака первой производной функции

Определить знак шага Δ $\Delta1 := \text{ЗНАК\_}\Delta(f, \Delta, x0) = 1$ знак шага "+"

1.1. Первая итерация

$j := 0$ $x0_j := x0$ $x0_{j+1} := x0_j + \Delta1$ $x0_{j+1} = 2$

$Df\left(f, x0_j\right) = -12$ $Df\left(f, x0_{j+1}\right) = 4$ $\text{sign}\left(Df\left(f, x0_{j+1}\right)\right) \cdot \text{sign}\left(Df\left(f, x0_j\right)\right) \le 0 = 1$

Условие выполняется, т. е. производные в точках имеют разные знаки.

Сформировать матрицу размером 3xj, где j - количество итераций: 1-й столбец - значение функции, 2-й столбец - значение производной, 3-й столбец - значение координат итерационных точек.

$$\text{augment}\left(\overrightarrow{f(x0)}, \overrightarrow{Df(f, x0)}, x0\right) = \begin{pmatrix} 18 & -12 & 1 \\ 16 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Найти границы начального интервала неопределенности [a, b], используя функцию $\text{ГРАНИЦЫ\_f}(f, \Delta, x0)$. На выходе: матрица размером Nx3, первый столбец - значение функции в полученных итерационных точках, второй столбец - значения первой производной функции, третий столбец - значения координат итерационных точек.

Загрузить описания пользовательских функций.

➔ Reference:C:\Пособие по оптимизации Одномерная\ф_куб_аппрокс.xmcd(R)

$ab := \text{ГРАНИЦЫ\_f}(f, \Delta, x0)$ $ab = \begin{pmatrix} 18 & -12 & 1 \\ 16 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Вывод. Результаты расчета обоими способами совпадают.

3. Итерационная процедура поиска минимума (построчная реализация)

3.0. Начальный интервал неопределенности $x1_0 := x0_j = 1$, $x2_0 := x0_{j+1} = 2$

3.1. Первая итерация $k := 0$

Вычислить значение производной и функции в точках $x1_k$ и $x2_k$

$df1_k := Df\left(f, x1_k\right)$ $df1_k = -12$ $f1_k := f\left(x1_k\right)$ $f1_k = 18$

$df2_k := Df\left(f, x2_k\right)$ $df2_k = 4$ $f2_k := f\left(x2_k\right)$ $f2_k = 16$

Вычислить минимум кубической аппроксимационной функции

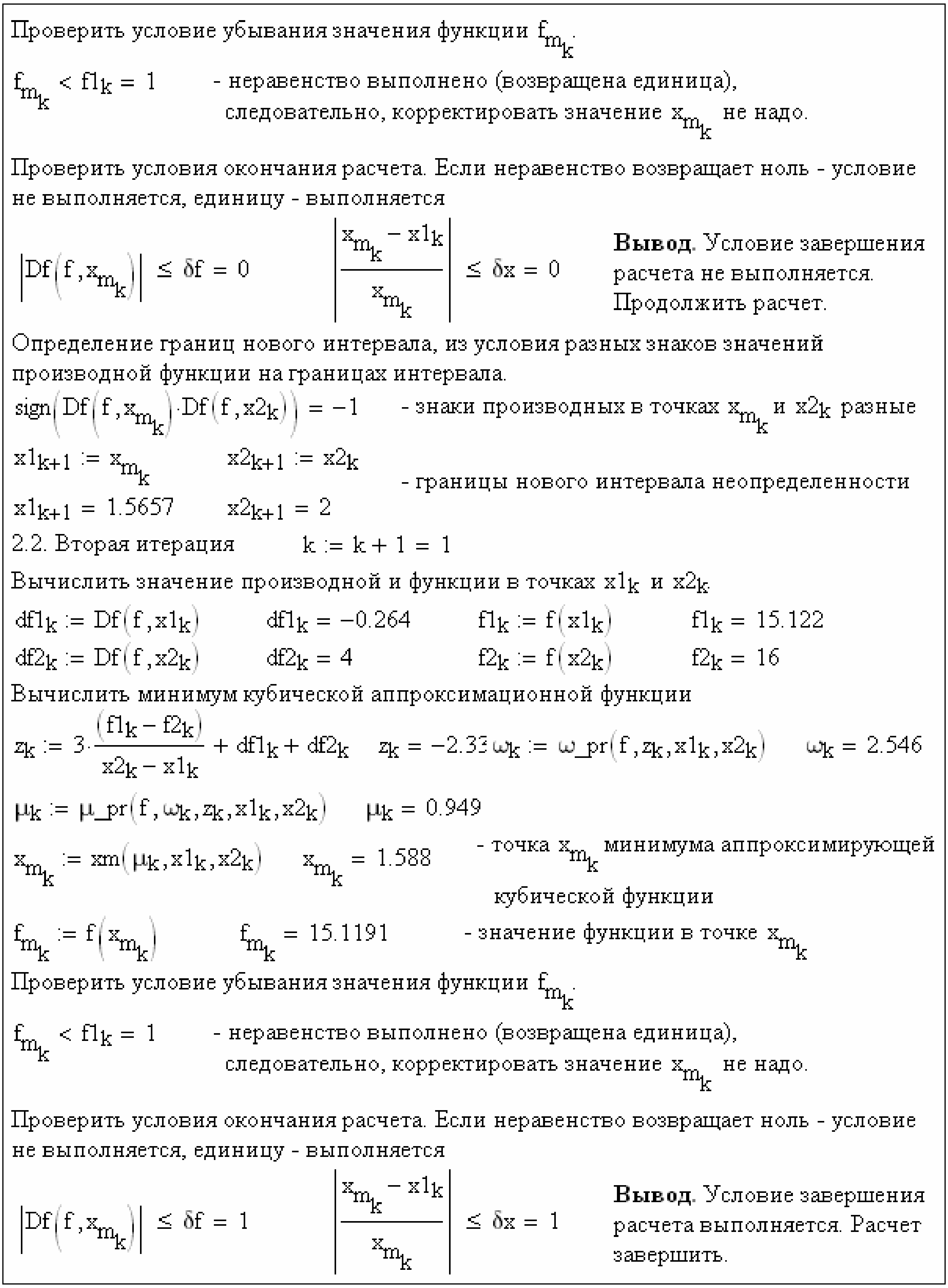
$z_k := 3 \cdot \dfrac{\left(f1_k - f2_k\right)}{x2_k - x1_k} + df1_k + df2_k$ $z_k = -2$ $\omega_k := \omega\_pr\left(f, z_k, x1_k, x2_k\right)$ $\omega_k = 7.211$

$\mu_k := \mu\_pr\left(f, \omega_k, z_k, x1_k, x2_k\right)$ $\mu_k = 0.434$

$x_{m_k} := xm\left(\mu_k, x1_k, x2_k\right)$ $x_{m_k} = 1.566$ - точка x_{m_k} минимума аппроксимирующей кубической функции

$f_{m_k} := f\left(x_{m_k}\right)$ $f_{m_k} = 15.1219$ - значение функции в точке x_{m_k}

Рис. Б 9. Листинг программы минимизации функции методом кубической аппроксимации (продолжение)



Проверить условие убывания значения функции f_{m_k}.

$f_{m_k} < f1_k = 1$ - неравенство выполнено (возвращена единица), следовательно, корректировать значение x_{m_k} не надо.

Проверить условия окончания расчета. Если неравенство возвращает ноль - условие не выполняется, единицу - выполняется

$\left|Df\left(f, x_{m_k}\right)\right| \le \delta f = 0$ $\left|\dfrac{x_{m_k} - x1_k}{x_{m_k}}\right| \le \delta x = 0$ **Вывод**. Условие завершения расчета не выполняется. Продолжить расчет.

Определение границ нового интервала, из условия разных знаков значений производной функции на границах интервала.

$\text{sign}\left(Df\left(f, x_{m_k}\right) \cdot Df\left(f, x2_k\right)\right) = -1$ - знаки производных в точках x_{m_k} и $x2_k$ разные

$x1_{k+1} := x_{m_k}$ $x2_{k+1} := x2_k$

- границы нового интервала неопределенности

$x1_{k+1} = 1.5657$ $x2_{k+1} = 2$

2.2. Вторая итерация $k := k + 1 = 1$

Вычислить значение производной и функции в точках $x1_k$ и $x2_k$.

$df1_k := Df\left(f, x1_k\right)$ $df1_k = -0.264$ $f1_k := f\left(x1_k\right)$ $f1_k = 15.122$

$df2_k := Df\left(f, x2_k\right)$ $df2_k = 4$ $f2_k := f\left(x2_k\right)$ $f2_k = 16$

Вычислить минимум кубической аппроксимационной функции

$z_k := 3 \cdot \dfrac{\left(f1_k - f2_k\right)}{x2_k - x1_k} + df1_k + df2_k$ $z_k = -2.33$ $\omega_k := \omega\_pr\left(f, z_k, x1_k, x2_k\right)$ $\omega_k = 2.546$

$\mu_k := \mu\_pr\left(f, \omega_k, z_k, x1_k, x2_k\right)$ $\mu_k = 0.949$

$x_{m_k} := xm\left(\mu_k, x1_k, x2_k\right)$ $x_{m_k} = 1.588$ - точка x_{m_k} минимума аппроксимирующей кубической функции

$f_{m_k} := f\left(x_{m_k}\right)$ $f_{m_k} = 15.1191$ - значение функции в точке x_{m_k}

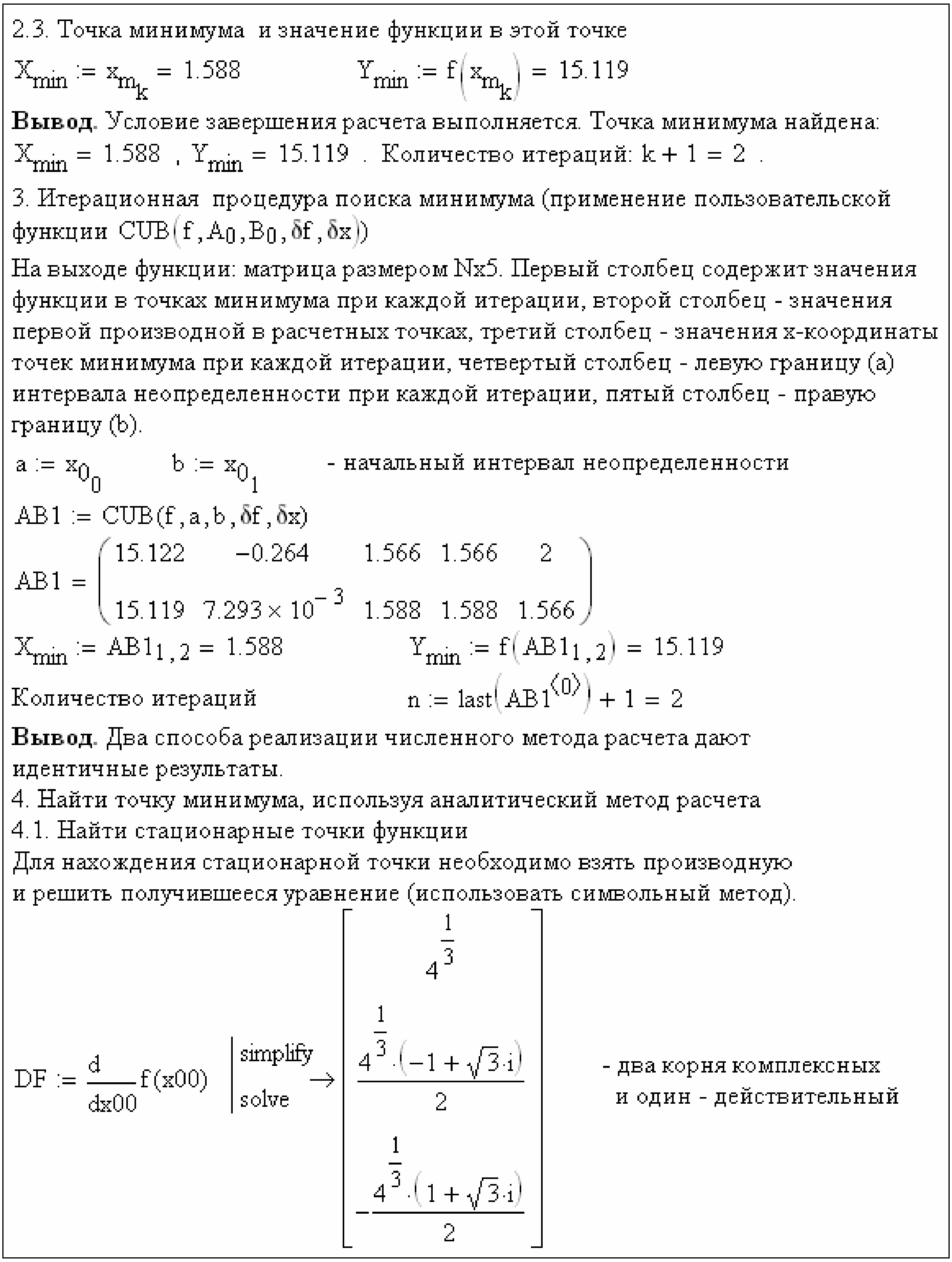
Проверить условие убывания значения функции f_{m_k}.

$f_{m_k} < f1_k = 1$ - неравенство выполнено (возвращена единица), следовательно, корректировать значение x_{m_k} не надо.

Проверить условия окончания расчета. Если неравенство возвращает ноль - условие не выполняется, единицу - выполняется

$\left|Df\left(f, x_{m_k}\right)\right| \le \delta f = 1$ $\left|\dfrac{x_{m_k} - x1_k}{x_{m_k}}\right| \le \delta x = 1$ **Вывод**. Условие завершения расчета выполняется. Расчет завершить.

Рис. Б 9. Листинг программы минимизации функции методом кубической аппроксимации (продолжение)



2.3. Точка минимума и значение функции в этой точке

$X_{min} := x_{m_k} = 1.588$ $Y_{min} := f\left(x_{m_k}\right) = 15.119$

Вывод. Условие завершения расчета выполняется. Точка минимума найдена: $X_{min} = 1.588$, $Y_{min} = 15.119$. Количество итераций: $k + 1 = 2$.

3. Итерационная процедура поиска минимума (применение пользовательской функции $CUB\left(f, A_0, B_0, \delta f, \delta x\right)$)

На выходе функции: матрица размером Nx5. Первый столбец содержит значения функции в точках минимума при каждой итерации, второй столбец - значения первой производной в расчетных точках, третий столбец - значения x-координаты точек минимума при каждой итерации, четвертый столбец - левую границу (a) интервала неопределенности при каждой итерации, пятый столбец - правую границу (b).

$a := x0_0$ $b := x0_1$ - начальный интервал неопределенности

$AB1 := CUB(f, a, b, \delta f, \delta x)$

$$AB1 = \begin{pmatrix} 15.122 & -0.264 & 1.566 & 1.566 & 2 \\ 15.119 & 7.293 \times 10^{-3} & 1.588 & 1.588 & 1.566 \end{pmatrix}$$

$X_{min} := AB1_{1,2} = 1.588$ $Y_{min} := f\left(AB1_{1,2}\right) = 15.119$

Количество итераций $n := last\left(AB1^{\langle 0 \rangle}\right) + 1 = 2$

Вывод. Два способа реализации численного метода расчета дают идентичные результаты.

4. Найти точку минимума, используя аналитический метод расчета

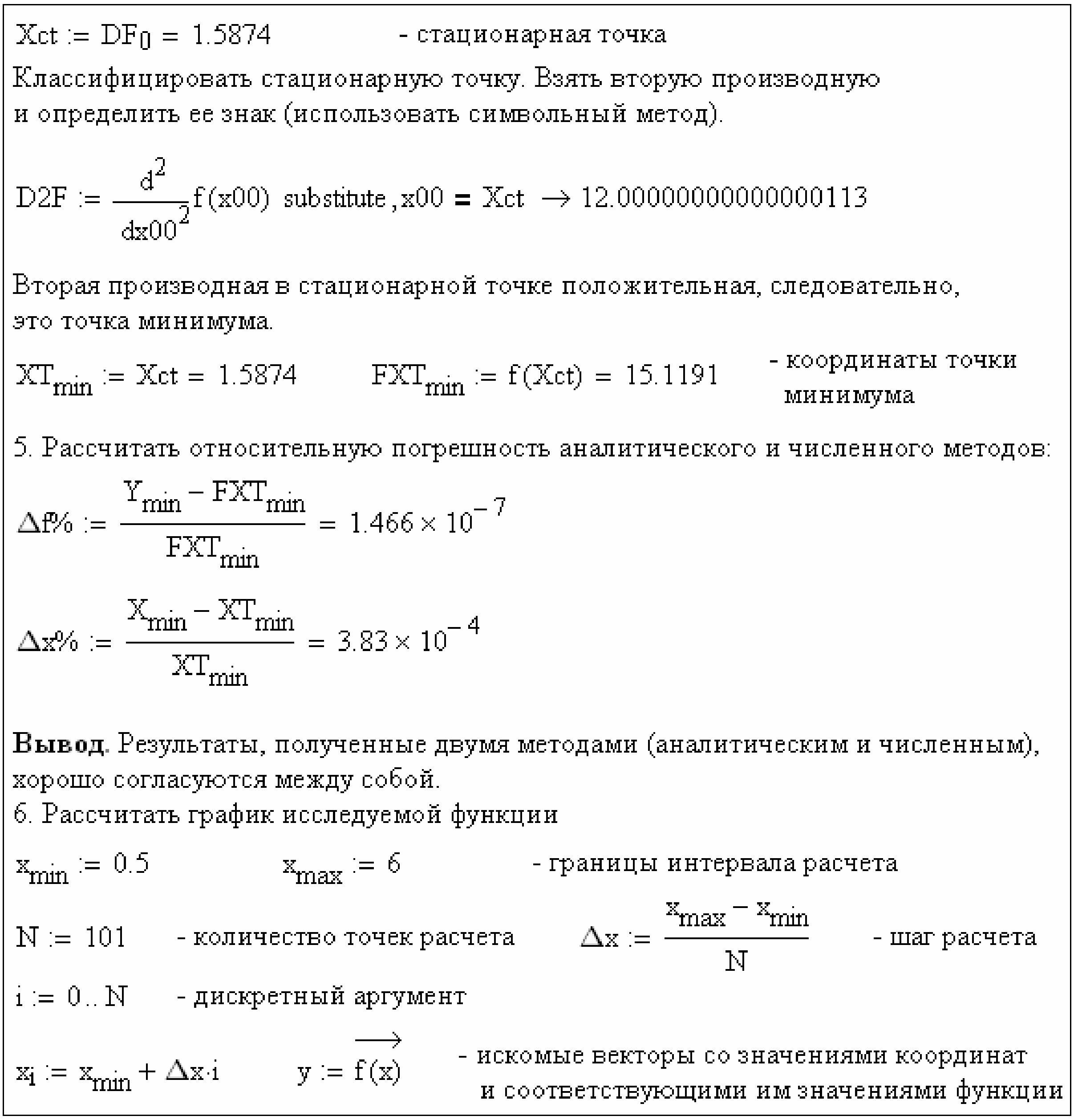
4.1. Найти стационарные точки функции

Для нахождения стационарной точки необходимо взять производную и решить получившееся уравнение (использовать символьный метод).

$$DF := \frac{d}{dx00} f(x00) \left| \begin{matrix} simplify \\ solve \end{matrix} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} 4^{\frac{1}{3}} \\ \dfrac{4^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-1 + \sqrt{3} \cdot i\right)}{2} \\ -\dfrac{4^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 + \sqrt{3} \cdot i\right)}{2} \end{bmatrix}$$

- два корня комплексных и один - действительный

Рис. Б 9. Листинг программы минимизации функции методом кубической аппроксимации (продолжение)



$Xct := DF_0 = 1.5874$ - стационарная точка

Классифицировать стационарную точку. Взять вторую производную
и определить ее знак (использовать символьный метод).

$$D2F := \frac{d^2}{dx00^2} f(x00) \text{ substitute}, x00 = Xct \rightarrow 12.00000000000000113$$

Вторая производная в стационарной точке положительная, следовательно,
это точка минимума.

$XT_{min} := Xct = 1.5874$ $FXT_{min} := f(Xct) = 15.1191$ - координаты точки минимума

5. Рассчитать относительную погрешность аналитического и численного методов:

$$\Delta f\% := \frac{Y_{min} - FXT_{min}}{FXT_{min}} = 1.466 \times 10^{-7}$$

$$\Delta x\% := \frac{X_{min} - XT_{min}}{XT_{min}} = 3.83 \times 10^{-4}$$

Вывод. Результаты, полученные двумя методами (аналитическим и численным),
хорошо согласуются между собой.

6. Рассчитать график исследуемой функции

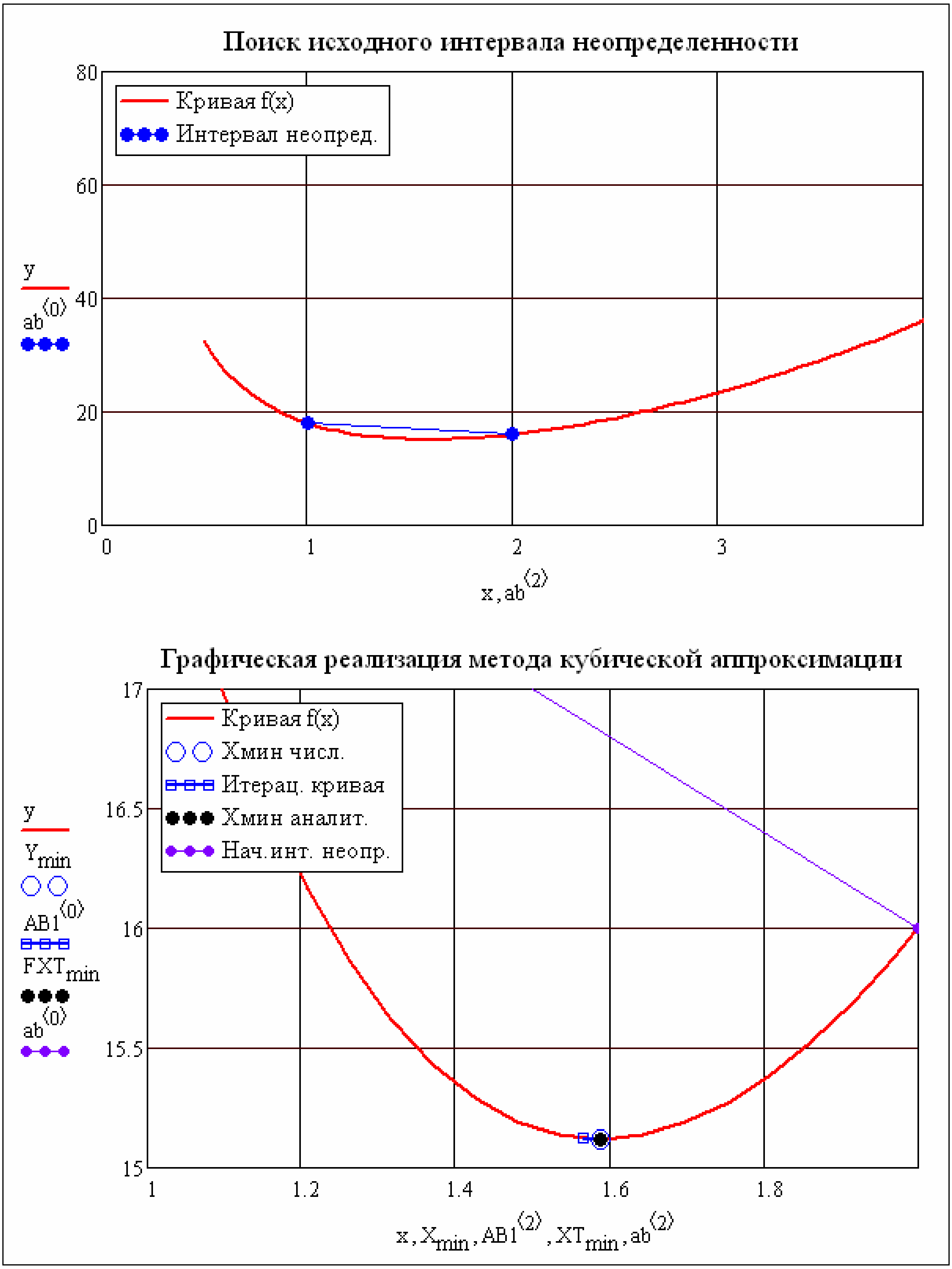
$x_{min} := 0.5$ $x_{max} := 6$ - границы интервала расчета

$N := 101$ - количество точек расчета $\Delta x := \frac{x_{max} - x_{min}}{N}$ - шаг расчета

$i := 0..N$ - дискретный аргумент

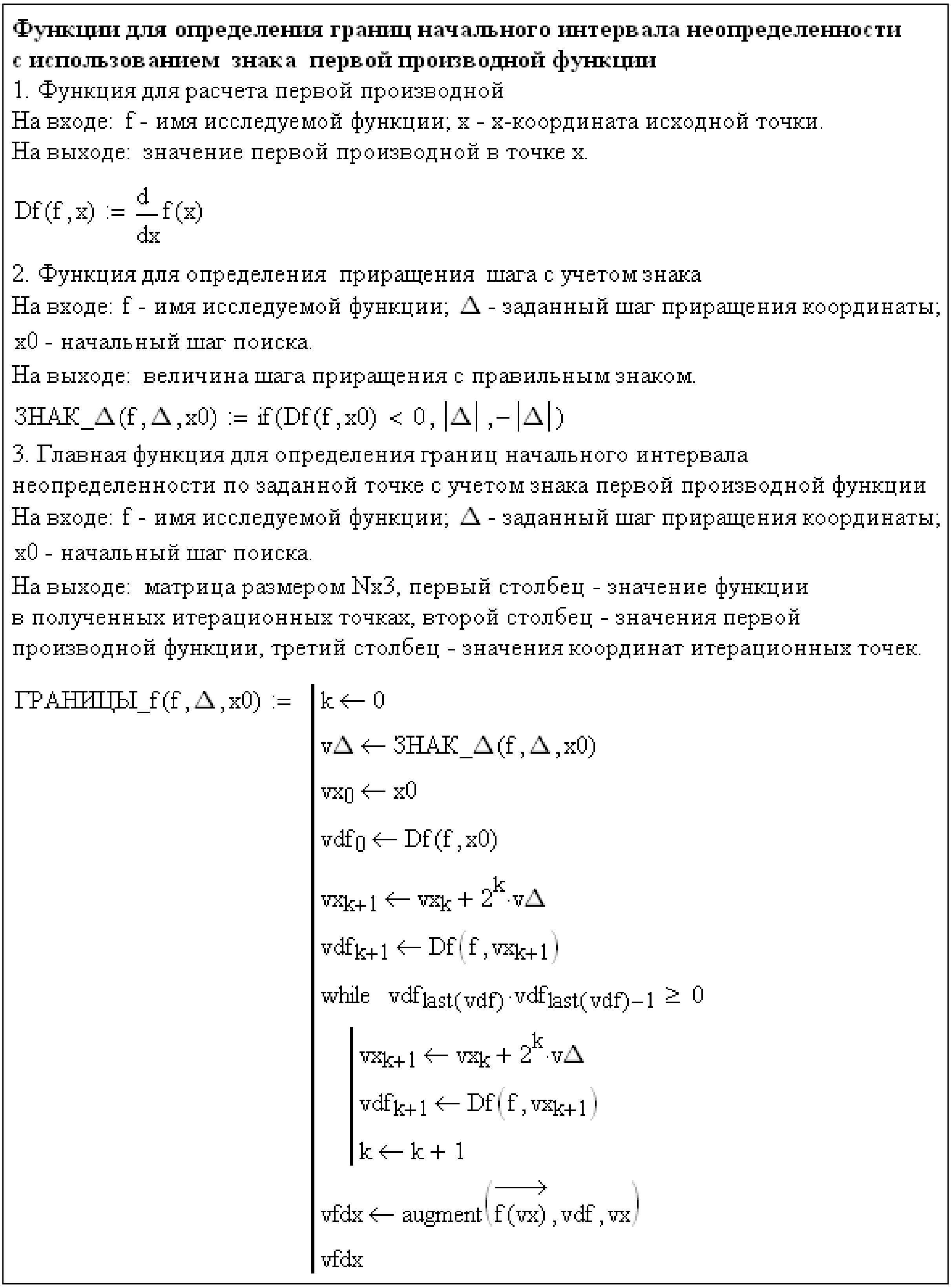
$x_i := x_{min} + \Delta x \cdot i$ $y := \overrightarrow{f(x)}$ - искомые векторы со значениями координат
и соответствующими им значениями функции

Рис. Б 9. Листинг программы минимизации функции
методом кубической аппроксимации (продолжение)


Поиск исходного интервала неопределенности

Графическая реализация метода кубической аппроксимации

Рис. Б 9. Листинг программы минимизации функции методом кубической аппроксимации (продолжение)



Функции для определения границ начального интервала неопределенности с использованием знака первой производной функции

1. Функция для расчета первой производной
На входе: f - имя исследуемой функции; x - x-координата исходной точки.
На выходе: значение первой производной в точке x.

$$Df(f,x) := \frac{d}{dx}f(x)$$

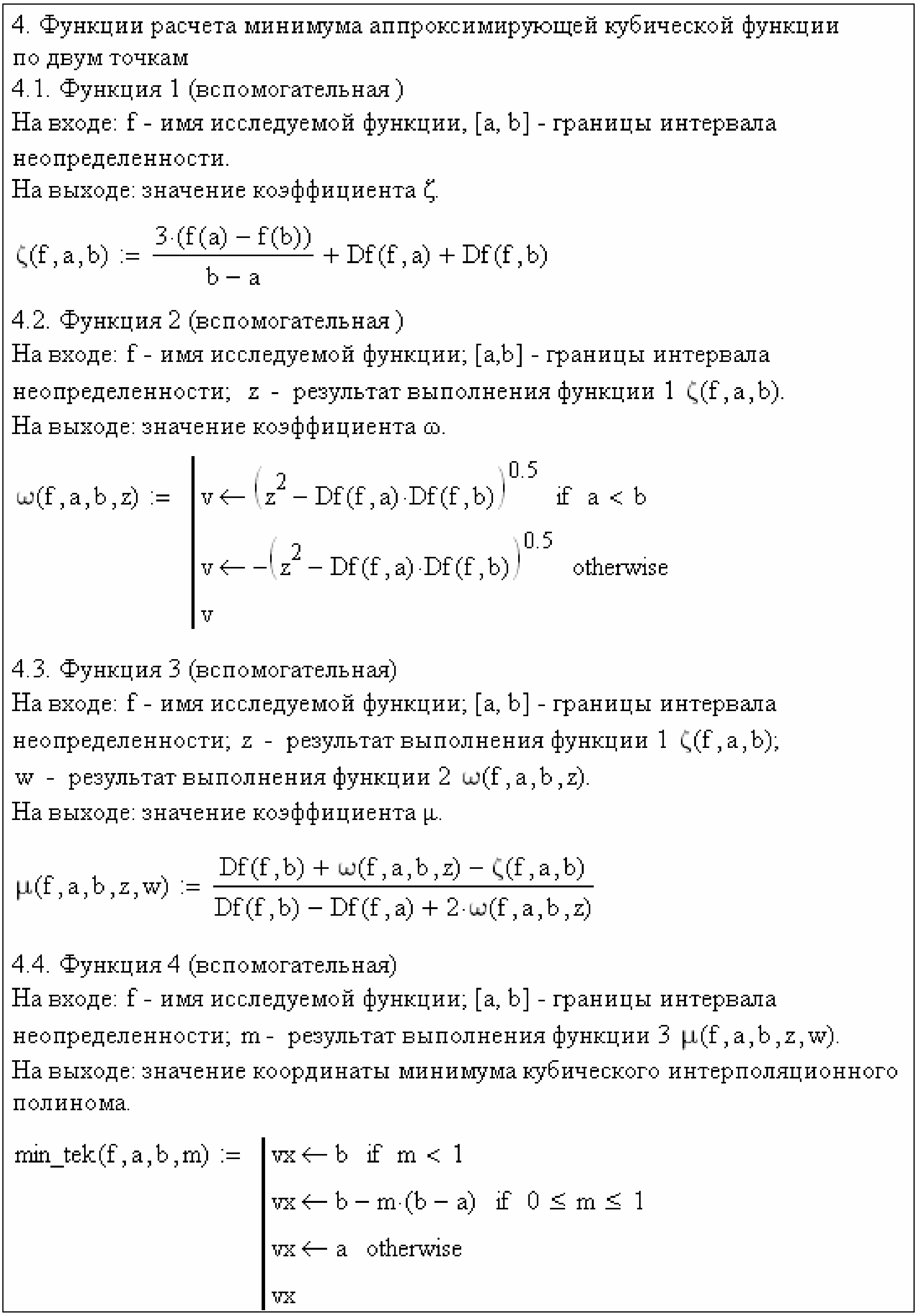
2. Функция для определения приращения шага с учетом знака
На входе: f - имя исследуемой функции; Δ - заданный шаг приращения координаты; x0 - начальный шаг поиска.
На выходе: величина шага приращения с правильным знаком.

$$ЗНАК\_\Delta(f,\Delta,x0) := if(Df(f,x0) < 0, |\Delta|, -|\Delta|)$$

3. Главная функция для определения границ начального интервала неопределенности по заданной точке с учетом знака первой производной функции
На входе: f - имя исследуемой функции; Δ - заданный шаг приращения координаты; x0 - начальный шаг поиска.
На выходе: матрица размером Nx3, первый столбец - значение функции в полученных итерационных точках, второй столбец - значения первой производной функции, третий столбец - значения координат итерационных точек.

```
ГРАНИЦЫ_f(f, Δ, x0) :=
    $k \leftarrow 0$
    $v\Delta \leftarrow ЗНАК\_\Delta(f,\Delta,x0)$
    $vx_0 \leftarrow x0$
    $vdf_0 \leftarrow Df(f,x0)$
    $vx_{k+1} \leftarrow vx_k + 2^k \cdot v\Delta$
    $vdf_{k+1} \leftarrow Df(f, vx_{k+1})$
    while $vdf_{last(vdf)} \cdot vdf_{last(vdf)-1} \geq 0$
        $vx_{k+1} \leftarrow vx_k + 2^k \cdot v\Delta$
        $vdf_{k+1} \leftarrow Df(f, vx_{k+1})$
        $k \leftarrow k + 1$
    $vfdx \leftarrow augment(\overrightarrow{f(vx)}, vdf, vx)$
    $vfdx$
```

Рис. Б 9. Листинг программы минимизации функции методом кубической аппроксимации (продолжение)



4. Функции расчета минимума аппроксимирующей кубической функции по двум точкам

4.1. Функция 1 (вспомогательная)

На входе: f - имя исследуемой функции, [a, b] - границы интервала неопределенности.

На выходе: значение коэффициента ζ.

$$\zeta(f,a,b) := \frac{3\cdot(f(a)-f(b))}{b-a} + Df(f,a) + Df(f,b)$$

4.2. Функция 2 (вспомогательная)

На входе: f - имя исследуемой функции; [a,b] - границы интервала неопределенности; z - результат выполнения функции 1 $\zeta(f,a,b)$.

На выходе: значение коэффициента ω.

$$\omega(f,a,b,z) := \left| \begin{array}{l} v \leftarrow \left(z^2 - Df(f,a)\cdot Df(f,b)\right)^{0.5} \ \ \text{if} \ \ a < b \\ v \leftarrow -\left(z^2 - Df(f,a)\cdot Df(f,b)\right)^{0.5} \ \ \text{otherwise} \\ v \end{array} \right.$$

4.3. Функция 3 (вспомогательная)

На входе: f - имя исследуемой функции; [a, b] - границы интервала неопределенности; z - результат выполнения функции 1 $\zeta(f,a,b)$;
w - результат выполнения функции 2 $\omega(f,a,b,z)$.

На выходе: значение коэффициента μ.

$$\mu(f,a,b,z,w) := \frac{Df(f,b) + \omega(f,a,b,z) - \zeta(f,a,b)}{Df(f,b) - Df(f,a) + 2\cdot\omega(f,a,b,z)}$$

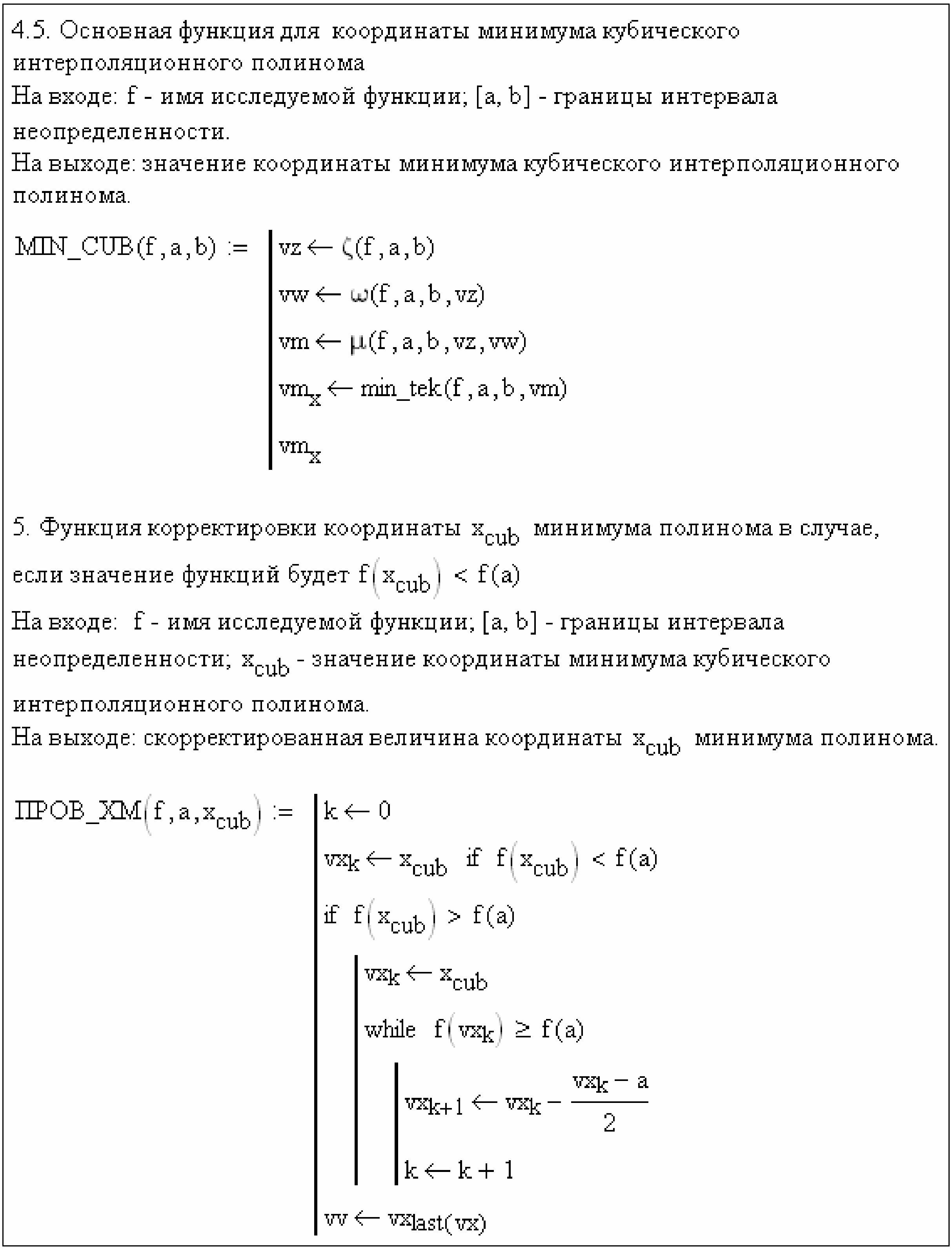
4.4. Функция 4 (вспомогательная)

На входе: f - имя исследуемой функции; [a, b] - границы интервала неопределенности; m - результат выполнения функции 3 $\mu(f,a,b,z,w)$.

На выходе: значение координаты минимума кубического интерполяционного полинома.

$$\text{min\_tek}(f,a,b,m) := \left| \begin{array}{l} vx \leftarrow b \ \ \text{if} \ \ m < 1 \\ vx \leftarrow b - m\cdot(b-a) \ \ \text{if} \ \ 0 \le m \le 1 \\ vx \leftarrow a \ \ \text{otherwise} \\ vx \end{array} \right.$$

Рис. Б 9. Листинг программы минимизации функции методом кубической аппроксимации (продолжение)



4.5. Основная функция для координаты минимума кубического интерполяционного полинома

На входе: f - имя исследуемой функции; [a, b] - границы интервала неопределенности.

На выходе: значение координаты минимума кубического интерполяционного полинома.

```
MIN_CUB(f,a,b) := | vz ← ζ(f,a,b)
                  | vw ← ω(f,a,b,vz)
                  | vm ← μ(f,a,b,vz,vw)
                  | $vm_x$ ← min_tek(f,a,b,vm)
                  | $vm_x$
```

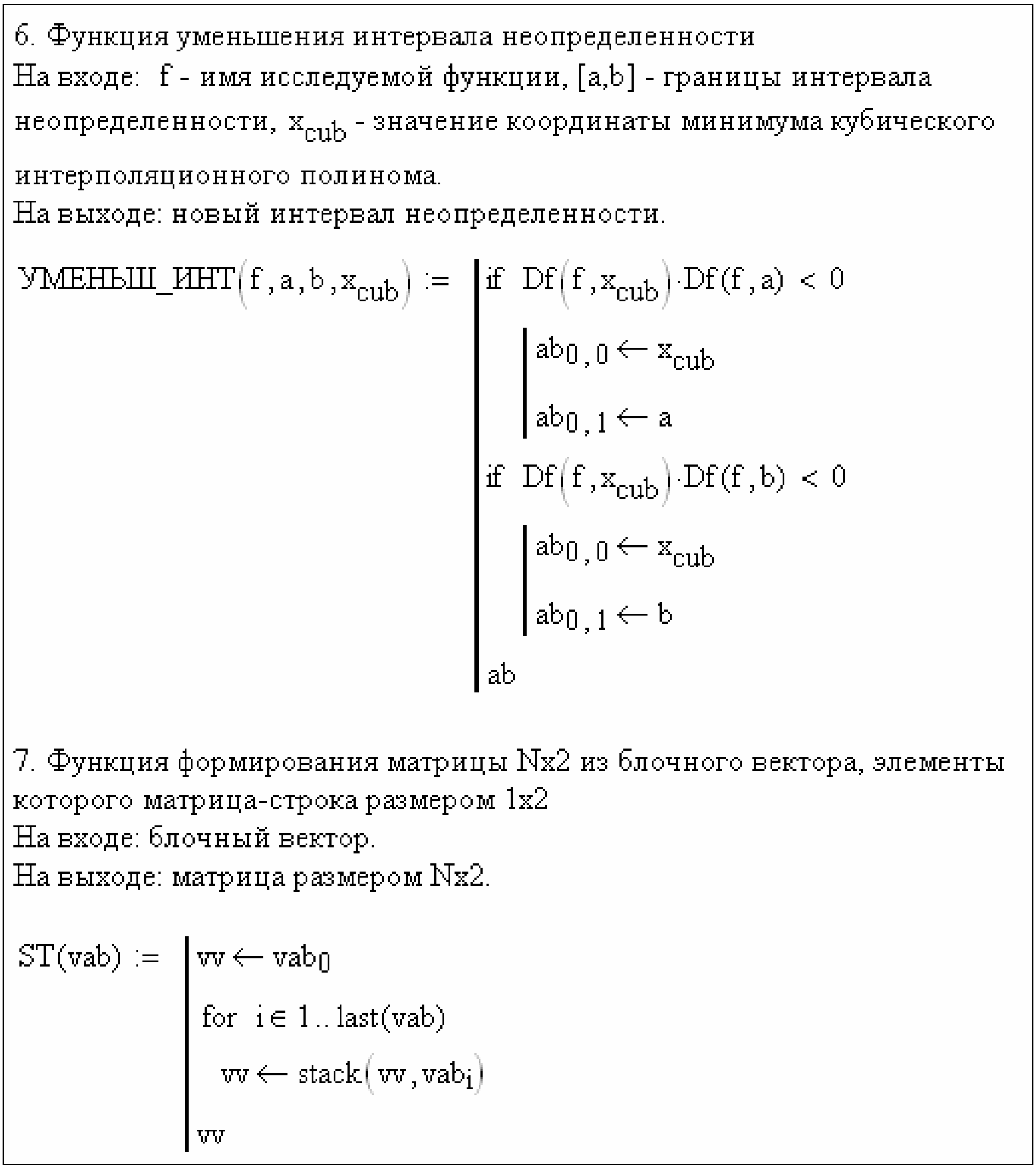
5. Функция корректировки координаты x_{cub} минимума полинома в случае, если значение функций будет $f(x_{cub}) < f(a)$

На входе: f - имя исследуемой функции; [a, b] - границы интервала неопределенности; x_{cub} - значение координаты минимума кубического интерполяционного полинома.

На выходе: скорректированная величина координаты x_{cub} минимума полинома.

```
ПРОВ_XM(f,a,$x_{cub}$) := | k ← 0
                          | $vx_k$ ← $x_{cub}$  if  $f(x_{cub}) < f(a)$
                          | if  $f(x_{cub}) > f(a)$
                          |   | $vx_k$ ← $x_{cub}$
                          |   | while  $f(vx_k) \ge f(a)$
                          |   |   | $vx_{k+1} \leftarrow vx_k - \frac{vx_k - a}{2}$
                          |   |   | k ← k + 1
                          | vv ← $vx_{last(vx)}$
```

Рис. Б 9. Листинг программы минимизации функции методом кубической аппроксимации (продолжение)



6. Функция уменьшения интервала неопределенности

На входе: f - имя исследуемой функции, [a,b] - границы интервала неопределенности, x_{cub} - значение координаты минимума кубического интерполяционного полинома.

На выходе: новый интервал неопределенности.

```
УМЕНЬШ_ИНТ(f, a, b, x_cub) :=  if Df(f, x_cub)·Df(f, a) < 0
                                    ab_{0,0} ← x_cub
                                    ab_{0,1} ← a
                                if Df(f, x_cub)·Df(f, b) < 0
                                    ab_{0,0} ← x_cub
                                    ab_{0,1} ← b
                                ab
```

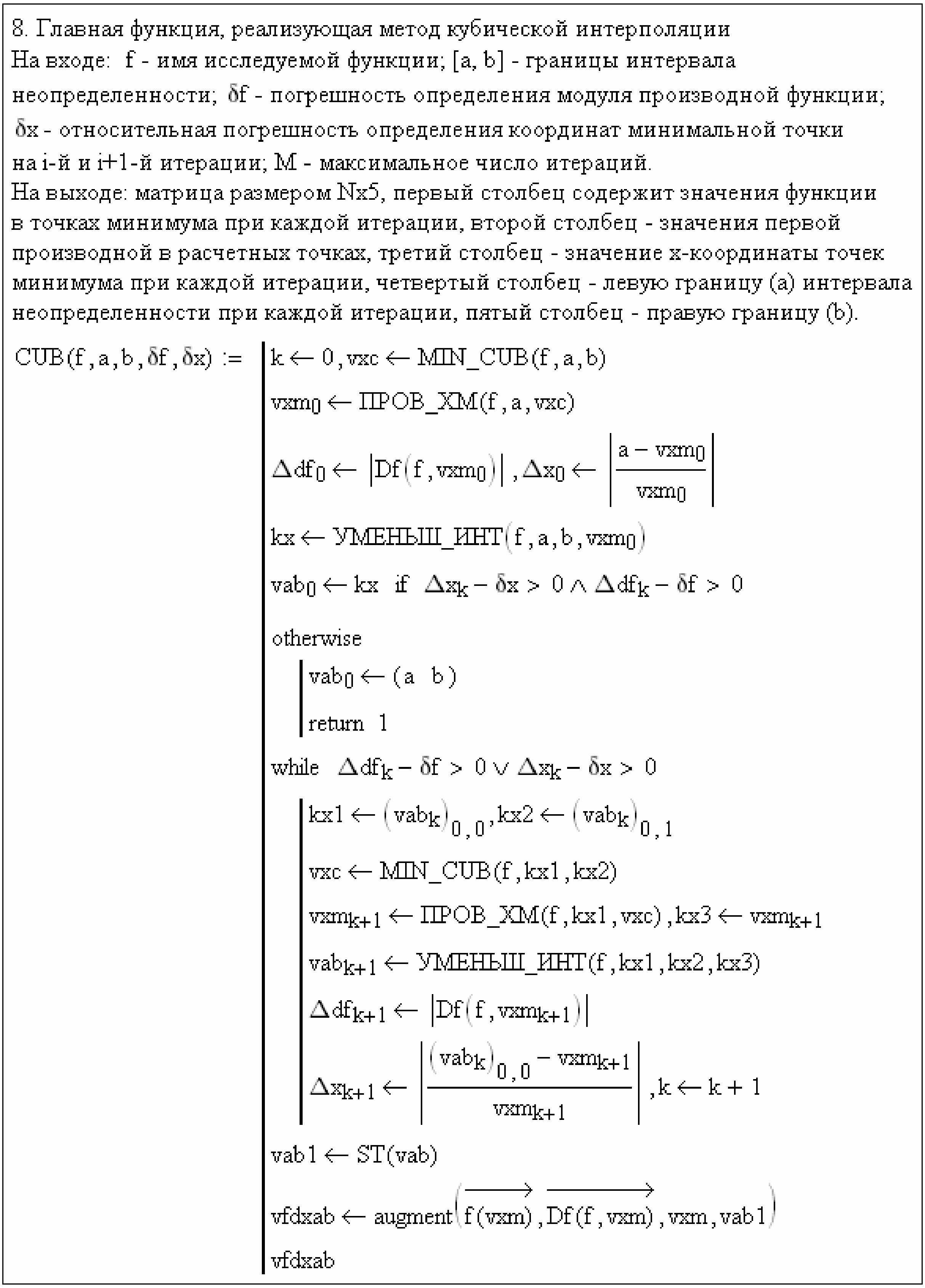
7. Функция формирования матрицы Nx2 из блочного вектора, элементы которого матрица-строка размером 1x2

На входе: блочный вектор.

На выходе: матрица размером Nx2.

```
ST(vab) :=  vv ← vab_0
            for  i ∈ 1 .. last(vab)
                vv ← stack(vv, vab_i)
            vv
```

Рис. Б 9. Листинг программы минимизации функции
методом кубической аппроксимации (продолжение)



8. Главная функция, реализующая метод кубической интерполяции
На входе: f - имя исследуемой функции; [a, b] - границы интервала неопределенности; δf - погрешность определения модуля производной функции; δx - относительная погрешность определения координат минимальной точки на i-й и i+1-й итерации; M - максимальное число итераций.
На выходе: матрица размером Nx5, первый столбец содержит значения функции в точках минимума при каждой итерации, второй столбец - значения первой производной в расчетных точках, третий столбец - значение x-координаты точек минимума при каждой итерации, четвертый столбец - левую границу (a) интервала неопределенности при каждой итерации, пятый столбец - правую границу (b).

```
$CUB(f, a, b, \delta f, \delta x) :=$
    $k \leftarrow 0, vxc \leftarrow MIN\_CUB(f, a, b)$
    $vxm_0 \leftarrow ПРОВ\_XM(f, a, vxc)$
    $\Delta df_0 \leftarrow \left|Df(f, vxm_0)\right|, \Delta x_0 \leftarrow \left|\frac{a - vxm_0}{vxm_0}\right|$
    $kx \leftarrow УМЕНЬШ\_ИНТ(f, a, b, vxm_0)$
    $vab_0 \leftarrow kx \;\; \text{if} \;\; \Delta x_k - \delta x > 0 \wedge \Delta df_k - \delta f > 0$
    otherwise
        $vab_0 \leftarrow (a \;\; b)$
        return 1
    while $\Delta df_k - \delta f > 0 \vee \Delta x_k - \delta x > 0$
        $kx1 \leftarrow (vab_k)_{0,0}, kx2 \leftarrow (vab_k)_{0,1}$
        $vxc \leftarrow MIN\_CUB(f, kx1, kx2)$
        $vxm_{k+1} \leftarrow ПРОВ\_XM(f, kx1, vxc), kx3 \leftarrow vxm_{k+1}$
        $vab_{k+1} \leftarrow УМЕНЬШ\_ИНТ(f, kx1, kx2, kx3)$
        $\Delta df_{k+1} \leftarrow \left|Df(f, vxm_{k+1})\right|$
        $\Delta x_{k+1} \leftarrow \left|\frac{(vab_k)_{0,0} - vxm_{k+1}}{vxm_{k+1}}\right|, k \leftarrow k + 1$
    $vab1 \leftarrow ST(vab)$
    $vfdxab \leftarrow augment\left(\overrightarrow{f(vxm)}, \overrightarrow{Df(f, vxm)}, vxm, vab1\right)$
    $vfdxab$
```

Рис. Б 9. Листинг программы минимизации функции методом кубической аппроксимации (окончание)

СОДЕРЖАНИЕ

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на **2009–2018 годы**. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики».

ИНСТИТУТ ХОЛОДА И БИОТЕХНОЛОГИЙ

Институт холода и биотехнологий является преемником Санкт-Петербургского государственного университета низкотемпературных и пищевых технологий (СПбГУНиПТ), который в ходе реорганизации (приказ Министерства образования и науки Российской Федерации № 2209 от 17 августа 2011 г.) в январе 2012 года был присоединен к Санкт-Петербургскому национальному исследовательскому университету информационных технологий, механики и оптики.

Созданный 31 мая 1931 года институт стал крупнейшим образовательным и научным центром, одним из ведущих вузов страны в области холодильной, криогенной техники, технологий и в экономике пищевых производств.

В институте обучается более 6500 студентов и аспирантов. Коллектив преподавателей и сотрудников составляет около 900 человек, из них 82 доктора наук, профессора; реализуется более 40 образовательных программ.

Действуют 6 факультетов:

- холодильной техники;
- пищевой инженерии и автоматизации;
- пищевых технологий;
- криогенной техники и кондиционирования;

- экономики и экологического менеджмента;
- заочного обучения.

За годы существования вуза сформировались известные во всем мире научные и педагогические школы. В настоящее время фундаментальные и прикладные исследования проводятся по 20 основным научным направлениям: научные основы холодильных машин и термотрансформаторов; повышение эффективности холодильных установок; газодинамика и компрессоростроение; совершенствование процессов, машин и аппаратов криогенной техники; теплофизика; теплофизическое приборостроение; машины, аппараты и системы кондиционирования; хладостойкие стали; проблемы прочности при низких температурах; твердотельные преобразователи энергии; холодильная обработка и хранение пищевых продуктов; тепломассоперенос в пищевой промышленности; технология молока и молочных продуктов; физико-химические, биохимические и микробиологические основы переработки пищевого сырья; пищевая технология продуктов из растительного сырья; физико-химическая механика и тепло-и массообмен; методы управления технологическими процессами; техника пищевых производств и торговли; промышленная экология; от экологической теории к практике инновационного управления предприятием.

В институте создан информационно-технологический комплекс, включающий в себя технопарк, инжиниринговый центр, проектно-конструкторское бюро, центр компетенции «Холодильщик», научно-образовательную лабораторию инновационных технологий. На предприятиях холодильной, пищевых отраслей реализовано около тысячи крупных проектов, разработанных учеными и преподавателями института.

Ежегодно проводятся международные научные конференции, семинары, конференции научно-технического творчества молодежи.

Издаются журнал «Вестник Международной академии холода» и электронные научные журналы «Холодильная техника и кондиционирование», «Процессы и аппараты пищевых производств», «Экономика и экологический менеджмент».

В вузе ведется подготовка кадров высшей квалификации в аспирантуре и докторантуре по 11 специальностям.

Действуют два диссертационных совета, которые принимают к защите докторские и кандидатские диссертации.

Вуз является активным участником мирового рынка образовательных и научных услуг.

www.ihbt.edu.ru

Кудрявцева Ирина Владимировна
Рыков Сергей Алексеевич
Рыков Сергей Владимирович
Скобов Евгений Дмитриевич

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРИМЕРАХ В ПАКЕТЕ MATHCAD 15

Часть I

Учебное пособие

Ответственный редактор
Т.Г. Смирнова

Редактор
Т.В. Белянкина

Компьютерная верстка
С.В. Рыков

Дизайн обложки
Н.А. Потехина

Подписано в печать 30.06.2014. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 9,77. Печ. л. 10,5. Уч.-изд. л. 10,25
Тираж 100 экз. Заказ № С 15

НИУ ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
ИИК ИХиБТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9